الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila

المركز الجامعي عبد الحفيظ بو الصوف ميلة

N° :

Exercices corrigés de la matière Analyse3

Polycopié réalisé par :

Dr. Smail KAOUACHE

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila

Institut de Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Spécialité : Mathématiques

Année Universitaire : 2021/2022

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié contient des exercices corrigés de la matière Analyse 3 destiné principalement aux étudiants en deuxième année licence mathématiques. L'objectif principale de ce polycopié est de donné aux étudiants les connaissances nécessaires concernant les convergences simples et uniformes des séries de fonctions, le développement des fonctions en séries entières et séries de Fourier, les intégrales généralisées ainsi que les fonctions définies par une intégrale.

Chapitre 1

Exercices corrigés sur les séries numériques

1.1 Exercices sur les séries numériques

Exercice 1.1.1. *Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes :*

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ *(on rappelle que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ *)* 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.1.2. *En utilisant la technique du calcul la somme partielle d'une série numérique, montrer que la série du terme général :*

$$u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}),\ n \geq 1.$$

est divergente.

Exercice 1.1.3. *1. Soit f une fonction localement intégrable, a un signe constant et décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$.*
Montrer que pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que la série numérique à termes positifs, de terme général

$$u_n = f(n),\ n \geq n_0$$

soit convergente.

2. Application : Montrer que la série de Riemann du terme général :

$$f_n = \frac{1}{n^\alpha},\ n \geq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R},$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 1.1.4. *(Régle de Rab et Duhamel)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une série à termes positifs.

Supposons que $l = \lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)$ existe, Montre que :

1. *Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.*
2. *Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.*

Exercice 1.1.5. *Etudier la nature des séries numériques suivantes :*

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} n\sin(\frac{1}{n}) \qquad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(\frac{1}{n^2})$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}+\alpha^n+1}\ (\alpha \geq 0) \qquad 4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2},\ a \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

$$5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+2} \qquad 6) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times \ldots \times(2n-1)}{2\times 4\times \ldots\times(2n)}.$$

Exercice 1.1.6. *1) Montrer que la série numérique du terme général :*

$$u_n = \frac{\exp(inx)}{n}, x \in \mathbb{R},$$

est convergente pour tout $x \neq 2k\pi$.

2) Etudier selon la valeur de θ, la convergence absolue de la série numérique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} \theta^n\ ,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.1.7. *On considère la série numérique de terme général :*

$$u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Montrer que :

1) Si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente.

2) Si $0 < \alpha \leq 1$ *, la série est semi-convergente.*

3) Si $\alpha \leq 0$ *, la série est divergente.*

Exercice 1.1.8. *Montrer que la série de Bertrand du terme général*

$$u_n = \frac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}_*^+ et \beta \in \mathbb{R}.$$

est :

1. convergente, si et seulement si :

1.1. $\alpha > 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$*, ou bien*

1.2. $\alpha = 1$ *et* $\beta < -1$.

2. divergente si et seulement si

2.1. $\alpha < 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$*, ou bien*

2.2. $\alpha = 1$ *et* $\beta \geq -1$.

Exercice 1.1.9. *En effectuant un développement limité du terme général*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}, n \in \mathbb{N},$$

de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *au voisinage de l'infini à l'ordre* 1*, montrer que cette série est convergente.*

Exercice 1.1.10. *On considère deux séries numériques de termes généraux* u_n *et* v_n.

On rappelle que le produit de Cauchy de ces deux séries, la série de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}..$$

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *deux séries absolument convergentes. Montrer que la série de produit de Cauchy de terme général :*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k},$$

est absolument convergente et de plus, on a :

$$\sum_{n\geq 0} w_n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right).$$

1.2 Solutions des exercices des séries numériques

Solution de l'éxercice 1.1.1

Montrons que les séries numériques proposées sont convergentes et calculons leurs sommes :

1. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} S_n &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1. \end{aligned}$$

Par suite $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et a pour somme $S = 1$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 2e. \end{aligned}$$

Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge et a pour somme $S = 2e$.
3. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{2^n} &= Réel\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{\exp(ix)}{2}\right)^n\right) \\
&= Réel\left(\frac{2}{2+\exp(ix)}\right) \\
&= \frac{4+2\cos x}{5+4\cos x}.
\end{aligned}$$

Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{2^n}$ converge et a pour somme $S = \frac{4+2\cos x}{5+4\cos x}$.

Solution de l'éxercice 1.1.2

Consédirons la série du terme général $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}), n \geq 1$.
Le terme u_n peut se reécrire sous la forme :

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n), \; n \geq 1.$$

La somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ vérifiée :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + ... + (\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, il en résulte que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Solution de l'éxercice 1.1.3

Plaçons nous dans le cas où f est une fonction positive, et soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$.
Puisque f est décroissante sur $]0, +\infty[$, on peut écrire :

$$\text{pour tout } k = 1, 2, ..., \; x \in]0, +\infty[\,, \text{ tel que } k \leq x \leq k+1, \text{ on a}$$

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on trouve :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \text{ pour tout } k = 1, 2, ...$$

En sommant ces dernières égalités, on obtient :

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n.$$

* Supposons que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, on peut voire alors :

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

ce qui montre que la suite (S_{n+1}) est majorée, et par suite la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.
Supposons maintenant que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.
On sait bien que :

$$n \leq x < n+1, \text{ pour tout } x \geq 1,$$

où l'entier n représente la partie entière de x. On a alors :

$$\int_1^{x} f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n.$$

Puisque (S_n) est majorée, l'intégrale $\int_1^{x} f(x)dx$ l'est aussi, ce qui assure l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.
Il en résulte également par contraposée, que la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ entrâine la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

2. La série de Riemann est convergente pour tout $\alpha > 1$.
En effet. Si $\alpha \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n \neq 0$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est donc divergente.
Supposons maintenant que $\alpha > 0$ et consédirons la fonction f qui définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}},\ x \in \left]0, +\infty\right[.$$

Cette fonction est définie positive, continue et décroissante sur $\left]0, +\infty\right[$. D'après la première question, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

sont de même nature.
Posons

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^y f(x)dx \\ &= \begin{cases} \ln(y), \text{ si } \alpha = 1, \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction F a une limite finie, si et seulement si $\alpha > 1$, ce qui montre que La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Solution de l'éxercice 1.1.4

Par définition

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) = l &\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \text{ on a :} \\ l - \epsilon &< n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) < l + \epsilon. \end{aligned}$$

1. Supposons que $l > 1$ et choisissons ϵ, tel que $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) > l - \epsilon = q > 1$.
Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $m \in]1, q[$, la série du terme général $w_n = \frac{1}{n^m}$ est donc convergente.
On peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{w_n}{w_{n+1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^m \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

En effectuant le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, on obtient :

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{n^2}\delta(n),$$

où $\frac{\delta(n)}{n} \to 0$, quand $n \to +\infty$.
C'est-à-dire :

$$\text{Pour tout } \eta = q - m > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1, \text{ on a : } \frac{\delta(n)}{n} < q - m.$$

On a alors les inégalités suivantes :

$$m + \frac{\delta(n)}{n} < q < n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1), \text{ pour tout } n \geq \max(n_0, n_1) = n_2,$$

ou d'une manière équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{w_n}{w_{n+1}} &= 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{n^2}\delta(n) \\ &\leq \frac{u_n}{u_{n+1}}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{u_{n+1}}{w_{n+1}} \leq \frac{u_n}{w_n} \leq \ldots \leq \frac{u_{n_2}}{w_{n_2}} = a \ (a > 0$$

Puisque $\sum_{n\geq 1} w_n$ est convergente, il en résulte d'après le théorème de comparaison que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est également convergente.

2. Supposons maintenant que $l < 1$ et choisissons ϵ, tel que

$$n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) < l + \epsilon = q \leq 1, \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{1.1}$$

Considérons également la série de terme général $w_n = \frac{1}{n}$, qui est divergente. De l'inégalité (1.1), on peut voir facilement :

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &\leq 1 + \frac{1}{n} \\ &= \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{w_n}{w_{n+1}}. \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n\geq 1} w_n$ est divergente, il en résulte d'après la méthode précédente que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est également divergente. **Solution de l'éxercice 1.1.5**

Etudions la nature des séries numériques proposées :

1. On a

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1 \neq 0,$$

ce qui montre la divergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin(\frac{1}{n})$.

2. On a

$$\arctan(\frac{1}{n^2}) \overset{V(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

terme général d'une série convergente (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$).
Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(\frac{1}{n^2})$ converge.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} + \alpha^n + 1}$ $(\alpha \geq 0)$. Posons $u_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} + \alpha^n + 1}$.

3.1. Si $\alpha = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 0$, la série proposée est donc convergente.

3.2. Si $\alpha = 1$, $u_n = \frac{1}{3} \nrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$, la série proposée est donc divergente.

3.2. Si $\alpha \in]0, 1[$. On considère la série géométrique de terme général $v_n = \alpha^n$, qui est convergente.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sont donc de la même nature, ce qui montre la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

3.4. Si $\alpha > 1$. On considère la série géométrique de terme général $v_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$ qui est convergente.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sont donc de la même nature, ce qui montre la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

4. En utilisant le critère de Cauchy, on trouve :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n+a}{n+b} \right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1 + \frac{a}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \right)^n \\ &= \exp(a - b). \end{aligned}$$

Par suite :

4.1. Si $a < b, \exp(a - b) < 1$, la série est donc convergente.

4.2. 4.1. Si $a > b, \exp(a - b) > 1$, la série est donc divergente.

4.3. Si $a = b, u_n = 1 \nrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$, la série proposée est donc divergente.

5. On a $\frac{\ln(n)}{n^2 + 2} < \frac{\ln(n)}{n^2}$, terme général d'une série de Bertrand qui est convergente, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 + 2}$ est donc convergente.

6. Posons $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)}$, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

D'après d'Alembert, on ne peut rien conclure. En utilisant le critère de Raab Duhamel, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+2} \\ &= \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Par suite $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)}$ est divergente.

Solution de l'éxercice 1.1.6

1. Montrons que la série numérique de terme général : $u_n = \dfrac{\exp(inx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ est convergente pour tout $x \neq 2k\pi$.

En effet :

1.1. Si $x = 2k\pi$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ terme général de la série harmonique qui est divergente.

1.2. Si $x \neq 2k\pi$. On peut reécrire

$$u_n = a_n \times b_n,$$

où $a_n = \exp(inx)$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \exp(ikx)\right| = \left|\exp(ix) \times \left(\frac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)}\right)\right| \\ &= \left|\left(\frac{1-\exp(inx)}{1-\exp(ix)}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{2}{1-\exp(ix)}\right| \\ &= \frac{2}{|1-\cos x - i\sin x|} \\ &= \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right| \times \left|\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}\right|} \\ &= \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \end{aligned}$$

D'autre part, la suite (b_n) est décroissante et tend vers zéro, donc d'après Abel la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(inx)}{n}$ est convergente.

2. Etudions selon la valeur de θ, la convergence absolue de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} \theta^n$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Posons $u_n = \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} \theta^n$. En utilisant le critère de Cauchy des séries absolument convergentes, on trouve :

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = 4\,|\theta|\,.$$

Par suite :

2. 1. Si $|\theta| < \frac{1}{4}$, la série proposée est donc absolument convergente.

2. 2. Si $|\theta| > \frac{1}{4}$, la série proposée est donc divergente.

3. 3. Si $|\theta| = \frac{1}{4}$, on a

$$|u_n| = \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)^{2n},$$

quantité qui tend vers $\exp(-3) \neq 0$, quand $n \to +\infty$, la série proposée est donc divergente.

Solution de l'éxercice 1.1.7

Considèrons la série numérique de terme général

$$u_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}.$$

1. Montrons que : si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente.

En effet : Si $\alpha > 1$, on a $|u_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}$, terme d'une série converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

2. Si $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left|\frac{\sin n}{n^\alpha}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n^\alpha} \\ &= \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos(2n)}{2n^\alpha} \\ &= v_n. \end{aligned}$$

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n^{\alpha}}$ converge (d'après Abel), la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ est donc divergente, on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ ne converge pas absolument.
Mais la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge d'après Abel, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est semi convergente.
3. Par contre, si $\alpha \leq 0$, la série est divergente.
En effet, si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est alors divergente.

Solution de l'éxercice 1.1.8

1.1. Supposons que $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\gamma \in]1, \alpha[$ vérifiant

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha-\gamma}} \\ &= 0 \text{ (car } \alpha-\gamma > 0).\end{aligned}$$

Puisque $\gamma > 1$, l'utilisation du théorème de comparaison confirme la convergence de la série considérée.
1.2 et 2.2. Supposons maintenant que $\alpha = 1$. Le terme général u_n devient : $u_n = \frac{\ln^{\beta}(n)}{n}$.
* Si $\beta = 0$, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente.
Si $\beta > 0$, en appliquant une fois encore la règle de Cauchy, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} n u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln^{\beta}(n) = +\infty,$$

et la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

* Si $\beta < 0$, considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}}, \, x \in]\delta, +\infty[\; (\delta > 1).$$

Cette fonction est définie positive, continue et décroissante sur $]\delta, +\infty[$.
D'après le théorème de Cauchy, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\ln^{\beta}(n)}{n^{\alpha}}$ et l'intégrale généralisée $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx$ sont de même nature.

On sait bien que

$$\int_{\delta}^{t} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\beta+1}\left[\ln^{\beta+1}(t) - \ln^{\beta+1}(\delta)\right], \text{ si } \beta \neq -1, \\ \ln\left(\frac{\ln x}{\ln \delta}\right), \text{ si } \beta = -1. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\delta}^{t} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} -\frac{\ln^{\beta+1}(\delta)}{\beta+1}, \text{ si } \beta < -1, \\ +\infty, \text{ si } \beta > -1, \\ +\infty, \text{ si } \beta = -1 \end{cases}$$

Donc, si $\alpha = 1$ et $\beta < -1$, l'intégrale $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx$ converge.

Alors que si $\alpha = 1$ et $\beta \geq -1$, l'intégrale $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x)}{x^{\alpha}} dx$ diverge.

2.2 Supposons maintenant que $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\gamma \in]\alpha, 1[$ vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma} u_n = \lim_{n\to+\infty} n^{\gamma-\alpha} \ln^{\beta}(n) = +\infty, \text{ car } \gamma - \alpha > 0.$$

Puisque $\gamma < 1$, l'utilisation du théorème de comparaison confirme la divergence de la série $\sum_{n\geq1} u_n$.

Solution de l'éxercice 1.1.9

On peut écrire $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$.

En effectuant le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\epsilon(n)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\epsilon(n), \text{ où } \epsilon(n) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nous avons donc la somme de deux séries convergentes et d'une reste absolument convergente. La série considéré est donc convergente.

Solution de l'éxercice 1.1.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons les sommes partielles suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, T_n = \sum_{k=0}^{n} v_n \text{ et } R_n = \sum_{k=0}^{n} w_n.$$

Considérons également les notations suivantes :

$$S = \sum_{n\geq 0} |u_n| \text{ et } T = \sum_{n\geq 0} |v_n|.$$

Les deux suites (S_n) et (T_n) sont convergentes, donc elles vérifient le critère de Cauchy suivant :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, n \in \mathbb{N},\ p > n \geq n_0, \text{ on a } \left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| < \epsilon \text{ et } \left|\sum_{k=n+1}^{p} v_k\right| < \epsilon,$$

D''une part, $R_{2n} - S_n T_n$ peut se reécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} R_{2n} - S_n T_n &= u_0(v_{n+1} + ... + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + ... + v_{2n-1}) + ... + u_{n-1}v_{n+1} \\ &\quad + v_0(u_{n+1} + ... + u_{2n}) + v_1(u_{n+1} + ... + u_{2n-1}) + ... + v_{n-1}u_{n+1} \end{aligned}$$

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, $p > n \geq n_0$, on a alors

$$\begin{aligned} |R_{2n} - S_n T_n| &\leq \epsilon \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \ \sum_{k=0}^{n} |v_k| \right) \\ &\leq \epsilon(S + T). \end{aligned}$$

Donc (R_{2n}) est convergente, et de plus :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} R_{2n} &= \lim_{n\to+\infty} S_n T_n \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |R_{2n+1} - R_{2n}| &= |(u_0 v_{2n+1} + ... + u_{n+1}v_n) + (v_0 u_{2n+1} + ... + v_{n+1}u_n)| \\ &\leq \epsilon(S + T), \end{aligned}$$

ce qui assure la convergence de (R_{2n+1}).

Puisque (R_{2n}) et (R_{2n+1}) sont convergentes, (R_n) est également convergente, et de plus :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} R_n &= \lim_{n\to+\infty} R_{2n+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} R_{2n} \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right). \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\left(\sum_{n\geq 0} w_n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} u_n\right).$$

Chapitre 2

Exercices corrigés sur les suites et les séries de fonctions

2.1 Exercices sur les suites et les séries de fonctions

Exercice 2.1.1. *On se donne une suite de fonctions* (f_n) *définie sur une partie* E_i *de* $\mathbb{R}$. *Etudier la convergence simple et uniforme de cette suite de fonctions sur* E_i *dans les cas suivants :*

1) $f_n(x) = \dfrac{1 - nx^2}{1 + nx^2}$, $E_1 = \mathbb{R}$, *puis sur* $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

2) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$, $E_3 = [0, 1]$.

3) $f_n(x) = \cos(\dfrac{5 + nx}{n})$, $E_4 = \mathbb{R}$.

4) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$ *et* $f_n(0) = 0$, $E_5 = \mathbb{R}$ *puis sur* $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$

5) $f_n(x) = x^n(1 - x)$, $E_7 = [0, 1]$.

Exercice 2.1.2. *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On considère la suite de fonctions de terme général*

$$f_n(x) = x^n f(x) \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } x \in [0,1]\,.$$

1. Montrer que la suite de fonction f_n converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction φ que l'on précisera.
2. On suppose que $f(1) \neq 0$. La convergence est-elle uniforme sur le segment $[0,1]$
.
3. On pose $f(x) = 1 - x$.
3.1. Montrer que $\sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - \varphi(x)\right| = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
3.2 La suite de fonction est-elle uniformément convergente vers φ sur $[0,1]$?

Exercice 2.1.3. *Soit α un nombre réel strictement positif. On considère la suite de fonctions définie sur l'intervalle $[0,1]$ par*

$$f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha \text{ pour } n \geq 1.$$

1. Montrer que la suite de fonctions f_n converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ et trouver sa limite.
2. Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers sa limite sur l'intervalle $[0,1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.
3. On suppose $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément sur le segment $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.

Exercice 2.1.4. *Soit la série de fonctions de terme général :*

$$f_n(x) = \sin^2(x)\cos^n(x), \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme.
2) La série est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?.

Exercice 2.1.5. *On pose :*

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme.

2) La série est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?.

3) Etudier la convergence normale sur $[a, b]$, $(0 < a < b)$.

4) Calculer $\sum_{n\geq 1} \int_1^e f_n(x)dx$.

2.2 Solutions des exercices des suites et des séries de fonctions

Solution de l'éxercice 2.1.1

Etudions la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions :

1. $f_n(x) = \dfrac{1 - nx^2}{1 + nx^2}$, $E_1 = \mathbb{R}$ puis sur $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

1.1 **Convergence simple :**

Si $x = 0$, $f_n(0) = 1$ et si $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = -1$. la suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $E_1 = [-a, a]$ vers f, où $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$.

1.2 **Convergence uniforme** :

1.2.1. Sur $E_1 = \mathbb{R}$. La fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, il en résulte que (f_n) ne converge pas uniformément sur E_1.

1.2.2. Sur $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$. On a

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x) - f(x)\right| &= \left|\frac{1 - nx^2}{1 + nx^2} - (-1)\right| \\
&= \left|\frac{2}{1 + nx^2}\right| \\
&\leq \frac{2}{1 + na^2}.
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0, et la suite de fonctions converge uniformèment vers -1 sur $E_2 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

2. $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$, $E_3 = [0, 1]$.

2.1 **Convergence simple :**

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = 0$.

La suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $E_3 = [0,1]$ vers la fonction nulle $f = 0$.

2.2 **Convergence uniforme :**

Puisque chaque fonction

$$x \in E_3 \mapsto f_n(x) - f(x) = \frac{x}{1+nx},$$

est croissante sur E_3, on a donc

$$\sup \left| f_n(x) - f(x) \right| = \frac{1}{1+n}.$$

Cette dernière quantité tend vers 0, et la suite de fonctions converge uniformèment vers 0 sur E_3

3. $\mathrm{f}_n(x) = \cos(\dfrac{5+nx}{n})$, $E_4 = \mathbb{R}$.

3.1 **Convergence simple :**

Si $x = 0$, $f_n(0) = \cos(\frac{5}{n})$, et $\lim f_n(0) = 1$.

Quand $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = \cos(x)$.

Dans tous les cas, la suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $E_4 = \mathbb{R}$ vers f, où $f(x) = \cos(x)$.

3.2 **Convergence uniforme :**

Nous avons

$$\begin{aligned}
\left| f_n(x) - f(x) \right| &= \left| \cos(\frac{5+nx}{n}) - \cos(x) \right| \\
&= \left| \cos(x) \times \cos(\frac{5}{n}) - \sin(x) \times \sin(\frac{5}{n}) - \cos(x) \right| \\
&\leq |\cos(x)| \times \left(\left| \cos(\frac{5}{n}) - 1 \right| + |\sin(x)| \times \left| \sin(\frac{5}{n}) \right| \right) \\
&\leq \frac{25}{2n^2} + \frac{5}{n}.
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers cos, et la suite de fonctions converge uniformèment vers 0 sur E_4.

4. $\mathrm{f}_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$ et $\mathrm{f}_n(0) = 0$, $E_5 = \mathbb{R}$ puis sur $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$

4.1 **Convergence simple :**

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \Rightarrow \lim f_n(0) = 0$, et si $x \neq 0$, $\lim f_n(x) = 0$. la suite de fonctions (f_n) est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers $f(x) = 0$.

4.2 **Convergence uniforme :**

4.2.1 Sur $E_5 = \mathbb{R}$. Considérons la suite de points $(x_n = \dfrac{\pi}{2n})$. On a

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \frac{2}{\pi} \nrightarrow 0,$$

il en résulte que (f_n) ne converge pas uniformément sur $E_5 = \mathbb{R}$.

4.2.2. Sur $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$. On a

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - f(x)\right| &= \left|\frac{\sin(nx)}{nx}\right| \\ &\leq \frac{1}{nx} \\ &\leq \frac{1}{na}.\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0, et la suite de fonctions converge uniformèment vers 0 sur $E_6 = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

5. $f_n(x) = x^n(1-x)$, $E_7 = [0, 1]$.

5.1 **Convergence simple :**

Si $x = 0$ ou $x = 1$, $f_n(0) = f_n(1) = 0$, et la suite converge vers 0. Si $x \in]0, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Finalement, la suite f_n converge simplement sur $[0, 1]$ et sa limite est la fonction nulle $f(x) = 0$.

5.2 **Convergence uniforme :**

En effectuant un calcul simple, on trouve

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = a_n,$$

où $a_n = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Cette dernière quantité équivalente au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{ne}$.

Puisque cette quantité tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, la suite de fonctions considérée converge uniformément vers 0 sur le segment $[0, 1]$.

Solution de l'éxercice 2.1.2

1. On sait que $\lim_{x\to+\infty} x^n = 0$, pour tout $x \in [0,1[$.

On a donc $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1[$.

En $x = 1$, on a $f_n(1) = f(1)$.

Finalement la suite de fonction f_n converge simplement vers la fonction φ définie sur $[0,1]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1[\\ f(1), & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2. Si $f(1) \neq 0$, la fonction φ n'est pas continue sur $[0,1]$ et par suite f_n ne converge pas uniformément sur ce segment.

3.1 Soit $f(x) = 1 - x$.

On a

$$f_n(x) - \varphi(x) = f_n(x) = x^n(1-x).$$

il vient

$$\dot{f_n}(x) = x^{n-1}\left(n - (n+1)x\right).$$

Donc $\dot{f_n}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{n}{n+1}$.

Par suite

$$\begin{aligned} \sup\left|f_n(x) - \varphi(x)\right| &= f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \end{aligned}$$

3.2 Cette dernière quantité équivalente au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{ne}$. Puisque cette quantité tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, la suite de fonctions considérée converge uniformément vers 0 sur le segment $[0,1]$.

Solution de l'éxercice 2.1.3

1. Si $0 \leq x < 1$, $nx^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Si $x = 1$, $f_n(1) = 0$. Donc la suite de fonctions f_n converge simplement vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

2. On cherche le maximum de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour cela, on calcule

$$\dot{f_n}(x) = nx^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}(n-(n+\alpha)x).$$

En posant $x_n = \dfrac{n}{n+\alpha}$, on voit que f_n est croissante sur $[0, x_n]$ et décroissante sur $[x_n, 1]$. f_n atteint donc son maximum en x_n et celui-ci vaut :

$$\begin{aligned} M_n &= f_n(x_n) = n\left(1 - \frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^n \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha \\ &\overset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha n^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Puisque $M_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, la suite de fonctions f_n converge donc bien uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3. On suppose $0 < \alpha \leq 1$.

Supposons que $a \in [0, 1[$ est fixé. Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$, si n est assez grand, $x_n > a$, donc la fonction f_n est croissante sur le segment $[0, a]$ et de plus, lorsque $n \to +\infty$, on a

$$\sup_{0\leq x\leq a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0$$

La suite de fonctions f_n converge donc bien uniformément sur le segment $[0, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$.

Solution de l'éxercice 2.1.4

1. Si $x = 0$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = 0$ et la série converge.
Si $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \sin^2(x)\cos^n(x),\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

est une série géométrique de raison $q = \cos(x) \in [0, 1[$, et donc elle converge sur $\in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Finalement

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}, \text{ si } x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, \text{ si } x = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

2. Puisque S est discontinue en 0, $\sum_{n\geq 0} f_n$, ne donc converge pas uniformément sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solution de l'éxercice 2.1.5

1. Si $x = 0$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = 0$ et la série converge.
Si $x \neq 0$, la série de fonctions de terme général :

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}, \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R},$$

est une série géométrique de raison $q = \dfrac{1}{1+x^2} < 1$, et donc elle converge pour tout $x \neq 0$.
Finalement

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

2. Puisque S n'est pas continue en 0, $\sum_{n\geq 1} f_n$, ne donc converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Etudions la convergence normale sur $[a, b]$ $(0 < a < b)$. On a

$$\begin{aligned} \left|f_n(x)\right| &= \frac{x}{(1+x^2)^n} \\ &\leq \frac{x}{(1+a^2)^n} \\ &\leq \frac{b}{(1+a^2)^n}, \forall x \in [a, b], \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série géométrique converge, et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

4. Calculons $\sum_{n\geq 1} \int_1^e f_n(x)dx$:

Puisque la série de fonctions est uniformément convergente sur $[1, e]$, elle est intégrable terme à terme sur ce segment. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \int_1^e f_n(x)dx &= \int_1^e \sum_{n\geq 1} f_n(x)dx \\ &= \int_1^e \frac{dx}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Exercices corrigés sur les séries entières

3.1 Exercices sur les séries entières

Exercice 3.1.1. *Donner le rayon de convergence et calculer la somme de chacune des séries entières suivante :*

$$\begin{aligned} 1)\ f_1(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n \qquad 2)\ f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ 3)\ f_3(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \qquad 4)\ f_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n\ . \end{aligned}$$

Exercice 3.1.2. *(Théorème d'Abel) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

Montrer que si cette série converge pour $x = R$ (respectivement pour $x = -R$), alors cette série est uniformément convergente sur $[0, R]$ (respectivement sur $[-R, 0]$) et que la somme S de cette série est *continue à gauche de $x = R$ (respectivement à droite de $x = -R$), c'est-à-dire :*

$$\lim_{x \to R^-} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n = S(R),$$

(respectivement.

$$\lim_{x \to -R^+} \sum a_n x^n = \sum a_n (-1) R^n = S(-R).$$

Application : On se donne la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.

1) Trouver le rayon de convergence de cette série et calculer sa somme S.

2) En passant à la limite convenablement justifié calculer $S(1)$ et $S(-1)$.

Exercice 3.1.3. *On considère une série entière de terme général $a_n t^n$, de rayon de converge $R > 0$, et de somme S. On suppose que S est une solution de l'équation différentielle*

$$(1 + t^2)\ddot{f}(t) = 2f(t).$$

1) Etablir une relation liant pour chaque$n \in \mathbb{N}$ les coefficients a_n et a_{n+2}.

2) Déterminer la valeur de a_4 puis de a_{2p} , pour tout $p > 2$.

3) On suppose désormais que $S(0) = 0$ et $\dot{S}(0) = 1$. Calculer a_0, a_2 et la valeur de a_{2p+1}, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que la série entière de terme général $a_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $[-1, +1]$. Quel est son rayon de convergence ?

5) Posons $g(0) = 0$ et $g(t) = \dfrac{\dot{S}(t) - 1}{t}$ pour $t \neq 0$. Calculer la dérivée

$\dot{g}$ de g (on trouvera une fraction rationnelle simple).
6) Déduire de 5) une expression explicite de la fonction S.

Exercice 3.1.4. *1. Trouver une solution diveloppable en série entière de l'équation différentielle*

$$x\dot{y} + y = \frac{1}{1-x}. \tag{3.1}$$

2. Même question pour les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{y} = y \tag{3.2}$$

$$x\ddot{y} - y = 1 \tag{3.3}$$

$$x\ddot{y} + \dot{y} + xy = 0 \tag{3.4}$$

Exercice 3.1.5. *Trouver un intervalle $]-R, R[$ pour que chacune des fonction suivantes soit développable en série entière et donner ce développement :*
1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x-2}$, *2.* $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, *3.* $f_3(x) = \dfrac{2x}{(1+x)(2+x)}$.
4. $f_4(x) = -\dfrac{x}{2} + x\cos^2(x) + \dfrac{-1}{2}\sin(2x)$, *5.* $f_5(x) = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 3.1.6. *On pose*

$$f(t,x) = \frac{x\sin(t)}{x^2 + 1 - 2x\cos(t)}.$$

1) Développer f en série entière selon les puissances de x.
2) Calculer : $\int\limits_0^\pi f(t,x)dt$.

3.2 Solutions des exercices des séries entières

Solution de l'exercice 3.1.1

I) Calculons le rayon et le domaine de convergence ainsi que la somme de chacune des séries entières suivantes :

1) $f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n$, $a \neq 0$.

Rayon de convergence :

On a $a_n = a^n$, ce qui implique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Domaine de convergence :

Si $|x| = \frac{1}{a}$, on a $|a^n x^n| = 1 \nrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$, la série est donc divergente et par suite $D_1 = \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[$.

La somme :

$$\begin{aligned} S_1 &= f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n \\ &= \frac{1}{1-ax}, \text{ pour tout } x \in \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[. \end{aligned}$$

2) $f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

Rayon de convergence :

On a $a_n = n+1$, ce qui implique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = 1.$$

Domaine de convergence : Si $|x| = 1$, on a

$$|(n+1)x^n| = n+1 \to +\infty \neq 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

la série est donc divergente et par suite $D_2 =]-1, 1[$.

La somme :

$$\begin{aligned} S_2 &= f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\end{aligned}$$

3) $f_3(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

Rayon de convergence :

On a $a_n = n^2$, ce qui implique

$$R = \left[\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right]^{-1} = 1.$$

Domaine de convergence : Si $|x| = 1$, on a

$$|(n+1)x^n| = n^2 \to +\infty \neq 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

la série est donc divergente et par suite $D_3 =]-1, 1[$.

La somme :

$$\begin{aligned} S_3 &= f_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\end{aligned}$$

4) $f_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n$.
Rayon de convergence :
On a $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n+1}$, ce qui implique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right]^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Domaine de convergence : Si $x = \frac{1}{2}$, on a

$$(-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

série de Leibnitz, donc elle est convergente.
Si $x = -\frac{1}{2}$, on a

$$(-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n = \frac{1}{n+1} \overset{V(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n},$$

donc elle est divergente.
Finalement $D_4 = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.
La somme :

$$\begin{aligned} S_4 &= f_4(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} \\ &= \frac{1}{2x} \ln(1+2x), \text{ pour tout } x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.5

Nous faisons la démonstration dans le cas où la série converge pour $x = R$.

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n R^n y^n$ de la variable $y \in [0; 1]$.

Pour $y = 1$, la série devient $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ qui est convergente, donc uniformément convergente.
Supposons maintenant que $y \in [0,1[$. Nous utilisons la transformation d'Abel, on peut écrire :

$$\sum_{n\geq 0} a_n R^n y^n = \sum_{n\geq 0} (a_0 + a_1 R + ... + a_n R^n) \left(y^n - y^{n+1}\right).$$

Nous pouvons voire ensuite apparaître la série de terme général

$$g_n(y) = (a_0 + a_1 R + ... + a_n R^n) \left(y^n - y^{n+1}\right).$$

Il nous suffit de montrer que cette série est uniformément convergente.
En effet :

$$\begin{aligned} \left|g_n(y)\right| &= \left|(a_0 + a_1 R + ... + a_n R^n) \left(y^n - y^{n+1}\right)\right| \\ &\leq M(y^n - y^{n+1}), \end{aligned}$$

car la suite(y^n) est décroissante et la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n}$ $a_k R^k$ est bornée.
Pour tout $y \in [0,1[$, la suite de terme général y^n est converge uniformément vers 0.
D'où d'après la propriètè téléscopique, la série $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} (y^n - y^{n+1})$ est uniformément convergente.
Le théorème de comparaison, affirme la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} v_n$.
Il en résulte que la série de départ $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n R^n y^n$ est uniformément convergente sur $[0,1[$.
Nous pouvons maintenant arriver à démontrer la convergence

uniforme de $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n R^n y^n$ sur $[0,1]$.
Chaque fonction $a_n R^n y^n$ est continue sur $[0,1]$, on en déduit la continuité de la some de cette série sur $[0,1]$, et de plus :

$$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n R^n y^n = \begin{cases} S(yR), \text{ si } y \in [0,1[\\ \sum_{n\geq 0} a_n R^n, \text{ si } y = 1. \end{cases}$$

La continuité à gauche en $y = 1$ nous donne alors:

$$\lim_{y\to 1^-} S(yR) = S(R) = \sum_{n\geq 0} a_n R^n.$$

Application : On se donne la série entière $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.
1) Trouvons le rayon de convergence de cette série et calculons sa somme S.
Rayon de convergence :
On a

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)},$$

ce qui implique

$$R = \left[\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right]^{-1} = 1.$$

Domaine de convergence : Si $|x| = 1$, on a

$$\left|\frac{x^n}{n(n-1)}\right| = \frac{1}{n(n-1)} \overset{V(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

donc elle est convergente. Finalement $D = [-1, 1]$.

La somme :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\\
&= x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\\
&= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x\right), \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\\
&= -x\ln(1-x) - [-\ln(1-x) - x], \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\\
&= (1-x)\ln(1-x) + x, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[.
\end{aligned}$$

2) Calculons $S(1)$ et $S(-1)$.

Puisque la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ converge aux bords de l'intervalle de convergence, d'après Abel $S(1)$ et $S(-1)$ existent et de plus :

$$\begin{aligned}
S(1) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \lim_{x \to 1^-} (1-x)\ln(1-x) + x = 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S(-1) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \\
&= \lim_{x \to -1^+} (1-x)\ln(1-x) + x = 2\ln(2) - 1.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3.1.3

On considère une série entière de terme général $a_n t^n$, de rayon de converge $R > 0$, et de somme S. On suppose que S est une solution de l'équation différentielle.

$$(1+t^2)\ddot{f}(t) = 2f(t). \tag{3.5}$$

1) Relation entre les coefficients a_n et a_{n+2} :
On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. L'équation (3.5) devient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

ou d'une manière équivalente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\,a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En rassemblant les termes de même degré, on obtient :

$$a_{n+2} = -\frac{(n-2)}{n+2} a_n.$$

2) En prenant $n = 2$, on trouve $a_4 = 0$ donc aussi $a_{2p} = 0$, pour tout $p > 2$.

3) Les conditions $s(0) = 0$ et $\dot{s}(0) = 1$ impliquent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc aussi $a_2 = 0$.

La valeur de a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$ se calcule par récurrence à partir de a_1 :

Pour $n = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

Pour $n = 3$, $a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = -\frac{1}{3\times 5}$.

Supposons que jusqu'à l'ordre $2p-1$, pour $p \geq 2$ on ait :

$$a_{2p-1} = \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)},$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= -\frac{2p-3}{2p+1} \times \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)} \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)(2p+1)}. \end{aligned}$$

La formule est vérifiée à l'ordre $2p+1$ et donc la récurrence est bien vérifiée et on a :

$$s(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p+1}}{(2p-1)(2p+1)}.$$

4) La série entiére de terme général

$$a_n t^n \tag{3.6}$$

est majorée sur $[-1, +1]$ par la série numérique de terme général $\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$ qui est une série convergente. La série entiére de terme général $a_n t^n$converge donc normalement sur l'intervalle $[-1, +1]$.

Son rayon de convergence est 1 puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+2}}{a_n} = 1$.

5) En dérivant terme à terme la somme de la série entiére de terme, on trouve :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\dot{s}(t)-1}{t}, \text{ pour tout } t \in [-1,1] \text{ et } t \neq 0 \\ &= \frac{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p}}{(2p-1)} - 1}{t}, \text{ pour tout } t \in [-1,1] \text{ et } t \neq 0 \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p-1}}{(2p-1)}, \text{ pour tout } t \in [-1,1]\ . \end{aligned}$$

D'où en dérivant terme à terme, on obtient :

$$\dot{g}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} t^{2p-2} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} = \frac{1}{1+t^2}.$$

En intégrant, on trouve, avec la condition :

$$g(0) = 0, g(t) = \arctan(t).$$

6) On en déduit que la fonction s peut s'écrire :

$$s(t) = \int_0^t t \arctan(t) dt + t.$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$s(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 + 1\right)\arctan(t) + \frac{t}{2}.$$

Solution de l'éxercice 3.1.4

1. Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la solution de l'équation différentielle

$$x\dot{y} + y = \frac{1}{1-x}, \ x \in]-R, R[\tag{3.7}$$

Nous avons :

$$\dot{y}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n,$$

et

$$\dot{y}(x) + y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_n x^n$$

La comparaison avec

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n,$$

nous permet d'écrire :

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent, la seule solution de l'équation différentielle (3.7) est

$$y(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \dots$$

Un calcul simple on montre que le rayon de convergence $R = 1$.

2. Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la solution de l'équation différentielle

$$\ddot{y} = y,\ x \in]-R, R[\tag{3.8}$$

On a :

$$\begin{aligned}\dot{y}(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.\end{aligned}$$

L'équation (3.7) devient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} - a_n\right)x^n = 0,$$

ce qui implique :

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Pour $n = 0$, on a :

$$a_2 = .\frac{a_0}{2}.$$

Pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_2}{3 \times 4} \qquad (3.9) \\ &= \frac{a_0}{4!}. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Par récurrence, on voit que :

$$a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)!} \text{ pour tout } n \geq 1$$

Pour $n = 1$, on a : $a_3 = .\frac{a_1}{2 \times 3}$
Pour $n = 3$, on a : $a_5 = \frac{a_3}{4 \times 5} = \frac{a_1}{5!}$.

Par récurrence, on voit que

$$a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p+1)!} \text{ pour tout } n \geq 1$$

Par conséquent, la seule solution de l'équation différentielle (3.8) est

$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Un calcul simple on montre que le rayon de convergence $R = +\infty$.

On sait que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \cosh(x),$$

et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sinh(x).$$

On a alors :

$$y(x) = a_0 \cosh(x) + a_1 \sinh(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. Supposons que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la solution de l'équation différentielle :

$$x\ddot{y} - y = 1, \; x \in]-R, R[\tag{3.11}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} x\ddot{y}(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

L'équation (3.11) devient

$$-a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n+1)a_{n+1} - a_n\right) x^n = 1,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{n(n+1)} \text{ pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on a :

$$a_2 = .\frac{a_1}{1 \times 2}.$$

Pour $n = 2$, on a :

$$a_3 = \frac{a_1}{1 \times 2 \times 2 \times 3}.$$

Pour $n = 3$, on a :

$$a_4 = \frac{a_1}{1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4}.$$

Par récurrence, on voit que

$$a_{n+1} = \frac{a_1}{(n!)^2(n+1),} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Par conséquent, la seule solution de l'équation différentielle (3.11) est

$$y(x) = -1 + a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{((n-1)!)^2 n}.$$

Un calcul simple on montre que le rayon de convergence $R = +\infty$.

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{((n-1)!)^2 n}$ est donc converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle est donc solution de l'équation différentielle (3.11) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4. Supposons que $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la solution de l'équation différentielle

$$x\ddot{y} + \dot{y} + xy = 0, \ x \in \left]-R, R\right[\tag{3.12}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} xy(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x\ddot{y}(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

L'équation (3.12) devient :

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_{n-1} + (n+1)\, a_{n+1} + n\,(n+1)\, a_{n+1}\right) x^n = 0,$$

ou d'une manière équivalente :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

C'est-à-dire :

$$a_1 = 0 \text{ et } a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Pour $n = 2$, on a : $a_3 = 0$.

Pour $n = 4$, on a : $a_5 = 0$.

Par récurrence, on voit que

$$a_{2p-1} = 0 \;\text{ pour tout } n \geq 1$$

Pour $n = 1$, on a :

$$a_2 = -\frac{a_0}{4}.$$

Pour $n = 3$, on a :

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 2^2} = (-)^2 \frac{a_0}{4^2 2^2}.$$

Pour $n = 5$, on a :

$$a_6 = -\frac{a_4}{4 3^2} = (-)^3 \frac{a_0}{4^3 (3!)^2}.$$

Par récurrence, on voit que et

$$a_{2p} = (-)^p \frac{a_0}{4^p (p!)^2} \;\text{ pour tout } n \geq 1.$$

Par conséquent, la seule solution de l'équation différentielle (3.12) est

$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-)^p \frac{x^{2p}}{4^p (p!)^2}.$$

Un calcul simple on montre que le rayon de convergence $R = +\infty$.

La série $a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-)^p \frac{x^{2p}}{4^p (p!)^2}$ est donc converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle est donc solution solution de l'équation différentielle (3.12) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution de l'éxercice 3.1.5

1. On a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

qui est la somme des termes d'une série géométrique de raison $\frac{x}{2}$. La somme précédente a un sens lorsque $x \in]-2, 2[$.

1. On a :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ddot{f_1}(x) \end{aligned}$$

Puisque on peut dériver deux fois la série $\frac{-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ terme à terme sans modifier le rayon de convergence, on trouve alors :

$$f_2(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n+2}} x^{n-2} \text{ pour tout } x \in]-2, 2[.$$

3. 1. Une décomposition de la fonction f_3 en éléments simples nous donne :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{2x}{(1-x)(2+x)} \\ &= g(x) - h(x), \text{ où } g(x) \\ &= \frac{1}{1-x} \text{ et } h(x) = \frac{2}{2+x}. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ pour tout } x \in]-1, 1[$$

et

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2+x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \text{ pour tout } x \in]-2, 2[\,. \end{aligned}$$

En faisant le calcul uniquement sur l'intervalle commun $]-1, 1[$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\right)x^n \text{ pour tout } x \in]-1, 1[\end{aligned}$$

4. En utilisant la formule :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2},$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_4(x) &= x\cos^2(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\cos(2x) + \sin(2x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^{2n+1}\left(\frac{1}{(2n)!} + \frac{1}{(2n+1)!}\right)\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Puisque cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, on peut alors l'intégrer terme à terme sur tout intervalle $[0, x]$ sans modifier son rayon de convergence. On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Solution de l'éxercice 3.1.6

Soit

$$f(t, x) = \frac{x\sin(t)}{x^2 + 1 - 2x\cos(t)}.$$

1) Développons f en série entière selon les puissances de x.

Nous avons

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{x\sin(t)}{x^2+1-2x\cos(t)} \\ &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-x\exp(it)} - \frac{1}{1-x\exp(-it)}\right). \end{aligned}$$

Donc, pour $|x|<1$, on a :

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\exp(int)-\exp(-int)\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sin(nt)x^n. \end{aligned}$$

2) Soit $|x|<1$ fixé. La série de fonctions de terme général $\sin(nt)x^n$ est normalement convergente sur le domaine $t\in[0,\pi]$ car elle est dominée par la série numérique convergente de terme général x^n.

On peut donc l'intégrer terme à terme sur $[0,\pi]$; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(t,x)dt &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\sin(nt)x^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} x^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= 2\arg th(x). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Exercices corrigés sur les séries de Fourier

4.1 Exercices sur les séries de Fourier

Exercice 4.1.1. *Soit f une fonction $T-$périodique. Montrer que :*

1. Le nombre $-T$ est aussi une période de f.

2. Le nombre nT, $n \in \mathbb{Z}$ est aussi une période de f.

Exercice 4.1.2. *Soit f une fonction T-périodique. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$g(x) = f(\alpha x + \beta, (\alpha \neq 0),$$

est $\dfrac{T}{\alpha}$-périodique.

Exercice 4.1.3. *Soit f une fonction T-périodique et intégrable sur un intervalle $[\lambda, \lambda + T]$ (intervalle de longueur T). Montrer que :*

$$\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.1.4. *Soit f une fonction $2l$-périodique. Montrer que :*
1. Si f est paire sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier de la fonction f sont donnés par :

$$\begin{cases} b_n = 0, \text{ pour tout } n \geq 1 \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \text{ pour tout } n \geq 0. \end{cases}$$

2) Si f est impaire sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier de f sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = 0, \text{ pour tout } n \geq 0, \\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 4.1.5. *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$. Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = 0.$$

Exercice 4.1.6. *On rappelle que le noyau de Dirichlet la fonction D_n est définie par :*

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}, & \text{si } x \neq 2ml, \ m \in \mathbb{Z} \\ n + \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = 2ml, \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Montrer que :
1. D_n est une fonction paire et périodique de période $2l$.
2. D_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. D_n peut se représenter par la formule :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et de plus :

$$\frac{1}{l}\int_0^l D_n(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.1.7. *(Théorème de Dirichlet) Soit f une fonction $2l$–périodique etde classe C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement en tout point x de $\mathbb{R}$ et a pour somme :*

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

De plus si f est continue, la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et $S(x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.1.8. ***I.*** *Soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ deux séries absolument convergentes de réels.*

1. Montrer que la série de fonctions :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right),$$

est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

On pose :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right),$$

et

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$$

2. Que peut-on dire de la fonction f ?.

3. Calculer :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(px)dt \text{ et } \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(px)dt,\ \ \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*.$$

4. Montrer que la suite de fonction $(s_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* f^2.

5. Calculer $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} s_n^2(t)dt$ *et en déduire la formule (dite de Parseval) :*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

II. Application : *On considère la fonction* 2π*-périodique* f *définie par :*

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \ \ pour\ x \in [-\pi, \pi].$$

1. Montrer que f *est développable en série de Fourier et calculer leur coefficients.*

2. En déduire les sommes des séries numériques $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, *en choisissant des valeurs particulières de* x.

3. Calculer en appliquant la formule de Parseval la somme de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 4.1.9. *On considère la fonction* 2π*-périodique* f *définie par :*

$$f(x) = x, \qquad pour\ x \in \,]-\pi, \pi[\,.$$

1. Montrer que f *est développable en série de Fourier et calculer leurs coefficients.*

2. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, *en choisissant une valeur particulière de* x.

3. Calculer en appliquant la formule de Parseval la somme $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. *En déduire la somme de la série* $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

4.2 Solutions des exercices des séries de Fourier

Solution de l'éxercice 4.24

1. Puisque f est une fonction $T-$périodique, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(x-T) &= f(x-T+T) \\ &= f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

2. Si $n \geq 0$, par récurrence on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x+nT) &= f(x+(n-1)T+T) = f(x+(n-1)T) \\ &= \ldots \\ &\ldots \\ &\ldots \\ &= f(x+T) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Supposons maintenant que $n < 0$. Puisque $-T$ est aussi une période de f, l'utilisation de la preuve précédente donne :

$$f(x+nT) = f(x+(-n)(-T)) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Solution de l'éxercice 4.25

Puisque f est $T-$périodique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} g\left(x+\frac{T}{\alpha}\right) &= f\left[\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)+\beta\right] \\ &= f(\alpha x+\beta+T) = f(\alpha x+\beta) = g(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Solution de l'éxercice 4.1.3

En effet :

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda}^{\lambda+T} f(x)dx &= \int_{\lambda}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{\lambda+T} f(x)dx \\
&= \int_{\lambda}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{\lambda+T} f(x-T)dx \ \ (\text{car } -T \text{ est aussi une période de } f\,) \\
&= \int_{\lambda}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{\lambda} f(x)dx \ (\text{en posant } x-T=X) \\
&= \int_{0}^{T} f(x)dx, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Solution de l'éxercice 4.1.4

1. Puisque f est paire, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \\
&= \frac{1}{l}\left[\int_{-l}^{0} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + \int_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{l}\left[\int_{l}^{0} f(-x)\cos\left(-\frac{n\pi x}{l}\right)d(-x) + \int_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{l}\left[\int_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + \int_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] \\
&= \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.
\end{aligned}$$

D'autre part si f est paire sur $\mathbb{R}$, la fonction $f\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ est impaire pour tout $n \geq 1$, et donc :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = -\frac{1}{l}\int_{l}^{-l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)d(-x) \\
&= -\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)d(x) = -\frac{1}{l}b_n,
\end{aligned}$$

Par conséquent $b_n = 0$, pour tout $n \geq 1$.

2. La démonstration est analogue pour le cas où f est impair.

Solution de l'éxercice 4.1.5

Il suffit de démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0.$$

Supposons que f est intégrable sur $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ par un nombre fini de points :$a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$ et une fonction escalier φ définie par $\varphi(x) = m_j$, $x \in \left[x_{j-1}, x_j\right[$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tels que :

$$\left|f(x) - \varphi(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \text{ pour tout } \epsilon > 0. \tag{4.6}$$

On peut alors écrire :

$$\int_a^b \left|[f(x) - \varphi(x)] \exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right)\right| dx \leq \int_a^b \left|f(x) - \varphi(x)\right| < \epsilon, \text{ pour tout } \epsilon > 0. \tag{4.7}$$

Par coséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \exp\left(i\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0. \tag{4.8}$$

Solution de l'éxercice 4.1.6

1. D_n est une fonction paire (évident).

D'autre part, pour tout $x \neq 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} D_n(x+2l) &= \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l} + (2n+1)\pi\right]}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}+\pi\right)} \\ &= \frac{-\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \qquad (4.9) \\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \\ &= D_n(x). \qquad (4.10) \end{aligned}$$

La fonction D_n est donc $2l$ -périodique.

2. Il suffit de démontrer que D_n est continue au oint $x_0 = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} D_n(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}} \times \frac{\frac{\pi x}{2l}}{\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \times \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}}{2\times\frac{\pi x}{2l}} \\ &= n+\frac{1}{2} = D_n(0). \end{aligned}$$

La fonction D_n est donc continue au point $x_0 = 0$. Par périodicité de la fonction D_n, on en déduit alors que D_n est continue en tout point $x = 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$. Par conséquent D_n est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Pour tout $x \neq 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\frac{\pi x}{l}) = \frac{1}{2} + \Re\left(\sum_{k=1}^{n} \exp(ik\frac{\pi x}{l})\right) \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{1-\exp(in\frac{\pi x}{l})}{1-\exp(i\frac{\pi x}{l})}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{1-\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{1-\cos(\frac{\pi x}{l}) - i\sin(\frac{\pi x}{l})}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{2\sin^2(\frac{n\pi x}{2l}) - 2i\cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - 2i\cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp(i\frac{\pi x}{l})\left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \Re\left[\exp\left((i\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)\left(\frac{\sin(\frac{n\pi x}{2l})}{\sin(\frac{n\pi x}{2l})}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} + \cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}\right] \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)} \qquad (4.11) \\
&= D_n(x). \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Si $x = 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2km\pi) = \frac{1}{2} + n. \tag{4.13}$$

De plus, on a :

$$\frac{1}{l}\int_0^l D_n(x)dx = \frac{1}{2l}\int_0^l dx + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\int_0^l \cos(\frac{k\pi x}{l})dx = \frac{1}{2}. \tag{4.14}$$

Solution de l'éxercice 4.1.7

Soit x un point de $\mathbb{R}$ quelconque. Il suffit de démontrere

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \tag{4.15}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)dt\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{n\pi\,(t-x)}{l}\right)\right)dt\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D_n\,(t-x)\,dt\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+y)D_n\,(y)\,dy \quad (\text{ en utilisant le changement } y = t-x)\\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+y)D_n\,(y)\,dy\\
&= \frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{0} f(x+y)D_n\,(y)\,dy + \int_0^l f(x+y)D_n\,(y)\,dy\right)\\
&= \frac{1}{l}\int_0^l \left(f(x-y) + f(x+y)\right)D_n\,(y)\,dy \ (\text{en utilisant le changement } u \mapsto -u\ ).
\end{aligned}$$

L'utilisation des formoles :

$$\begin{aligned}\frac{1}{l}\int_0^l D_n(y)dy &= \frac{1}{l}\int_0^l \left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\right)dy\\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

nous donne :

$$\begin{aligned}S_n(x)-\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{l}\int_0^l (f(x-y)+f(x+y))\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\right)dy+\\ &\quad -\left(\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2l}\right)\int_0^l\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\right)dy.\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{f(x-y)-f(x^-)}{y}\times\frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\times\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)dy+\\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{f(x+y)-f(x^+)}{y}\times\frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)}\times\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)dy.\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est de classe C^1 par morceau et $\lim \frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)} = \frac{1}{2}$, les fonctions :

$$y\mapsto \frac{f(x-y)-f(x^-)}{y}\times\frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)} \text{ et } y\mapsto \frac{f(x+y)-f(x^+)}{y}\times\frac{\frac{\pi y}{l}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2l}\right)},$$

sont bornées.

Le résultat est donc une conséquence de l'exercice 4.1.5.

Solution de l'éxercice 4.1.8

I. 1. Montrons que la série de fonctions

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sont absolument convergentes, alors d'après Weierstrass, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est uniformément convergente.

2. $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue et la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est uniformément convergente, on en déduit que la somme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{4.16}$$

est une fonction continue.

3. On multiplie le terme général de la série trigonométrique (4.16) par $\cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)$ ou par $\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)$ et en vertue des inégalités suivantes :

$$\left|\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right] \cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\right| \leq |a_n| + |b_n|, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{4.17}$$

$$\left|\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right] \sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\right| \leq |a_n| + |b_n|, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \tag{4.18}$$

on peut assurer la convergence uniforme des séries de fonctions suivantes :

$$\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\ \cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right) \tag{4.19}$$

et

$$\sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right) \tag{4.20}$$

Par conséquent, on peut les intégrer terme à terme.

Maintenant, en utilisant les propriétés :

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=0,\ \text{pour tout } n\neq p, \tag{4.21}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\sin^2\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=l, \tag{4.22}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{p\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=0,\ \text{pour tout } n,p\geq 1, \tag{4.23}$$

on trouve

$$\int_{-l}^{l}S(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=la_p,\ p\geq 0, \tag{4.24}$$

$$\int_{-l}^{l}S(x)\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx=lb_p,\ p\geq 1, \tag{4.25}$$

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|\leq\sum_{k\geq n+1}|a_k+b_k|,$$

quantité tendant vers 0, quand $n\to+\infty$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\left|f^2(x)-S_n^2(x)\right| &= \left|f(x)-S_n(x)\right|\left|f(x)+S_n(x)\right|\\ &\leq \left|f(x)-S_n(x)\right|\times 2\left|f(x)\right|\\ &\leq 2\sum_{k\geq n+1}|a_k+b_k|\left(\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{k\geq 1}|a_k+b_k|\right)\to 0,\ \text{quand } n\to+\infty.\end{aligned}$$

La suite de fonction S_n^2 est donc uniformément convergente vers f^2.

5. Cette dernière convergence uniforme nous permet d'écrire

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S_n^2(x)dx\right)$$

En utilisant toujours les propriétés (4.21), (4.22) et (4.23) et le fait que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + 2\sum_{i,j=1_{i\neq j}}^{n}\alpha_i\alpha_j et \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\frac{a_0^2}{4}dx = \frac{a_0^2}{2},$$

on en déduit bien que :

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} S_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

En faisant n tendre vers $+\infty$, on trouve :

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

II. Application

1. f 2π-périodique définie par : $f(x) = x^2$, pour $x \in [-\pi, \pi]$.

2. f est de classe C^1 par morçeaux sur $\mathbb{R}$, d'aprés Dirichlet f est développable en série de Fourier.

2. f est paire, alors $b_n = 0, \forall n \geq 1$, et $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{\pi^2}{3}$.

Le calcul de a_n se fait par une double intégration par parties, et on trouve :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{2}\cos(nx)dx = \frac{2}{n^2}(-1)^n.$$

La série de Fourier est donc :

$$S_F(f) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

3. *$x = \pi$ est un point de continuité, alors :

$$f(\pi) = S(\pi) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2},$$

ce qui implique :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

*$x = 0$ est aussi un point de continuité, on obtient cette fois

$$f(0) = S(0) \Leftrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

, ce qui implique :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

*L'égalitéé de Parseval donne :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x^4}{4}dx = \frac{\pi^4}{10} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Solution de l'éxercice 4.1.9

1. f 2π-périodique et est de classe C^1 par morçeaux sur $\mathbb{R}$, d'aprés Dirichlet f est développable en série de Fourier.

2. f est impaire, alors $a_n = 0, \forall n \geq 0$.

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx.$

Par parties :

$$b_n = \frac{2}{\pi}(\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

La série de Fourier de f est donc :

$$S_f(x) = 2\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

3. $x = \frac{\pi}{2}$ est un point de continuité, donc

$$f(\frac{\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2})$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}(-1)^n$$

Alors :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. L'égalitéé de Parseval donne :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2.$$

C'est-à-dire

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1^2}.\end{aligned}$$

Par suite :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1^2} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \underset{n\geq 1}{-} \frac{1}{4}\sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Chapitre 5

Exercices corrigés sur les intégrales généralisées

5.1 Exercices sur les intégrales généralisées

Exercice 5.1.1. *En revenant à la définition, étudier si les intégrales impropres suivantes ont un sens ou non et donner leur éventuelle valeur*

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx,\ n \in \mathbb{N},$ 2. $J_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(x))^n dx,\ n \in \mathbb{N},$

3. $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$

Exercice 5.1.2. *Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes*

$$1.\ I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha |\ln x|^\beta}dx, \qquad 2.\ I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x\sin x)}{|x\ln x|^\delta}dx,$$

$$3.\ I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(x^2)+\cos(x^3)}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}dx, \qquad 4.\ I_4 = \int_1^{2} \frac{(x-1)^\alpha}{\left|\ln^\beta x\right|}dx\,.$$

Exercice 5.1.3. *Etudier la convergence absolue et la semi-convergence des intégrales généralisées suivantes :*

$$1.\ I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\theta}dx,\ \theta \in \mathbb{R}_+^* \qquad 2.\ I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}+\cos x}dx\,.$$

Exercice 5.1.4. *Soit α un réel positif donné.*

1. Montrer que L'intégrale généralisée :

$$F(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}dx,$$

est absolument convergente.

2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$.

Exercice 5.1.5. *Soient P et Q deux polynômes tels que* $\deg(P) < \deg(Q)$.

Etudier la convergence de l'intégrale généralisée sivante :

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x)dx,\ Q \text{ ne s'annule pas sur } [a,+\infty[\,.$$

Exercice 5.1.6. *Soit f une fonction admet sur $[a,b]$ un seul point singulierc $\in]a,b[$.*
On rappelle que la valeur principale de Cauchy (ou bien valeur principale de l'intégrale divergente $\int_a^b f(t)dt$), notée $V.P\left(\int_a^b f(t)dt\right)$ est un l'élément de $\mathbb{R}$ défini par :

$$V.P\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \lim_{\epsilon \to \to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(t)dt + \int_{c+\epsilon}^b f(t)dt\right) \text{ (lorsque cette limite existe).}$$

On considère l'intégrale $\int_0^2 \frac{dt}{t-1}$. Montrer que

$$V.P\left(\int_0^2 \frac{dt}{t-1}\right) = 0.$$

5.2 Solutions des exercices des intégrales généralisées

Solution de l'éxercice 5.1.1

Etudions si les intégrales impropres suivantes ont un sens et donnons leurs éventuelle valeurs

1. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx$, $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$x^n \exp(-x) = O\left(\exp(-x)\right), \text{ quand } x \to +\infty.$$

Puisque $\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x)dx$ converge, on déduit que $\int\limits_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx$ converge aussi.

Calculons sa valeur :

On fait l'intégration par parties.

Posons

$$f(x) = x^n \text{ et } \dot{g}(x) = \exp(-x),$$

on a alors

$$\dot{f}(x) = nx^{n-1} \text{ et } g(x) = -\exp(-x).$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx \\
&= \lim_{y\to+\infty} \left[-nx^{n-1}\exp(-x)\right]_0^y + n\int_0^{+\infty} x^n \exp(-x)dx \\
&= nI_{n-1}.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve $I_n = n!I_0$.
Puisque $\int_0^{+\infty} \exp(-x)dx = 1$, on a alors $I_n = n!$.

2. $J_n = \int_0^1 \ln^n(x)dx,\ n \in \mathbb{N}$.
Toujours, on fait l'intégration par parties, en posant :

$$\dot{f}(x) = 1 \text{ et } g(x) = \ln^n(x),$$

on trouve :

$$f(x) = x \text{ et } \dot{g}(x) = n\frac{\ln^{n-1}(x)}{x}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^1 \ln^n(x)dx \\
&= \lim_{y\to 0} \left[x\ln^n(x)\right]_y^1 - n\int_0^1 \ln^{n-1}(x)dx \\
&= -nJ_n.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve $J_n = (-1)^n n! J_0$.

Puisque $J_0 = 1$, on a alors $J_n = (-1)^n n!$ et l'intégrale considérée converge.

3. $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$. Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

Il suffit d'étudier la convergence des deux intégrales $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$ et $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

Au voisinage de 0, on a :

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \text{ quand } x \to 0.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est donc l'intégrale de Riemann qui converge, ce qui montre la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

Au voisinage de 2, on a :

$$f(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right), \text{ quand } x \to 2.$$

$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ est donc l'intégrale de Riemann qui converge, ce qui montre la convergence de l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$.

On en déduit alors que $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$ converge.

Calculons sa valeur :

Le changement de variable

$$y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto x = g(y) = 2\sin^2 y,$$

est une bijection croissante de classe C^1 de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, 2[$ .On a alors :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin y \cos y}{2\sin y \cos y} dy \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \pi \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.1.2

Etudions la convergence des intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx$. Posons $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$. Cette fonction est positive, équivalentea u voisinage de 0^+ à $\frac{1}{x^{\alpha-1} |\ln x|^\beta}$.
Il s'agit alors d'une intégrale de Bertrand qui converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, ou $\alpha - 1 = 1$ et $\beta > 1$, soit donc $\alpha < 2$ et $\beta \in \mathbb{R}$, ou $\alpha = 2$ et $\beta > 1$.
2. $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1 + x\sin x)}{|x\ln x|^\delta} dx$. Posons $f(x) = \frac{\ln(1 + x\sin x)}{|x\ln x|^\delta}$. Cette fonction est positive, équivalente au voisinage de 0^+ à $\frac{x^2}{x^\delta \left|\ln^\delta x\right|} = \frac{1}{x^{\delta-2} \left|\ln^\delta x\right|}$.
Il s'agit alors d'une intégrale de Bertrand qui converge si et seulement si $\delta - 2 \leq 1$ soit donc $\delta \leq 3$.

3. $I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(x^2)+\cos(x^3)}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}} dx$. On a :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \frac{\sin(x^2)+\cos(x^3)}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &\leq \frac{2}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

La comparaison avec l'intégrale de Bertrand affirme que cette intégrale converge , donc $I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(x^2)+\cos(x^3)}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}} dx$ est absolument convergente.

$I_4 = \int_1^2 \frac{(x-1)^\alpha}{|\ln^\beta x|} dx$. Posons $f(x) = \frac{(x-1)^\alpha}{|\ln^\beta x|}$. Cette fonction est positive, équivalente au voisinage de 1 à $\frac{(x-1)^\alpha}{(x-1)^\beta} = \frac{1}{(x-1)^{\beta-\alpha}}$.

La comparaison avec l'intégrale de Riemann afirme que cette intégrale converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Solution de l'éxercice 5.1.3

Etudions la convergence absolue et la semi-convergence des intégrales généralisées suivantes :

1. $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\theta} dx$, $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $f(x) = \frac{\sin x}{x^\theta}$.

Si $\theta > 1$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\theta}$ La comparaison avec l'intégrale de Riemann affirme que cette intégrale converge.

Donc $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\theta} dx$ est absolument convergente pour tout $\theta > 1$.

Si $0 < \theta \leq 1$, on a

$$\left|f(x)\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\theta} = \frac{1}{2x^\theta} - \frac{\cos 2x}{x^\theta}.$$

Puisque $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\theta} dx$ est l'intégrale de Riemann qui diverge (car $\theta \leq 1$) et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\theta} dx$ converge d'après Abel. Donc l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x^\theta} - \frac{\cos 2x}{x^\theta}\right) dx$ diverge, on en déduit que $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\theta} dx$ ne converge pas absolument.

D'autre part, cette intégrale est convergente, ce qui montre la semi-convergence de cette intégrale pour tout $0 < \theta \leq 1$.

2. $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x} + \cos x} dx$.

Un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$ nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{\sqrt{x} + \cos x} &= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x} \epsilon(x)\right), \epsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty \\
&= \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{\cos^2 x}{x} + \frac{\cos^3 x}{x\sqrt{x}} (1 + \epsilon(x)), \epsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales sont semi-convergentes et la troisième est absolument convergente.

On en déduit que $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x} + \cos x} dx$ est semi-convergente.

Solution de l'éxercice 5.1.4

1. Montrons que $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2} dx$ est absolument conver-

gente et que pour tout $\alpha \neq \lim_{\alpha \to +\infty} F(\alpha) = 0$.

Puisque :

$$\left| \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

et l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ converge, l'intégrale considérée est donc absolument convergente.

2. Soit maintenant α un réel strictement positif.

On fait l'intégration par partie sur le segment $[0, y]$ en posant :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \; \acute{f}(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ \text{et } \dot{g}(x) &= \cos(\alpha x), \; g(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\int\limits_0^y \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \left(\left[\frac{\sin(\alpha x)}{1+x^2} \right]_0^y - \int\limits_0^y \frac{2x \sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx \right).$$

On passe à la limite, quand $y \to +\infty$, on trouve :

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^y \frac{2x \sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx.$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
|F(\alpha)| &= \frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{2x\,|\sin(\alpha x|)}{(1+x^2)^2}dx \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{2x\,|\sin(\alpha x|)}{(1+x^2)^2}dx \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \\
&= \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

On en déduit alorq que $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$.

Solution de l'éxercice 5.1.5

Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Etudions la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x)dx.$$

1. Si $\deg(P) = \deg(Q) - 1$:

Un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ nous permet d'écrire :

$\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x) = \frac{\alpha}{x}\cos(x) + \frac{\cos(x)}{x^n}(\beta + \epsilon(x))$, $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$,

où α et β sont des réels, $n \geq 2$ un entier positif.

La première intégrale est semi-convergente et la deuxième est absolument convergente.

On en déduit que $\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x)dx$. est semi-convergente.

2. 1. Si $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$:

Un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ nous permet d'écrire :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(x) = \frac{\alpha}{x^n}\cos(x)\,(1+\epsilon(x))\,,\; n \geq 2 \text{ et } \epsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty.$$

On obtient alors une intégrale absolument convergente.

Solution de l'éxercice 5.1.6

Il est claire que cette intégrale est divergente. On a alors :

$$\begin{aligned} V.P\left(\int_0^2 \frac{dt}{t-1}\right) &= \lim_{\epsilon \to \to 0}\left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{t-1}) + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dt}{t-1}dt\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to \to 0}\left(\ln\frac{\epsilon}{\epsilon} + \ln\frac{1}{1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Chapitre 6

Exercices corrigés sur les intégrales dépendants d'un paramètre

6.1 Exercices sur les intégrales dépendants d'un paramètre

Exercice 6.1.1. *En revenant à la définition, étudier si les limites suivantes ont un sens ou non et donner leur éventuelle valeur :*

$$1)\lim_{y\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x\left(y+1\right)\right)}{2+\sin\left(x\left(y+1\right)\right)}dx \qquad 2)\ \lim_{y\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2+1}\ ,$$

$$y\to 0$$

Exercice 6.1.2. *1. Montrer que l'intégrale généralisée :*

$$I(y) = \int_0^{+\infty} y \exp(-xy) dx,$$

converge simplement sur $[0, 1]$*, mais elle ne converge pas uniformément sur le même segment.*

2. Montrons que cette intégrale converge uniformément sur tout segment $]0, 1]$.

Exercice 6.1.3. *1. Etudier si l'intégrale généralisée suivante a un sens ou non et donner leur éventuelle valeur :*

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x) \frac{\sin(\beta x)}{x} dx, \ \alpha \geq 0.$$

2. En passant à la limite convenablement justifiéé, trouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx.$$

3. En déduire les valeurs des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)\cos(\beta x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(\alpha x)}{x} dx.$$

Exercice 6.1.4. *Soient* α *et* β *deux nombres réels non nules. En effectuant une dérivation par rapport au paramètre a, établir la relation suivante :*

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2\right) dx = \pi \ln\left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\right)$$

Exercice 6.1.5. *On rappelle que fonction gamma d'Euler est la fonction spéciale* Γ *définie par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x)dx, \ \alpha > 0. \tag{6.1}$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction Γ *ayant la propriété suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \ \textit{pour tout } \alpha > 0, \tag{6.2}$$

en particulier $\Gamma(n + 1) = n!$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que la fonction Γ *est infiniment dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et de plus, on a :*

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln^n(x)x^{\alpha-1} \exp(-x)dx. \tag{6.3}$$

Exercice 6.1.6. *On rappelle que la fonction béta d'Euler, est la fonction spéciale* B *qui définie par*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} dx, \ \alpha, \beta > 0. \tag{6.4a}$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. Montrer que pour tout $\alpha, \beta > 0$, *on a :*

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha). \tag{6.5}$$

3. Montrer que la fonction béta peut se représenter par la formule suivante :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt. \tag{6.6}$$

Exercice 6.1.7. *1. Montrer que pour tout $\alpha,\beta > 0$, on a :*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{6.7}$$

2. Montrer que

$$\begin{aligned} B(\alpha, 1-\alpha) &= \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \\ &= \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \ \alpha \in \left]0,1\right[. \end{aligned}$$

Exercice 6.1.8. *En utilisant les fonctions spéciales, calculer les intégrales suivantes :*

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \ \textit{(en posant } y = \frac{x}{2}\textit{)}. \\ J_2 &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\ln(x))\,dx}{x\sqrt{\ln x}\,(1+\ln x)} \ \textit{(en posant } y = \ln x\textit{)}. \\ J_3 &= \int_0^{+\infty} \exp(-3x)\left(\exp(x)-1\right)^{\frac{3}{2}} dx \ \textit{(en posant } \exp x = 1+y\textit{)}. \\ J_4 &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{(1+t)^3}dt. \end{aligned}$$

6.2 Solutions des exercices des intégrales dépendants d'un paramètre

Solution de l'éxercice 6.1.1

1. Il s'agit donc d'une intégrale propre.

Posons $f(x,y) = \dfrac{\cos(x(y+1))}{2+\sin(x(y+1))}$. Cette fonction est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$.

Donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x(y+1))}{2+\sin(x(y+1))} dx,$$

est une fonction continue. On a alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x(y+1))}{2+\sin(x(y+1))} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{y\to 0} \frac{\cos(x(y+1))}{2+\sin(x(y+1))} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} dx \\
&= [\ln(2+\sin(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \ln\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

2. Il s'agit donc d'une intégrale impropre.

Posons $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$. Cette fonction est continue sur $[0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

De plus, pour tout $(x,y) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{x^2+y^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

Puisque l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ converge, le critère de Weierstrass assure la convergence uniforme de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1},$$

est une fonction continue. on a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1} &= \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to 0} \frac{dx}{x^2+y^2+1} \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{t\to+\infty} [\arctan(x)]_0^t \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6.1.2

1. Montrons que l'intégrale généralisée $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} y\exp(-xy)dx$ converge simplement sur $[0,1]$.

Posons $f(x,y) = y\exp(-xy)$.

* Si $y = 0$, on a $f(x,0) = 0$, ce qui implique :

$$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} 0dx = 0.$$

* Si $y \in]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^{+\infty} y \exp(-xy)dx \\ &= -\lim_{t\to+\infty} [\exp(-xy)]_0^t \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par suite $I(y) = \int_0^{+\infty} y \exp(-xy)dx$ converge simplement sur $[0,1]$, etde plus :

$$I(y) = \begin{cases} 0, \text{ si } y = 0 \\ 1, \text{ si } y \in]0,1]. \end{cases}$$

La fonction n'étant pas continue, on en déduit que l'intégrale considérée ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2. Montrons que $I(y) = \int_0^{+\infty} y \exp(-xy)dx$ converge uniformément sur tout segment $]0,1]$.

En effet, soit $\delta > 0$. Pour tout $y \in [\delta,1]$, on a :

$$y \exp(-xy) \leq \exp(-x\delta).$$

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-x\delta)dx = 1$ converge, le critère de Weierstrass assure la convergence uniforme de l'intégrale $\int_0^{+\infty} y \exp(-xy)$ sur $[\delta,1]$, pour tout $\delta > 0$, donc elle converge uniformément sur $]0,1]$.

Solution de l'éxercice 6.1.3

1. Etudions si l'intégrale généralisée

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x) \frac{\sin(\beta x)}{x}dx, \ \alpha \geq 0.$$

a un sens ou non et donnons leur éventuelle valeur.
Soit α un nombre réel strictement positif fixé.
Posons :

$$f(x,\beta) = \begin{cases} \exp(-\alpha x)\ \dfrac{\sin(\beta x)}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ \beta, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Il suffit de démontrer les propriètés suivantes :

1. Les fonctions f et sa dérivée par rapport à β sont continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$. 2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,\beta)dx$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta)dx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
En effet : Pour tout $x \in [0,+\infty[$ fixés, f est dérivable par rapport à β sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta) = \exp(-\alpha x)\cos(\beta x).$$

Il est claire que f et $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ sont continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
De plus, la fonction $x \mapsto \dfrac{\exp(-\alpha x)}{x}$ est décroissante tend vers 0, quand $x \to +\infty$, et $\left|\int_0^t \sin(\beta x)dx\right| \leq 2$ pour tout $t \in [0,+\infty[$. Donc d'après Abel, L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,\beta)dx$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta)\right| = \left|\exp(-\alpha x)\cos(\beta x)\right| \leq \left|\exp(-\alpha x)\right|.$$

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x)dx$ converge, le critère de Weierstrass affirme la convergence uniforme de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta)dx$. Les propriétés 1, 2 et 1 sont donc vérifiées, ce qui montre la dérivabilité de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,\beta)dx$ par rapport à β sur $\mathbb{R}$ et de plus :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta}\int_0^{+\infty} f(x,\beta)dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta)dx \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x)\cos(\beta x)dx \\
&= \Re(\int_0^{+\infty} \exp\left((-\alpha + i\beta)\,x\right)dx) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}
\end{aligned}$$

On fait une intégration par rapport à β, on trouve :

$$I(\alpha,\beta) = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + C(\alpha),$$

où C est une fonction d'une seule variable α.

Nous avons :

$$\arctan\left(\frac{0}{\alpha}\right) + C(\alpha) = I(\alpha,0) = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$$

Alors $C(\alpha) = 0$.

Finalement :

$$\begin{aligned} I(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x)\, \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \\ &= \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

2. Trouvons la valeur de l'intégrale de Dirichlet $D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx$.

Soit maintenant β fixé et considérons l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\alpha x)}{x} \sin(\beta x) dx.$$

D'après Abel, cette dernière intégrale est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$.
En effet, pour tout $\alpha \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\frac{\exp(-\alpha x)}{x} \leq \frac{1}{x},$$

quantité qui tend vers 0 uniformément quand $x \to +\infty$. De plus

$$\left| \int_0^t \sin(\beta x) dx \right| \leq 2, \text{ pour tout } t \in [0, +\infty[.$$

D'après Abel l'intégrale $I(\alpha)$ est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$.

Par suite $I(\alpha)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned} D(\beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x} dx \\ &= \lim_{\alpha \to 0^+} I(\alpha) \\ &= \lim_{\alpha \to 0^+} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \text{ pour} \beta \neq 0 \\ &= \frac{\pi}{2} sgn(\beta), \text{ pour} \beta \neq 0. \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, on a $D(\beta) = 0$.

3. On en déduit alors que :

1.3

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)\cos(\beta x)}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin((\alpha+\beta)x)}{x} + \frac{\sin((\alpha-\beta)x)}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin((\alpha+\beta)x)}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin((\alpha-\beta)x)}{x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left(sgn(\alpha+\beta) + sgn(\alpha-\beta) \right). \end{aligned}$$

2.3. En efectuant le changement de variable $x^2 = y$, on trouve

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3.3

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(\alpha x)}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{4} \frac{\sin(\alpha x)}{x} - \frac{1}{4} \frac{\sin(3\alpha x)}{x} \right) dx \\
&= \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(3\alpha x)}{x} dx \\
&= \frac{3\pi}{8} sgn(\alpha) - \frac{\pi}{8} sgn(3\alpha) \\
&= \frac{3\pi}{8} sgn(\alpha) - \frac{\pi}{8} sgn(\alpha) \\
&= \frac{\pi}{4} sgn(\alpha).
\end{aligned}
$$

Solution de l'éxercice 6.1.4

Etablir la relation suivante :

$$
F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2\right) dx = \pi \ln\left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \right).
$$

Posons $f(x, \alpha, \beta) = \ln\left(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2\right)$.

Pour tout $(x, \alpha, \beta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}_*^2$, on a :

$$
\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 > 0.
$$

Il s'agit donc d'une intégrale propre.

Les deux fonctions $f(x, \alpha, \beta)$ et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha, \beta) = \frac{2\alpha \sin^2 x}{\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2}$

sont des fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\dot{F}(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,\alpha,\beta)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha,\beta)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha \sin^2 x}{\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} dx, \ x \neq 0
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $y = \frac{\cos x}{\sin x}$, on trouve

$$\begin{cases} dx = \dfrac{-dy}{1+y^2} \\ y \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\dot{F}(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha}{(\alpha^2+\beta^2y^2)(1+y^2)}dy \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2y^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)dy \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-\beta^2}{\alpha^2\left(1+\left(\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|y\right)^2\right)}+\frac{1}{1+y^2}\right)dy \\
&= \frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\lim_{y\to+\infty}\arctan y+\lim_{y\to+\infty}\arctan y\right) \\
&= \frac{\alpha\pi}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+1\right) \\
&= \frac{\alpha\pi}{\alpha^2-\beta^2}\left(-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|+1\right) \\
&= \frac{\alpha\pi}{\left(|\alpha|-|\beta|\right)\left(|\alpha|+|\beta|\right)}\left(\frac{|\alpha|-|\beta|}{|\alpha|}\right) \\
&= \frac{\alpha\pi}{|\alpha|\left(|\alpha|+|\beta|\right)} \\
&= \frac{\pi sgn(\alpha)}{\left(|\alpha|+|\beta|\right)}.
\end{aligned}$$

En faisant une intégrale simple, on trouve :

$$F(\alpha) = \pi\ln\left(|\alpha|+|\beta|\right)+C(\alpha).$$

Trouvons $C(\alpha)$. On a :

$$\begin{aligned}
F(\beta) &= \pi\ln\left(2|\beta|\right)+C(\alpha) \\
&= \pi\ln(2)+\pi\ln\left(|\beta|\right)+C(\alpha).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} F(\beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\beta^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2\right) dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\left|\beta\right|\right) dx \\ &= \pi \ln\left(\left|\beta\right|\right) \end{aligned} \tag{6.9}$$

De (6.8) et (6.9), on trouve $C(\alpha) = -\pi \ln(2)$.

Finalement :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2\right) dx \\ &= \pi \ln\left(|\alpha| + \left|\beta\right|\right) - \pi \ln(2) \\ &= \pi \ln\left(\frac{|\alpha| + \left|\beta\right|}{2}\right). \end{aligned}$$

Solution de l'éxercice 6.1.5

1. En effet :

Au voisinage de zéro, $x^{\alpha-1}\exp(-x) \overset{V(0)}{\sim} x^{\alpha-1}$.

Puisque $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$, on en déduit que $\int_0^1 x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Au voisinage de l'infini, si on pose par exemple $g(x) = x^{-2}$, on trouve alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\exp(-x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}\exp(-x) = 0, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6.10}$$

Puisque $\int_1^{+\infty} x^{-2}dx$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ converge, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Finalement $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
2. Une intégration par parties, nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}\exp(-x)dx \\ &= -\lim_{t\to+\infty}[x^{\alpha}\exp(-x)]_0^t + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)dx \quad (6.11)\\ &= \alpha\Gamma(\alpha). \quad (6.12)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\Gamma(0) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)dx = 1, \quad (6.13)$$

on en déduit que $\Gamma(n+1) = n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Posons $f(\alpha,x) = x^{\alpha-1}\exp(-x)$, $(\alpha,x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et de plus, on a :

$$\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x) = \ln^n(x)x^{\alpha-1}\exp(-x). \quad (6.14)$$

Considérons un intervalle compact quelconque $[a,b]$ de $]0,+\infty[$.
Il suffit de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)dx$ est uniformément convergente sur tout segment $[a,b]$. En effet :
Pour tout $x \in]0,1]$, la fonction $\alpha \mapsto x^{\alpha-1}$ est décroissante.
Donc pour tout $\alpha \in [a,b]$, on a

$$0 < f(\alpha,x) \leq x^{a-1},$$

et pour tout $x > 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{\alpha-1}$ est croissante. Donc pour tout $\alpha \in [a,b]$, on a

$$0 < f(\alpha,x) \leq x^{b-1}\exp(-x).$$

Au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)\right| &= \left|\ln^n(x)\right| f(\alpha,x)\\ &= o\left(\frac{1}{x^{1-\frac{a}{2}}}\right)\end{aligned}$$

et au voisinage de L'infini, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)\right| &= \left|\ln^n(x)\right| f(\alpha,x)\\ &= o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Puisque les deux intégrales $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-\frac{a}{2}}}$ et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ sont convergente, le critère de Weierstrass montre quel'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^n f}{(\partial\alpha)^n}(\alpha,x)dx$ est également uniformément convergente sur tout segment $[a,b]$, ce qui achève d'établir que Γ est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc que Γ est de classe $C^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution de l'éxercice 6.1.6

1. En effet :

Au voisinage de zéro, $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \overset{V(0)}{\sim} x^{\alpha-1}$.

Puisque $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$, on en déduit que $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Au voisinage de 1, $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \overset{V(0)}{\sim} x^{\beta-1}$.Puisque $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\alpha-1}dx$ converge si et seulement si $\beta > 0$, on en déduit que $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ converge si et seulement si $\beta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Finalement $\int_0^1 x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

2. En effet, en effectuant le changement de variable $x = 1-t$, on trouve immédiatement le résultat.

3. En effet, en effectuant le changement de variable $x = \dfrac{t}{1+t}$, on trouve immédiatement le résultat.

Solution de l'éxercice 6.1.7

En effectuant le changement de variable $x = (1+z)y$ $(z > 0)$ dans la relation (6.1), on trouve :

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+z)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp\left(-(1+z)\,y\right)dy, \text{ pour tout } \alpha,\beta,z > 0. \tag{6.15}$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (6.15) par $z^{\alpha-1}$, puis intégrons par rapport à z de 0 à $+\infty$, on trouve :

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^{+\infty}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^{\alpha+\beta}}dz = \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}dz\left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp\left(-(1+z)\,y\right)dy\right), \text{ pour tout } \alpha,\beta,z > 0,$$

ou d'une manière équivalente :

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+\beta)\times B(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}\left(\int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp\left(-(1+z)\,y\right)dy\right)dz \\
&= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp(-y)\left(\int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}\exp(-zy)\,dz\right)dy \\
&= \int_0^{+\infty} y^{\alpha+\beta-1}\exp(-y)\,\frac{\Gamma(\alpha)}{y^{\alpha}}dy = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty} y^{\beta-1}\exp(-y)\,dy \\
&= \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)
\end{aligned}$$

2. L'égalité $B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ découle imédiatement de la relation (6.7) en posant $\beta=1-\alpha$.

En utilisant la deuxième formule de la fonction béta, on trouve

$$B(\alpha,1-\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt \tag{6.16}$$

Calculons maintenant l'intégrale (6.16) par le théorème des résidus. On définit alors le chemain suivant, pour $f(z)=\dfrac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ et $0<\epsilon<1<R$:

a) C_ϵ le demi cercle de rayon ϵ sur le demi plan $\Re(z)<0$.

b) Les deux segments $S^{\pm}_{\epsilon,R}=\left\{\pm i\epsilon,\ \pm i\epsilon+\sqrt{R^2-\epsilon^2}\right\}$.

c) L'arc de cercle $\Gamma_{\epsilon,R}=\left\{R\exp(i\theta),\ \theta\in\left[\arctan\dfrac{\epsilon}{\sqrt{R^2-\epsilon^2}},2\pi-\arctan\dfrac{\epsilon}{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}\right]\right\}$.

Choisissons ϵ et R de tel sorte que $z_0=-1$ soit dans le lacet.

L'utilisation du théorème des résidus nous donne :

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz+\int_{S^-_{\epsilon,R}} f(z)dz+\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz+\int_{S^+_{\epsilon,R}} f(z)dz = 2\pi i\times residus\,(-1,f)\,. \tag{6.17}$$

En passant à la limite, quand $\epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, il vient par le lemme de Jordan que :

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = 0 + 0 = 0. \tag{6.18}$$

D'autre part, pour tout $t > 0$, on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0}(t+i\epsilon)^{1-\alpha} = t^{1-\alpha} \text{ et } \lim_{\epsilon\to 0}(t-i\epsilon)^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}\exp(-2\pi i\alpha), \tag{6.19}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0}(t+i\epsilon)^{\alpha-1} &= \frac{1}{\lim_{\epsilon\to 0}(t+i\epsilon)^{1-\alpha}} \\ &= t^{\alpha-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0}(t-i\epsilon)^{\alpha-1} &= \frac{1}{\lim_{\epsilon\to 0}(t-i\epsilon)^{1-\alpha}} \\ &= t^{\alpha-1}\exp(2\pi i\alpha), \end{aligned}$$

De (6.17), (6.18) et (6.19), on peut alors écrire :

$$\exp(2\pi i\alpha)\int_{+\infty}^{0} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz + \int_{0}^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz = 2\pi i \times residus\,(-1, f) \tag{6.20}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (1-\exp(2\pi i\alpha))\int_{0}^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz &= 2\pi i \times rsidus\,(-1, f) \\ &= 2\pi i \times \lim_{z\to -1} z^{\alpha-1} = 2\pi i \times \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^{1-\alpha}} \\ &= -\exp(i\pi\alpha), \end{aligned}$$

ainsi, après simplification, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \text{ pour tout } \alpha > 0.$$

Solution de l'éxercice 6.1.8

1. Posons $y = \frac{x}{2}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y-(1-y)}} \\
&= \int_0^1 y^{\frac{-1}{2}}(1-y)^{\frac{-1}{2}}\,dy \\
&= \int_0^1 y^{\frac{1}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy \\
&= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= B\left(1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi.
\end{aligned}$$

2. Posons $y = \ln x$, on trouve :

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\ln(x))\,dx}{x\sqrt{\ln x}\,(1+\ln x)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(y)\,dy}{y^{\frac{1}{2}}(1+y)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}-1}\ln(y)\,dy}{(1+y)} \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha} B(\alpha, 1-\alpha)_{\alpha=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\right)_{\alpha=\frac{1}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Posons $\exp x = 1 + y$, on trouve :

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^{+\infty} \exp(-3x)\left(\exp(x)-1\right)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} y^{\frac{3}{2}} (1+y)^{-4} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{(1+y)^4} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{5}{2}-1}}{(1+y)^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}} dy \\
&= B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{6} \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{6} \\
&= \frac{1}{4} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \frac{1}{16} \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16} \times \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16} \times B\left(1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16} \times \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

4. Nous avons :

$$\begin{aligned}
J_4 &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{5}{3}-1}}{(1+t)^{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}}} dt \\
&= B\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(3)} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{2}{3}+1)\Gamma(\frac{1}{3}+1)}{2} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \times \Gamma(\frac{2}{3}) \times \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})}{2} \\
&= \frac{1}{9} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{3}) \times \Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})} \\
&= B\left(\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Annexe

Cette annexe a pour objectif de donner quelques concepts de la matière Analyse3 qui sont utiles pour aider l'étudiant à résoudre des exercice de cette matière.

Proposition 6.2.1. *(**Procédé télescopique**) Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels ou complexes, telles que $u_n = v_{n+1} - v_n$.*
Alors, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$converge si et seulement si la suite (v_n) converge et de plus, on a :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = -v_0 + \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Proposition 6.2.2. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels positifs . Alors cette série converge vers S, si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.*
Dans ce cas, on a :

$$S_n \leq S, \text{ pour tout } n \geq 0. \tag{6.21}$$

Théorème 6.2.1. *Etant donnés deux séries à termes positis $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ vérifiant :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que pour tout } n \geq n_0, u_n \leq v_n, \tag{6.22}$$

on a alors :

1. $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge implique* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge implique* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Corollaire 6.2.1. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Supposons qu'il existe deux nombres réels strictement positifs* α *et* β *vérifiant :*

$$\alpha u_n \leq v_n \leq \beta u_n, \tag{6.23}$$

alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

Théorème 6.2.2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Supposons qu'il existe un réel positif* l *(ou* $l = +\infty$*), tel que* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$*, on a alors :*

1. *Si* $l = 0$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l = +\infty$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l \neq 0$ *et* $\neq +\infty$*, les deux* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *sont de même nature.*

Proposition 6.2.3. *(Règle de Riemann)*

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ *une série à termes réels strictement positifs et soit* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Supposons qu'il existe un réel positif* l*, tel que* $\lim n^{\alpha} u_n = l$ *. On a alors :*

1. *Si* $l = 0$ *et* $\alpha > 1$*, la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$*, la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diverge.*
3. *Si* l *est finie non nulle, les deux séries* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ *sont de même nature.*

Proposition 6.2.4. *(Règle de D'Alembert)*

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ *une série à termes réels strictement positifs. Supposons*

qu'il existe un réel positif l (ou $l = +\infty$), tel que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ *.*
On a alors :

1. *Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.*

Proposition 6.2.5. *(Règle de Cauchy)*
Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une série à termes réels strictement positifs. Supposons qu'il existe un réel positif l (ou $l = +\infty$), tel que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ *.*
On a alors :

1. *Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.*

Proposition 6.2.6. *(Critère de Leibniz)*
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série alternée. Si $(|u_n|$ une suite décroissante tend vers 0, *alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*

Proposition 6.2.7. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur E vers une fonction f. S'il existe une suite positive (b_n) convergente vers 0, telle que*

$$\forall x \in E,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < b_n,$$

alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur E.
Dans ce cas, on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement convergente sur E.

Proposition 6.2.8. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur E vers une fonction f . Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente vers f sur E, il faut et il suffit que la suite numérique (a_n) qui définie par :*

$$a_n = \sup_{x\in E} \left| f_n(x) - f(x) \right|,$$

soit convergente vers 0.

Remarque 6.1. *Une condition suffisante pour que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur E est l'existence d'une suite de points $(x_n) \subset E$, vérifiant :*

$$\left| f_n(x_n) - f(x_n) \right| \nrightarrow 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Proposition 6.2.9. *Pour que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente vers f sur E, il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0 \text{ et } \forall x \in E, \text{ on a } \left| f_p(x) - f_q(x) \right| < \epsilon.$$

Proposition 6.2.10. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, convergeant uniformément sur le même segment vers une fonction f. Alors f est une fonction continue sur $[a, b]$.*

Proposition 6.2.11. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$, convergeant uniformément sur le même segment vers une fonction f. Alors f est une fonction intégrable sur $[a, b]$.*

Proposition 6.2.12. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$ et vérifié les trois conditions suivantes :*

1. f_n sont de classe C^1 sur un segment $[a, b]$.

2. (f_n)converge simplement sur le même segment vers une fonction f.

3. La suite des dérivées $(\dot{f}_n)$ converge uniformément vers une fonction g.

Alors, f est une fonction continue sur $[a, b]$ et de plus $\dot{f} = g$.

Définition 6.2.1. *Une série de fonctions de terme général f_n, converge uniformément sur une partie E de $\mathbb{R}$ et a pour somme S lorsque la suite de ses sommes partielles est uniformément convergente sur E, c'est-à-dire :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \text{on a } \sup_{x\in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in E} |R_n(x)| < \epsilon.$$

Dire que la suite des sommes partielles converge uniformément sur E signifie donc que la suite de reste $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur E.

Remarque 6.2. *On peut définir une norme de la convergence uniforme de S_n sur E par :*

$$\|S_n\| = \sup_{x\in E} |S_n(x)|\,.$$

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément et de somme S si et seulement si la suite numérique $(\|S_n - S\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 6.2.13. *Pour q'une série de fonctions soit uniformément convergente, il est nécessaire que son terme général tend vers 0 uniformément.*

Proposition 6.2.14. *(Proposition et définition) Soit $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions définies sur E. S'il existe une série positive $\sum_{n\geq 0} b_n$*

convergente, telle que

$$\forall x \in E, \ \left|f_n(x)\right| < b_n, \tag{6.24}$$

alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *est absolument et uniformément convergente sur E.*

Dans ce cas, on dit que la série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est **normalement** convergente sur E.*

Proposition 6.2.15. *Pour que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *soit normalement convergente sur E, il faut et il suffit que la série numérique* (a_n) *de terme générale :*

$$a_n = \sup_{x\in E}\left|f_n(x)\right|,$$

soit convergente.

Proposition 6.2.16. *La convergence normale d'une série de fonctions sur une partie E de* $\mathbb{R}$ *implique la convergence uniforme de cette série sur E, et la réciproque est fausse.*

Proposition 6.2.17. *Soit une série de fonctions de terme général* f_n*, défini sur l'intervalle* $[a,b]$*, qui converge uniformément et de somme S sur* $[a,b]$*. Si,* f_n *est continue sur* $[a,b]$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *alors S est aussi continue sur* $[a,b]$*, et de plus, on a l'égalité suivante :*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = S(x_0), \ \textit{pour tout } x_0 \in [a,b], \tag{6.25}$$

Proposition 6.2.18. *Soit une série de fonctions de terme général* f_n*, défini sur* $[a,b]$*, qui converge uniformément et de somme S sur* $[a,b]$*.*

Si, f_n est continue sur $[a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, la série numérique de terme général $\int_a^b f_n(x)dx$ converge et a pour somme $\int_a^b S(x)dx$.

Proposition 6.2.19. *On considère une série de fonctions de terme général f_n, dérivable sur le segment $[a,b]$ et vérifiant :*
1. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $[a,b]$.
2. La série des dérivées, de terme général $\dot{f}_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ et a pour somme une fonction g .
Alors, la série de terme général f_n converge uniformément sur $[a,b]$ et a pour somme une fonction dérivable S telle que :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial}{\partial x} f_n(x) = g(x),$$

Lemme 6.2.1. *(Lemme d'Abel) Si une série entière $\sum a_n x^n$ converge au point $x_0 \neq 0$, alors elle converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < x_0$.*

Théorème 6.2.3. *(théorème et définition) Si une série entière $\sum a_n x^n$ converge au point $x_0 \neq 0$, alors il existe un unique élément $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < R$,la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument .
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| > R$,la série entière $\sum a_n x^n$ diverge.

Théorème 6.2.4. *(Théorème de Cauchy) Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donné par :*

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{|a_n|}\right)^{-1} \text{ (lorsque cette limite existe).} \qquad (6.26)$$

Théorème 6.2.5. *(Théorème de d'Alembert) Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$ est donné par :*

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1} \text{ (lorsque cette limite existe).} \tag{6.27}$$

Théorème 6.2.6. *Toute série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement dans tout compact contenu dans le domaine de convergence $]-R, R[$ $(R \neq 0)$.*

Théorème 6.2.7. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul ; alors la somme de la série $S(x) = \sum a_n x^n$ est une fonction continue sur tout compact contenu dans le domaine de convergence $]-R, R[$.*

Théorème 6.2.8. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul ; alors sa somme S est une fonction dérivable sur tout compact contenu dans le domaine de convergence $]-R, R[$, et pour tout $x \in\,]-R, R[$, on a :*

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(a_n x^n) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{6.28}$$

Théorème 6.2.9. *Tout série entière $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} a_n x^n$ est intégrable terme à terme sur tout compact contenu dans le domaine de convergence $]-R, R[$. En particulier, sa somme S vérifie :*

$$\int_0^x S(t)dx = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pour tout } x \in\,]-R, R[\,. \tag{6.29}$$

Proposition 6.2.20. *Soient R_a et R_b les rayons de convergences des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ respectivement. Alors le rayon de convergence*

R de la série entière $\sum(a_n + b_n)x^n$ *vérifie :*

$$\begin{aligned} R &\geq \inf(R_a, R_b),\ si\ R_a = R_b. \\ R &= \inf(R_a, R_b),\ si\ R_a \neq R_b \end{aligned} \tag{6.30}$$

De plus, pour tout $|x| < \inf(R_a, R_b)$*, on a :*

$$\sum(a_n + b_n)x^n = \sum a_n x^n + \sum b_n x^n. \tag{6.31}$$

Théorème 6.2.10. *Lorsqu'une fonction* f *est développable en série entière, alors* f *est de classe* $C^{+\infty}$ *sur tout compact contenu dans le domaine de convergence* $]-R, R[$ *et* f *coïncide avec sa série de Taylor. De plus, le développement en série entière s'il existe il est unique.*

Définition 6.2.2. *Soit* : $[a, b[$*(ou* $b = +\infty$*)*$\longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$ *) une fonction localement intégrable sur* $[a, b[$ *(i.e sa restriction à chaque compact de* $[a, b[$ *est intégrable au sens de Riemann), et soit F la fonction définie sur* $[a, b[$ *par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, pour\ tout\ x \in [a, b[\,. \tag{6.32}$$

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ *converge, si et seulement si* $\lim_{x\to b^-} F(x)$ *existe. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

Proposition 6.2.21. *Soient* f *et* g *deux fonctions localement intégrables sur* $[a, b[$ *.*

1. Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent, alors l'intégrale* $\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt$ *est aussi converge, et de plus :*

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt. \tag{6.33}$$

Par contre, si l'une des deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ *ou* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge, alors* $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt$ *diverge.*
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors lintégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\int_a^b \alpha f(t)dt$ *l'est aussi et de plus :*

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt. \tag{6.34}$$

Théorème 6.2.11. *Soient* f *et* g *deux fonctions de classe* C^1 *sur* $]a;b[$. *Si l'intégrale* $\int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt$ *converge et si la fonction* fg *possède une limite à droite de* a *et une limite à gauche de* b, *alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)\dot{g}(t)dt$ *converge et on a :*

$$\int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt = \left(\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x)\right) - \int_a^b \dot{f}(t)g(t)dt \tag{6.35}$$

Théorème 6.2.12. *Soit* f *une fonction continue sur* $]a;b[$ *et soit '*φ *une fonction bijective et de classe* C^1 *sur* $]\alpha,\beta[$, *tels que* $a = \lim_{x\to\alpha^+}\varphi(x)$ *et* $b = \lim_{x\to\beta^-}\varphi(x)$.
Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_\alpha^\beta \dot{\varphi}(t)f(\varphi(t))dt$ *de même nature, de plus, si elles convergent, on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta \dot{\varphi}(t)f(\varphi(t))dt \tag{6.36}$$

Théorème 6.2.13. *Soit* f *une fonction localement intégrable sur* $[a,b[$. *Alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *converge si et seulement si la fonction*

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b[\,, \tag{6.37}$$

est majorée sur $[a,b[$, *et de plus, on a*

$$\text{pour tout } x \in [a,b[\,; F(x) \leq \int_a^b f(t)dt \tag{6.38}$$

Théorème 6.2.14. *(théorème de comparaison) Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ vérifiant :*

$$0 \leq f(t) \leq g(t). \tag{6.39}$$

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente, et on a :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt. \tag{6.40}$$

2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est aussi divergente.

Corollaire 6.2.2. *Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a,b[$ vérifiant :*

$$f(t) = O(g(t)), \text{ quand } t \to b^-. \tag{6.41}$$

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente
2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est aussi divergente.

Corollaire 6.2.3. *Soient f et g deux fonctions positives et localement intégrables sur $[a,b[$ vérifiant :*

$$\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = 0. \tag{6.42}$$

1. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente
2. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est aussi divergente.

Théorème 6.2.15. *Soient f et g deux fonctions positives équivalentes à l'extrémité de l'intervalle d'intégration $[a, b[$ ou $]a, b]$. Alors les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et dt $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Proposition 6.2.22. *(Les fonctions de Riemann) 1. Soit f une fonctions localement intégrables sur $[1, +\infty[$. Alors l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulemnt si $\alpha > 1$.*
2. Soit maintenant f une fonctions localement intégrables sur $]0, 1]$. Alors l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 6.2.16. *Soit f une fonctions localement intégrables sur $[a, b[$. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall x, y \in [a, b[, b-\delta < x < y < b, \text{ on a } \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \epsilon. \tag{6.43}$$

Théorème 6.2.17. *Soit $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur, alors la fonction $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ est aussi continue sur I. En particulier, pour tout $y_0 \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{y \to y_0} F(y) &= \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx \\ &= \int_a^b f(x, y_0)dx = F(y_0), \end{aligned}$$

Théorème 6.2.18. *Soit $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \times I$. On suppose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et est continue sur $[a, b] \times I$, alors la fonction F est dérivable sur I , et on a :*

$$\dot{F}(y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)dx, \tag{6.44}$$

Théorème 6.2.19. *Soit $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \times I$, alors la fonction F est intégrable sur I. En particulier pour tout $y \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} \int_I F(y)dy &= \int_I dy\left(\int_a^b f(x,y)dx\right) \\ &= \int_a^b dx\left(\int_I f(x,y)dy\right), \end{aligned} \tag{6.45}$$

Définition 6.2.3. *On dit que l'intégrale généralisée $F(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ est uniformément convergente sur $[a,+\infty[$, si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que, } \forall y \in I,\ \forall z \in [\delta,+\infty[, \text{ on a : } \left|F(y) - \int_a^z f(x,y)dx\right| < \epsilon. \tag{6.46}$$

Définition 6.2.4. *On dit que l'intégrale généralisée $F(y) = \int_a^{b} f(x,y)dx$ est uniformément convergente sur I, si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que, } \forall y \in I,\ \forall \gamma \in]0,\delta[\,, \text{ on a : } \left|F^*(y) - \int_a^{b-\gamma} f(x,y)dx\right| < \epsilon. \tag{6.47}$$

Théorème 6.2.20. *Soit f une fonction intégrable (au sens généralisée) sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ converge uniformément sur I.

2. La suite de fonctions de terme général $F_n(y) = \int\limits_a^{y_n} f(x,y)dx$ converge uniformément sur I, , où $(y_n)_n$ est une suite d'élément de $[a,+\infty[$ de limite $+\infty$, quand $n \to +\infty$.

Corollaire 6.2.4. *D'une manière analogue, si f une fonction intégrable (au sens généralisée) sur l'intervalle $[a,b[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. l'intégrale $\int_a^b f(x,y)dx$ converge uniformément sur I.
2. La suite de fonctions de terme général $F_n^*(y) = \int\limits_a^{\gamma_n} f(x,y)dx$ converge uniformément sur I , où $(\gamma_n)_n$ est une suite d'élément de $[a,+b[$ de limite 0, quand $n \to +\infty$.

Théorème 6.2.21. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x,y)dx$ soit uniformément convergente sur $[a,+\infty[$ est :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que, } \forall y \in I, \ \forall z_1, z_2 \in [\delta, +\infty[\ (z_1 > z_2), \text{ on a : } \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x,y)dx \right| < \epsilon. \tag{6.48}$$

Corollaire 6.2.5. *De la même manière, on peut assurer que l'intégrale généralisée $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ soit uniformément convergente sur $[a,+b[$, si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que, } \forall y \in I, \ \forall \gamma_1, \gamma_2 \in]0, \delta[\,, (\gamma_1 > \gamma_2), \text{ on a : } \left| \int_{b-\gamma_1}^{b-\gamma_2} f(x,y)dx \right| < \epsilon. \tag{6.49}$$

Théorème 6.2.22. *Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b[$ (I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Supposons qu'il existe une fonction réelle localement intégrable sur $[a,b[$ (appelée fonction majorante) vérifiant :*

$$\begin{cases} 1) \ \left|f(x,y)\right| \leq g(x), \text{ pour tout } x \in [a,b[, \\ 2) \text{ L'intégrale } \int_a^b g(x)dx \text{ converge.} \end{cases}$$

Alors, pour tout $y \in I$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x, y)dx$ converge absolument et uniformément sur I.

Lemme 6.2.2. *Soit $f : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, positive et décroissante par rapport à x sur $[a, b[$ et tendant vers 0 uniformément quand x tend vers b, et soit $g : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, b[$ et vérifie la propriété :*

$$\exists M > 0, \forall z \in [a, b[, \forall y \in I, \text{ on a } \left|\int_a^z g(x, y)dx\right| \leq M. \tag{6.50}$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$ converge uniformément sur I.

Théorème 6.2.23. *Soit $f : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit l'intégrale $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ converge uniformément sur I, alors la fonction F est aussi continue sur I. En particulier, pour tout $y_0 \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{y \to y_0} F(y) &= \lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y_0)dx = F(y_0), \end{aligned} \tag{6.51}$$

Théorème 6.2.24. *Soient $f, \dfrac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que l'intégrle $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ converge et que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial y} dx$ converge uniformément sur I, alors la fonction F est dérivable sur I, et on a :*

$$\dot{F}(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^{+\infty} f(x, y)dx\right) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)dx, \tag{6.52}$$

Théorème 6.2.25. *Soit* $f : [a, +\infty[\times I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et soit l'intégrale* $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ *converge uniformément sur* I, *alors la fonction* F *est aussi intégrable sur* I, *et de plus on a :*

$$\int_I F(y)dy = \int_I dy \left(\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \right) = \int_a^{+\infty} dx \left(\int_I f(x, y)dy \right). \tag{6.53}$$

Bibliographie

[1] S. Kaouache. Cours polycopiés de la matière Analyse3. *Centre universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila*, (2020).

[2] F. Cottet-Emard. Analyse : Cours et exercices corrigés *Edition de Boeck Université*, (2005).

[3] J. Lelong Ferrand. Exercices résolus d'analyse. *Edition Dunod*, (1977).

[4] J. Rivaud. Analyse «Séries, équations différentielles : Exercices avec solutions. *Vuibert*, (1981).

[5] C. Servien. Analyse 3 : Séries numériques, suites et séries de fonctions, Intégrales. *Ellipses*, (1995).

[6] J.P. Ramis et A. Warusfel. Mathématiques. Tout-en-un pour la Licence. *Niveau L1 Editions Dunod*.

[7] J. Dixmier. Cours de Mathématiques du premier cycle. *Editions Gauthier-Villars*.

[8] L. Bourguet. Sur les intégrales Eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. *Acta Math.* 2, 261-295, 1883.