

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila  
Institut des Sciences et Technologie  
Département de Sciences et Techniques



N°Ref : .....

Projet de Fin d'Etude préparé en vue de l'obtention du diplôme  
de MASTER

En : Génie Mécanique

Spécialité : ENERGETIQUE

**Thème**

**Effet de La température sur l'irréversibilité lors de  
l'écoulement de deux films non-newtonien sur un  
plan incliné.**

*Présenté par :*

**Belmouloud Amal  
Ouaret Khawla**

**Membres de jury**

**Mr Berrahil Farid  
Mr Fakiri FethAllah  
Mr Saouli Salah**

**MCA  
MCB   
Prof**

**Président   
Examineur  
Promoteur**

**Année universitaire : 2022/2023**

## Dédicaces

Je dédie ce travail aux personnes les plus chères dans ma vie, mes parents, que je ne pourrais jamais remercier assez pour leurs soutiens et leurs encouragements

Mon cher père (رحمه الله)

Ma chère mère

A mon cher fiancé

A mes frères et mes sœurs

A tous mes amis de la promotion

À tous les membres de ma famille, grands et petits

**Ouaret Khawla**

Je dédie ce travail

Qui est-ce que je préfère à moi-même Tu t'es sacrifié pour moi Tu n'épargnes toujours  
aucun effort pour me rendre heureuse (Chère mère).

À mon cher père (رحمه الله)

A mes chers frères et sœurs

À toute ma famille, grande et petite

À mes amis et à tous ceux qui m'ont soutenu et aidé

**AMAL BELMOULOU**

### **Remerciements**

Nous tenons à remercier tout d'abord Allah le tout puissant pour la volonté, la santé, la patience, et la force d'accomplir ce travail.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Pr. Saouli Salah, nos remerciements vont aussi à tous les enseignants ainsi que tout le personnel administratif du département de génie mécanique et d'électromécanique, nous remercions aussi les membres de jury.

### ملخص

الهدف من هذا البحث هو دراسة اللارجعية اثناء تدفق مائعين غير نيوتونيين غير قابلين للمزج على سطح مائل متحرك , باستخدام معادلات كمية الحركة (نافير- ستوكس) ومعادلة الحرارة تم الحصول على سرعات طبقتين رقيقتين ودرجات الحرارة بشكل تحليلي ومن تم حساب درجة الحرارة وانتاج الانثروبي

### الكلمات المفتاحية

غير نيوتوني ، غير قابل للامتزاج ، اللارجعية ، مائل ، متحرك ، درجة الحرارة ، انتاج الانثروبي

### Abstract

The aim of this work is the study of the irreversibility in the flow of two non-Newtonian, immiscible liquid films on a moving and inclined surface. Using the momentum (Navier-Stokes equations) and the heat equations, both the velocities and temperature profiles of the two liquid films were obtained analytically and used to compute the entropy generation number.

**Keywords:** Entropy production number, immiscible, inclined, irreversibility, liquid films, moving, non-Newtonian, temperature.

### Résumé

Le but de ce travail est l'étude de la l'irréversibilité dans l'écoulement de deux films liquides non-newtoniens et non-miscibles sur une surface inclinée en mouvement. En utilisant les équations du mouvement (équations de Navier-Stokes) et de la chaleur. Les profils des vitesses et des températures des deux films liquides furent obtenus analytiquement et utilisés dans le calcul du nombre de génération d'entropie.

**Mots-clés:** Films liquides, Immiscible, inclinée, irréversibilité, mobile, non-newtonien, nombre de production d'entropie, température.

**Nomenclature**

$a$	Diffusivité thermique	$m^2.s^{-1}$
$Br$	Nombre de Brinkmann	
$C_p$	Chaleur spécifique à pression constante	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$Fr$	Nombre de Froude	
$G$	Accélération gravitationnelle	$m.s^{-2}$
$h$	Epaisseur du film	$m$
$K$	Consistance du fluide	$Pa.s^n$
$N_s$	Nombre de production d'entropie	
$Pe$	Nombre Péclet	
$q$	Flux de chaleur pariétale	$W.m^{-2}$
$Re_G$	Nombre de Reynolds généralisé	
$S_G$	Taux de production d'entropie	
$T$	Température	$K$
$\bar{T}$	Température adimensionnelle	
$u$	Vitesse longitudinale	$m.s^{-1}$
$U$	Vitesse de déplacement de la ceinture	$m.s^{-1}$
$\bar{u}$	Vitesse longitudinale adimensionnelle	
$x$	Distance axiale	$m$
$\bar{x}$	Distance axial adimensionnelle	
$y$	Distance transversale	$m$
$\bar{y}$	Distance transversale adimensionnelle	

## Lettres grecques

$\alpha$	Rapport des coefficients de consistance	
$\Delta T$	Différence de température de référence	$K$
$\delta$	Epaisseur du film	$m$
$\varepsilon$	Rapporte entre épaisseur du film sur épaisseur total de film	
$\mu$	Viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\theta$	Angle d'inclinaison	$rad$
$\lambda$	Conductivité thermique du film liquide	$W.m^{-1}.k^{-1}$
$\rho$	Masse volumique du film du film liquide	$kg.m^{-3}$
$\tau$	Contrainte de cisaillement	$Pa$
$\Omega$	Différence de Température adimensionnelle	

## Indices

$i$	Premier et deuxième film ( $i = 1, 2$ )
$0$	Référence

## Sommaire

<b>Dédicaces</b>	I
<b>Remerciements</b>	III
<b>Résumé</b>	IV
<b>Nomenclature</b>	V
<b>Lettres grecques</b>	VI
<b>Chapitre I</b>	
<b>Introduction générale</b>	1
I. 1. Introduction	2
I. 2. Définition	3
I. 3. Différents types de fluides non-newtoniens	4
I.4. Application de fluides non-newtoniens dans les êtres vivants	5
I.4.1 Le sang	5
I.4.2 Le liquide synovial	5
I.4.3 Le mucus des gastéropodes	6
<b>Chapitre II</b>	
<b>Formulation théorique</b>	8
II.1. Modélisation mathématique	9
II. 2. Distribution de températures dans les films liquides	12
II. 3. Séparation des variables	14
II. 4. Intégrations des équations de la chaleur	15
II. 5. Production d'entropie	22
<b>Conclusions et recommandations</b>	28
<b>Références bibliographiques</b>	30

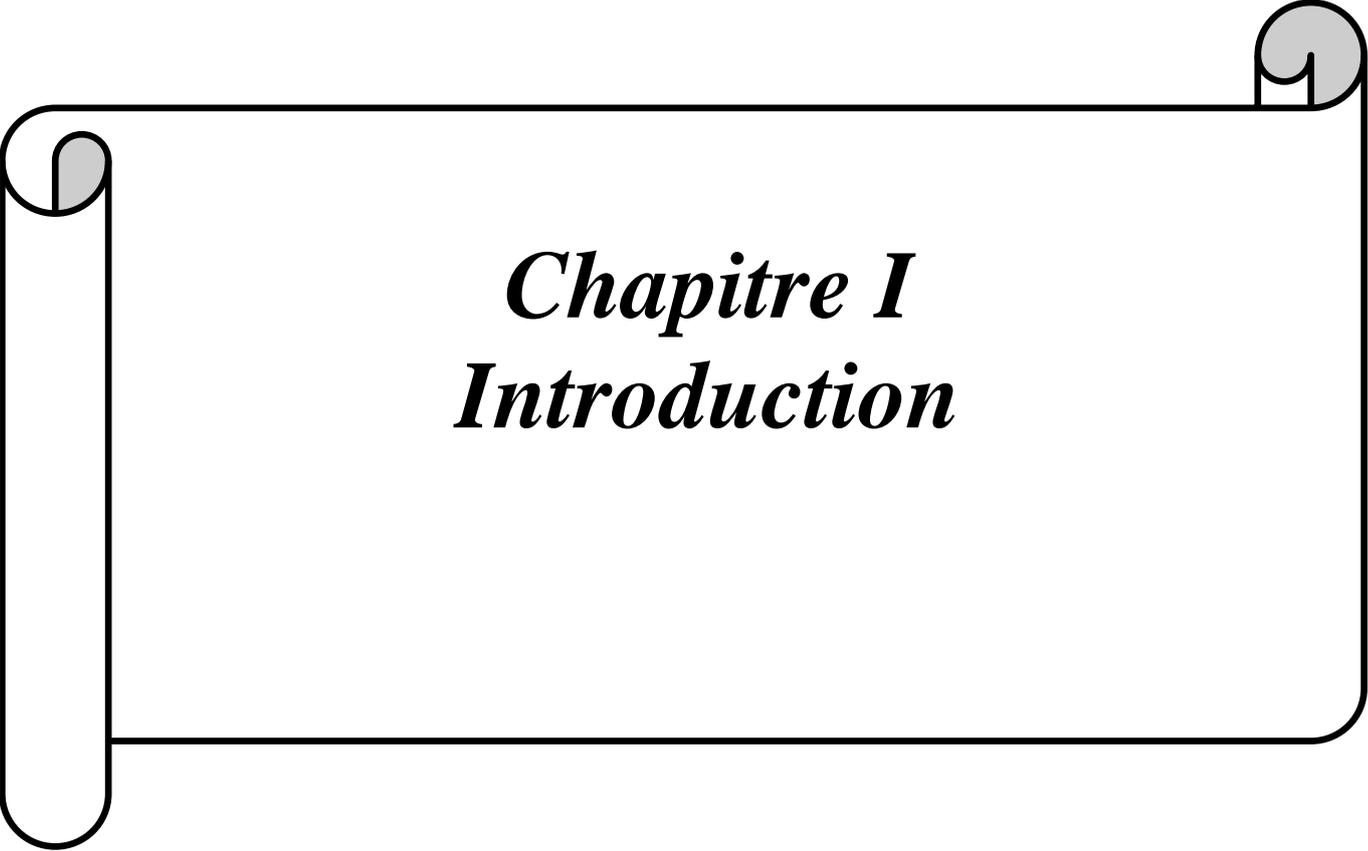
### Liste des figures

Figure I.1. Représentation schématique des Fluides non-Newtoniens.

Figure II.1. Représentation schématique de l'écoulement de deux fluides non-newtoniens non-miscibles sur un plan incliné en mouvement.

Figure II.2. Représentation schématique de l'écoulement de deux fluides non-newtoniens non-miscibles sur un plan incliné en coordonnées adimensionnelles.

Figure II.3. Eléments des surfaces.



*Chapitre I*  
*Introduction*

## I. 1. Introduction générale

Les films ruisselants non-newtoniens sont d'une grande importance dans de nombreux domaines de l'ingénierie, tels que les procédés de fabrication, les industries des polymères, les technologies pétrolières, etc. L'étude de l'hydrodynamique de deux films liquides non-newtoniens non-miscibles incompressibles dans un canal horizontal fut réalisée par Bird et al. [1]. Kapur and Shukla [2, 3] étudièrent deux et plusieurs films incompressibles non-miscibles entre des plaques parallèles. Les cas de l'écoulement de Couette avec des fluides non-newtoniens sur une plaque avec succion furent étudiés par Sacheti [4]. Miladinova et al. Considèrent le cas d'un film d'Ostwald tombant le long d'une plaque inclinée [5].

La production d'entropie est une grandeur clé dans tout processus thermodynamique à temps fini. Elle est intimement liée aux lois fondamentales de la thermodynamique et constituant un outil pour étendre les considérations thermodynamiques jusqu'aux processus de non-équilibre. Elle est également utilisée dans la caractérisation quantitative de l'irréversibilité thermodynamique, découlant des processus en physique, en chimie et en biologie. Malgré son caractère fondamental, une théorie unificatrice de la production d'entropie valable pour les processus généraux, à la fois classiques et quantiques, n'a pas encore été formulée. Les développements tournant autour des cadres de la thermodynamique stochastique, des systèmes quantiques ouverts et de la théorie de l'information quantique ont conduit à des progrès substantiels dans une telle entreprise. Cela a abouti au déverrouillage d'une nouvelle génération d'expériences capables d'aborder les processus thermodynamiques stochastiques et l'impact de la production d'entropie sur eux.

Le but de ce travail est une étude théorique de l'irréversibilité thermodynamique qui se produit lors de l'écoulement de deux films non-newtoniens ruisselants sur un plan incliné en mouvement. Cette étude comporte deux volets, un volet hydrodynamique et un volet thermique et qui seront utilisés dans le calcul de la production d'entropie.

## I. 2. Définition

Les fluides newtoniens sont des fluides qui suivent la loi de viscosité de Newton, c'est-à-dire que la contrainte de cisaillement est linéairement proportionnelle au taux de cisaillement.

$$\tau = \mu \left( \frac{du(y)}{dy} \right) \quad (\text{I.1})$$

Les fluides non-newtoniens sont des fluides qui ne suivent pas la loi de viscosité de Newton, c'est-à-dire que la contrainte de cisaillement n'est pas linéairement proportionnelle au taux de cisaillement.

Dans les fluides non-newtoniens la viscosité peut changer lorsqu'elle est soumise à une force pour devenir plus liquide ou plus solide.

Le ketchup, par exemple, devient plus coulant lorsqu'il est secoué et est donc un fluide non-newtonien. De nombreuses solutions salines et polymères fondus sont des fluides non-newtoniens, tout comme de nombreuses substances couramment rencontrées telles que la crème anglaise, le miel, le dentifrice, les suspensions d'amidon, l'amidon de maïs, la peinture, le sang, le beurre fondu et le shampooing [6].

## I. 3. Différents types de fluides non-newtoniens

Il existe plusieurs types de fluides non-newtoniens, dont les plus importants sont :

### ➤ Fluides rhéofluidifiants

Les fluides rhéofluidifiants sont des fluides qui deviennent moins visqueux lorsqu'on leur applique une contrainte de cisaillement.

### ➤ Fluides rhéoépaississants

Les fluides rhéoépaississants sont des fluides qui, à l'inverse des fluides rhéofluidifiants, deviennent plus visqueux lorsqu'on les soumet à une contrainte de cisaillement.

### ➤ Fluides thixotropes

Les fluides thixotropes sont des fluides qui deviennent moins visqueux lorsqu'on les soumet à une contrainte de cisaillement pendant un certain temps. Ils reviennent généralement à leur état initial (plus visqueux) après un temps variable lorsque la contrainte de cisaillement n'est plus présente.

### ➤ Fluides antithixotropes (ou rhéopèxes)

Les fluides antithixotropes (aussi appelés fluides rhéopèxes) sont des fluides qui deviennent de plus en plus solides au fur et à mesure qu'on leur applique une contrainte de cisaillement. Ils reviennent généralement à leur état initial (moins visqueux) après un temps variable lorsque la contrainte de cisaillement n'est plus présente.

➤ **Fluides de Bingham**

Le fluide de Bingham (ou fluide à seuil) est un fluide qui réagit comme un solide en-dessous d'une certaine contrainte appelée contrainte-seuil (il ne se déforme pas ou réagit élastiquement en se replaçant comme à l'état initial après la contrainte). Cependant au-delà de cette contrainte-seuil, il se comportera comme un fluide et s'écoule. Il peut alors se comporter de manière linéaire, ou comme un fluide rhéofluidifiant, rhéoépaississant, thixotrope ou antithixotrope[7].

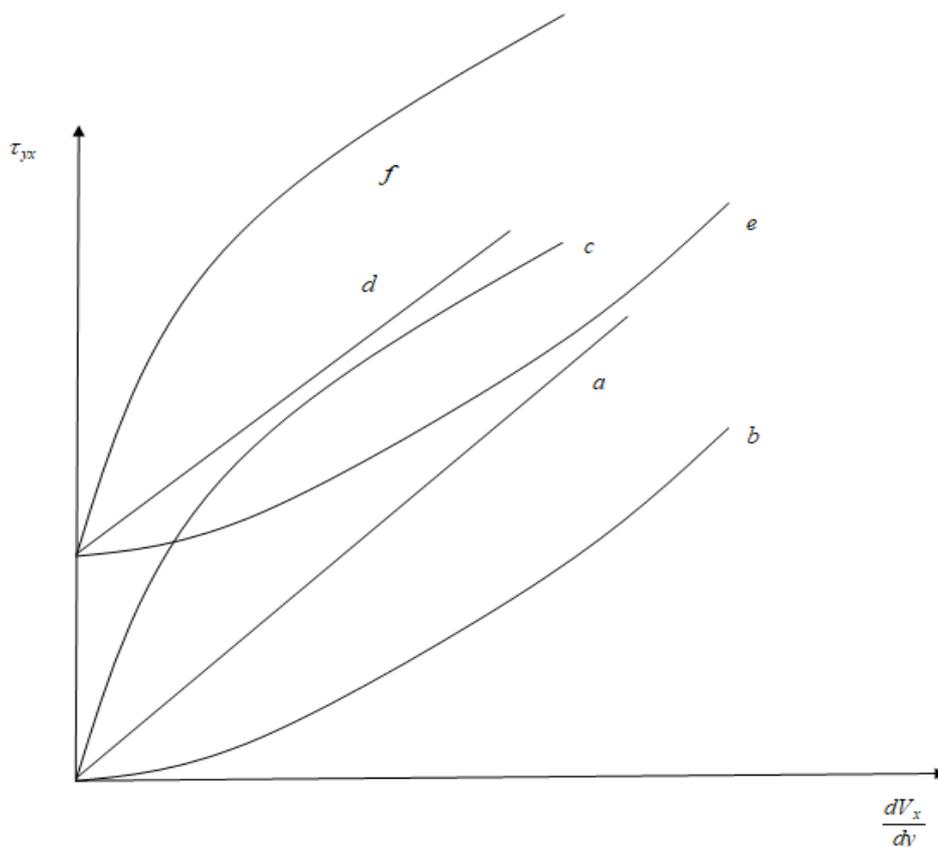


Figure I. 1. Fluides non-Newtoniens : (a) fluide newtonien, (b) fluide d'Ostwald de Waele dilatants, (c) fluide d'Ostwald de Waele pseudoplastique, (d) fluide de Bingham, (e) fluide de Herschel-Bulkley dilatant et (f) fluide de Herschel-Bulkley pseudoplastique.

## **I.4. Application de fluides non-newtoniens dans les êtres vivants**

Les fluides non-newtoniens sont présents sous différents aspects à travers différentes échelles. Ces fluides ont ainsi des rôles décisifs à des échelles variées. On présente dans ce qui suit quelque exemple de fluides non-newtoniens dans les êtres vivants.

### **I.4.1 Le sang**

Montre des hématies (globules rouges), qui, à faible taux de cisaillement sont orientées au hasard, et qui, à fort taux de cisaillement se "peignent" en s'orientant dans le sens d'écoulement, facilitant ce dernier et diminuant la viscosité du sang. Le sang est un fluide non newtonien rhéofluidifiant. Dans les petits vaisseaux, la vitesse et le taux de cisaillement sont plus élevés. C'est donc dans les petits vaisseaux que les effets non-newtoniens sont les plus marqués. Les principaux facteurs qui déterminent la viscosité du sang sont le nombre d'hématies qui le composent, la vitesse d'écoulement du sang et du cisaillement ainsi que la viscosité du plasma. La viscosité du plasma, dépend elle-même de la nature des protéines qu'il renferme.

Quelle est l'importance du caractère rhéofluidifiant du sang? Cela permet un meilleur écoulement du sang, l'autorégulation de la pression sanguine. Le cœur n'a donc pas besoin de fournir un effort trop important pour augmenter la pression du sang.

### **I.4.2 Le liquide synovial**

Le liquide synovial est jaune citrin, clair, limpide et fortement visqueux. Il est présent dans les 187 articulations synoviales de notre corps, de l'ordre de quelques gouttes seulement, même sur les grosses articulations.

Le liquide synovial est composé d'eau, de sels minéraux, de protéines, d'acide hyaluronique et de petites molécules comme le glucose, de l'acide urique et de la bilirubine. Son rôle est de réduire la friction entre deux os en lubrifiant l'articulation, mais aussi d'absorber les chocs, de fournir de l'oxygène et des nutriments au cartilage. Et, enfin, d'éliminer les produits métaboliques provenant du cartilage comme le gaz carbonique.

#### I.4.2.1 En quoi le liquide synovial est-il non-newtonien?

Le liquide synovial devient plus visqueux, voire gélatineux lorsque l'articulation synoviale est immobilisée suffisamment longtemps. Mais sa viscosité diminue lorsqu'on augmente le mouvement. C'est un fluide rhéofluidifiant. Comment cela se fait-il? Le liquide synovial est en partie composé d'acide hyaluronique. C'est ce dernier qui lui confère son pouvoir lubrifiant en lui apportant l'élasticité et la viscosité. L'acide hyaluronique est constitué de très grosses molécules (ou macromolécules) glucidiques non fixées à une protéine et réparties parmi les tissus conjonctifs. C'est d'ailleurs l'absence d'acide hyaluronique qui cause indirectement l'arthrose.

#### **I.4.3 Le mucus des gastéropodes**

Les fluides non-newtoniens entrent en jeu dans le déplacement des escargots et des limaces. Ces animaux peuvent se déplacer à l'envers (par exemple au plafond). Étant donné que leur corps en lui-même ne leur permet pas d'adhérer au plafond ils utilisent leur mucus (bave) qui leur sert de colle (avec une viscosité importante et une certaine élasticité). Néanmoins si leur bave restait toujours collante, ils ne pourraient pas se déplacer, leur corps serait simplement collé au plafond. C'est pourquoi qu'ils ont une bave thixotrope mais dont le délai pour retrouver ses propriétés d'origine est tellement court (moins d'un dixième de seconde) qu'elle peut être considérée comme étant rhéofluidifiante.

#### I.4.3.1 Comment avancent-ils ?

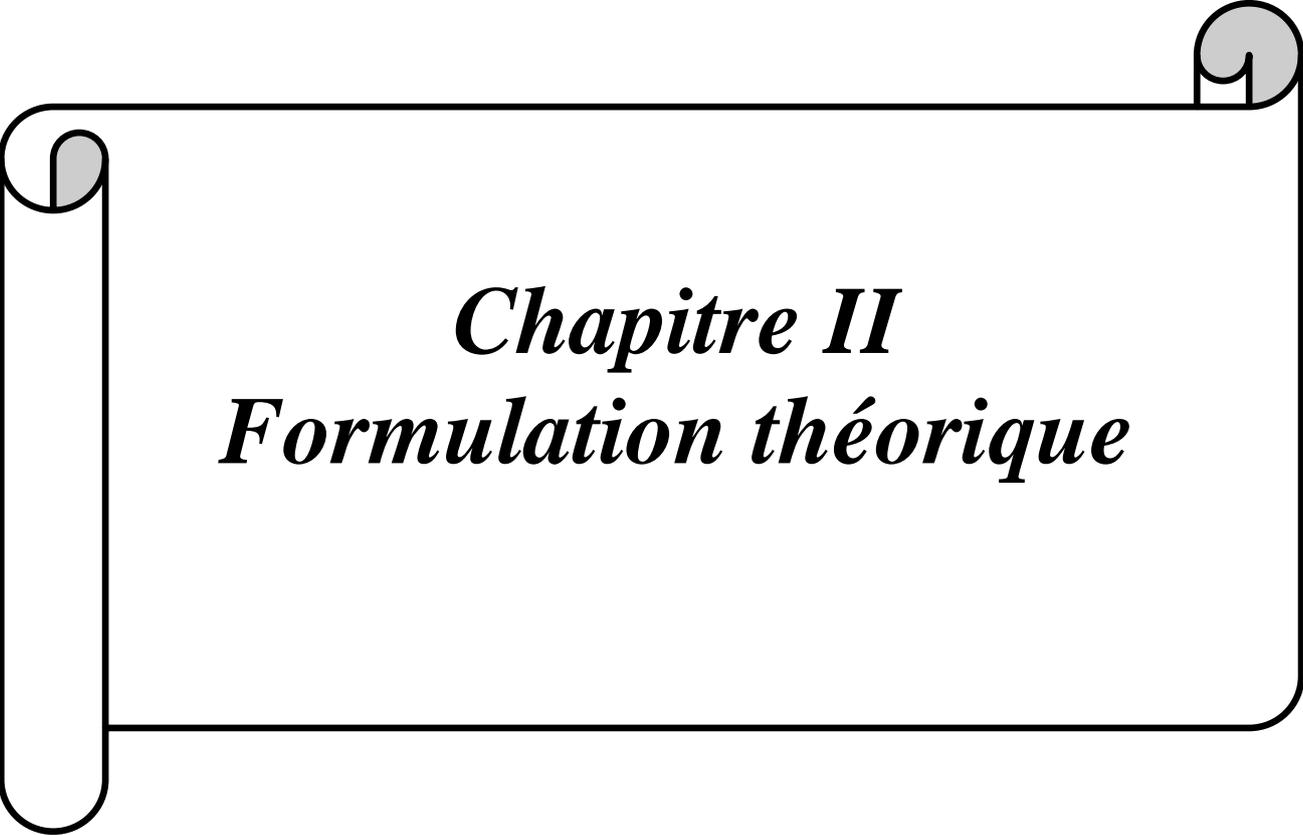
Si on observe un escargot vu de dessous, on observe qu'il se déplace en contractant ses muscles de manière à créer une onde allant de l'arrière de son pied jusqu'à sa tête, comme on le voit sur cette image.

Cela lui permet de se déplacer en différé (en accordéon en quelque sorte), en s'appuyant sur les parties de son corps encore fixées à la paroi. En effet étant donné que sa bave est presque rhéofluidifiante, à l'endroit où l'escargot appuie sur la bave (c'est-à-dire à l'endroit de chacune des ondes), celle-ci devient beaucoup moins visqueuse lui permettant de rapprocher cette partie de l'avant tout en s'appuyant sur les régions collées de part et d'autre de la partie qu'il fait avancer. Le fait de s'appuyer ainsi sur les parties encore collées est en effet beaucoup plus efficace que si l'escargot avançait sans prendre

appui sur quoi que ce soit, comme si l'on essayait avec des skis lisses (pas recouverts de peau de phoque ou d'un autre matériau empêchant de reculer) d'avancer sur un sol glissant sans prendre appui avec ses bâtons : lorsqu'un pied avance, le second recule automatiquement.

#### I.4.3.2 Qu'est-ce qui donne à la bave un comportement thixotrope à l'échelle moléculaire ?

La bave d'escargot est constituée principalement d'eau salée (entre 96 et 97%) ainsi que de 3 à 4% de très longues protéines attachées les unes aux autres (grâce à des atomes de soufre). Cela forme un réseau élastique de très longues molécules agissant comme une colle pour retenir l'escargot au plafond. Cependant lorsqu'une contrainte de cisaillement (supérieure aux capacités d'élasticité du réseau) est appliquée par l'escargot sur cette substance, les liaisons entre les protéines se brisent, et la bave devient liquide. Lorsque la contrainte de cisaillement s'arrête, les liaisons de soufre se reforment extrêmement rapidement (en moins d'un dixième de seconde), la bave reprend ses propriétés collantes et permet à l'escargot de se maintenir au plafond tout en faisant avancer une autre partie de son corps.



***Chapitre II***  
***Formulation théorique***

## II. 1. Modélisation mathématique

La configuration physique est illustrée schématiquement sur la figure II.1 Deux films liquides minces, non-miscibles et non-newtoniens ruissellent sur une plaque large inclinée en mouvement. Les deux films liquides sont considérés comme des fluides d'Ostwald obéissants à la loi rhéologique

$$\tau = k \left( \frac{du(y)}{dy} \right)^n \quad (\text{II. 1})$$

Où  $K$  est la consistance et  $n$  est un nombre réel appelé indice de puissance ou indice de comportement. Quand l'indice de puissance est inférieur à l'unité, le fluide est dit pseudo-plastique et s'il est supérieur à l'unité, le fluide est dilatant.

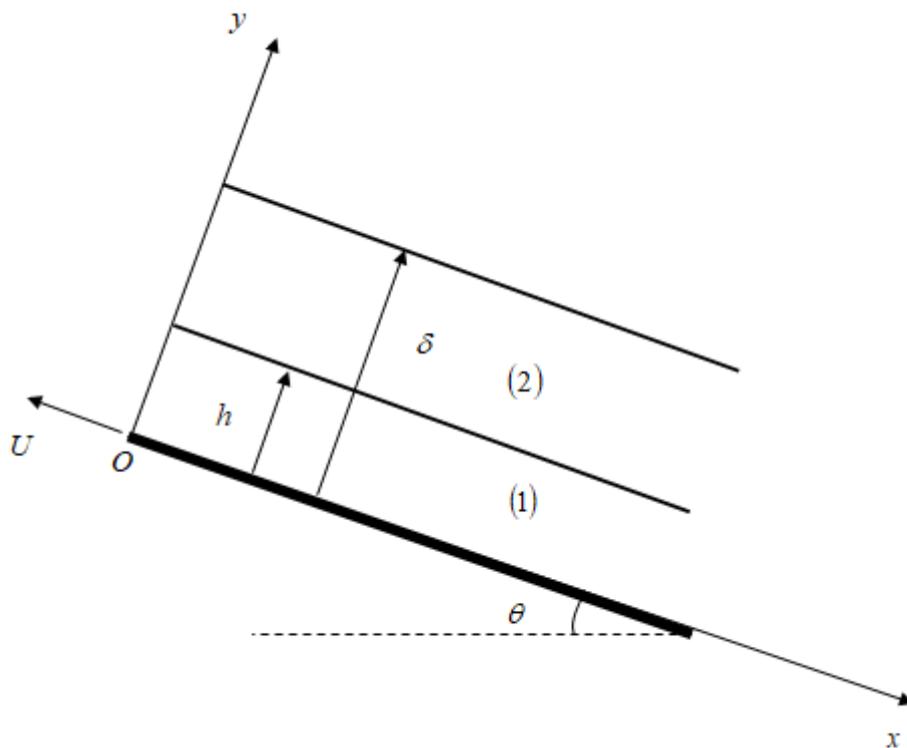


Figure II.1. Représentation schématique de l'écoulement de deux fluides non-newtoniens Non-miscibles sur un plan incliné en mouvement.

En supposant que la surface libre du film liquide supérieur est sans ondes et en négligeant les termes d'inertie et le gradient de pression dans l'équation du mouvement, nous pouvons écrire l'équation du mouvement pour les deux films liquides sous la forme ( $i=1, 2$ )

$$k_i \frac{d}{dy} \left( \frac{du_i(y)}{dy} \right)^n = -\rho_i g \sin \theta \quad (\text{II.2})$$

Ces equations sont sujettes aux conditions aux limites suivantes [8]

Condition d'adhérence

$$y=0, u_1 = -U \quad (\text{II.3})$$

Continuité de la vitesse à l'interface

$$y=h, u_1 = u_2 \quad (\text{II.4})$$

Continuité de la contrainte de cisaillement à l'interface

$$y=h, k_1 \left( \frac{du_1}{dy} \right)^n = k_2 \left( \frac{du_2}{dy} \right)^n \quad (\text{II.5})$$

Surface libre

$$y=\delta, \frac{du_2}{dy} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Avant de résoudre les equations du mouvement, écrivons les sous une forme adimensionnelle en introduisant les variables adimensionnelles

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{U}, \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \alpha = \frac{k_2}{k_1}, \varepsilon = \frac{h}{\delta} \quad (\text{II.7})$$

Ainsi, sous forme adimensionnelle, les equations du mouvement deviennent

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( \frac{d\bar{u}_i(\bar{y})}{d\bar{y}} \right)^n = -\frac{\rho_i U^{2-n} \delta^n}{k_i} \frac{g \delta \sin \theta}{U^2} \quad (\text{II.8})$$

Sachant que le nombre de Reynolds généralisé et que le nombre de Froude sont

$$\text{Re}_{Gi} = \frac{\rho_i U^{2-n} \delta^n}{k_i}, \text{Fr} = \frac{U^2}{g \delta \sin \theta} \quad (\text{II.9})$$

Les équations II.8 s'écrivent

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( \frac{d\bar{u}_i(\bar{y})}{d\bar{y}} \right)^n = -\frac{\text{Re}_{Gi}}{\text{Fr}} \quad (\text{II.10})$$

Les conditions aux limites correspondantes sous forme adimensionnelles deviennent alors

$$\bar{y} = 0, \bar{u}_1 = -1 \quad (\text{II .11})$$

$$\bar{y} = \varepsilon, \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \quad (\text{II .12})$$

$$\bar{y} = \varepsilon, \left( \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}} \right)^n = \alpha \left( \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{y}} \right)^n \quad (\text{II .13})$$

$$\bar{y} = 1, \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{y}} = 0 \quad (\text{II .14})$$

Récrivons l'équation II. 10 sous la forme

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left( \frac{d\bar{u}_i(\bar{y})}{d\bar{y}} \right)^n = a_i \quad (\text{II .15})$$

Où

$$a_i = -\frac{\text{Re}_{Gi}}{Fr} \quad (\text{II .16})$$

En integrant deux fois l'équation II.15 par rapport à la variable adimensionnelle  $\bar{y}$  nous obtenons

$$\left( \frac{d\bar{u}_i(\bar{y})}{d\bar{y}} \right)^n = a_i \bar{y} + C_{1i} \quad (\text{II .17})$$

$$\bar{u}_i(\bar{y}) = \frac{n}{(n+1)a_i} (a_i \bar{y} + C_{1i})^{\frac{n+1}{n}} + C_{2i} \quad (\text{II .18})$$

Où  $C_{1i}$  et  $C_{2i}$  sont des constants d'intégration obtenues à partir des conditions aux limites.

Explicitement, les profils des vitesses pour les deux films liquides s'écrivent

$$\bar{u}_1(\bar{y}) = \frac{n}{(n+1)a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} + C_{21} \quad (\text{II .19})$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) = \frac{n}{(n+1)a_2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{n+1}{n}} + C_{22} \quad (\text{II .20})$$

Avec

$$a_1 = -\frac{\text{Re}_{G1}}{Fr}, \quad a_2 = -\frac{\text{Re}_{G2}}{Fr} \quad (\text{II .21})$$

En utilisant les conditions aux limites II.11, II.12, II.13 et II.14, nous obtenons pour les constants d'intégration, les expressions suivantes

$$C_{11} = \alpha a_2 (\varepsilon - 1) - a_1 \varepsilon \quad (\text{II .22})$$

$$C_{12} = -a_2 \quad (\text{II .23})$$

$$C_{21} = -1 - \frac{n}{(n+1)a_1} (C_{11})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II .24})$$

$$C_{22} = \frac{n}{(n+1)a_1} (a_1 \varepsilon + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} + C_{21} - \frac{n}{(n+1)a_2} (a_2 \varepsilon + C_{12})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II .25})$$

## II.2. Distribution de températures dans les films liquides

L'équation de la chaleur dans les films liquides est:

$$u_i(y) \frac{\partial T_i(x, y)}{\partial x} = D_i \frac{\partial^2 T_i(x, y)}{\partial y^2} \quad (\text{II .26})$$

Où  $D_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_{pi}}$  est la diffusivité thermique dans le film liquide  $i$ . Ces équations de la chaleur sont soumises aux conditions aux limites suivantes

Température d'entrée

$$x = 0, T_i(0, y) = T_0 \quad (\text{II .27})$$

Plan incliné soumis à un flux de chaleur constant

$$y = 0, -\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, 0)}{\partial y} = q \quad (\text{II .28})$$

Conditions de continuité des températures et des flux de chaleur à l'interface des deux films liquides

$$y = h, T_1(x, h) = T_2(x, h) \quad (\text{II .29})$$

$$y = h, \lambda_1 \frac{dT_1(x, h)}{dy} = \lambda_2 \frac{dT_2(x, h)}{dy} \quad (\text{II .30})$$

Surface adiabatique

$$y = \delta, \frac{dT_2(x, \delta)}{dy} = 0 \quad (\text{II .31})$$

L'équation de la chaleur II.26 peut être transformée sous la forme adimensionnelle en introduisant les variables adimensionnelles

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{U}, \quad \bar{x} = \frac{\lambda_i}{\rho_i U C_{Pi} \delta^2} x, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \quad \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{T_i(x, y) - T_0}{\Delta T_i}, \quad \Delta T_i = \frac{q\delta}{\lambda_i}, \quad \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{II.32})$$

En substituant ces variables adimensionnelles dans l'équation de la chaleur; il vient

$$\bar{u}_i(\bar{y}) U \frac{\partial [\Delta T_i \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) + T_0]}{\partial \left[ \frac{\rho_i U C_{Pi} \delta^2 \bar{x}}{\lambda_i} \right]} = \frac{\lambda_i}{\rho_i C_{Pi}} \frac{\partial^2 [\Delta T_i \bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) + T_0]}{\partial (\delta \bar{y})^2} \quad (\text{II.33})$$

Soit, après simplification

$$\bar{u}_i(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{II.34})$$

Où encore

$$\bar{u}_1(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{II.35})$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) \frac{\partial \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{II.36})$$

Les conditions aux limites pour ces deux équations de la chaleur sont

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{T}_i(0, \bar{y}) = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$\bar{y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}_1(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{y}} = -1 \quad (\text{II.38})$$

$$\bar{y} = \varepsilon, \quad \bar{T}_1(\bar{x}, \varepsilon) = \bar{T}_2(\bar{x}, \varepsilon) \quad (\text{II.39})$$

$$\bar{y} = \varepsilon, \quad \frac{d\bar{T}_1(\bar{x}, \varepsilon)}{d\bar{y}} = \gamma \frac{d\bar{T}_2(\bar{x}, \varepsilon)}{d\bar{y}} \quad (\text{II.40})$$

$$\bar{y} = 1, \quad \frac{d\bar{T}_2(\bar{x}, 1)}{d\bar{y}} = 0 \quad (\text{II.41})$$

### II. 3. Separation des variables

Pour obtenir une solution de l'équation II .34 la methode de séparation des variables est utilisée et nous écrivons la solution sous la forme en suppose sous la forme suivante

$$\bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y}) = \Theta_i(\bar{x})\Phi_i(\bar{y}) + \Theta_i(\bar{x}) + \Phi_i(\bar{y}) \quad (\text{II.42})$$

Le premier terme du member droit de l'équation II .42 est significatif la décroissance de la transition initiale et aux effets d'entrée, le deuxième terme est dû à l'accumulation de la chaleur sur la paroi et le troisième terme provient du flux de chaleur dans la direction transversal. En négligeant les effets d'entrée et en supposant que le système a déjà passé la décroissance de transition initiale, le premier terme du member droit de l'équation II.42

Peut être omis et de ce fait, la solution cherchée s'écrit sous la forme

$$\bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y}) = \Theta_i(\bar{x}) + \Phi_i(\bar{y}) \quad (\text{II.43})$$

En y substituent cette forme de la solution dans l'équation de la chaleur

$$\bar{u}_i(\bar{y}) \frac{\partial(\Theta_i(\bar{x}) + \Phi_i(\bar{y}))}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2(\Theta_i(\bar{x}) + \Phi_i(\bar{y}))}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{II.44})$$

Nous obtenos

$$\bar{u}_i(\bar{y}) \frac{\partial \Theta_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \Phi_i(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{II.45})$$

Equation, qui peût être écrite sous la forme

$$\frac{\partial \Theta_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\bar{u}_i(\bar{y})} \frac{\partial^2 \Phi_i(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} = \alpha_i \quad (\text{II.46})$$

Où  $\alpha_i$  est une constant. Cette equation, tenant compte de la méthode de separation des variables, conduit aux deux equations différentielles ordinaires suivantes

$$\frac{\partial \Theta_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \alpha_i \quad (\text{II.47})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} = \alpha_i \bar{u}_i(\bar{y}) \quad (\text{II.48})$$

qui s'écrivent pour chaque films liquids, en y substituent les expressions des profils des vitesses, sous les formes

$$\frac{\partial \Theta_1(\bar{x})}{\partial x} = \alpha_1 \quad (\text{II.49})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} = \alpha_1 \left\{ \frac{n}{(n+1)a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} + C_{21} \right\} \quad (\text{II.50})$$

$$\frac{\partial \Theta_2(\bar{x})}{\partial x} = \alpha_2 \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} = \alpha_2 \left\{ \frac{n}{(n+1)a_2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{n+1}{n}} + C_{22} \right\} \quad (\text{II.52})$$

## II. 4. Integrations des équations de la chaleur

La solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\partial \Theta_1(\bar{x})}{\partial x} = \alpha_1 \quad (\text{II.53})$$

est

$$\Theta_1(\bar{x}) = \alpha_1 \bar{x} + A_1 \quad (\text{II.54})$$

Pour l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} = \alpha_1 \left\{ \frac{n}{(n+1)a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} + C_{21} \right\} \quad (\text{II.55})$$

qui peut être réécrite sous la forme

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(\bar{y})}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\alpha_1 n}{(n+1)a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} + \alpha_1 C_{21} \quad (\text{II.56})$$

et en introduisant une nouvelle variable  $\bar{Y}$  tel que

$$\bar{Y} = a_1 \bar{y} + C_{11} \quad (\text{II.57})$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(\bar{Y})}{\partial \bar{Y}^2} = \frac{\alpha_1 n}{(n+1)a_1^3} \bar{Y}^{\frac{n+1}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{a_1^2} \quad (\text{II.58})$$

dont la solution est

$$\Phi_1(\bar{Y}) = \frac{\alpha_1 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^3} \bar{Y}^{\frac{3n+1}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{2\alpha_1^2} \bar{Y}^2 + B_{11} \bar{Y} + B_{12} \quad (\text{II.59})$$

ou encore en revenant à la variable  $\bar{y}$

$$\Phi_1(\bar{y}) = \frac{\alpha_1 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^3} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{3n+1}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{2\alpha_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11})^2 + B_{11} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + B_{12} \quad (\text{II.60})$$

par conséquent, la température  $\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})$  s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = & \alpha_1 \bar{x} + \frac{\alpha_1 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^3} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{3n+1}{n}} \\ & + \frac{\alpha_1 C_{21}}{2\alpha_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11})^2 + B_{11} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + A_1 + B_{12} \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

en supposant que

$$A_1 + B_{12} = C_1$$

l'équation II. 61 devient

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) = & \alpha_1 \bar{x} + \frac{\alpha_1 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^3} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{3n+1}{n}} \\ & + \frac{\alpha_1 C_{21}}{2\alpha_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11})^2 + B_{11} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + C_1 \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

En procédant de la même façon, nous obtenons pour la température  $\bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})$  l'expression

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) = & \alpha_2 \bar{x} + \frac{\alpha_2 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^3} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{3n+1}{n}} \\ & + \frac{\alpha_2 C_{22}}{2\alpha_2^2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^2 + B_{21} (a_2 \bar{y} + C_{12}) + A_2 + B_{22} \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

avec

$$A_2 + B_{22} = C_2$$

La température s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) = & \alpha_2 \bar{x} + \frac{\alpha_2 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^3} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{3n+1}{n}} \\ & + \frac{\alpha_2 C_{22}}{2\alpha_2^2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^2 + B_{21} (a_2 \bar{y} + C_{12}) + C_2 \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

où  $A_1, A_2, B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes d'intégration.

Le gradient de la température  $\bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})$  est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = & \frac{\alpha_1 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^3} \frac{(3n+1)a_1}{n} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{(3n+1)}{n}-1} \\ & + \frac{\alpha_1 C_{21} a_1}{a_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + B_{11} a_1 \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

soit

$$\frac{\partial \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \frac{\alpha_1 n^2}{(2n+1)(n+1)a_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + B_{11} a_1 \quad (\text{II.66})$$

De meme, le gradient de la temperature  $\bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})$  est

$$\frac{\partial \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \frac{\alpha_2 n^2}{(2n+1)(n+1)a_2^2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_2 C_{22}}{a_2} (a_2 \bar{y} + C_{12}) + B_{21} a_2 \quad (\text{II.67})$$

L'application des conditions aux limites II. 38, II. 39, II. 40 et II. 41 nous fournissent les relations suivantes pour les constants d'intégration

$$\bar{y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}_1(\bar{x}, 0)}{\partial \bar{y}} = -1 \quad (\text{II.68})$$

$$\frac{\alpha_1 n^2}{(2n+1)(n+1)a_1^2} (C_{11})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{11} C_{21}}{a_1} + B_{11} a_1 = -1 \quad (\text{II.69})$$

$$\bar{y} = \varepsilon, \quad \bar{T}_1(\bar{x}, \varepsilon) = \bar{T}_2(\bar{x}, \varepsilon) \quad (\text{II.70})$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{x} + \frac{\alpha_1 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^3} (a_1 \varepsilon + C_{11})^{\frac{(3n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{2a_1^2} (a_1 \varepsilon + C_{11})^2 + B_{11} (a_1 \varepsilon + C_{11}) + C_1 = \\ \alpha_2 \bar{x} + \frac{\alpha_2 n^3}{(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^3} (a_2 \varepsilon + C_{12})^{\frac{(3n+1)}{n}} + \frac{\alpha_2 C_{22}}{2a_2^2} (a_2 \varepsilon + C_{12})^2 + B_{21} (a_2 \varepsilon + C_{12}) + C_2 \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

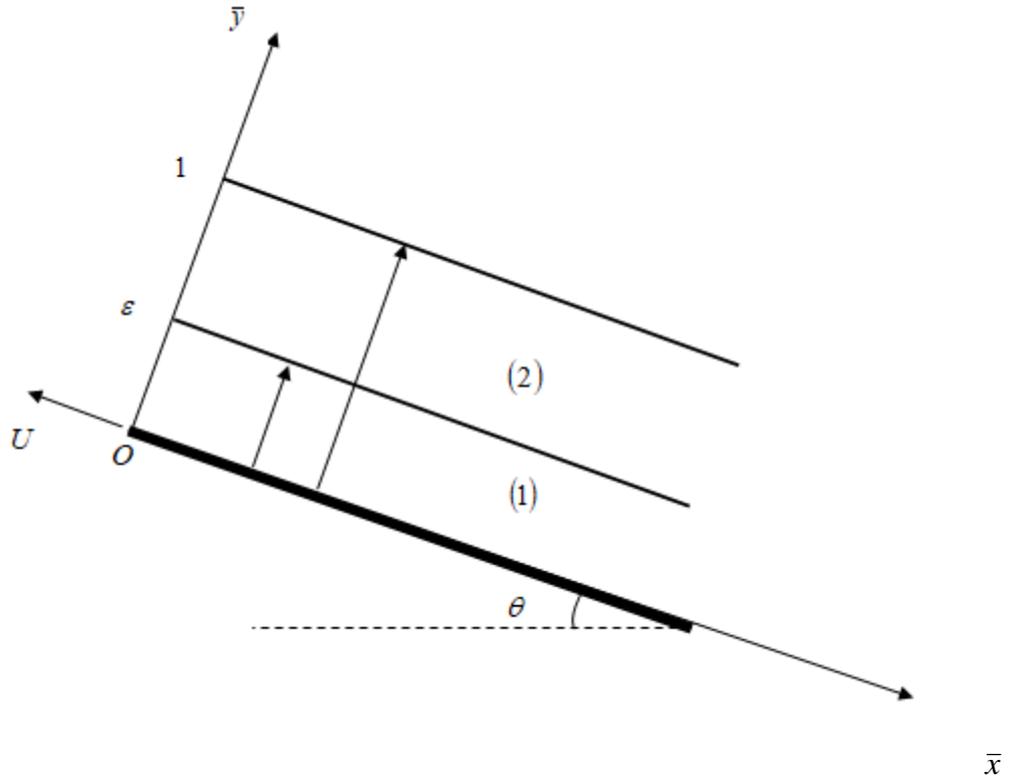
$$\bar{y} = \varepsilon, \quad \frac{d\bar{T}_1(\bar{x}, \varepsilon)}{d\bar{y}} = \gamma \frac{d\bar{T}_2(\bar{x}, \varepsilon)}{d\bar{y}} \quad (\text{II.72})$$

$$\frac{\alpha_1 n^2}{(2n+1)(n+1)a_1^2} (a_1 \varepsilon + C_{11})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{a_1} (a_1 \varepsilon + C_{11}) + B_{11} a_1 = \quad (\text{II.73})$$

$$\frac{\gamma \alpha_2 n^2}{(2n+1)(n+1)a_2^2} (a_2 \varepsilon + C_{12})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\gamma \alpha_2 C_{22}}{a_2} (a_2 \varepsilon + C_{12}) + \gamma B_{21} a_2$$

$$\bar{y} = 1, \quad \frac{d\bar{T}_2(\bar{x}, 1)}{d\bar{y}} = 0 \quad (\text{II.74})$$

$$\frac{\alpha_2 n^2}{(2n+1)(n+1)a_2^2} (a_2 + C_{12})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_2 C_{22}}{a_2} (a_2 + C_{12}) + B_{21} a_2 = 0 \quad (\text{II.75})$$



**Figure II. 2.** Représentation schématique de l'écoulement de deux fluides non-newtoniens Non-miscibles sur un plan incliné adimensionnelle.

Pour évaluer les constantes d'intégration  $C_i$ , la température moyenne définie par l'équation

$$\bar{T}_{bi}(\bar{x}) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y}) dA_i \quad (\text{II.76})$$

où l'élément d'aire  $dA_i$  et l'aire  $A_i$  sont

$$dA_1 = \delta dy, \quad dA_2 = \delta dy \quad (\text{II.77})$$

$$A_1 = \varepsilon \delta, \quad A_2 = (1 - \varepsilon) \delta \quad (\text{II.78})$$

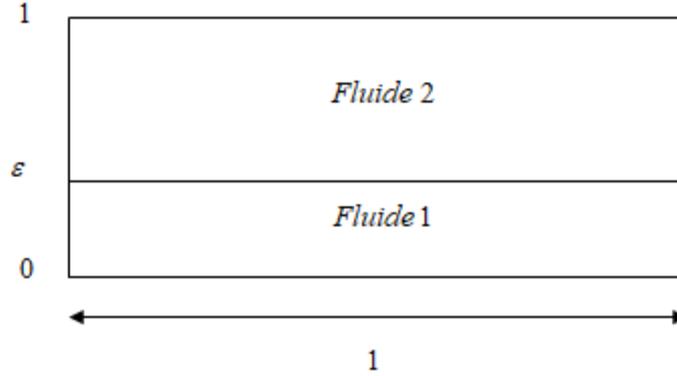


Figure II.3. Eléments des surfaces.

En utilisant l'équation II .76 et les relations II. 77 et II. 78, les températures moyennes s'écrivent

$$\bar{T}_{b1}(\bar{x}) = \frac{1}{\varepsilon \delta} \int_0^{\varepsilon} \delta \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \quad (\text{II.79})$$

$$\bar{T}_{b2}(\bar{x}) = \frac{1}{(1 - \varepsilon) \delta} \int_{\varepsilon}^1 \delta \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_{\varepsilon}^1 \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \quad (\text{II.80})$$

sachant que les primitives qui figurant dans les relations II. 79 et II. 80 sont

$$\int \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \alpha_1 \bar{x} \bar{y} + \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (a_1 \bar{y} + C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (a_1 \bar{y} + C_{11})^2 + C_1 \bar{y} \quad (\text{II.81})$$

$$\int \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \alpha_2 \bar{x} \bar{y} + \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 \bar{y} + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_2 \bar{y} + C_{12})^2 + C_2 \bar{y} \quad (\text{II.82})$$

nous obtenons, alors pour les integrals, les relations

$$\int_0^{\varepsilon} \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \left[ \alpha_1 \bar{x} \bar{y} + \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (a_1 \bar{y} + C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (a_1 \bar{y} + C_{11})^2 + C_1 \bar{y} \right]_0^{\varepsilon} \quad (\text{II.83})$$

$$\int_0^\varepsilon \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \left[ \begin{aligned} & \alpha_1 \bar{x} \varepsilon + \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (a_1 \varepsilon + C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} \\ & + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (a_1 \varepsilon + C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (a_1 \varepsilon + C_{11})^2 + C_1 \varepsilon \end{aligned} \right] \\ - \left[ \begin{aligned} & \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} \\ & + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (C_{11})^2 + C_1 \end{aligned} \right] \quad (\text{II.84})$$

et

$$\int_\varepsilon^1 \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \left[ \begin{aligned} & \alpha_2 \bar{x} \bar{y} + \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} \\ & + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 \bar{y} + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_2 \bar{y} + C_{12})^2 + C_2 \bar{y} \end{aligned} \right]_\varepsilon^1 \quad (\text{II.85})$$

$$\int_\varepsilon^1 \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} = \left[ \begin{aligned} & \alpha_2 \bar{x} + \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} \\ & + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_2 + C_{12})^2 + C_2 \end{aligned} \right] \\ - \left[ \begin{aligned} & \alpha_2 \bar{x} \varepsilon + \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 \varepsilon + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} \\ & + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 \varepsilon + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_2 \varepsilon + C_{12})^2 + C_2 \varepsilon \end{aligned} \right] \quad (\text{II.86})$$

Par conséquent, les températures moyenne sont

$$\bar{T}_{b1}(\bar{x}) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \begin{aligned} & \alpha_1 \bar{x} \varepsilon + \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (a_1 \varepsilon + C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} \\ & + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (a_1 \varepsilon + C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (a_1 \varepsilon + C_{11})^2 + C_1 \varepsilon \end{aligned} \right] \\ - \frac{1}{\varepsilon} \left[ \begin{aligned} & \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} \\ & + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (C_{11})^2 + C_1 \end{aligned} \right] \quad (\text{II.87})$$

$$\bar{T}_{b2}(\bar{x}) = \frac{1}{1-\varepsilon} \left[ \alpha_2 \bar{x} + \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_1 + C_{12})^2 + C_2 \right] \\ \frac{1}{1-\varepsilon} \left[ \alpha_2 \bar{x} \varepsilon + \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 \varepsilon + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 \varepsilon + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_1 \varepsilon + C_{12})^2 + C_2 \varepsilon \right] \quad (\text{II.88})$$

Sachant que la conditions aux limites II. 37 exige que

$$\bar{x} = 0, \bar{T}_{b1}(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{x} = 0, \bar{T}_{b2}(\bar{x}) = 0$$

nous obtenons

$$\left[ \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (a_1 \varepsilon + C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (a_1 \varepsilon + C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (a_1 \varepsilon + C_{11})^2 + C_1 \varepsilon \right] \quad (\text{II.89}) \\ \left[ \frac{\alpha_1 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_1^4} (C_{11})^{\frac{(4n+1)}{n}} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 C_{21}}{6a_1^3} (C_{11})^3 + \frac{1}{2a_1} B_{11} (C_{11})^2 + C_1 \right] = 0$$

$$\left[ \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_1 + C_{12})^2 + C_2 \right] \\ - \left[ \alpha_2 \bar{x} \varepsilon + \frac{\alpha_2 n^4}{(4n+1)(3n+1)(2n+1)(n+1)a_2^4} (a_2 \varepsilon + C_{12})^{\frac{(4n+1)}{n}} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 C_{22}}{6a_2^3} (a_2 \varepsilon + C_{12})^3 + \frac{1}{2a_2} B_{21} (a_1 \varepsilon + C_{12})^2 + C_2 \varepsilon \right] = 0 \quad (\text{II.90})$$

## II. 5. Production d'entropie

La génération d'entropie est étroitement associée à l'irréversibilité thermodynamique, qui se rencontre dans tous les processus de transfert de chaleur. Différentes sources sont responsables de la génération d'entropie telle que la chaleur transfert et dissipation visqueuse. L'analyse du taux de génération d'entropie dans un conduit circulaire avec un flux de chaleur imposé à la paroi et son extension pour déterminer le nombre de Reynolds optimal comme fonction du nombre de Prandtl et du paramètre de fonctionnement fut présentée par Bejan [9]. Sahin [10] introduisa l'analyse de la seconde loi à un fluide visqueux dans un conduit circulaire à frontière isotherme. Dans un autre article, Sahin [11] présenté l'effet d'une viscosité variable sur le taux de génération l'entropie pour un conduit circulaire chauffé [12]. Selon Mahmud et Fraser [13], le taux generation d'entropie est:

$$S_i(x, y) = \frac{\lambda_i}{T_0^2} \left\{ \left( \frac{\partial T_i(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T_i(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{k_i}{T_0} \left( \frac{\partial u_i(x, y)}{\partial y} \right)^{n+1} \quad (\text{II.91})$$

avec les variables adimensionnelles, le taux de generation d'entropie s'écrit

$$S_i(x, y) = \frac{\lambda_i}{T_0^2} \left\{ \frac{\Delta T_i^2}{\left( \frac{\rho_i U C_{Pi} \delta^2}{\lambda_i} \right)^2} \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{\Delta T_i^2}{\delta^2} \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\} + \frac{k_i U^{n+1}}{T_0 \delta^{n+1}} \left( \frac{\partial \bar{u}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1} \quad (\text{II.92})$$

soit

$$S_i(x, y) = \frac{\lambda_i}{T_0^2} \left\{ \frac{\lambda_i^2 \Delta T_i^2}{\rho_i^2 U^2 C_{Pi}^2 \delta^4} \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{\Delta T_i^2}{\delta^2} \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\} + \frac{k_i U^{n+1}}{T_0 \delta^{n+1}} \left( \frac{\partial \bar{u}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1} \quad (\text{II.93})$$

Le nombre de génération d'entropie peut être défini par la relation

$$N_{Si}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} S_i(x, y) \quad (\text{II.94})$$

en y substituent l'expression du taux de generation d'entropie, nous obtenons

$$\begin{aligned}
N_{Si}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{\lambda_i}{T_0^2} \frac{\lambda_i^2 \Delta T_i^2}{\rho_i^2 U^2 C_{Pi}^2 \delta^4} \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right)^2 \\
&\quad + \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{\lambda_i}{T_0^2} \frac{\Delta T_i^2}{\delta^2} \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^2 \\
&\quad + \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{k_i U^{n+1}}{T_0 \delta^{n+1}} \left( \frac{\partial \bar{u}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1}
\end{aligned} \tag{II.95}$$

Le coefficient du  $\left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right)^2$ , que nous appelons  $F$  est

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{\lambda_i}{T_0^2} \frac{\lambda_i^2}{\rho_i^2 U^2 C_{Pi}^2 \delta^4} \left( \frac{q \delta}{\lambda_i} \right)^2 = \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{\lambda_i}{T_0^2} \frac{\lambda_i^2}{\rho_i^2 U^2 C_{Pi}^2 \delta^4} \frac{q^2 \delta^2}{\lambda_i^2} \\
&= \frac{\lambda_i^2}{\rho_i^2 U^2 C_{Pi}^2 \delta^2}
\end{aligned} \tag{II.96}$$

Sachant que le nombre de Peclet est

$$Pe_i = \frac{U \delta}{\frac{\lambda_i}{\rho_i C_{Pi}}} = \frac{\rho_i C_{Pi} U \delta}{\lambda_i}$$

Nous obtenons

$$F = \frac{1}{Pe_i^2} \tag{II.98}$$

Le coefficient du  $\left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^2$ , que nous appelons  $G$  est

$$G = \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{\lambda_i}{T_0^2} \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{q \delta}{\lambda_i} \right)^2 = \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{\lambda_i}{T_0^2} \frac{q^2 \delta^2}{\lambda_i^2 \delta^2} = 1 \tag{II.99}$$

Le coefficient du  $\left( \frac{\partial \bar{u}_i(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1}$ , que nous appelons  $H$  est

$$H = \frac{\lambda_i T_0^2}{q^2} \frac{k_i U^{n+1}}{T_0 \delta^{n+1}} = \frac{\lambda_i T_0}{q \delta} \frac{k_i U^{n+1}}{q \delta^n} = \frac{1}{\Omega_i} \frac{k_i U^{n+1}}{q \delta^n} = \frac{Br_i}{\Omega_i} \tag{II.100}$$

où  $\Delta T$  est différence de température de référence définie par

$$\Delta T_i = \frac{q\delta}{\lambda_i} \quad (\text{II.101})$$

le terme  $\Omega$  est la différence de température adimensionnelle

$$\Omega_i = \frac{\Delta T_i}{T_0} = \frac{q\delta}{T_0\lambda_i} \quad (\text{II.102})$$

Le nombre de Brinkman:est un nombre sans dimension utilisé en transfert thermique, il exprime le rapport entre l'énergie dissipée des forces visqueuses et l'énergie transférée par conduction thermique.

Ce nombre porte le nom de Brinkman, un scientifique hollandais [14], on le définit par la relation

$$Br_i = \frac{k_i U^{n+1}}{q\delta^n} \quad (\text{II.103})$$

En utilisant les définition de la vitesse et de la température adimensionnelles, l'expression suivante est obtenue pour le nombre de génération d'entropie

$$N_{Si}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{Pe^2} \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right) + \left( \frac{\partial \bar{T}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{Br_i}{\Omega_i} \left( \frac{\partial \bar{u}_i(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \right)^{n+1} \quad (\text{II.104})$$

Avec les gradients des températures

$$\frac{\partial \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \frac{\alpha_1 n^2}{(2n+1)(n+1)a_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + B_{11} a_1 \quad (\text{II.105})$$

$$\frac{\partial \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \frac{\alpha_2 n^2}{(2n+1)(n+1)a_2^2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_2 C_{22}}{a_2} (a_2 \bar{y} + C_{12}) + B_{21} a_2 \quad (\text{II.106})$$

$$\frac{\partial \bar{T}_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = \alpha_1 \quad (\text{II.107})$$

$$\frac{\partial \bar{T}_2(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = \alpha_2 \quad (\text{II.108})$$

et les gradients des vitesses

$$\left( \frac{d\bar{u}_1(\bar{y})}{d\bar{y}} \right)^{n+1} = (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II.109})$$

$$\left( \frac{d\bar{u}_2(\bar{y})}{d\bar{y}} \right)^{n+1} = (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II.110})$$

Nous obtenons, pour les nombres de production d'entropie dans chaque film les expressions

$$N_{s1} = \frac{\alpha_1^2}{Pe_1^2} + \left( \frac{\alpha_1 n^2}{(2n+1)(n+1)a_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + B_{11} a_1 \right)^2 + \frac{Br_1}{\Omega_1} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II.112})$$

$$N_{sc1} = \frac{\alpha_1^2}{Pe_1^2} \quad (\text{II.113})$$

$$N_{sy1} = \left( \frac{\alpha_1 n^2}{(2n+1)(n+1)a_1^2} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_1 C_{21}}{a_1} (a_1 \bar{y} + C_{11}) + B_{11} a_1 \right)^2 \quad (\text{II.114})$$

$$N_{sf1} = \frac{Br_1}{\Omega_1} (a_1 \bar{y} + C_{11})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II.115})$$

$$N_{s2} = \frac{\alpha_2^2}{Pe_2^2} + \left( \frac{\alpha_2 n^2}{(2n+1)(n+1)a_2^2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_2 C_{22}}{a_2} (a_2 \bar{y} + C_{12}) + B_{21} a_2 \right)^2 + \frac{Br_2}{\Omega_2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II.116})$$

$$N_{sc2} = \frac{\alpha_2^2}{Pe_2^2} \quad (\text{II.117})$$

$$N_{sy2} = \left( \frac{\alpha_2 n^2}{(2n+1)(n+1)a_2^2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{(2n+1)}{n}} + \frac{\alpha_2 C_{22}}{a_2} (a_2 \bar{y} + C_{12}) + B_{21} a_2 \right)^2 \quad (\text{II.118})$$

$$N_{sf2} = \frac{Br_2}{\Omega_2} (a_2 \bar{y} + C_{12})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{II.119})$$

Ce travail présente l'étude de l'influence de la température sur l'irréversibilité thermodynamique lors de l'écoulement de deux films liquides non-newtoniens de type d'Ostwald non-miscibles sur un plan incliné.

En négligeant les termes d'inertie, dans l'équation du mouvement, devant les termes de diffusion et des forces volumiques, les équations du mouvement, pour les deux films liquides furent résolues conformément à certaines conditions aux limites exigées par la situation physique.

Concernant l'analyse du transfert de chaleur, l'équation de la chaleur fut aussi résolue tout en tenant compte du terme de la convection dans la direction longitudinale et

cela bien sûr avec des conditions aux limites adéquates et exigées par la problématique en question.

Comme il est convenu dans les problèmes de transfert, avant la résolution analytiques, les équations du mouvement et de la chaleur et leurs conditions aux limites associées furent dimensionnalisées à travers l'introduction de variables et de grandeurs adimensionnelles.

Ayant obtenues les expressions analytiques des profils de vitesses et de températures à travers les deux films liquides, l'expression du nombre de production d'entropie qui caractérise l'irréversibilité fut déterminé.

L'inspection des expressions du nombre de production d'entropie montre que ce dernier est composé de trois parties, la première est due au transfert de chaleur conductive dans la direction longitudinale et est intimement liée au nombre de Peclet, la deuxième partie est le résultat de la chaleur conductive dans la direction transversale et la troisième partie provient des frottements internes au sein du film liquide par le biais du nombre de Brinkman.



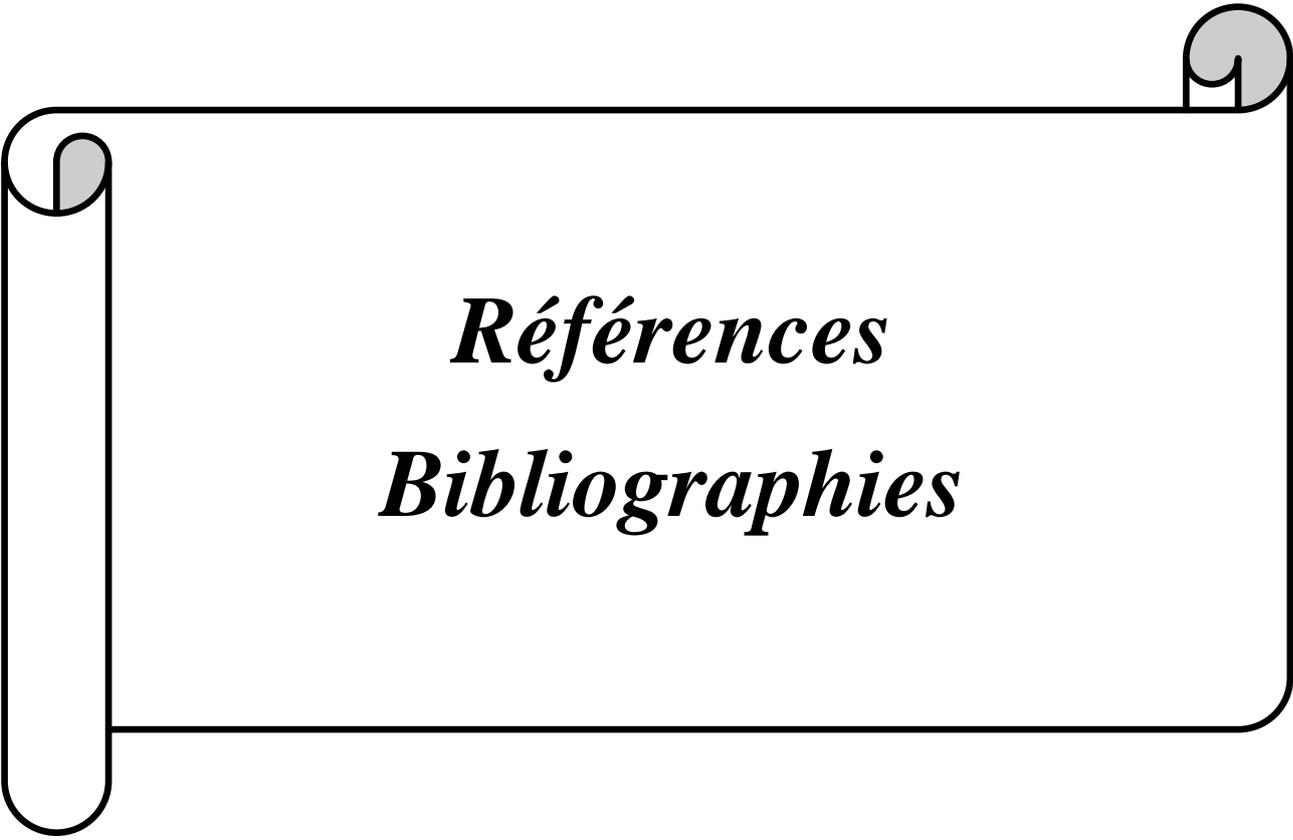
*Conclusion  
et recommandations*

### **Conclusion et recommandations**

Cette étude, qui à première vue paraît simple, renferme beaucoup de finesse et nécessite énormément d'efforts et de compréhension non seulement au niveau de la problématique mais aussi autour des outils mathématiques utilisés. Cette complication vient évidemment de la connexion entre deux phénomènes de transfert et le deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux phénomènes hors-équilibre.

Après cette analyse théorique, il est recommandé de poursuivre cette étude en considérant les points suivants :

- a) Générer les graphes des températures et du nombre de production d'entropie,
- b) Considérer des fluides d'indice de comportement différents,
- c) Tenir compte dans l'équation de la chaleur de la dissipation visqueuse.



*Références*  
*Bibliographies*

### Références bibliographies

- [1] Bird R. B., Stewart W. E., and E. N. Lightfoot. Transport Phenomena. John Willy and Sons, New York, 780 pages, 1960.
- [2] Kapur J. N., Shukla. J. B. On the unsteady flow of two incompressible immiscible Fluids between two plates, 268-269, 1964.
- [3] Kapur J. N., Shukla. J. B. The flow of two incompressible immiscible fluids between two plates, 55-60, 1962.
- [4] Sacheti N. C. Plane Couette flow of two immiscible incompressible non-Newtonian Fluids with uniform suction at the stationary plate, 527-540, 1974.
- [5] Miladinova S., Lebon G., and Toshev E. Thin film flow of a power-law liquid falling down an inclined plate. J. Non-Newtonian Fluid Mech, 122,69-78, 2004.
- [6] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Fluide\\_non\\_newtonien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fluide_non_newtonien)
- [7] Hadide I., Mezhoud Y. Modèles rhéologiques des fluides non-newtoniens, Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila, 2021.
- [8] Maiche F. Z., Lemoussi H. Ecoulements de deux fluides non-newtoniens non miscibles sur une surface mobile et inclinée, Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila, 2020.
- [9] Bejan A. A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer. J. Heat Transfer, 101, 718-725, 1979.
- [10] Sahin A .Z. Second law analysis of laminar viscous flow through a duct subjected to constant walltemperature. J. Heat Transfer, 120, 76-83, 1998.
- [11] Sahin A. Z. Effect of variable viscosity on the entropy generation and pumping power in a laminar fluid flow through a duct subjected to constant heat flux. Heat Mass Transfer, 35, 499-506, 1999.
- [12] Aiboud-Saouli S., Saouli S., Mezza N. and Settou N. Thermodynamic analysis of gravity-driven liquid film along an inclined heated plate with hydromagnetic and viscous dissipation effects Entropy, 8, 188-199, 2006
- [13] Mahmud S., Fraser R. A. Thermodynamic analysis of flow and heat transfer inside channel with two parallel plates. Energy, 2, 140-146, 2002.
- [14] [https://dictionnaire.sensagent.com/Nombre\\_de\\_Brinkman/fr-fr](https://dictionnaire.sensagent.com/Nombre_de_Brinkman/fr-fr).