



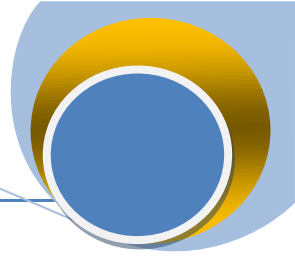
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Civil et Hydraulique

Polycopié

Résistance Des Matériaux 1

Elaborée par:
DR. BOUKOUR SALIMA

ANNEE UNIVERSITAIRE: 2021-2022



AVANT-PROPOS

Ce présent polycopié destiné particulièrement aux étudiants de 2^{ème} année licence ST (LMD) de la filière Génie Civil, Génie mécanique, Hydraulique et Electromécanique enseigné en Semestre 04, il est élaboré conformément au programme officiel proposé dans le canevas ministériel des offres de formation et elle est inspirée de divers livres et polycopies dans le domaine. Il contient des notions de cours et des exercices d'applications résolues à la fin de chaque chapitre.

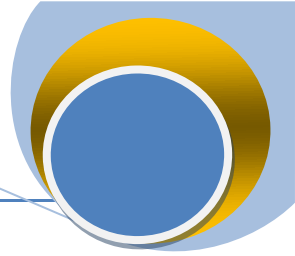
D'une manière globale, ce cours permettra aux étudiants d'exploiter leurs différents acquis, en physique, en géométrie et en système de force pour mieux comprendre les différentes notions de base de la RDM et les différentes méthodes de calcul de la résistance et du dimensionnement des différents pièces.

Ce polycopié de cours s'articule autour de six chapitres: en premier lieu, le premier chapitre comporte d'un côté une introduction générale à la résistance des matériaux (les hypothèses fondamentales de la RDM, Il traite les différents types de charge, Classification des forces, la notion de liaisons, ...),

D'un autre coté, on définit la notions de poutre et d'un torseur des efforts intérieurs ou ce qu'on appelle "torseur de cohésion" ainsi que les composantes de ce torseur, le calcul du torseur de cohésion dans plusieurs tronçons choisis et les différentes natures de sollicitations (traction ou compression, cisaillement, torsion, flexion simple et flexion composée) en fonction de l'allure du torseur de cohésion.

Concernant le chapitre deux, on y expose les caractéristiques géométriques des sections droites, Nous nous intéressons dans ce chapitre aux grandeurs suivantes liées à la section "S":

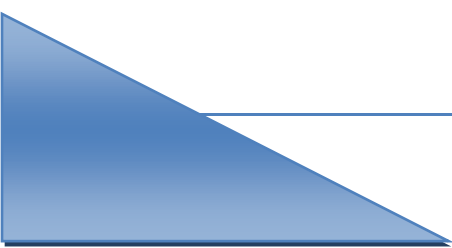
- Centre de gravité,
- Moment statique par rapport à une droite (ou un axe),
- Moment quadratique d'une section par rapport à une droite (ou un axe) appelés également moments d'inertie.
- Rayon de giration

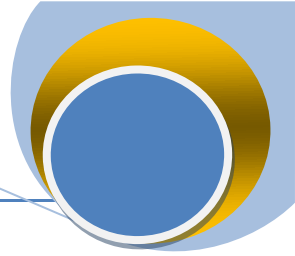


Dans les chapitres qui suivent 3, 4, 5 et 6 on s'intéresse à l'étude de quelques sollicitations essentielles telles que la traction, compression, torsion, cisaillement et la flexion simple qui sont étudiées en détail et vue de leur importance technique. Ainsi qu'aux notions de contraintes, de déformations et de déplacements.

Nous avons clôturé notre polycopié par une bibliographie qui englobe les ressources mentionnées dans l'ouvrage.

Enfin, nous espérons, que ce manuscrit apporte un plus et aidera les étudiants à mieux comprendre ce module qui donne des connaissances de base qui sont donc nécessaires à l'ingénieur surtout dans le domaine de génie civil et de mécanique .



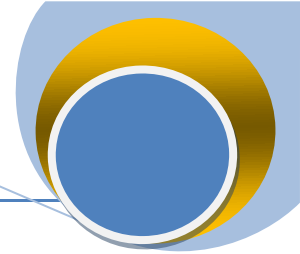


SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....01

Chapitre 01 : Introduction Générale à la RDM

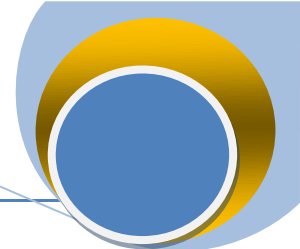
1.1.	Définition.....	03
1.2.	But de la RDM.....	04
1.3	Différents problèmes à résoudre.....	04
1.3.1.	Calcul de résistance.....	04
1.3.2.	Calcul de rigidité.....	04
1.3.3.	Calcul de vérification	05
1.3.4.	Choix du matériau	05
1.4.	Hypothèses de la R.D.M.....	05
1.4.1.	Hypothèses sur le matériau.....	05
1.4.2.	Hypothèse sur les efforts.....	06
1.4.3.	Hypothèse sur les déplacements.....	06
1.4.4.	Hypothèse de Navier Bernoulli.....	07
1.4.5.	Hypothèse de Barré de Saint Venant.....	07
1.4.6.	Les déformations.....	08
1.5.	Type de structure.....	08
1.5.1.	Plaque.....	08
1.5.2.	Coque.....	09
1.5.3.	Poutre.....	09
1.6.	Convention de signe des axes.....	11



1.7.	Réactions d'appui.....	11
1.7.1.	Appui simple.....	12
1.7.2.	Appuis double.....	12
1.7.3.	Encastrement.....	13
1.8.	Force.....	13
1.9.	Différents types de chargement.....	14
1.10.	Principe fondamental de la statique.....	15
1.11.	Torseur de cohésion.....	16
1.11.1.	Définition	16
1.11.2.	Composants d'un torseur de cohésion	18
1.11.3.	Convention des signes.....	19
1.12	Les différents types de sollicitations simples.....	19
1.13	Diagrammes.....	21
1.14.	Contrainte.....	21
1.14.1.	Définition de la contrainte.....	21
1.14.2.	Contrainte normale et tangentielle.....	22
	Exercices	23

Chapitre 02: Caractéristiques géométriques des sections planes

2.1.	Introduction.....	29
2.2.	Les moments statiques.....	30
2.2.1.	Définition.....	30
2.2.2.	Translation des axes (axes parallèle).....	31
2.3.	Centre de gravité.....	32
2.4.	Moment quadratique d'une section droite.....	35



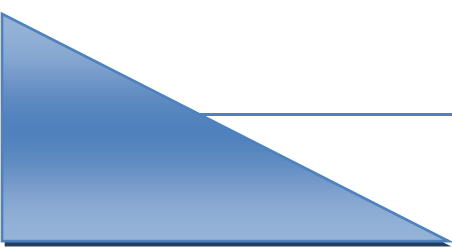
2.4.1.	Définition.....	35
2.4.2.	Surface composée.....	36
2.5.	Moment quadratique polaire.....	36
2.6.	Moment quadratique calculée par rapport à des axes parallèles: (théorème de Huygens).....	37
2.7.	Changement de direction des axes.....	38
2.8.	Rayon de giration.....	41
2.9.	Propriétés des surfaces standards.....	42
	Exercices.....	44

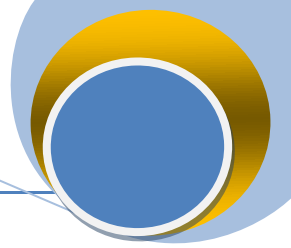
Chapitre 03: Traction et Compression

3.1.	Introduction.....	48
3.2.	Définition.....	48
3.3.	Relation contrainte/effort normal	49
3.4.	Influence des variations de section.....	50
3.5.	Essai de traction	51
3.6.	Notion de déformation.....	54
3.6.1.	Déformation longitudinal.....	54
3.6.2.	Déformation transversale.....	55
3.7.	Relation contrainte-déformation (loi de Hooke).....	57
3.8.	Condition de résistance	58
	Exercices.....	60

Chapitre 04 : Flexion Simple

4.1.	Introduction.....	65
------	-------------------	----

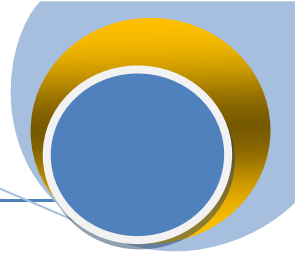




4.2.	Définition.....	65
4.3.	Type de flexion.....	66
4.4.	Hypothèses particulières à la flexion plane simple.....	67
4.5.	Moment fléchissant, effort tranchant.....	67
4.5.1	Les moments fléchissants	68
4.5.2.	Les efforts tranchants	68
4.6.	Contraintes normales en flexion	69
4.7.	Diagramme de répartition des contraintes normales	70
4.8.	Calcul de la contrainte de cisaillement.....	72
4.9.	Etude de la déformée en flexion.....	73
4.10	Conditions de résistance	75
4.11.	Diagrammes de V et M à partir des équations d'équilibre.....	75
4.12.	Relation différentielle entre la charge, l'effort tranchant et le moment fléchissant.....	76
	Exercices	78

Chapitre 05 : Cisaillement

5.1.	Introduction.....	85
5.2.	Définition.....	85
5.3.	Cisaillement simple – cisaillement pur.....	86
5.3.1.	Cisaillement simple.....	86
5.3.2.	Cisaillement pur	86
5.4.	Contrainte de cisaillement... ..	86
5.6.	Essai de cisaillement	87
5.7.	Relation entre contrainte et déformation.....	89
5.8.	Condition de résistance au cisaillement.....	90



Exercice 91

Chapitre 06 : Torsion

6.1. Introduction..... 93

6.2. Définition..... 93

6.3. Essais de torsion..... 94

6.4. Déformation élastique..... 95

6.5. Calcul des contraintes tangentielles de torsion..... 96

6.6. Condition de résistance 98

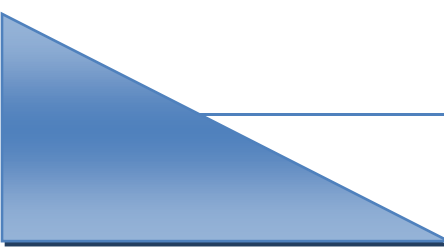
6.7. Condition de rigidité 99

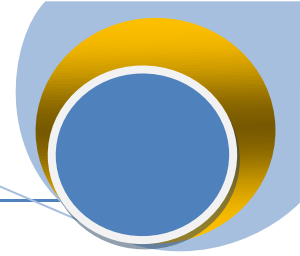
6.8. Concentration des contraintes 99

6.9. Transmission de puissance..... 100

Exercices 101

REFERENCES 104

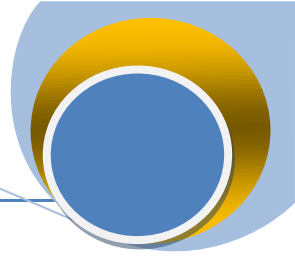




LISTE DES FIGURES

Chapitre 01 : Introduction Générale à la RDM

Fig.1.1.	Visualisation de l'hypothèse sur les déplacements.....	06
Fig.1.2.	Visualisation de l'hypothèse de Navier–Bernoulli.....	07
Fig.1.3	Visualisation de l'hypothèse de Barré de Saint Venant.....	07
Fig.1.4.	Principe de superposition.....	08
Fig.1.5.	Plaque.....	09
Fig.1.6.	Coque.....	09
Fig.1.7.	Schéma de poutre.....	10
Fig.1.8.	Formes usuelles des sections droites.....	10
Fig.1.9.	Convention de signe des axes.....	11
Fig.1. 10.	Appuis simple.....	12
Fig.1.11.	Appuis double (Articulation).....	13
Fig.1.12.	Encastrement.....	13
Fig.1.13.	Représentation de l'action mécanique.....	14
Fig.1.14.	Catégories des forces concentrées.....	15
Fig.1.15.	Catégories des forces réparties.....	15
Fig.1.16.	Coupe fictive dans une poutre.....	16
Fig.1.17.	Tronçon E_1 de la poutre.....	17
Fig.1.18.	Convention de signes des efforts internes.....	19
Fig.1.19.	Vecteur contrainte.....	21
Fig.1.20.	Contrainte normale et tangentielle.....	22

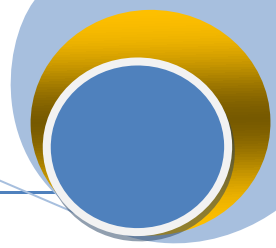


Chapitre 02: Caractéristiques géométriques des sections planes

Fig.2.1.	Moment statique.....	30
Fig.2.2.	Translation des axes.....	32
Fig.2.3	Centre de gravite dune section plane.....	33
Fig.2.4.	Illustrations des sections avec plan de symétrie.....	34
Fig.2.5.	Moment d'inertie polaire.....	37
Fig.2.6.	Hypothèse des axes parallèle.....	38
Fig.2.7.	Changement de direction des axes d'une section plane.....	39
Fig.2.8.	Cercle de Mohr.....	41

Chapitre 03: Traction et Compression

Fig.3.1.	Poutre sollicitée en traction et compression simple.....	48
Fig.3.2.	Schématisation de la traction/compression.....	49
Fig.3.3	Répartition uniforme des contraintes.....	49
Fig.3.4.	Concentration de contrainte.....	50
Fig.3.5.	Exemples de cas de variations brusque de section.....	51
Fig.3.6.	Eprouvette sollicitée en traction.....	52
Fig.3.7.	Courbe contrainte-déformation.....	52
Fig.3.8.	Représentation de l'allongement après chargement.....	54
Fig.3.9.	Barre composée de plusieurs tronçons sollicités à la traction.....	55
Fig.3.10.	Déformation transversale.....	56
Fig.3.11.	Relation Contrainte-déformation.....	57



Chapitre 04 : Flexion Simple

Fig.4.1.	Poutres en flexion simple.....	65
Fig.4.2.	Poutres après déformation.....	66
Fig.4.3	Convention de signe, cas du tronçon gauche.....	68
Fig.4.4.	Transformation d'une section avant et après déformation.....	69
Fig.4.5.	Schéma d'une poutre simplement appuyée sur ces deux extrémités.....	70
Fig.4.6.	Diagramme de répartition des contraintes normales.....	71
Fig.4.7.	Répartition uniforme de τ_{xy} soumise au cisaillement.....	72
Fig.4.8.	La distribution des contraintes tangentielle le long de la section transversale de la poutre soumise à la flexion simple.....	73
Fig.4.9.	Poutre déformée (la flèche)	74
Fig. 4.10	Poutre droite symétrique chargée.....	76

Chapitre 05 : Cisaillement

Fig.5.1.	Représentation du cisaillement.....	85
Fig.5.2.	Contrainte de cisaillement.....	87
Fig.5.3	Schéma descriptif d'une section droite sollicitées au cisaillement.....	88
Fig.5.4.	Courbe contraintes-déformations pour l'essai de cisaillement.....	88

Chapitre 06 : Torsion

Fig.6.1.	Torsion d'une barre circulaire.....	93
Fig.6.2.	Illustration de l'essai de torsion simple.....	94
Fig.6.3	Courbe moment de torsion en fonction de l'angle de rotation.....	95
Fig.6.4.	Déformation angulaire.....	96

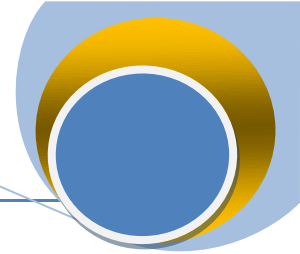
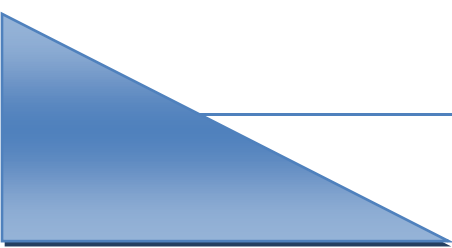
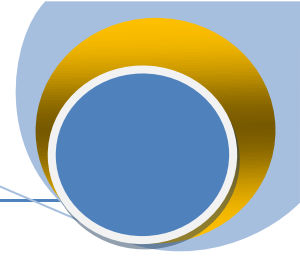


Fig.6.5.	Equilibre d'une section circulaire sous l'effet de torsion.....	96
Fig.6.6.	Contraintes de cisaillement dues à la torsion.....	98
Fig.6.7.	Concentration des contraintes.....	100





LISTE DES TABLEAUX

Chapitre01 : Introduction Générale à la RDM1

Tab.1.1. Différentes sollicitations simples 20

Chapitre 02: Caractéristiques géométriques des sections planes

Tab.2.1. Propriétés des sections..... 42

Chapitre 03: Traction et Compression

Tab.3.1. Module de Young en daN/mm² de certains matériaux 58

Tab.3.2. Coefficient de sécurité..... 59

Chapitre 05 : Cisaillement

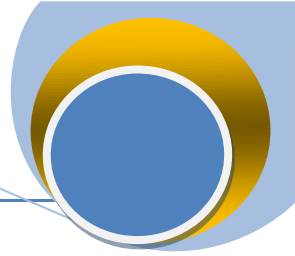
Tab.5.1. Valeurs de G 90

Tab.5.2. Valeurs de R_{pg} 90

Chapitre 06 : Torsion

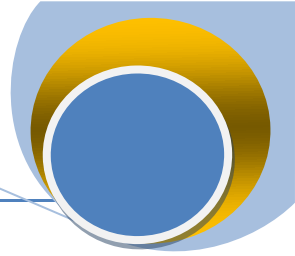
Tab.6.1. Moment quadratique polaire en fonction de la section. 98

Tab.6.2. Valeurs de Coefficient de concentration 100

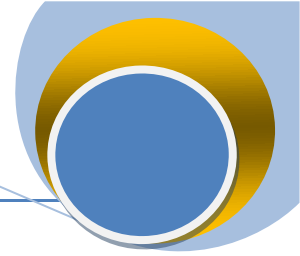


NOTATION

S_x, S_y	Les moments statiques d'une section
X_G, Y_G	Coordonnées du centre de gravité
G	Centre de gravité
I_x, I_y	Moments d'inertie axiaux
I_{xy}	Moment d'inertie centrifuge
I_p	Moment d'inertie polaire
I_{max}	Moment d'inertie axial maximal
I_{min}	Moment d'inertie axial minimal
W_{max}	Module de résistance maximal
W_{min}	Module de résistance minimal
i_x, i_y	Rayons de giration
M_y, M_z	Moments de flexion dans une section
T_y, T_z	Efforts tranchants dans une section
N_x	Effort normal dans une section
τ_{xy}, τ_{xz}	Contraintes tangentielles sur la facette de normale x
K	Coefficient de forme d'une section
σ_{max}	Contrainte normale maximale



σ_{Eq}	Contrainte normale équivalente
σ	Contrainte normale admissible
$[\tau]$	Contrainte tangentielle admissible
f	Flèche d'une poutre
φ	Déformation angulaire d'une poutre
σ_{min}	Contrainte normale minimale
τ_{max}	Contrainte tangentielle maximale
τ_{min}	Contrainte tangentielle minimale
G	Module de coulomb
E	Module de Young
σ'	Contrainte normale sur les plans secondaires
$v(x)$	Déformée dans un élément de structure due au flambement
σ_c	Charge critique d'Euler
σ_e	Limite d'élasticité
s	Coefficient de sécurité



INTRODUCTION GENERALE

La résistance des matériaux, appelée également mécanique des corps déformables, fait appel aux notions d'équilibre de la mécanique statique, aux notions de déplacements étudiées en cinématique et aux propriétés des matériaux, auxquelles on a recours pour évaluer les dimensions de pièces structurales ou d'éléments de machines.

La résistance des matériaux n'étudie que des solides de formes simples: les « poutres ». Bien souvent, il est possible de modéliser des solides par une poutre, à condition que ceux-ci respectent certaines hypothèses.

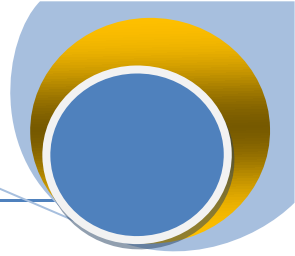
La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides (arbres de transmissions, bâtiments, diverses pièces mécaniques...) dans le but de déterminer ou vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges qu'ils subissent, dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux...). Le domaine d'application de RDM étant très large et les situations rencontrées sont nombreuses et variées, il est nécessaire de mettre en place des hypothèses simplificatrices dans le but de standardiser les cas d'étude

En pratique, l'ingénieur sera confronté à deux types de problèmes à résoudre.

1. On connaît les efforts extérieurs appliqués à la structure, on cherche alors les dimensions à donner à celle-ci pour que les efforts internes ou les déformations ne dépassent pas une limite définie par avance. C'est le problème du dimensionnement.
2. On connaît les efforts extérieurs et les dimensions de la structure, on vérifie alors que les efforts intérieurs et les déformations sont bien inférieurs à une limite définie par avance. C'est le problème de vérification de la stabilité

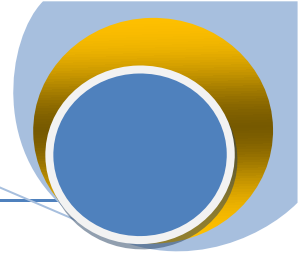
En résumé, la résistance des matériaux (RDM) a pour objectifs de déterminer les formes, les dimensions et les matériaux des pièces mécaniques et des constructions en général, afin qu'elles résistent sans dommage à tous les efforts auxquels elles seront soumises pendant leur service.

La sécurité est assurée si les forces extérieures:



- Ne provoquent pas la rupture de l'élément (structure).
- Ne déterminent pas des déformations permanentes mais uniquement des déformations élastiques.

On distingue plusieurs sortes de sollicitations: Traction, compression, cisaillement, flexion simple et torsion.



CHAPITRE 01: Généralité sur RDM

1.1. Définition

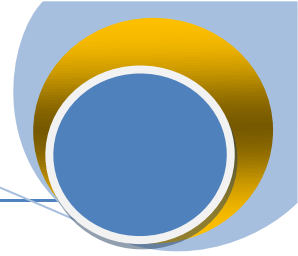
La résistance des matériaux (connue par l'abréviation RDM) est la science du dimensionnement, afin d'éviter la rupture et entraîner des déformations élastiques, après étude statique ou dynamique. C'est un outil indispensable à toute modélisation en calcul des structures. Dans le cadre des sollicitations d'un élément de la structure, la résolution du problème fait appel à la RDM pour calculer:

- La grandeur des efforts internes du matériau;
- Les déformations;
- Les déplacements;
- La distribution des contraintes;
- Le choix du matériau;
- Le dimensionnement et la vérification.

La résistance des matériaux est un processus de calcul entre les étapes de conception et de réalisation d'une pièce. Cette conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité et d'économie.

La RDM est couramment utilisée dans de différents domaines d'applications tels que:

- Génie mécanique (piston, essieu, Jante, tambour,.....).
- Génie maritime (coque, **mats**,.....).
- Génie civil (bâtiments, turbine, structures métalliques...).
- Aéronautique (aile, **habituele**, ...).
- La physique du solide (acier, cuivre).
- Génie électrique (câbles, pylônes, centrales,).



Dans le cadre de ce cours. En mécanique des solides déformables des poutres, il faut prendre en considération:

- Les déplacements relatifs entre points d'un solide (notion de déformations),
- Les efforts intérieurs associés (notion de contraintes).

1.2. But de la RDM

Tout corps se déforme lorsqu'il est sollicité par des efforts. L'amplitude de la déformation croît avec l'intensité des efforts et peut conduire à la rupture. La RDM envisage ces déformations et étudie le comportement du matériau. La Résistance des Matériaux est l'outil qui a pour objectifs:

- ❖ La connaissance des caractéristiques physiques nécessaires au choix du matériau dans lequel elle sera réalisée,
- ❖ L'étude de la résistance des pièces et des structures afin qu'elles résistent sans dommage à tous les efforts auxquels elles seront soumises pendant leur service,
- ❖ L'étude des déformations des pièces et des structures soumises à des actions mécaniques extérieures et donc vérifier que les déformations induites par les charges sont inférieures aux limites acceptables en fonctionnement.

1.3. DIFFERENTS PROBLEMES A RESOUDRE

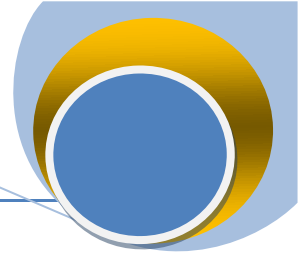
Les problèmes pouvant être résolus par la RDM sont:

1.3.1. Calcul de résistance

Le calcul de résistance permet de déterminer toutes les dimensions d'une pièce, de telle façon qu'en aucun point de sa structure, les sollicitations internes ne dépassent une certaine limite. Cette limite est définie par les caractéristiques mécaniques des matériaux obtenues lors des essais.

1.3.2. Calcul de rigidité

Si l'on excepte le cas des ressorts dont le rôle est précisément de présenter une déformation élastique importante sous charge, la plupart des organes mécaniques doivent rester rigides.



Sous l'influence des sollicitations extérieures, il convient le plus souvent que les déformations des pièces mécaniques restent faibles et de toute façon dans le domaine élastique. Citons le cas des arbres de transmissions pour lesquels on tolère la déformation angulaire inférieure ou égale à un demi degré par mètre de longueur.

1.3.3. Calcul de vérification

Lorsqu'on entreprend l'étude d'une pièce mécanique, on doit au départ simplifier les formes de celle-ci et le plus souvent modéliser le système de forces extérieures qui lui sont appliquées. La valeur de ces actions mécaniques sera recherchée en fonction des dimensions et du matériau de la pièce, mais aussi en fonction de sa déformation admissible.

1.3.4. Choix du matériau

Il arrive que le problème est réciproque, connaissant les dimensions d'une pièce (conditions restrictives d'encombrement ou du poids), le calcul de résistance permet alors le choix du matériau approprié.

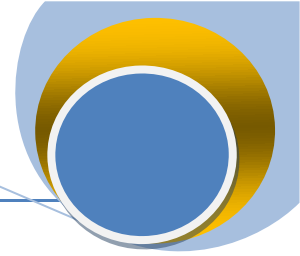
1.4. Hypothèses de la R.D.M.

Les lois de la RDM ne sont vérifiées qu'à condition de respecter un certain nombre d'hypothèses. La résistance des matériaux (R.D.M) se base sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices,

1.4.1. Hypothèses sur le matériau

Les matériaux des poutres étudiées devront être :

- **Continuité:** La matière est supposée continue, c.-à-dire que les distances entre les molécules sont toujours très petites ; à l'échelle de la RDM, alors la matière apparaît continue.
- **Homogène:** on admet que les matériaux ont les mêmes propriétés mécaniques en tous points (matériaux parfaits sans défauts).



- **Isotrope:** on admet que les matériaux ont, en un même point, le même comportement dans toutes les directions, L'isotropie est vérifiée pour les aciers non fibrés (Les aciers laminés et forgés ne sont pas isotropes). Cette hypothèse n'est pas vérifiée pour le bois, les matériaux composites, etc.
- **Elastique:** C'est la propriété qu'ont les corps de reprendre leurs formes initiales lorsque les charges qui ont causé leurs déformations cessent d'être appliquées. Lorsque les charges deviennent très importantes les matériaux ne sont plus élastiques et pour étudier de tels corps il faudra faire appel à la théorie de la plasticité.

1.4.2. Hypothèse sur les efforts

Plan de symétrie: Les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan;

Types d'actions mécaniques extérieures: Les charges concentrées (force et moment) (F_{1r} ou moment M_{Cr}) ou charges réparties le long de la poutre définies par leur densité linéique ou coefficient de charge p , en N/m.

1.4.3. Hypothèse sur les déplacements

Les efforts sont invariants. Les déplacements sous charges étant petits, les efforts extérieurs sont supposés avant et après application du chargement ($\delta = 0$).

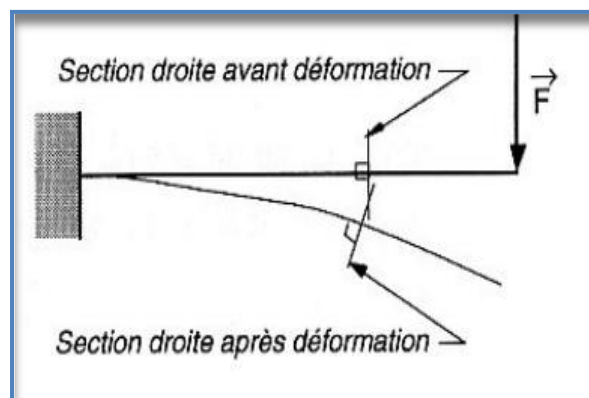
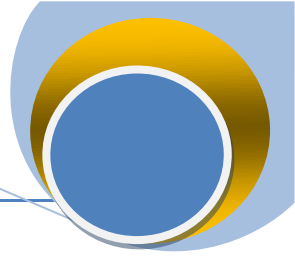


Fig.1.1. Visualisation de l'hypothèse sur les déplacements



1.4.4. Hypothèse de Navier Bernoulli

Les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre. On peut aussi dire que toute section droite (plane et perpendiculaire à la ligne moyenne) avant déformation reste droite après déformation. Cette hypothèse est bien vérifiée dans de nombreux cas de sollicitations simples. Le fait que la section reste plane permet de caractériser le déplacement de toute section droite par un torseur appelé torseur des petits déplacements.

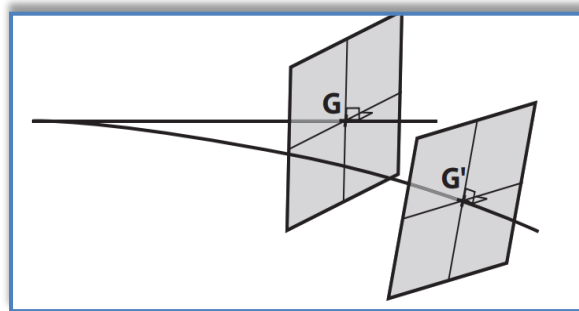


Fig.1.2. Visualisation de l'hypothèse de Navier-Bernoulli

1.4.5. Hypothèse de Barré de Saint Venant

L'état des sollicitations dans une région suffisamment éloignée des points d'application des charges extérieures appliquées à la poutre ne dépend que du torseur associé à ces charges.

Les résultats de la RDM ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des forces concentrées. En effet, nous ne pouvons pas, avec les équations de la RDM, calculer les déformations locales autour d'un point d'application d'une force.

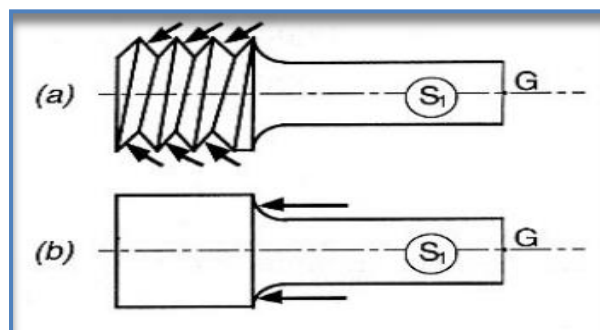
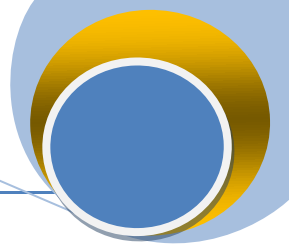


Fig.1.3. Visualisation de l'hypothèse de Barré de Saint Venant



1.4.6. Les déformations

Principe de superposition

La déformation (ou la contrainte) en un point M de la poutre due à plusieurs actions mécaniques extérieures est égale à la somme des déformations (ou des contraintes) dues à chaque action mécanique extérieure prise isolément

Intérêt: ramener un système composé (complexe) à une somme de systèmes simples.

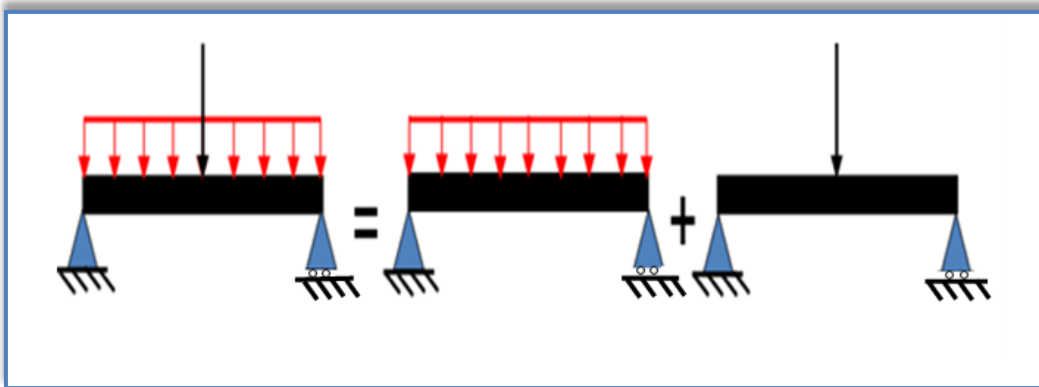


Fig.1.4. Principe de superposition

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

1.5. Type de structure

1.5.1. Plaque

On appelle plaque un solide limité par deux dans plans parallèle et par une surface fermée qui définit les bords, l'épaisseur de la plaque h est supposé faible par rapport aux autres dimensions.

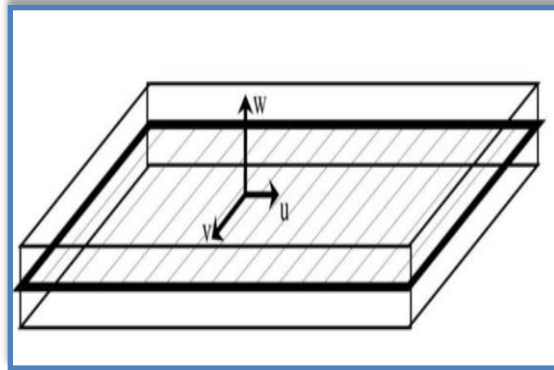
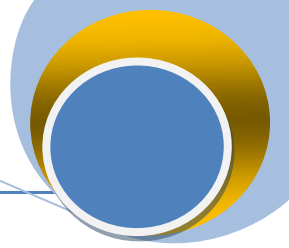


Fig.1.5. Plaque

1.5.2. Coque

Les coques se définissent géométriquement à partir d'une surface moyenne réglée (surface cylindrique, cône, conoïde, parabololoïde, hyperbolique, hyperboloïde de révolution) ou non réglée (sphère, ellipsoïde, etc....) de part et d'autre de laquelle on obtient à la distance $b/2$ les faces parallèles extérieures et intérieures de la coque, la face supérieure est appelée extrados, la face inférieure intrados.

On suppose que l'épaisseur h est faible par rapport aux autres dimensions et rayons de courbure de la surface moyenne.

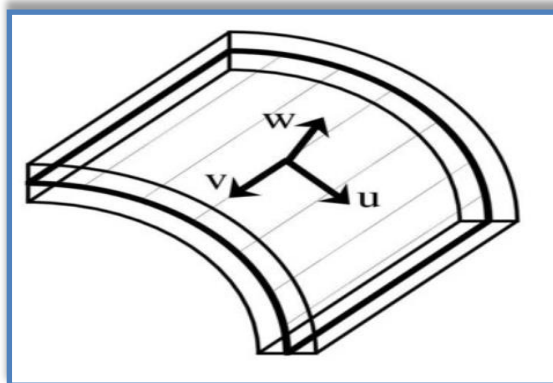
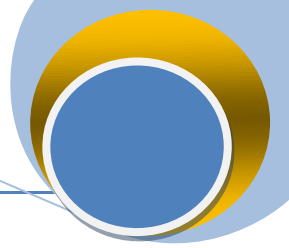


Fig.1.6. Coque

1.5.3. Poutre

La RDM étudie la réponse mécanique de pièces en équilibre sous l'action d'efforts extérieurs. Ces pièces possèdent une forme particulière appelée poutre. Les poutres sont associées, entre elles ou à d'autres types d'éléments pour constituer des systèmes ou structures.



On appelle poutre (voir fig.) un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée ligne moyenne, elle peut être droite (poutre droite) ou courbe (poutre courbe).

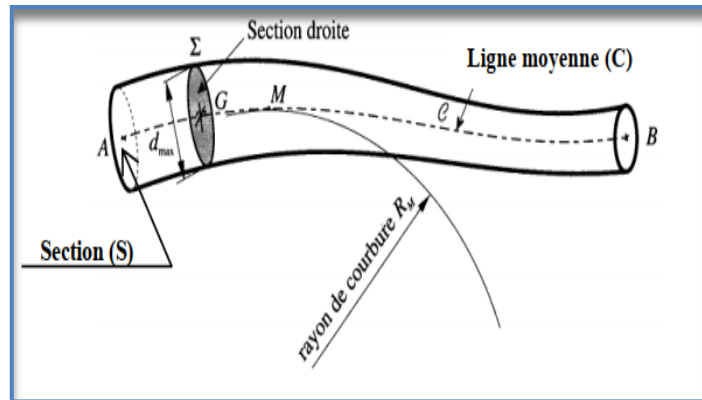


Fig.1.7. Schéma de poutre

Ils existent plusieurs différentes formes de sections de la poutre dont on montre quelqu'une.

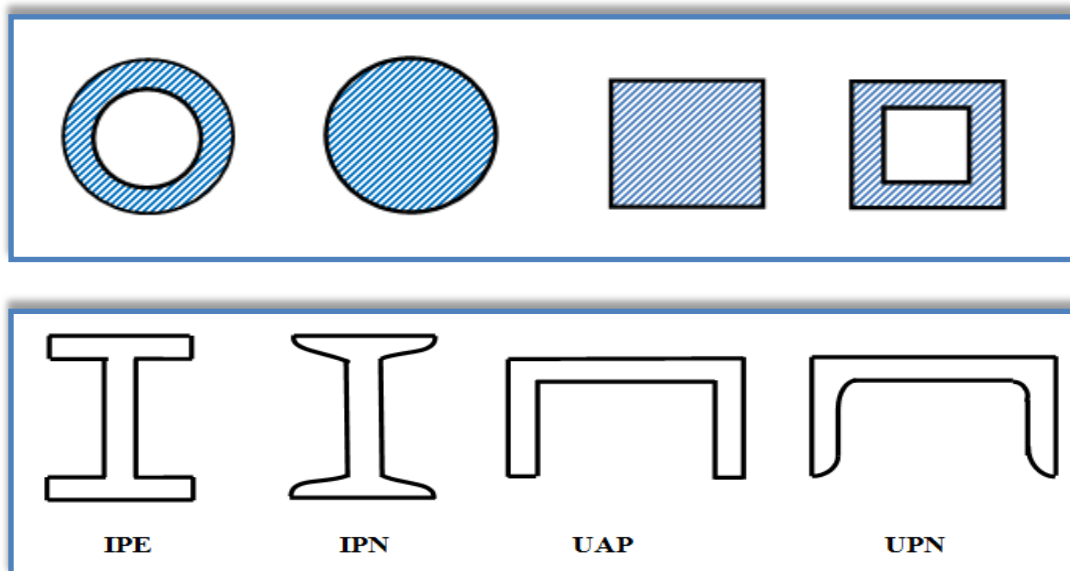
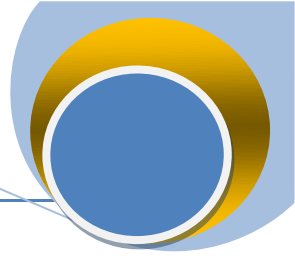


Fig.1.8. Formes usuelles des sections droites

Les notions abordées dans ce cours ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre c'est à dire un solide pour lequel :

- Il existe une ligne moyenne, continue, passant par les barycentres des sections du solide,



- Les dimensions transversales de la poutre considérée sont petites par rapport à sa longueur,
- Le rayon de courbure de la ligne moyenne est suffisamment grand par rapport à la dimension transversale de la poutre, en général, ce rayon doit être \geq à 5 fois de la hauteur de la section,
- Pour une poutre droite, le rapport : $L/30 \leq h/L \leq L/5$ (Généralement : $L/15 \leq h/L \leq L/10$),
Pour les poutres courbes, ce rapport est : $L/100 \leq h/L \leq L/50$,
- Il n'y a pas de brusque variation de section (trous, épaulements),
- Le solide admet un seul et même plan de symétrie pour les charges et la géométrie.

1.6. Convention de signe des axes

Généralement on utilise le système Cartésien ou rectangulaire pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes OX, OY et OZ mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs des ces axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Fig. 1.1), on choisit les sens positifs de deux axes X et Y par exemple, le sens positif de l'axe Z est suivant la direction d'un vis tournant de l'axe X vers l'axe Y.

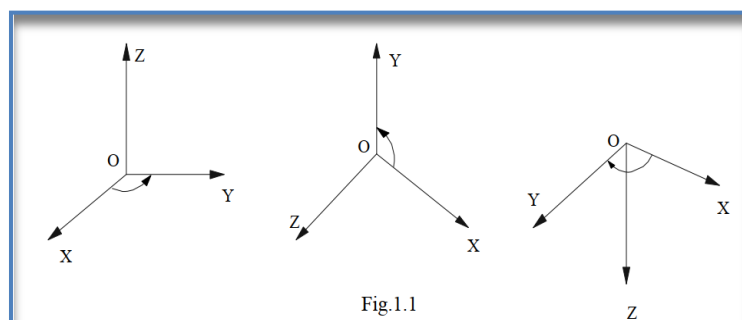
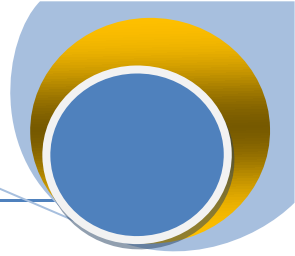


Fig.1.9. Convention de signe des axes

1.7. Réactions d'appui

Lorsqu'un objet S_1 exerce une force (appelée « action ») sur un objet S_2 , l'objet S_2 exerce une force opposée (appelée « réaction ») sur l'objet S_1 .



Avant toute étude de résistance des matériaux, il est nécessaire de déterminer les réactions d'appuis, c'est-à-dire leurs points d'applications, leurs directions et leurs intensités. Les divers points de contact du système étudié avec son environnement sont appelés « réactions d'appuis ». Par mesure simplificatrice on admet qu'il existe dans les systèmes plans 3 types de réaction d'appui:

- L'appui simple: 1ddl bloqué (1 inconnue de liaison),
- L'articulation (appui double): 2ddl bloqués (2 inconnues de liaison),
- L'encastrement: 3ddl bloqués (3 inconnues de liaison).

1.7.1. Appui simple

Ce type d'appui présenté par la Fig.1, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui à la direction de la droite précitée, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre. C'est le premier type d'appui le plus simple, le plus économique. Il représente une situation idéalisée car dans la réalité il y a très souvent des frottements qui limitent le mouvement dans la direction horizontale.

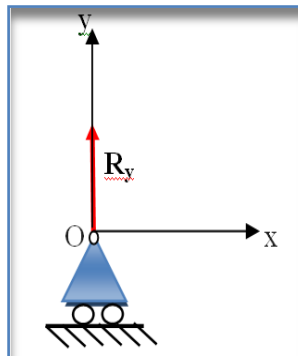
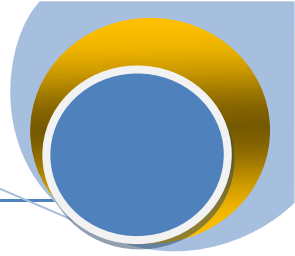


Fig.1.10. Appuis simple

1.7.2. Appuis double

Cet appui est également appelé articulation ou rotule, il ne comporte qu'une seule possibilité de mouvement une rotation autour de la rotule O, c'est pourquoi on dit que cet appui à un degré de liberté. Elle impose deux blocages de translation qui font naître deux réactions d'appui, composante d'une force passant par l'axe de l'articulation (fig.1.6). Il ne tolère que la



rotation de la section d'appui. On rencontre très souvent ce type d'appui : assemblages de contreventement en acier, éléments de charpente en bois, poutres de pont en acier.

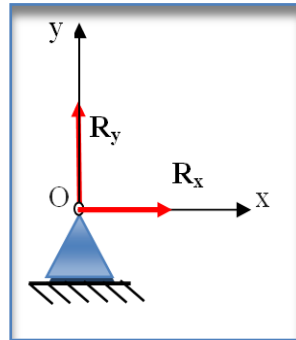


Fig1.11. Appuis double (Articulation)

1.7.3. Encastrement

Cette liaison reliant la poutre à une pièce considérée comme fixe, un encastrement empêche le corps de se déplacer dans les deux directions x et y et empêche la rotation du corps dans le plan (x, y) , Il y a donc l'apparition des réactions d'appui et d'un moment dit d'encastrement « M » bloquant la rotation perpendiculaire au plan moyen (fig).

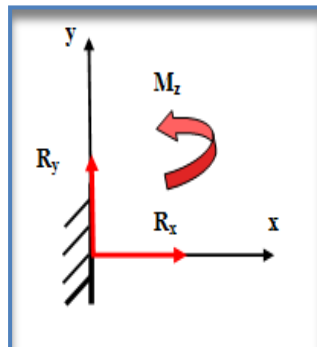
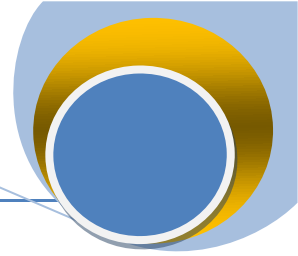


Fig.1.12. Encastrement

1.8. Force

On appelle « force » les actions mécaniques entre solides, ces actions peuvent être des forces de contact ou des forces à distance. Une force est modélisée par un vecteur et est caractérisée par 4 paramètres:

- ❖ Un point d'application A,



- ❖ Une direction,
- ❖ Un sens,
- ❖ Une intensité,

$F_{2/1}$ représente l'action mécanique exercée en A par le solide 2 sur le solide 1,

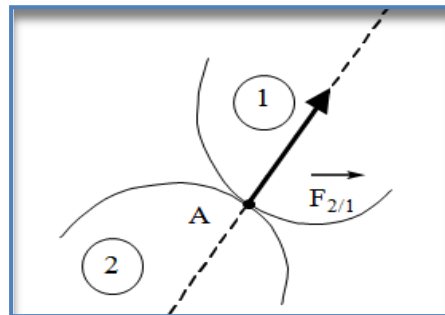


Fig.1.13. Représentation de l'action mécanique

- L'unité légale est le « Newton » symbole « N »;
- Les multiples sont daN = 10 N, MN = 10⁶ N;

1.9. Différents types de chargement

En RDM, on peut utiliser les termes de «charges» ou «d'efforts» pour définir les actions mécaniques exercées sur la poutre, On distingue les actions extérieures et les actions intérieures à un solide :

Effort extérieur: On appelle effort (action) extérieur appliqué à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système, tels que : Le poids propre, effort généré par un champ magnétique, force du vent, force quelconque,...

En théorie des poutres, on distingue en général deux types de charges :

- Les charges concentrées qui s'appliquent en un point de la poutre et définie par un torseur en ce point d'application. Si ce torseur se réduit à une résultante, on l'appelle force concentrée. Si ce torseur se réduit à un couple (ou un moment) on l'appelle moment concentré.

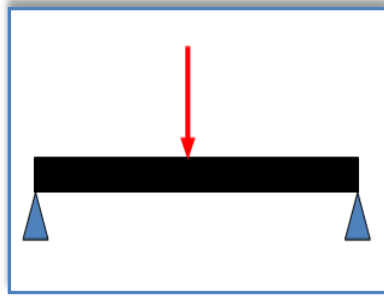
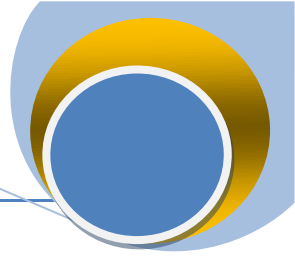


Fig.1.14. Catégories des forces concentrées

- Les charges réparties: Elles se classent en deux catégories, forces uniformément réparties et forces à répartition variable, les charges réparties sont distribuées continûment le long d'un segment de la poutre et sont représentées par un champ de vecteurs uniforme ou non.

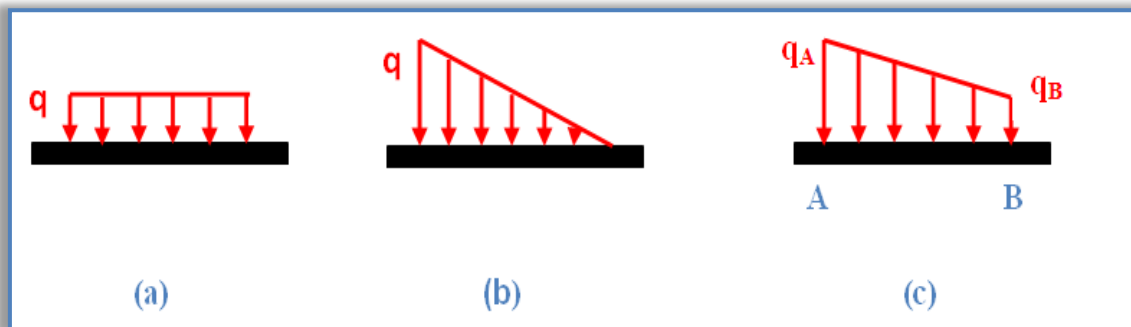


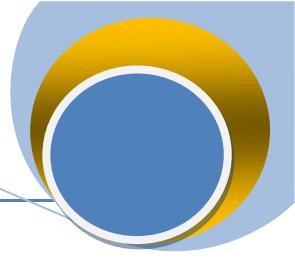
Fig.1.15. Catégories des forces réparties

Si la charge est uniforme, alors l'ensemble de la charge linéique est équivalent à une force située au centre de la ligne de contact.

Effort intérieur: Ce sont les efforts de cohésion entre les particules d'un solide. En effet, sous l'action des charges extérieures, les efforts internes varient afin de garantir l'équilibre statique de l'élément du solide. La connaissance de ces efforts nous permettra, par la suite, de quantifier la résistance de la structure

1.10. Principe fondamental de la statique

La stratégie de la RDM repose sur le principe de l'équilibre général, un solide indéformable, sollicité par un système de forces extérieures, est en équilibre si et seulement si:



1. La résultante générale de ces forces est nulle,
2. Le moment résultant de ces forces par rapport à un point M quelconque est nul.

$$(S) \text{ en équilibre} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}/M} = \vec{0} \end{cases}$$

Les systèmes qu'on étudie sont les systèmes isostatiques, le nombre des inconnues égale le nombre d'équations d'équilibre. Les réactions d'appui se déterminent à partir des seules équations de la statique.

1.11. Torseur de cohésion

1.11.1. DEFINITION

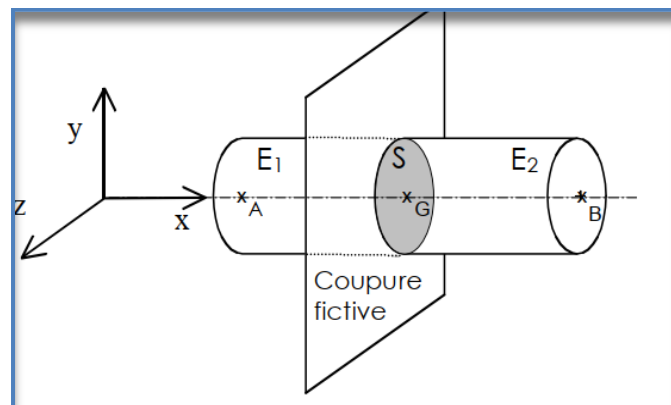
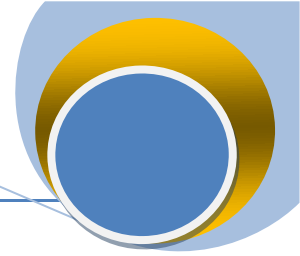


Fig.1.16. Coupe fictive dans une poutre

Pour étudier une poutre (E) en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures, il faut modéliser ce qui se passe dans la matière. Pour se faire, on réalise une coupure fictive de la poutre située à l'abscisse x qui la sépare en 2 tronçons E₁ et E₂ de telle sorte que E = E₁ ∪ E₂, on note E₁ la partie gauche et E₂ la partie droite.

Après coupure selon une section droite, les deux parties résultantes ne sont plus en équilibre l'une par rapport à l'autre, mais chacune d'entre elles forment un système en équilibre (Figure). Ainsi les forces intérieures développées sur la section de coupure représentent l'action de la partie gauche (g) du système initial sur sa partie droite (g), ou inversement.

L'action de la partie droite sur la partie gauche peut être remplacée par: une force résultante **R** (R_x, R_y et R_z) et un couple résultant **C** (M_x, M_y et M_z) agissant au centre de gravité de la



section G. Les six composantes représentant l'action de la partie de droite sur la partie de gauche peuvent être déterminées à l'aide des équations de la somme statique exprimant l'équilibre de la partie considérée (3 équations d'équilibre de translation et 3 équations d'équilibre de rotation).

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \Sigma F_x & \mathbf{R}_y &= \Sigma F_y & \mathbf{R}_z &= \Sigma F_z \\ \mathbf{M}_x &= \Sigma M/x & \mathbf{M}_y &= \Sigma M/y & \mathbf{M}_z &= \Sigma M/z \end{aligned}$$

Les composantes R_x, R_y, R_z, C_x, C_y et C_z s'appellent éléments de réduction (réduction de toutes les forces à droite de la section S) dans la section S de la poutre considérée. En RDM, on utilise plutôt les notations N_x, T_y, T_z, M_t, M_y et M_z ,

Isolons le tronçon E₁

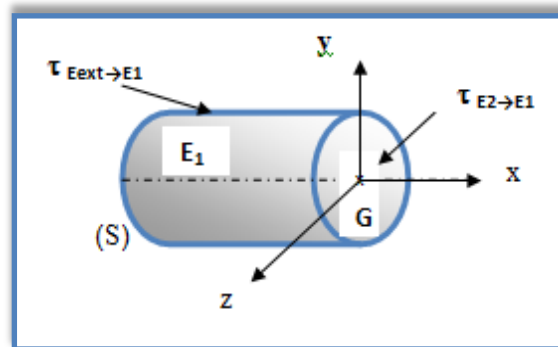


Fig.1.17. Tronçon E₁ de la poutre

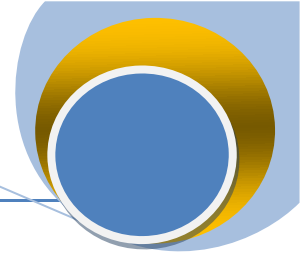
Les actions mécaniques que le tronçon E₂ exerce sur le tronçon E₁ à travers la section droite S sont des actions mécaniques intérieures à la poutre P.

Nous en ignorons à priori la nature, cependant la liaison entre E₁ et E₂ peut être modélisée par une liaison complète. On peut donc modéliser l'action mécanique E₂ sur E₁ par un torseur appelé torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion $\{\tau_i\}$

$$\{\tau_i\} = \{ \tau_{E2 \rightarrow E1} \} = - \{ \tau_{E1 \rightarrow E2} \}$$

Avec : $\{ \tau_{E2 \rightarrow E1} \}$ le torseur des efforts exercés par la partie E2 sur la partie E1,

$\{ \tau_{E1 \rightarrow E2} \}$ le torseur des efforts exercés par la partie E1 sur la partie E2.



❖ **Relation entre le torseur des efforts extérieurs et le torseur des efforts de cohésion, sur un tronçon de poutre isolé**

Exprimons ce torseur en utilisant le principe fondamental de la statique. Appliquons ce principe au tronçon E1

$$\text{Soit: } \{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E1)}\} + \{\tau_{(E2 \rightarrow E1)}\} = \{0\} \text{ ou } \{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E1)}\} + \{\tau_i\} = \{0\}$$

Avec $\{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E1)}\}$ le torseur des efforts extérieurs sur le tronçon E1.

On déduit de ça que $\{\tau_i\} = -\{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E1)}\}$

Isolement du tronçon Droit E2

Appliquons le PFS au tronçon E2 :

$$\text{Soit: } \{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E2)}\} + \{\tau_{(E1 \rightarrow E2)}\} = \{0\} \text{ ou } \{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E2)}\} + \{\tau_i\} = \{0\}$$

Avec $\{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E2)}\}$ le torseur des efforts extérieurs sur le tronçon E2.

On déduit de ça que $\{\tau_i\} = -\{\tau_{(E_{\text{ext}} \rightarrow E1)}\}$

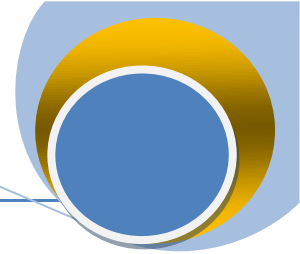
1.11.2. Composants d'un torseur de cohésion

Les efforts de cohésion traduisent les actions de contact de (E₂) sur (E₁). Ces efforts de cohésion permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures. Les efforts intérieurs en un point G de la ligne moyenne d'une poutre sont les composantes des éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs qui prend la forme suivante :

$$\{\tau_i\} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{N} & \mathbf{M}_t \\ \mathbf{T}_y & \mathbf{M}_{fy} \\ \mathbf{T}_z & \mathbf{M}_{fz} \end{array} \right\}$$

Avec:

- **N**, effort normal: force de direction tangente à la courbe moyenne;
- **T**, effort tranchant: force perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant un cisaillement:
 - **T_y**: Effort tranchant selon y,



- T_z : Effort tranchant selon z ,
- M_f , moment fléchissant : moment dont le vecteur est perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant une flexion:
 - M_{fy} : Effort tranchant selon y ,
 - M_{fz} : Effort tranchant selon z ,
- M_t , moment de torsion : son vecteur a pour direction x

1.11.3. Convention des signes

Considérons une poutre en équilibre statique. La convention des signes pour l'effort normal N , l'effort tranchant T et le moment de flexion M est illustrée sur la figure ci-dessous.

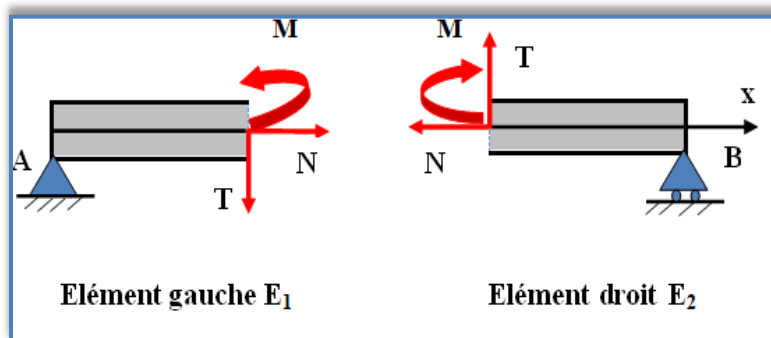


Fig.1.18. Convention de signes des efforts internes

1.12. Les différents types de sollicitations simples

Une poutre peut être soumise à plusieurs sollicitations qui dépendent de la nature et de la direction des actions mécaniques. Les sollicitations simples sont obtenues lorsque le tenseur de cohésion possède une seule composante non nulle. Si une seule composante N , T , M_T ou M_f existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une sollicitation simple. Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Alors Lorsque l'on a une seule de ces sollicitations on parle de sollicitation simple, sinon on a un problème de sollicitations composées.

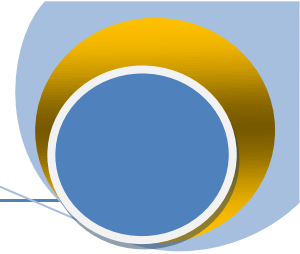
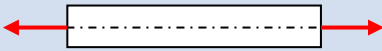
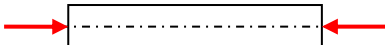
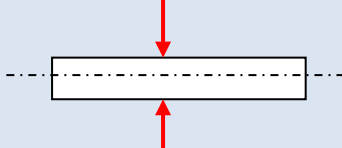
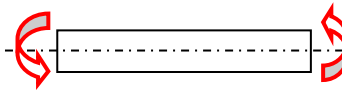

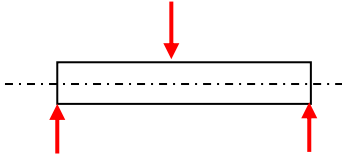
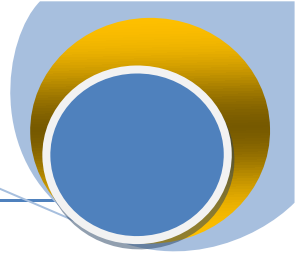


Tableau.1.1. Différentes sollicitations simples

Sollicitations	Torseur de cohésion	Les composants		Exemple
Traction $N > 0$	$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	N	$\neq 0$	
		T	$= 0$	
		M_t	$= 0$	
		M_f	$= 0$	
Compression $N < 0$	$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	N	$\neq 0$	
		T	$= 0$	
		M_t	$= 0$	
		M_f	$= 0$	
Cisaillement simple	$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	N	$= 0$	
		T_y ou T_z	$\neq 0$	
		M_t	$= 0$	
		M_f	$= 0$	
Torsion pure	$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	N	$= 0$	
		T	$= 0$	
		M_t	$\neq 0$	
		M_f	$= 0$	
Flexion pur	$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$	N	$= 0$	
		T	$= 0$	
		M_t	$= 0$	
		M_f	$\neq 0$	
Flexion simple	$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$	N	$= 0$	
		T_y ou T_z	$\neq 0$	
	ou	M_t	$= 0$	
	$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	M_{fy} ou M_{fz}	$\neq 0$	



1.13. Diagrammes

Les composantes algébriques N , T_y , T_z , M_t , M_{fy} , M_{fz} varient en fonction de la position du centre de surface G de la section droite fictive (S). Le point G est défini par son abscisse x .

La représentation graphique $N(x)$; $T_y(x)$; $T_z(x)$; $M_t(x)$; $M_{fy}(x)$; $M_{fz}(x)$ le long de la poutre donne les diagrammes des composantes des éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion. Les diagrammes des éléments de réduction permettent de localiser les sections les plus sollicitées (sièges des contraintes les plus élevées) et servent au dimensionnement des différents éléments des structures.

1.14. Contrainte

Le torseur de cohésion schématise les actions de cohésion s'exerçant dans une section droite de la poutre, il constitue donc une représentation globale. Pour avoir une représentation plus détaillée en chaque point de la section, nous utiliserons la notion de contrainte.

1.14.1. Définition de la contrainte

On appelle vecteur contrainte en un point M de normale \vec{n} , la résultante des forces \vec{df} sur un élément de surface dS de la section droite S autour de M (Figure), la quantité $\vec{C}(M, \vec{n})$ telle que:

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta s} = \frac{d\vec{f}}{ds}$$

\vec{n} : Normale, en M à la facette (ici perpendiculaire à la ligne moyenne, mais peut être quelconque).

$d\vec{f}$: Effort élémentaire s'appliquent sur la facette.

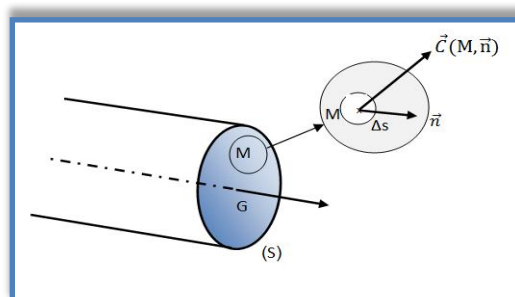
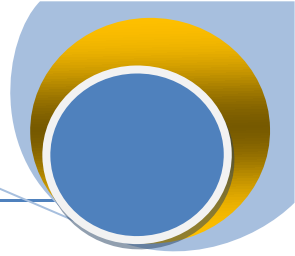


Fig.1.19. Vecteur contrainte



Par définition, la contrainte est assimilable à une pression.

Unité: le pascal (Pa): $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

L'unité couramment utilisée est le Méga-pascal.

$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$, $1 \text{ MPa} = 10 \text{ bar}$.

1.14.2. Contrainte normale et tangentielle

On décompose le vecteur contrainte suivant la normal \vec{n} et dans le plan de la section, repère (M, \vec{n}, \vec{t}) , par projection, on définit:

σ : Contrainte normale,

τ : Contrainte tangentielle.

Tel que:

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t}$$

\vec{t} : Vecteur unitaire tangent à ΔS (t appartient au plan de la section).

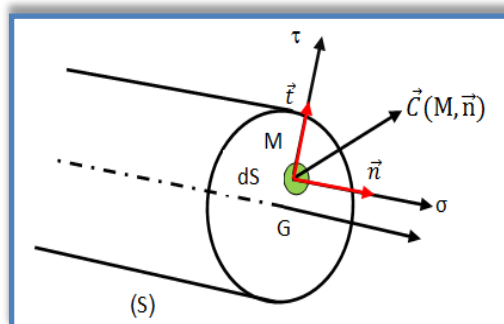
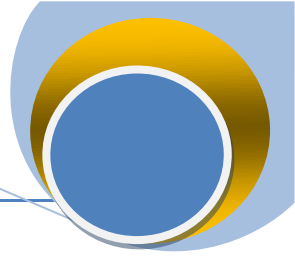


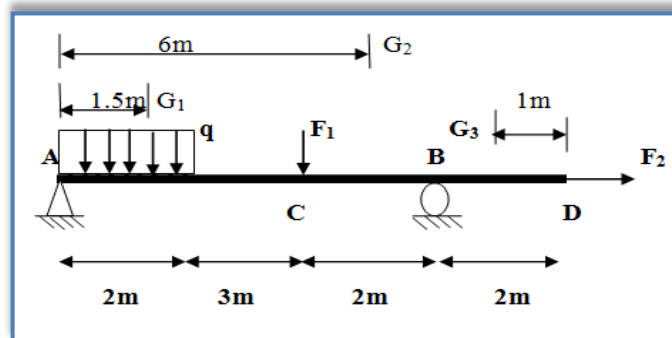
Fig.1.20. Contrainte normale et tangentielle



Exercices

Exercice 01

Une poutre en appui simple en **B** et articulée en **A**, supporte son propre poids et les forces F_1 et F_2 en **C** et **D**.

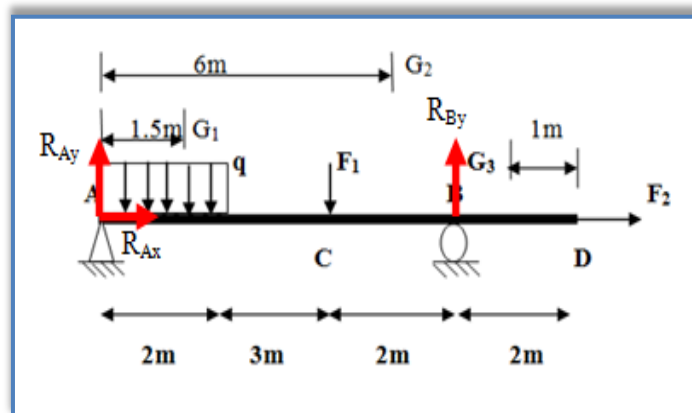


- 1) Calculer les réactions d'appui.
- 2) Calculer en fonction de x le torseur de cohésion dans la section G_1, G_2 et G_3 .
- 3) En déduire le type de sollicitation dans ces sections.

On donne : $F_1 = 180\text{N}$, $F_2 = 120\text{N}$, $q = 200\text{N/m}$,

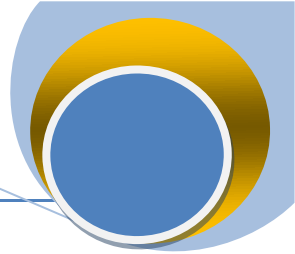
SOLUTION

1- Calcul des réactions d'appuis



Appliquons le principe d'équilibre, on trouve:

$$\sum F/x = 0 \implies R_{Ax} + F_2 = 0$$



$$R_{Ax} = -F_2 = -120N$$

$$\sum M / z(A) = 0 \implies R_{By} (7) - F_1 (5) - q \times 2 (1) = 0 \implies R_{By} = 185.71N$$

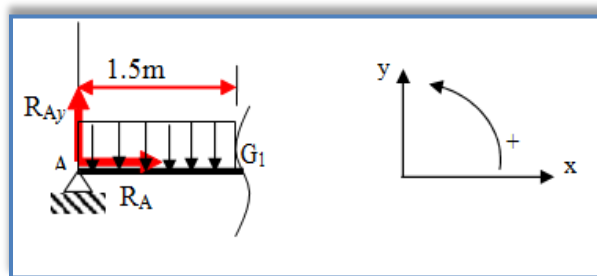
$$\sum M / z(B) = 0 \implies -R_{Ay} (7) + F_1 (2) + q \times 2 (6) = 0 \implies R_{Ay} = 394.29N$$

Vérification

$$\sum F / y = 0 \implies R_{Ay} + R_{By} - F_1 - q \times 2 = 580 - 580 = 0 \quad (\text{condition vérifiée})$$

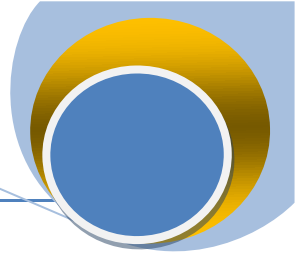
2- Calcul des torseurs de cohésion dans les sections droites G₁, G₂ et G₃.

a) Section G₁:

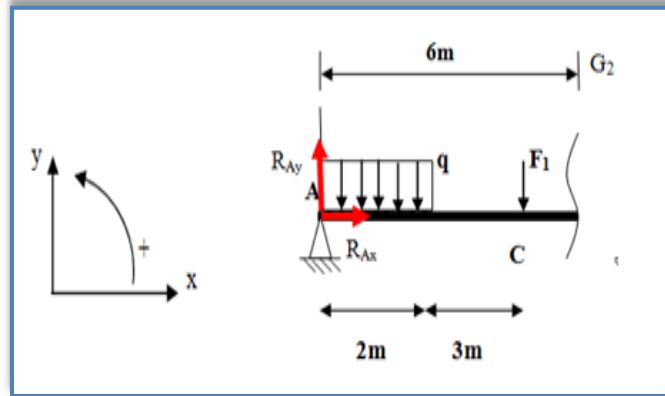


Partie gauche, donc le torseur de cohésion s'écrit:

$$\begin{aligned} \{\tau_i\} &= - \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F/x & M/x \\ F/y & M/y \\ F/z & M/z \end{Bmatrix} \\ \{\tau_i\}_{G_1} &= - \begin{Bmatrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} - q \times 1.5 & 0 \\ 0 & -R_{Ay} \times 1.5 + q \times \frac{1.5^2}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120N & 0 \\ -94.29 N & 0 \\ 0 & -366.43N.m \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

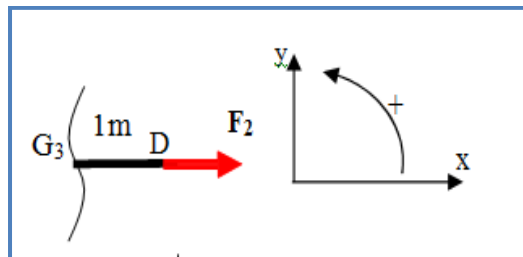


b) Section G₂ : Partie gauche



$$\left\{ \begin{matrix} \tau_i \\ G_2 \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} - q \times 2 - F_1 & 0 \\ 0 & -R_{Ay} \times 6 + q \times 2 \times 5 + F_1 \times 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 120N & 0 \\ 185.71 N & 0 \\ 0 & 185.74N.m \end{matrix} \right\}$$

c) Section G₃ : Partie droite



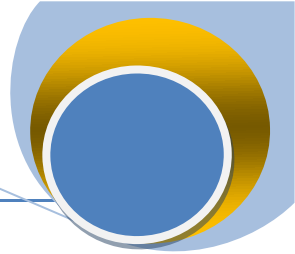
$$\left\{ \begin{matrix} \tau_i \\ G_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 120N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

3- Type de sollicitation dans ces sections

Section G₁: Flexion composée ($N \neq 0, T_y \neq 0$ et $M_{fz} \neq 0$)

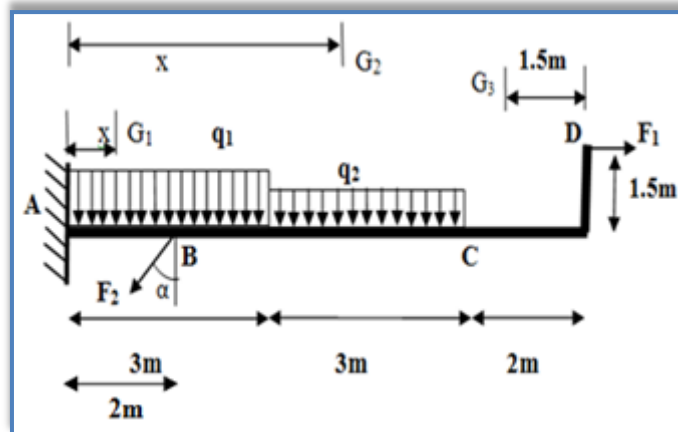
Section G₂: Flexion composée ($N \neq 0, T_y \neq 0$ et $M_{fz} \neq 0$)

Section G₃: Traction simple ($N \neq 0 > 0, T_y = 0$ et $M_{fz} = 0$)



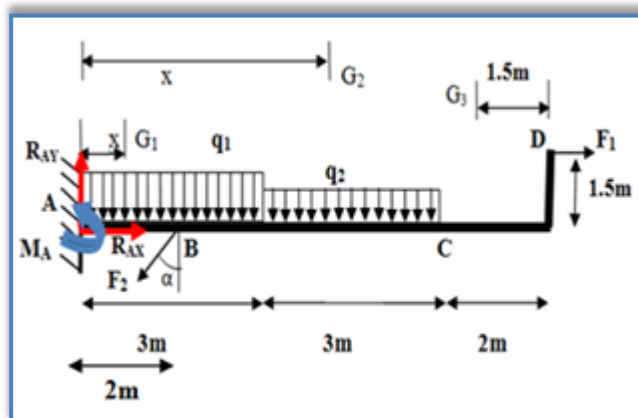
Exercice 02

Une poutre en béton armé est encadrée en A supporte les forces F_1 et F_2 en B et D respectivement et deux charges réparties q_1 et q_2



- 1) Calculer les réactions d'appui.
 - 2) Calculer le torseur de cohésion dans la section G1.G2 et G3
- On donne $\alpha = 45^\circ$, $F_1 = 15 \text{ KN}$, $F_2 = 20 \text{ KN}$, $q_1 = 35 \text{ KN/m}$, $q_2 = 25 \text{ KN/m}$

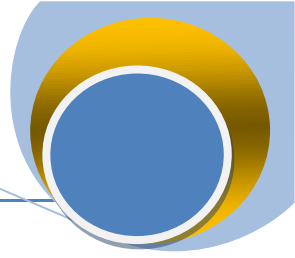
Solution



Appliquons le principe d'équilibre, on trouve:

$$\sum F / x = 0 \implies R_{Ax} + F_1 - F_2 \sin \alpha = 0$$

$$R_{Ax} = F_2 \sin \alpha - F_1 = -0.86 \text{ KN}$$



$$\sum M / z(A) = 0 \implies M_A - F_1 (1.5) - q_1 \times 3 \times (1.5) - q_2 \times 3 \times (4.5) - F_2 \cos \alpha \times 2 = 0$$

$$\implies M_A = 545.78 \text{ KN}$$

$$\sum M / z(C) = 0 \implies -R_{Ay} (6) + M_A - F_1 (1.5) - q_1 \times 3 \times (4.5) + q_2 \times 3 \times (1.5) + F_2 \cos \alpha \times 4 = 0$$

$$\implies R_{Ay} = 194.19 \text{ N}$$

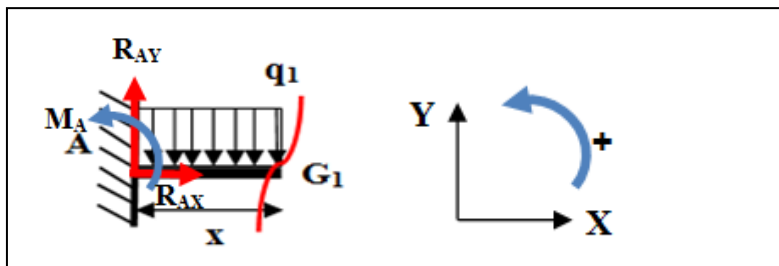
Vérification

$$\sum F / y = 0 \implies R_{Ay} - F_2 \cos \alpha - q_1 \times 3 - q_2 \times 3 = 194.14 - 194.14 = 0 \text{ (condition vérifiée)}$$

4- Calcul des torseurs de cohésion dans les sections droites G₁, G₂ et G₃.

a) Section G₁:

Partie gauche, donc le torseur de cohésion s'écrit:

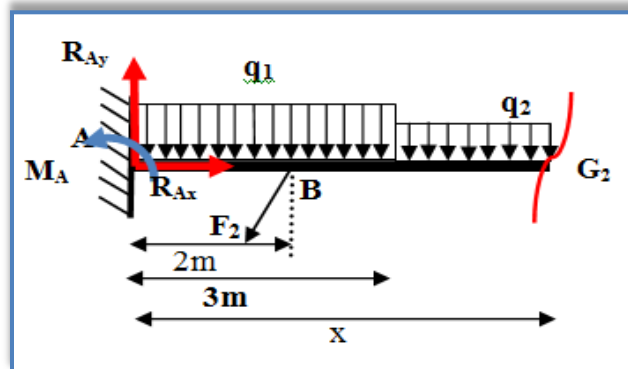
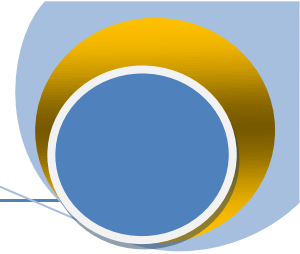


$$\{\tau_i\}_{G_1} = - \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F/x & M/x \\ F/y & M/y \\ F/z & M/z \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_i\}_{G_1} = - \begin{Bmatrix} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} - q_1 \cdot x & 0 \\ 0 & -R_{Ay} \cdot x + q_1 \times \frac{x^2}{2} + M_A \end{Bmatrix} = \left. \begin{Bmatrix} 0.86 \text{ KN} & 0 \\ 35x - 194.14 & 0 \\ 0 & -17.5 x^2 - 194.14x - 545.78 \end{Bmatrix} \right\}$$

b) Section G₂:

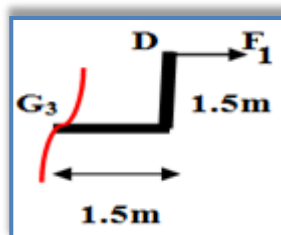
Partie gauche, donc le torseur de cohésion s'écrit:



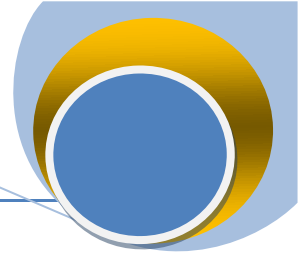
$$\left. \begin{aligned} \left\{ \tau_i \right\}_{G_2} = - \left\{ \begin{array}{cc} R_{Ax} & 0 \\ R_{Ay} - q_1 \cdot 3 - q_2 \cdot (x-3) - F_2 \cos \alpha & 0 \\ 0 & -R_{Ay} \cdot x + q_1 \cdot 3(x-3) + q_2 \cdot \frac{(x-3)^2}{2} + M_A + F_2 \cos \alpha (x-2) \end{array} \right\} \\ \left\{ \tau_i \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0.86 & 0 \\ 25x - 150 & 0 \\ 0 & -12.5 x^2 + 150x - 472.5 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\}$$

c) Section G3:

Partie droite, donc le torseur de cohésion s'écrit:



$$\left\{ \tau_i \right\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{cc} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1,5 F_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 15\text{KN} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -22,5\text{KN} \end{array} \right\}$$



CHAPITRE 02: caractéristiques géométriques des sections droites

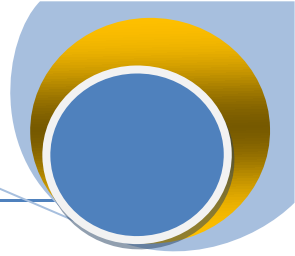
2.1. INTRODUCTION

Lorsqu'on entreprend l'étude ou la vérification d'une structure quelconque (poutre, poteau ou autre), on doit répondre à des critères de résistance, stabilité et de rigidité, en effet le comportement aux différentes sollicitations sera recherché en fonction non seulement du matériau dont il est fait et de ses dimensions, mais aussi de la configuration de son axe, de la forme des sections transversales ainsi que de leur disposition par rapport aux charges de sollicitations qui sont considérées les éléments de base de la résistance des matériaux.

Le plus grand risque de rupture d'une pièce est provoqué si l'on place une section de dimensions faibles à un endroit où les sollicitations sont importantes, donc le but est de choisir la forme et les dimensions la plus adaptée pour la pièce afin de satisfaire les critères.

Pour les sollicitations qui vont suivre (torsion, flexion), l'aire de la section droite ne suffit plus pour caractériser la poutre et en déduire son comportement. Dans ce chapitre on va étudier en détail les principales caractéristiques des sections planes, leur méthode et leurs propriétés vis-à-vis les différents cas de sollicitations à savoir:

- Les moments statiques,
- La position du centre de gravité,
- Les moments quadratiques ou moments d'inertie,
- Le moment quadratique polaire,
- Le produit d'inertie,
- Rayon de giration,
- Formules de transformation des moments d'inertie.



2.2. Les moments statiques

2.2.1. DEFINITION

Soient une surface plane (S) de forme quelconque autour du point matériel M , et un repère orthonormé (O, x, y) associé. Le droite Δ appartient à ce repère.

Soit dS une petite surface élémentaire à l'intérieur de la surface plane S .

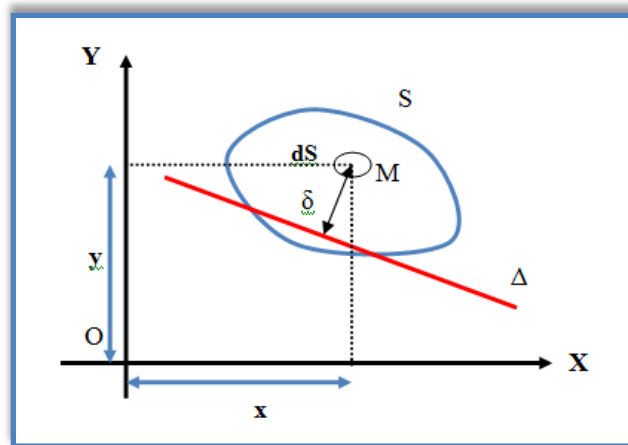


Fig.2.1. Moment statique

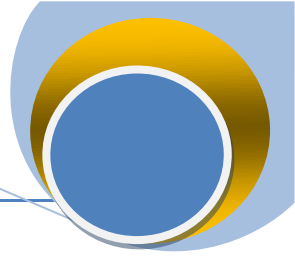
Le moment statique de la section S par rapport à la droite Δ située à la distance δ de M , est égal au produit de l'aire de la surface par sa distance à cette droite Δ , noté A_{Δ} , il s'exprime par la relation:

$$A_{\Delta} = \iint_S \delta \cdot ds$$

Si la droite Δ est confondu avec l'un des axes, $O(x)$ ou, $O(y)$ on obtient alors:

- Le moment statique de la surface S par rapport à l'axe, $O(x)$,
- Le moment statique de la surface S par rapport à l'axe, $O(y)$.

Le moment statique A_{Ox} d'une surface plane par rapport à l'axe Ox de son plan, est égal à la somme intégrale, étendue à toute la surface, des produits $y \cdot dS$. On le définit par l'expression suivante:



$$A_{ox} = \iint_S y \cdot ds$$

Le moment statique A_{oy} d'une surface plane par rapport à l'axe Oy de son plan, est égal à la somme intégrale, étendue à toute la surface, des produits $x \cdot dS$. On le définit par l'expression suivante:

$$A_{oy} = \iint_S x \cdot ds$$

Remarque

- Le moment statique d'une surface peut être positif, négatif ou nul suivant que l'abscisse X_G du centre de gravité de la surface est négatif ou positif.
- Pour tout axe passant par le centre de gravité d'une surface, le moment statique par rapport à cet axe est nul.
- Si la section S peut être décomposée en sous-sections simples, Les moments statiques s'additionnent. En effet, si l'on étudie une section composée de plusieurs éléments d'aires connues $S_1, S_2, S_3, \dots, S_i$, et de centre de gravité connus (X_{Gi} et Y_{Gi}) alors:

$$A_{ox} = \sum_{i=1}^n A_{oxi} = \sum_{i=1}^n S_i \cdot Y_{Gi}$$

et

$$A_{oy} = \sum_{i=1}^n A_{oyi} = \sum_{i=1}^n S_i \cdot X_{Gi}$$

2.2.2. Translation des axes (axes parallèle)

Si on procède à des translations parallèlement aux axes ox et oy , les moments statiques changent. Soit la section montrée par la figure telle que A_{ox} , A_{oy} , S sont connus et on se propose de déterminer $A_{ox'}$ et $A_{oy'}$.

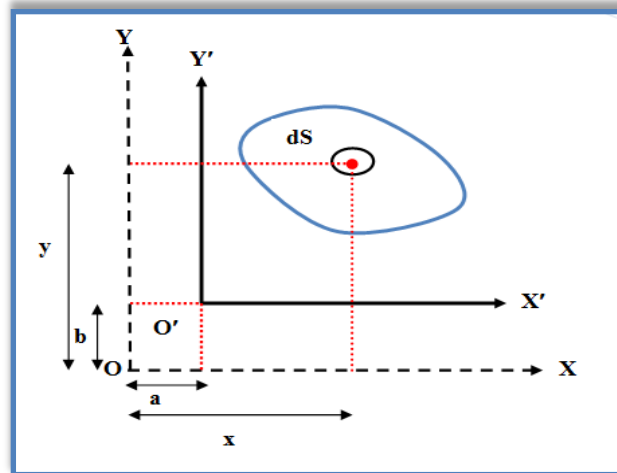
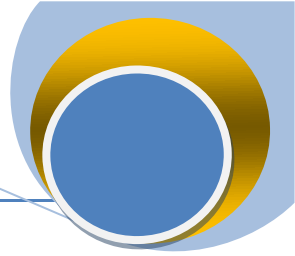


Fig.2.2. Translation des axes.

De la figure (2.2), On procède au changement de variables, telles que :

$$x' = x - a ; y' = y - b$$

Par définition, on a:

$$A_{ox'} = \iint_S y' \cdot ds = \iint_S (y - b) \cdot ds$$

$$A_{oy'} = \iint_S X' \cdot ds = \iint_S (x - a) \cdot ds$$

D'où:

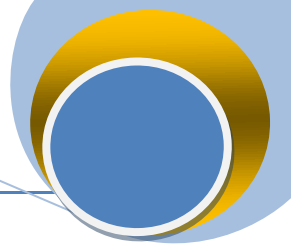
$$A_{ox'} = A_{ox} - b.S$$

$$A_{oy'} = A_{oy} - a.S$$

Unité: le moment statique a pour dimension la troisième puissance d'une longueur, il s'exprime en m^3 , cm^3 ou mm^3 .

2.3. Centre de gravité

Le centre de gravité (CDG) ou centre d'inertie d'un corps ou d'une surface est un point imaginaire où toute cette surface peut être considérée comme concentrée. C'est aussi le point où le poids d'un corps est concentré.



Dans le cas des corps homogènes le CDG est confondu avec le centre géométrique du corps, le CDG dépend seulement de la forme du corps dans ce cas.

Prenons une section quelconque (S) supposée homogène, et cherchons à déterminer le centre de gravité G, il est nécessaire de positionner un repère en un point quelconque « O ». Le repère choisi est donc (O, x, y).

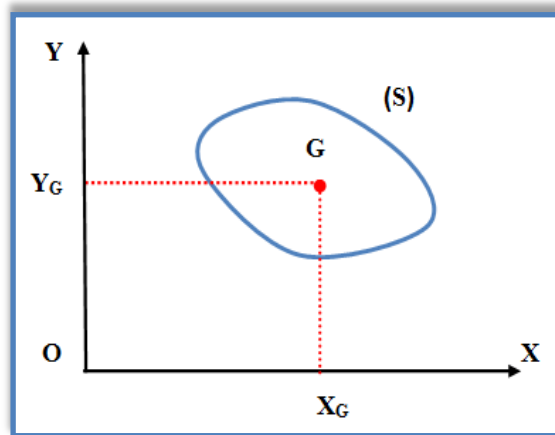


Fig.2.3. Centre de gravite dune section plane

Réciproquement, si le moment statiques A_{ox} , A_{oy} d'une section liée à un système (O, X, Y) sont connus, les distances X_G et Y_G du centre de gravité G de cette section sont définies par les relations ci-dessous :

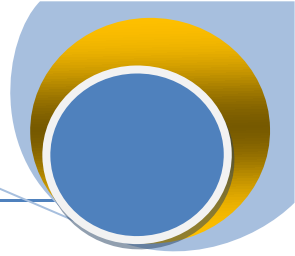
$$X_G = \frac{A_{oy}}{S} = \frac{\iint_S x \cdot ds}{S}$$

et

$$Y_G = \frac{A_{ox}}{S} = \frac{\iint_S Y \cdot ds}{S}$$

Pour une section composée, On détermine les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité, respectivement à partir des coordonnées X_{G1} , X_{G2} , ... X_{Gn} et Y_{G1} , Y_{G2} , ... Y_{Gn} des centres de gravités des surfaces S_1 , S_2 , S_n composant la pièce. Les coordonnées du centre de gravité sont données par les expressions:

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$



et

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

S_i: sont les aires des parties composant la section,

X_{Gi}, Y_{Gi} : sont les coordonnées respectives de leurs centres de gravité.

Remarque

Axe de symétrie

- Dans le cas où la section possède un axe de symétrie, le centre de gravité se situe obligatoirement sur cet axe.
- De même, si une section possède plus de deux axes de symétrie, ils se croisent tous en un même point (le centre de gravité se situe au point de concours de ceux-ci).

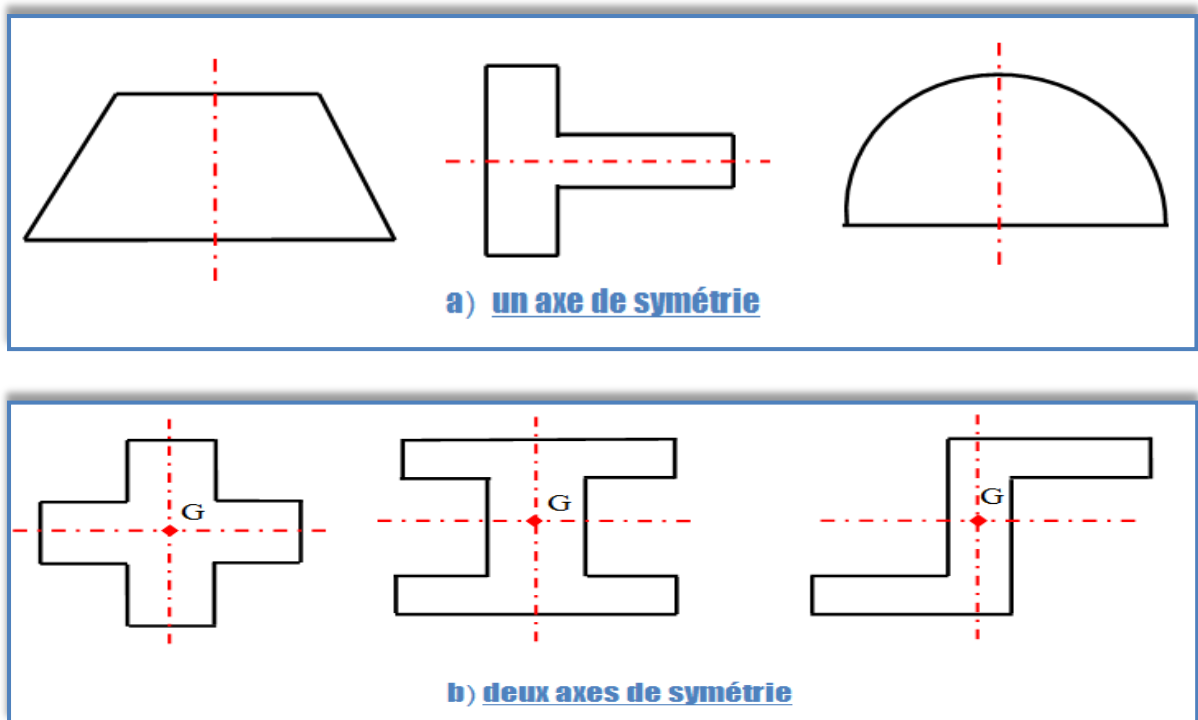
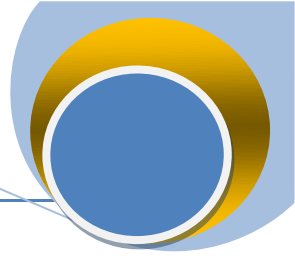


Fig.2.4. Illustrations des sections avec plan de symétrie



2.4. Moment quadratique d'une section droite

2.4.1. Définition

Le moment d'inertie des sections droites est d'une grande importance dans la conception des poutres et colonnes, Un moment d'inertie est une grandeur géométrique qui caractérise la répartition de la masse matière dans une section par rapport à un axe. Le moment d'inertie caractérise Ainsi Son aptitude à résister au fléchissement vis-à-vis du chargement.

Considérons une surface plane S dans laquelle un élément de surface dS infiniment petit est indiqué. Cet élément se trouve à une distance δ d'un axe quelconque " Δ ".

On appelle moment d'inertie I_{Δ} de l'élément de surface dS par rapport à l'axe considéré " Δ ", le produit de cet élément par le carré de la distance δ , Il caractérise la raideur de la poutre au fléchissement. Il est défini par :

$$I_{\Delta}(S) = \iint_S \delta^2 dS$$

(L'unité est le m^4 , ou par habitude le mm^4)

Dans le cas où l'élément de surface dS est situé à distance y de l'axe x et à distance x de l'axe y , ça veut dire que l'axe (Δ) est confondu avec les deux axes Ox , Oy

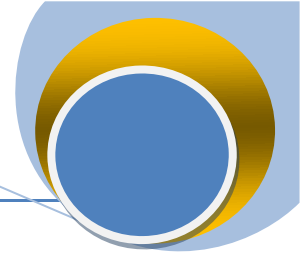
Pour obtenir le moment quadratique de toute la surface S par rapport à Ox , il faut réaliser une sommation de tous les moments élémentaires dI_{Ox} , c'est-à-dire l'intégrale de l'expression précédente étendue à toute la surface.

Ce qui s'écrit :

$$I_{Ox} = \iint_S y^2 dS$$

De même le moment quadratique de la section S par rapport à l'axe Oy :

$$I_{Oy} = \iint_S x^2 dS$$



2.4.2. Surface composée

Si la surface S est subdivisée en n éléments infiniment petits $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ dont les distances respectives à l'axe sont $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ alors le moment d'inertie de cette surface par rapport au même axe "O" est donné par la relation suivante:

$$I_O = I_{1(O)} + I_{2(O)} + \dots + I_{n(O)}$$

$$I_O = S_1 \delta_1^2 + S_2 \delta_2^2 + \dots + S_n \delta_n^2$$

$$I_O = \sum_1^n S_i \delta_i^2$$

Pour la commodité des calculs, il est préférable de prendre le cm comme unité de longueur. Les moments d'inertie sont repris, pour chaque profilé standard, dans des catalogues appelés "album de laminoirs". Les principaux profilés standards sont: les IPN, IPE, UPN, HEB, HEA, HEM et les cornières.

2.5. Moment quadratique polaire

La figure 2.5 présente le moment d'inertie polaire d'une surface (S) calculé par rapport à un axe perpendiculaire à son plan distant d'une valeur (r) et passant par l'origine (O). Il présente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion, On a comme résultat :

$$I_p = \iint_S r^2 dS$$

Où r est la distance entre l'aire dS et le point O appelé pôle.

Avec: $r^2 = x^2 + y^2$, le moment d'inertie polaire s'exprime par :

$$I_p = \iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_S x^2 dS + \iint_S y^2 dS$$

D'où :

$$I_p = I_{ox} + I_{oy}$$

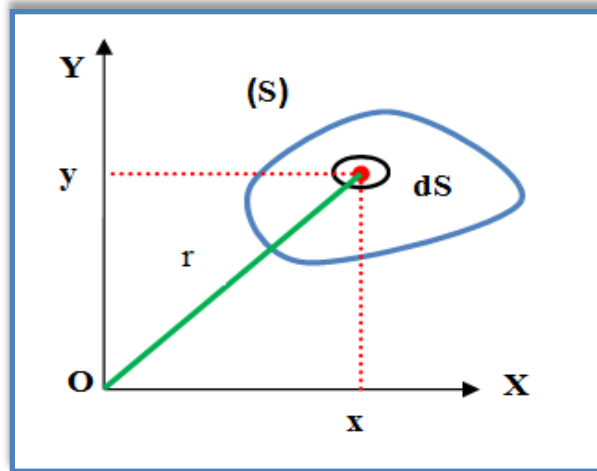
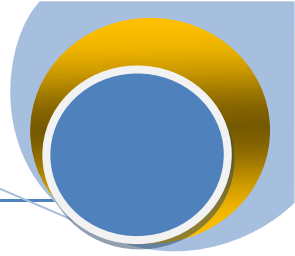


Fig.2.5. Moment d'inertie polaire

Remarques

- Le moment d'inertie polaire est toujours positif et n'est jamais nul.
- Le moment d'inertie polaire d'une section par rapport à tout point de cette section est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point.

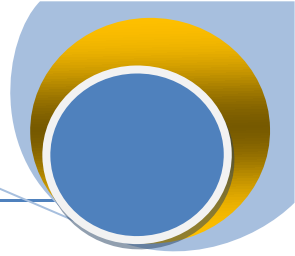
2.6. Moment quadratique calculée par rapport à des axes parallèles: (théorème de Huygens).

On connaît généralement les moments quadratiques d'une section calculés par rapport aux axes passant par le centre de gravité: I_{Gx} et I_{Gy} .

On peut aisément calculer le moment quadratique de cette même section par rapport à un axe quelconque. Pour cela il suffit de lui ajouter ce qu'on appelle le transport de HUYGENS.

Soit s la surface de la figure 2.6, on suppose que (Δ') passe par G est parallèle à Δ' , On passe du moment d'inertie autour d'une droite Δ' au moment d'inertie autour d'un axe parallèle Δ mais passant par le centre d'inertie G du solide, par la relation:

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} (G, S) + S.d^2$$



Où d : Est la distance entre le centre d'inertie G et la droite Δ .

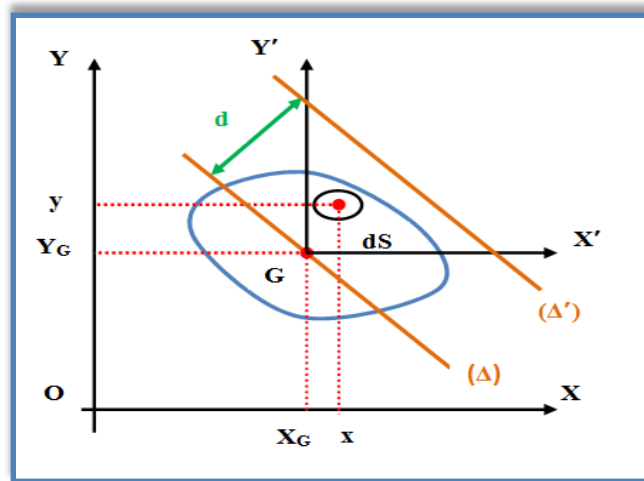


Fig.2.6. Hypothèse des axes parallèle

Le théorème des axes parallèles pour le moment d'inertie d'une surface finie énonce que le moment d'inertie d'une surface autour d'un axe est égale au moment d'inertie autour d'un axe parallèle passant par le centre d'inertie de la surface, plus le produit de la surface par le carré de la distance perpendiculaire entre les deux axes, pour la surface de la figure les axes X' et Y' passent au centre de gravité de la surface plane.

Les axes X et Y sont des axes parallèles à ceux ci-dessus et situés aux distances X_G et Y_G des axes du centre d'inertie I_{Ox} et I_{Oy} . Les moments d'inerties autour des axes X et Y , sont alors:

$$I_{Ox} = I_{Gx'} + S \cdot Y_G^2$$

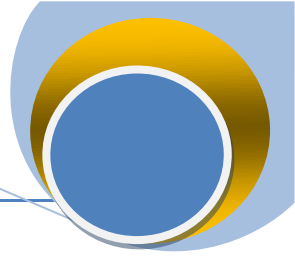
$$I_{Oy} = I_{Gy'} + S \cdot X_G^2$$

2.7. Changement de direction des axes

Soit une section S , ses moments d'inertie associés à un repère (O, X, Y) , sont connus, ils sont égales à:

$$I_{Ox} = \iint_S y^2 dS, \quad I_{Oy} = \iint_S x^2 dS$$

Le produit est égal:



$$I_{xy} = \iint_S xy \, dS$$

Considérons une aire élémentaire dS , (O, x_1, y_1) les nouveaux axes obtenus par une rotation d'angle θ . Les relations liant les coordonnées dans les deux repères sont:

$$x_1 = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$y_1 = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

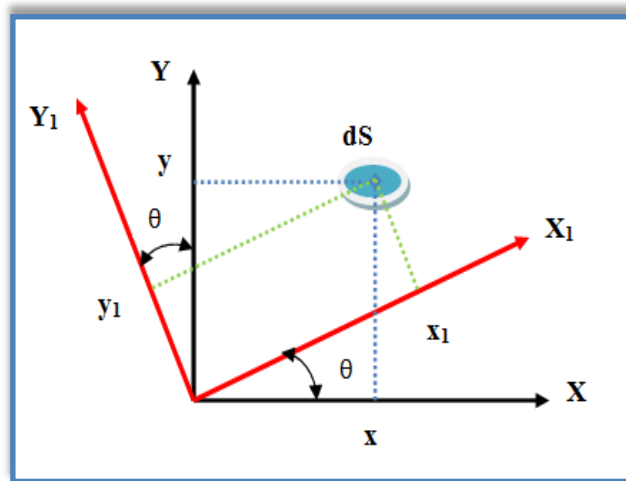


Fig.2.7. Changement de direction des axes d'une section plane

Établissant les mêmes quantités pour les nouveaux axes ox_1 et oy_1 , on obtient alors:

$$I_{ox_1} = \iint_S y_1^2 \, dS = \iint_S (-x \sin\theta + y \cos\theta)^2 \, dS$$

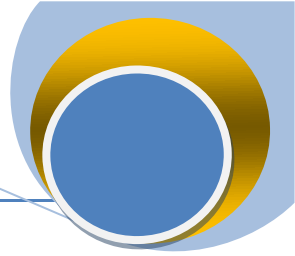
$$I_{ox_1} = \iint_S y^2 \cos^2\theta \, dS + \iint_S x^2 \sin^2\theta \, dS - \iint_S 2xy \sin\theta \cos\theta \, dS$$

Ce qui nous donne:

$$I_{ox_1} = I_{ox} \cos^2\theta + I_{oy} \sin^2\theta - I_{oxy} \sin 2\theta$$

De la même manière:

$$I_{oy_1} = I_{ox} \sin^2\theta + I_{oy} \cos^2\theta + I_{oxy} \sin 2\theta$$



- Calcul de la somme du moment

$$I_{ox1} + I_{oy1} = I_{ox} + I_{oy}$$

- Calcul de la différence du moment

$$I_{ox1} - I_{oy1} = (I_{ox} - I_{oy}) \cos 2\theta - 2 I_{oxy} \sin 2\theta$$

- Calcul du moment produit

$$I_{oxy1} = (I_{ox} - I_{oy}) \frac{1}{2} \sin 2\theta + I_{oxy} \cos 2\theta$$

En chaque point d'une section (S), il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul, $I_{oy1x1} = 0$ et les moments d'inertie quadratiques sont optimales. Les deux axes ainsi définies sont appelés axes principaux d'inertie.

On considérant $I_{oy1x1} = 0$, ceci permet d'obtenir cette expression qui permet de trouver la position de l'axe principal:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 I_{oxy}}{I_{oy} - I_{ox}}$$

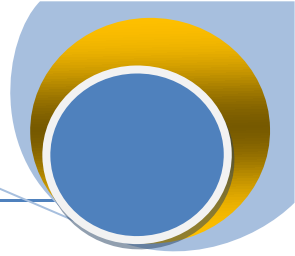
Pour cette valeur de l'angle θ , les moments axiaux sont l'un maximum et l'autre minimum, Pour déterminer les valeurs de (I_{\max}) et (I_{\min}), on peut utiliser le cercle de Mohr (figure 2.8).

Les moments d'inertie principaux sont définie par:

$$I_{\max} = \frac{I_{ox} + I_{oy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{ox} - I_{oy}}{2}\right)^2 + I_{oxy}^2}$$

$$I_{\min} = \frac{I_{ox} + I_{oy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{ox} - I_{oy}}{2}\right)^2 + I_{oxy}^2}$$

Les axes principaux au centre de surface G de S sont appelés axes centraux. Les moments d'inerties principaux centraux **vallent**:



$$I_{\max} = \frac{I_{GX} + I_{GY}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{GX} - I_{GY}}{2}\right)^2 + I_{GXGY}^2}$$

$$I_{\min} = \frac{I_{GX} + I_{GY}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{GX} - I_{GY}}{2}\right)^2 + I_{GXGY}^2}$$

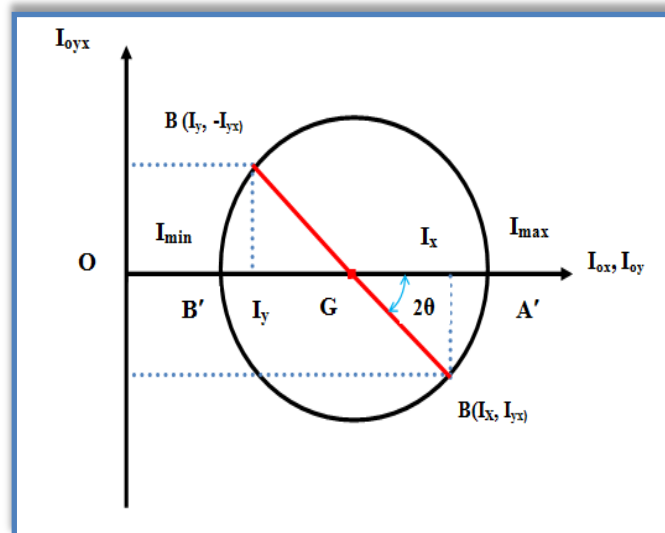


Fig.2.8. Cercle de Mohr

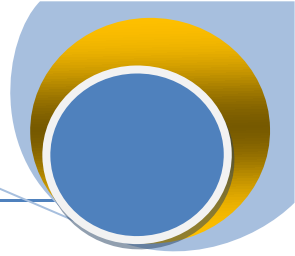
2.8. Rayon de giration

Le rayon de giration «i» est une caractéristique géométrique d'une section qui est utilisée dans la détermination de l'élanement d'un élément de structure soumis à un effort de compression (poteau).

Le rayon de giration d'une section S par rapport à un axe est définie par la relation suivante:

Par rapport à l'axe OX

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{ox}}{S}}$$



Par rapport à l'axe OY

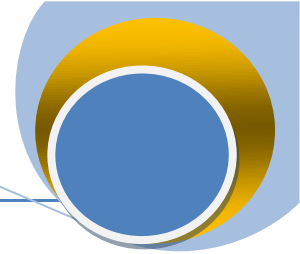
$$i_y = \sqrt{\frac{I_{oy}}{S}}$$

I et S ayant pour dimensions respectives L^4 et L^2 , le rayon de giration a la dimension d'une longueur et s'exprime en (cm) ou généralement (mm).

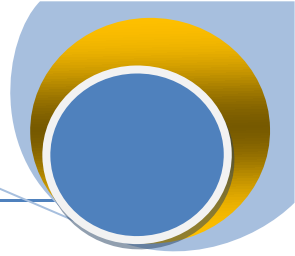
2.9. Propriétés des surfaces standards

Tableau.2.1. Propriétés des sections

Figure	Aire	Moment d'inertie	Rayon de giration
	$b.h$	$\frac{b.h^3}{12}$	$\frac{h}{\sqrt{12}}$
	$\frac{b.h}{2}$	$\frac{b.h^3}{36}$	$\frac{h}{\sqrt{18}}$
	$\frac{\pi.d^2}{4}$ $= \pi.r^2$	$\frac{\pi.d^4}{64}$	$\frac{r}{2}$
	$b.h - b'.h'$	$\frac{b.h^3 - b'.h'^3}{12}$	$\sqrt{\frac{b.h^3 - b'.h'^3}{12S}}$



	$\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$	$\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{64}$	$\sqrt{\frac{(D^2 - d^2)}{4}}$
	$\frac{\pi \cdot r^2}{4}$	$0.11 r^2$	$0.26 r$

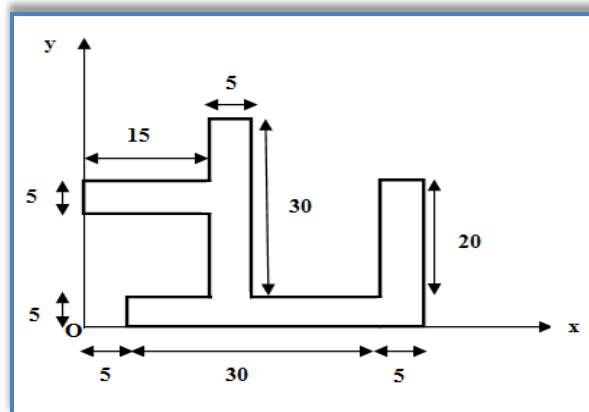


Exercices

Exercice 01

Calculez pour la section S de la figure (Les dimensions sont en cm)

1. Les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité.
2. Les moments quadratiques (moments d'inerties) I_{ox} et I_{oy}

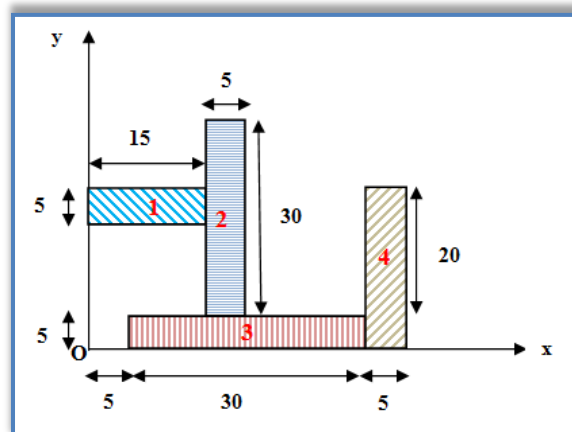


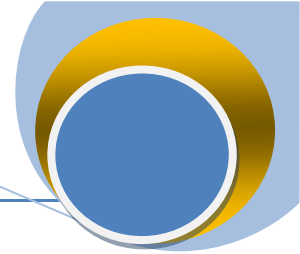
Solution

1. Les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité.

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Gi} \cdot S_i}{\sum S_i}$$





On décompose la section en plusieurs sections de forme rectangulaire, ici on a choisis 4 sections.

N°	b	h	S _i	X _i	Y _i	X _i . S _i	Y _i . S _i
1	15	5	75	7.5	22.5	562.5	1687.5
2	5	30	150	17.5	20	2625	3000
3	3	5	150	20	2.5	3000	375
4	5	25	125	37.5	12.5	4687.5	1562.5
Σ			500			10875	6625

$$X_G = \frac{10875}{500} = 21.75\text{cm}, \quad Y_G = \frac{6625}{500} = 13.25\text{cm}$$

2. Les moments quadratiques (moments d'inerties) I_{ox} et I_{oy}

On appliquant le théorème de Huygens

$$I_{ox} = I_{Gx'} + S \cdot Y_G^2$$

$$I_{oy} = I_{Gy'} + S \cdot X_G^2$$

N°	b	h	S _i	I _{Gxi}	I _{Gyi}	S _i X _{Gi} ²	S _i Y _{Gi} ²	I _{oxi}	I _{oyi}
1	15	5	75	156.25	1406.25	37968.37	4218.75	3812,5	5625
2	5	30	150	11250	312.5	60000	479737.5	71250	46250
3	3	5	150	312.5	11250	937.5	60000	1250	71250
4	5	25	125	6510.41	260.41	19531,25	175781.25	19531.25	76041.66
Σ			500					136666.66	299166.66

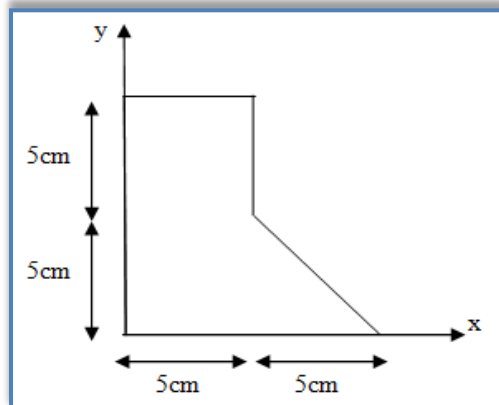
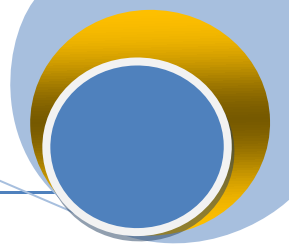
$$I_{ox} = \sum I_{oxi} = 136666.66 \text{ cm}^4$$

$$I_{oy} = \sum I_{oyi} = 299166.66 \text{ cm}^4$$

EXERCICE 02

Calculez pour la section S de la figure (Les dimensions sont en cm)

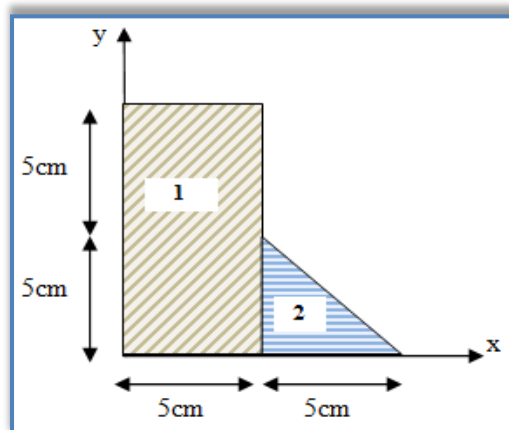
1. Les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité.
2. Les moments quadratiques (moments d'inerties) I_{ox} et I_{oy}



Solution

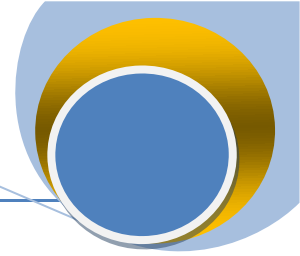
1. Les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité.

On décompose la section en deux sections, un rectangle et un triangle



N°	b	h	S_i	X_i	Y_i	$X_i \cdot S_i$	$Y_i \cdot S_i$
1	5	10	50	2.5	5	125	250
2	5	5	12.5	6.66	1.66	83.25	20.75
Σ			62.5			208.25	270.75

$$X_G = \frac{208.25}{62.5} = 3.33\text{cm}, \quad Y_G = \frac{270.75}{62.5} = 4.33\text{cm}$$

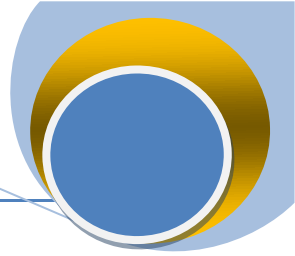


2. Les moments quadratiques (moments d'inerties) I_{ox} et I_{oy}

N°	b	h	S_i	I_{GXi}	I_{GYi}	$S_i X_{Gi}^2$	$S_i Y_{Gi}^2$	I_{oxi}	I_{oyi}
1	5	10	50	416.66	104.166	312.5	1250	1666.66	416.66
2	5	5	12.5	52.08	52.08	554.45	34.45	86.53	606.53
Σ			62.5					1753.19	1023.19

$$I_{OX} = \Sigma I_{oxi} = 1753.19 \text{ cm}^4$$

$$I_{OY} = \Sigma I_{oyi} = 1023.19 \text{ cm}^4$$



CHAPITRE 03: traction et compression simple

3.1. Introduction

Cette partie étudie le comportement des éléments de structure sollicités axialement, ce type de liaisons peuvent être rencontrés dans différentes structures tel que les systèmes réticulés (ferme, poutre à treillis, ...), les tirants, les poteaux, les boulons...

La traction ou compression correspond à des forces s'exerçant perpendiculairement aux sections des pièces; elle est dite uni-axiale car les côtés de la pièce ne sont pas contraints, toutes les forces sont sur un même axe.

3.2. Définition

Une poutre est sollicitée en traction simple (en compression) lorsqu'elle est soumise à deux forces axiales directement opposées, appliquées au centre des surfaces extrêmes, qui tendent à l'allonger (ou à la raccourcir).

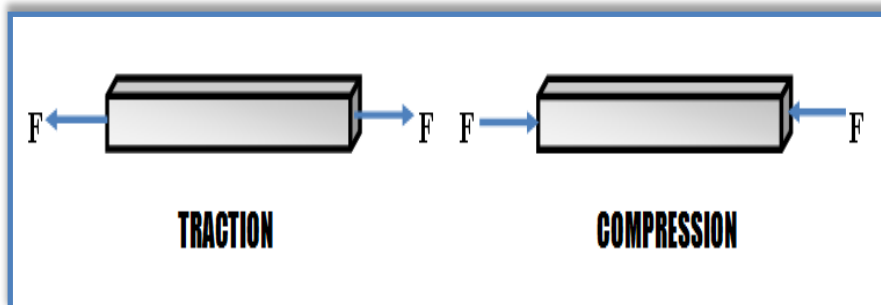
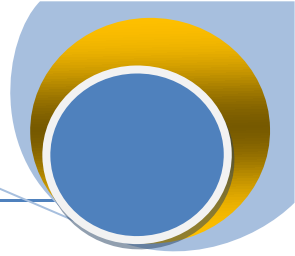


Fig.3.1. Poutre est sollicitée en traction et compression simple

Une poutre travaille en traction (ou en compression) dès que le tenseur des efforts intérieurs dans $(G; x; y; z)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$\{\tau_{ij}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$



Dans le repère (G, x, y, z) lié à la section, traction et compression se différencieront par le signe de l'effort normal N (effort extérieur).

Si $N > 0$: traction;

Si $N < 0$: compression.

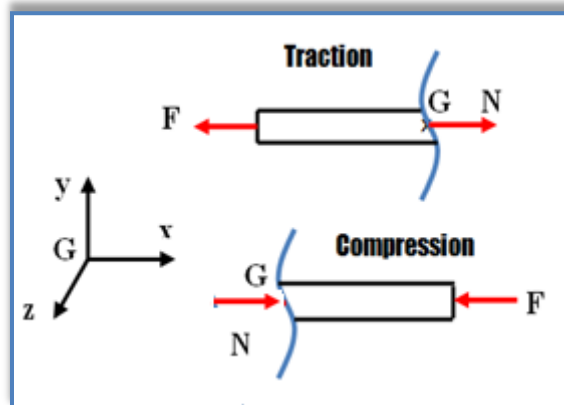


Fig.3.2. Schématisation de la traction/compression

3.3. Relation contrainte/effort normal

Pour les deux sollicitations traction et compression, elles s'expriment par la même façon, chaque élément de surface Δs supporte un effort de traction dN parallèle à la ligne moyenne, la contrainte normale σ représente l'intensité de l'effort normal N par unité de surface S .

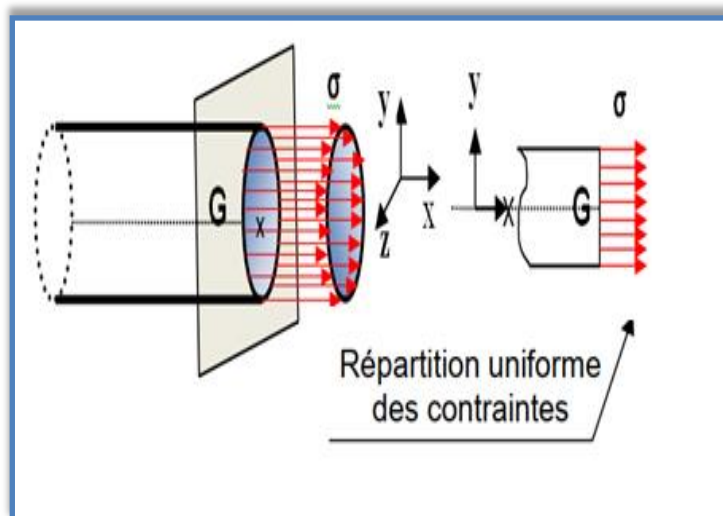
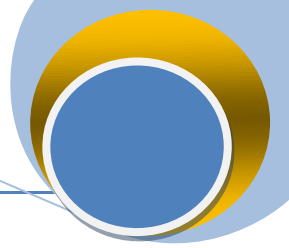


Fig.3.3. Répartition uniforme des contraintes.



Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. On peut écrire l'expression de la contrainte normale en tout point de la section, Il en résulte que :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Elle se mesure en (N/m²) ou en Pascal (Pa)

σ : contrainte normale en [MPa]

N : effort normal en [N]

S : section de la poutre en [mm²].

3.4. Influence des variations de section

Dans la majorité des cas, les pièces étudiées ne sont pas des poutres parfaites et présentent de brusques variations de section, lorsqu'il y a une variation brusque des sections de la poutre (trous, gorges, épaulements...), les hypothèses de la résistance des matériaux ne sont plus vérifiées, la répartition de la contrainte à cet endroit n'est plus uniforme, et devienne très importante au niveau de la variation de section (il y a concentration de contraintes).

Dans ce cas, la valeur maximum de la contrainte est le produit de la contrainte par un coefficient de concentration de contrainte k (on doit alors pondérer nos résultats à l'aide d'un coefficient k), la valeur de k est donnée suivant la configuration de la poutre, par des abaques obtenus par expérimentation).

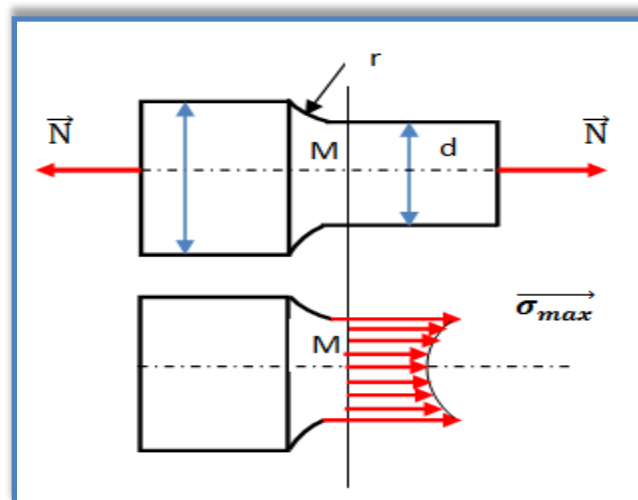
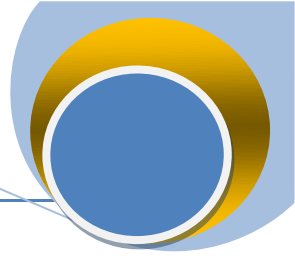


Fig.3.4. Concentration de contrainte



En posant dans ce cas :

$$\sigma_{\max} = k \cdot \sigma$$

k est le coefficient de concentration de contraintes. Par exemple pour un filetage ISO, $K \approx 2,5$.

On présente quelques exemples pour le cas des variations de sections

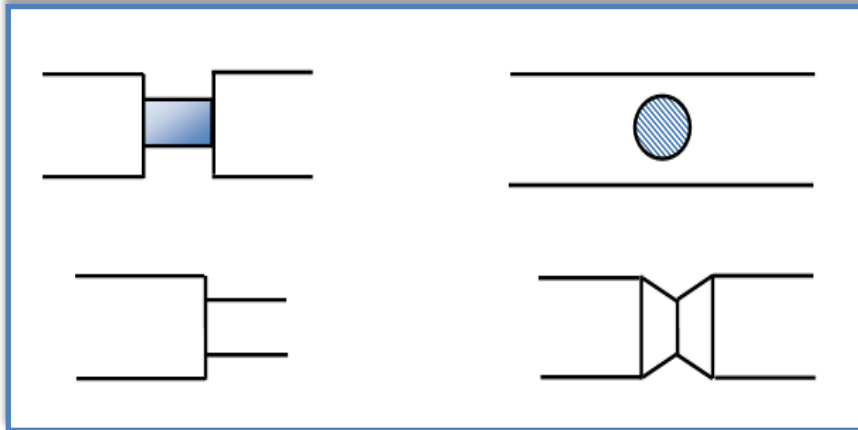


Fig.3.5. Exemples de cas de variations brusque de section

3.5. Essai de traction

L'essai le plus fréquemment utilisé afin de déterminer le comportement mécanique d'un matériau est l'essai de traction. Cet essai est caractérisé par sa facilité de mise en œuvre et par la richesse des informations fournies. Cet essai est une expérience qui permet de mesurer le degré de résistance à la rupture d'un matériau quelconque, indépendamment de la forme de l'objet sollicité, ou la performance d'un assemblage mécanique.

L'essai est réalisé à l'aide d'une machine d'essai de traction universelle avec des éprouvettes standardisées, le type des éprouvettes varie selon le type du matériau. L'éprouvette est serrée dans le dispositif de fixation de la machine et est soumise à un effort de traction qui tend à l'allonger jusqu'à la rupture. On effectue plusieurs essais, et à chaque essai on enregistre l'allongement de l'éprouvette en fonction de la force appliquée. On obtient alors une courbe contrainte-déformation.

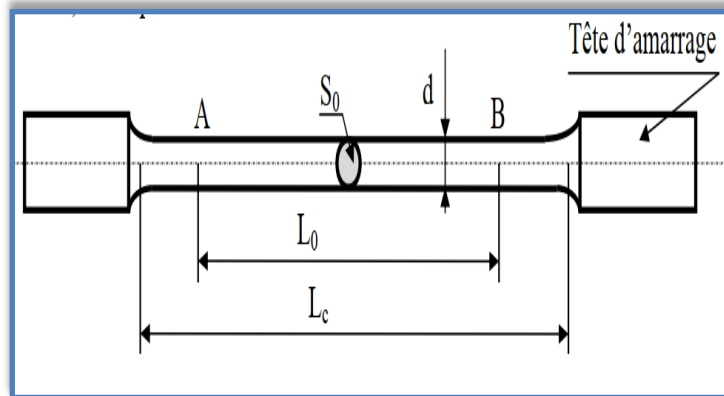


Fig.3.6. Eprouvette sollicitée en traction

L'essai de traction donne plusieurs valeurs importantes, notamment :

- Le module de Young E , ou module d'élasticité longitudinale,
- La limite élastique R_e ou σ_e , qui sert à caractériser un domaine conventionnel de réversibilité;
- La limite à la rupture R_m ou σ_m
- Allongement à la rupture.

Un tracé typique d'un essai de traction nous donne la courbe illustrée à la figure suivante. On remarque la contrainte conventionnelle σ en ordonnée en MPa et la déformation unitaire longitudinale ε en abscisse.

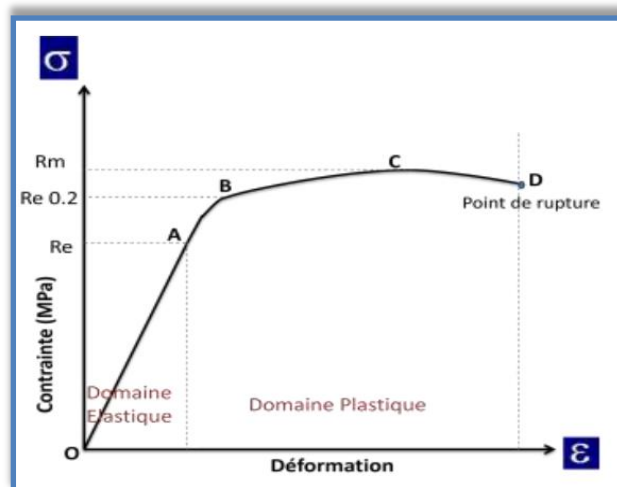
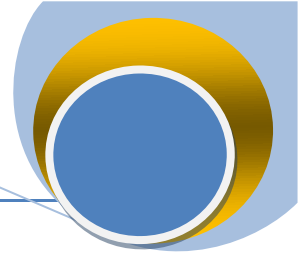


Fig.3.7. Courbe contrainte-déformation



La droite OA correspond à la partie élastique réversible, d'où l'on en tire la loi de Hooke, La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. Les sections droites et planes de l'éprouvette restent droites et planes pendant l'essai.

La courbe AC est le domaine de déformation plastique homogène: Au-delà de la limite élastique, la suppression de l'effort F n'entraîne plus une disparition totale de la déformation. L'amplitude de la déformation rémanente est déterminée sur le diagramme en menant du point de la courbe correspondant à l'effort F une parallèle à la droite AO

Pour CD la force nécessaire pour déformer le matériau diminue alors que l'allongement continue d'augmenter : cette instabilité est appelée instabilité plastique. La striction apparaît. **En D** il y a rupture de l'éprouvette.

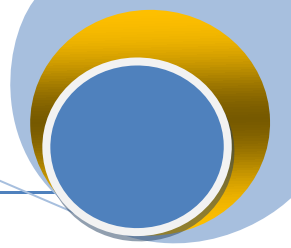
Avec

- R_e (MPa) est la limite élastique. Elle est bien marquée pour les matériaux ductiles.
- R_m est la résistance limite à la traction.

Cette valeur est utilisée pour estimer la limite d'endurance à la fatigue.

Les caractéristiques mécaniques sur pièces dépendent de facteurs tels que :

- La zone de prélèvement sur pièce de l'éprouvette,
- L'état de l'éprouvette (brute ou usinée),
- L'état de santé de l'éprouvette (défauts internes ou de surface),
- La finesse de la microstructure (DAS - loi de Hall Petch),
- De la composition chimique (teneur en fer, constituants intermétallique, ...),
- De l'état de finition (brute, grenailé) et de la présence du plan de joint.



3.6. Notion de déformation

3.6.1. Déformation longitudinale

Les dimensions d'une barre tendue (ou comprimé) varient en fonction de la grandeur des forces appliquées.

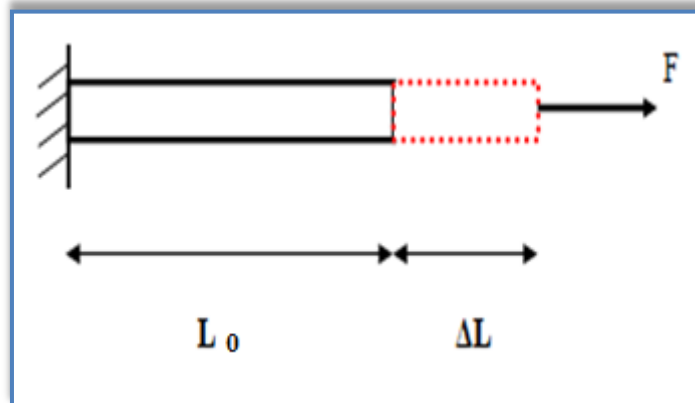


Fig.3.8. Représentation de l'allongement après chargement.

Supposant qu'avant de placer la charge, la longueur de la barre est L_0 . Après chargement, la longueur est devenue $L_0 + \Delta L$.

La déformation normale ε (epsilon) d'une section de poutre est le rapport de l'allongement ΔL à la longueur initiale L_0 de la poutre, la déformation longitudinale (>0 dans le cas de la traction) si le contrainte est constante le long de la poutre.

La déformation ε_L suivant l'axe de la barre est par tout la même égale à:

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

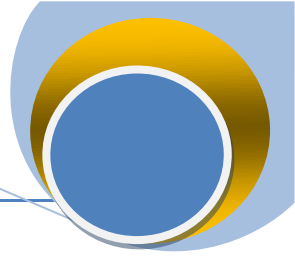
Avec:

ε_L : Allongement relatif [sans unité].

L : Longueur initiale de la pièce (avant déformation),

$L = L_0 + \Delta L$: Longueur finale de la pièce (après déformation),

ΔL : Allongement longitudinal dû à la force appliquée.



ALLONGEMENT (OU RACCOURCISSEMENT)

D'après la loi de Hooke: $\sigma = \varepsilon \cdot E$

On peut donc écrire, en supposant que l'allongement est également réparti sur toute la longueur L de la poutre, soit :

$$\frac{N}{S} = \frac{\Delta L \cdot E}{L}$$

Pour une barre homogène de section constante, si N est constant l'allongement absolu s'écrit :

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{S \cdot E}$$

Pour une barre composée de plusieurs tronçons la déformation totale est donnée par la relation:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{S_i \cdot E_i}$$

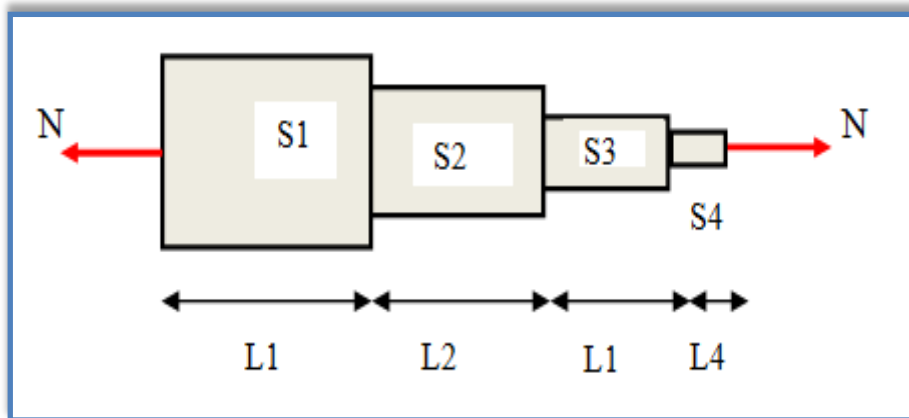
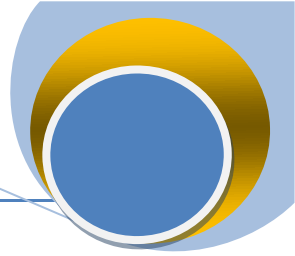


Fig.3.9. Barre composée de plusieurs tronçons sollicitée à la traction

3.6.2. Déformation transversale

On constate expérimentalement que l'allongement axial dans la direction longitudinale sous l'effet d'un effort N entraîne une contraction des dimensions transversale. Dans le domaine élastique les contractions transversales ε_T sont proportionnelles à la dilatation longitudinale relative (avec ε_T : Allongement perpendiculaire à l'effort), on a:



$$\varepsilon_T = \frac{\Delta H}{H} = \frac{H_0 - H}{H}$$

La déformation transversale (<0 dans le cas de la traction) pour la poutre.

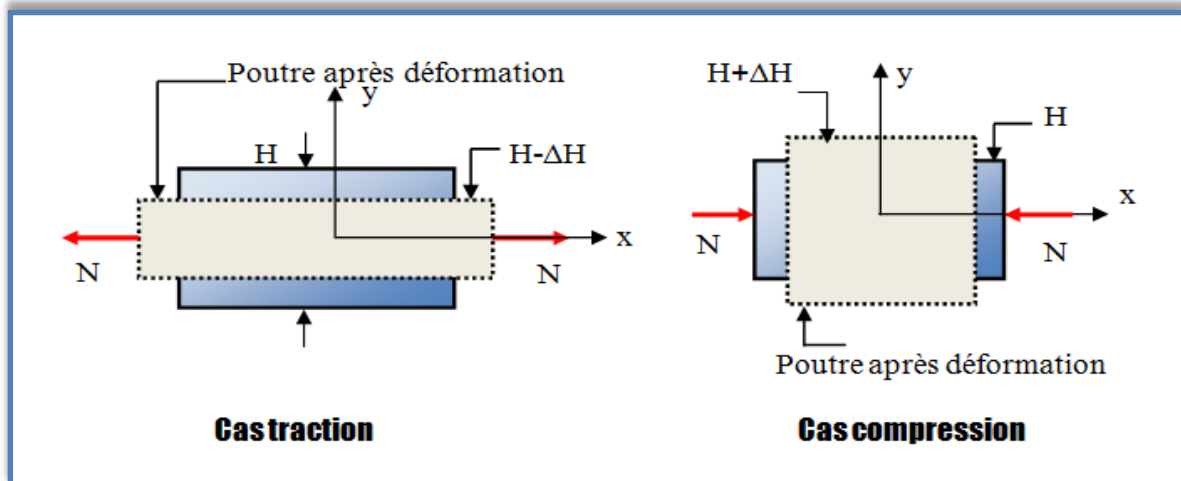


Fig.3.10. Déformation transversale

- Sous la charge de traction, la longueur augmente et la section diminue,
- Sous la charge de compression, la longueur diminue et la section augmente.

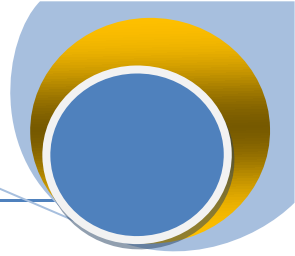
On peut remarquer qu'avec la définition de la déformation, dans un essai de traction ε_L est positif (allongement ΔL positif) tandis que ε_T est négatif (diminution d'une dimension transversale de l'éprouvette). Ainsi, dès qu'un matériau subit une déformation dans une direction, il en subit aussi une autre dans l'autre direction.

On constate une proportionnalité entre les déformations transversales et longitudinales $\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$, ce rapport est appelé coefficient de Poisson et est noté ν . On a donc:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

Le coefficient de poisson ν permet de caractériser la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué, sa valeur est varier selon le matériau,

- Pour les métaux: $\nu = 0.3$,
- Pour les élastomères: $\nu = 0.5$,
- Pour les Bétons: $\nu = 0.3$,



- Pour les Verres : $\nu = 0,18$ à $0,30$.

3.7. Relation Contrainte-déformation (loi de Hooke)

Dans le cas de petit allongements et pour la plus part des matériaux on utilise la loi de Hooke. Cette dernière exprime la dépendance linéaire entre les contraintes et les déformations.

$$\sigma = \varepsilon.E.$$

Avec :

σ : contrainte normale de traction ou compression (en MPa),

E: module d'élasticité longitudinal du matériau en $N.mm^{-2}$ ou MPa,

ε : Allongement unitaire suivant la ligne moyenne.

E correspond à la pente de la droite du domaine élastique de l'essai de traction (dans la partie linéaire de la courbe la contrainte σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε). On l'appelle couramment module d'Young et aussi module d'élasticité, lorsque sa valeur est élevée on peut dire que ce matériaux est rigide et si c'était le contraire, on dit que le matériau est souple.

E peut être calculé par la formule :

$$E = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$$

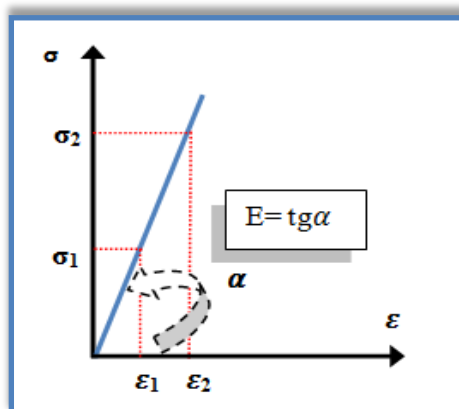


Fig.3.11. Relation Contrainte-déformation

Dans le tableau ci-dessus on donne quelques valeurs de ce module.

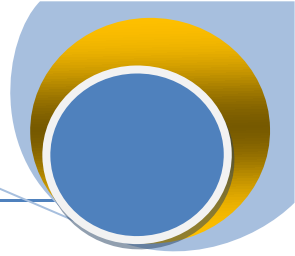


Tableau.3.1. Module de Young en daN/mm² de certains matériaux

Matériau	Module de Young daN/mm ²
Aciers	17 000 à 28 000
aciers de construction	20 000 à 22 000
fonte	10 000
verre	7 000 à 7 500
béton	2 000
bois	1000 à 3 000
Caoutchouc	0,75

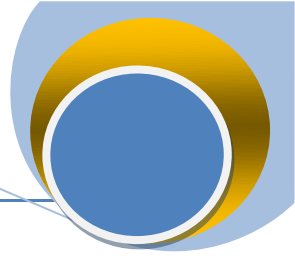
3.8. Condition de résistance

Pour qu'une pièce puisse supporter la charge (traction ou compression) sans subir de déformation permanente, il faut que la contrainte interne qui s'y développent (σ) ne dépasse pas la limite élastique R_e (σ_e) du matériau. Pour des raisons de sécurité et compte tenu des hypothèses faites avec les modélisations, la contrainte doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension R_{pe} (σ_{pe}).

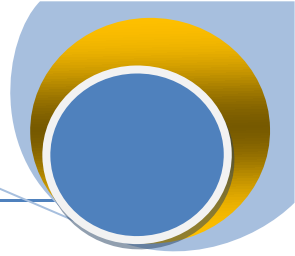
σ_{pe} est obtenue en divisant la « contrainte limite élastique R_e » par un « coefficient de sécurité s ». La condition de résistance est traduite par cette relation:

$$\sigma \leq \sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

Avec s : coefficient de sécurité, Le choix de la valeur de s dépend de la connaissance (ou non) des phénomènes agissant sur la structure. Un coefficient de sécurité trop faible augmente exagérément les risques de rupture. Un coefficient de sécurité trop élevé a également des effets néfastes : augmentation du poids, du prix de revient... s varie le plus souvent de 1 à 10.

**Tableau.3.2.** Coefficient de sécurité.

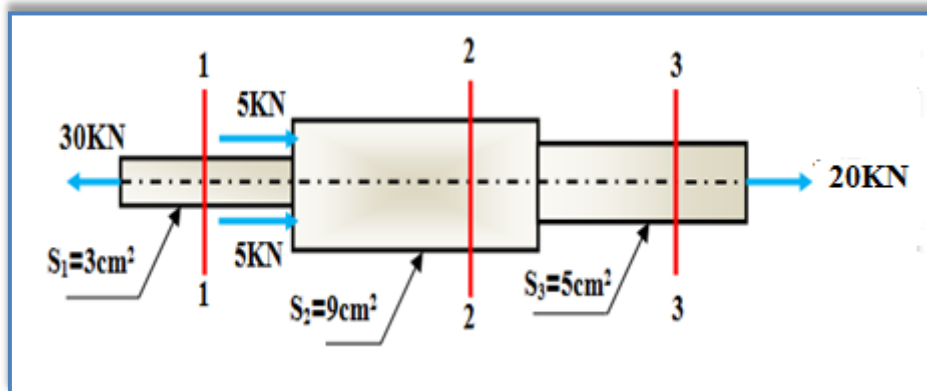
Coefficient de sécurité (s)	Condition générale de calculs
1,5 à 2	Cas exceptionnels de grande légèreté, hypothèse de charges surévaluées
2 à 3	Construction où on cherche la légèreté, hypothèse de calcul le plus défavorable (charpente avec vent ou neige, engrenage avec une seule dent en prise...)
3 à 4	Bonne construction, calculs soignés, haubans fixes.
4 à 5	Construction courante (légère, effort dynamique non pris en compte, treillis.)
5 à 8	Calculs sommaires, effort difficiles à évaluer (cas de chocs, mouvements alternatifs, appareils de levage, manutention)
8 à 10	Matériaux non homogènes, chocs, élingue de levage
10 à 15	Chocs très importants, très mal connus (presse). Ascenseurs.



Exercices

Exercice 01

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous, calculer les contraintes au niveau des sections 1-1, 2-2, 3-3.



Solution

SECTION 1-1

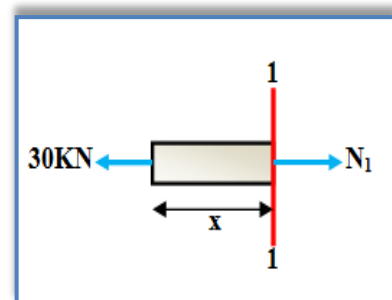
Appliquant le principe de l'équilibre:

$$\sum F/x = 0 \implies N_1 - 30 = 0$$

$$\implies N_1 = 30 \text{ kN}$$

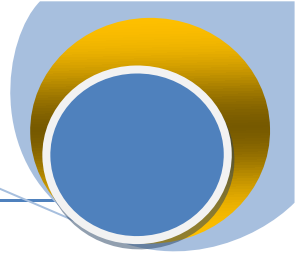
1. Calcul de la contrainte

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{30}{3} = 10 \text{ kN/cm}^2 = 100 \text{ MPa}$$



SECTION 2-2

Appliquant le principe de l'équilibre:

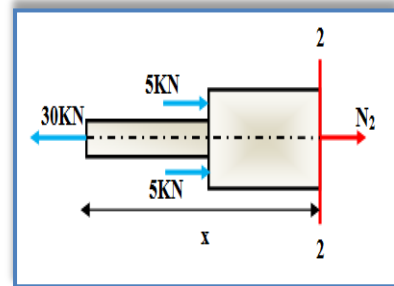


$$\sum F/x = 0 \quad N_2 - 30 + 10 = 0$$

$$\implies N_2 = 20 \text{ KN}$$

2. Calcul de la contrainte

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{20}{9} = 2.220 \text{ KN/cm}^2 = 22.20 \text{ MPa}$$



SECTION 3-3

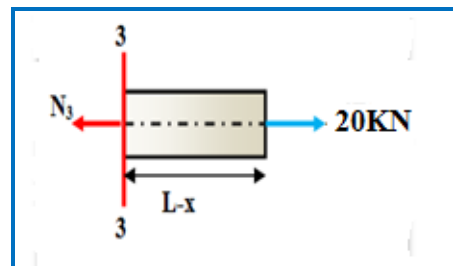
Appliquant le principe de l'équilibre:

$$\sum F/x = 0 \implies -N_3 + 20 = 0$$

$$\implies N_3 = 20 \text{ KN.}$$

3. Calcul de la contrainte

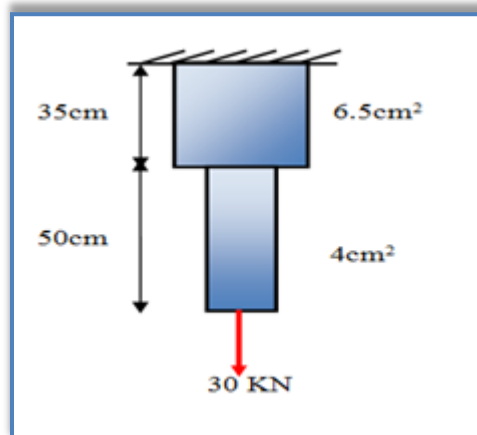
$$\sigma_{3-3} = \frac{N_3}{S_3} = \frac{20}{5} = 4 \text{ KN/cm}^2 = 40 \text{ MPa}$$

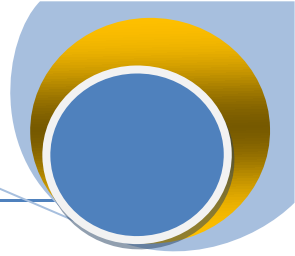


Exercice 02

Déterminer la contrainte normale dans les sections de la pièce ci-dessous et l'allongement total Δl .

On donne: $E = 2.10^6 \text{ Kg/cm}^2$





1. Détermination de la contrainte normale dans la barre

SECTION 1-1

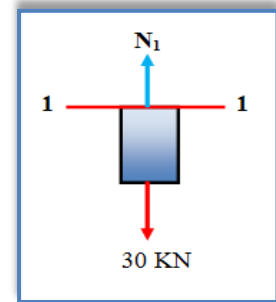
Appliquant le principe de l'équilibre

$$\sum F/x = 0 \implies N_1 - 30 = 0$$

$$\implies N_1 = 30 \text{ KN}$$

Calcul de la contrainte

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{30}{4} = 7.5 \text{ KN/cm}^2 = 75 \text{ MPa}$$



SECTION 2-2

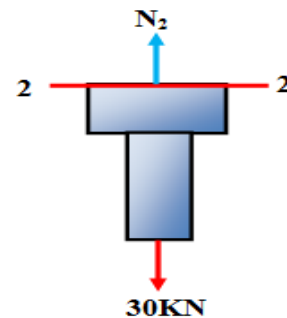
Appliquant le principe de l'équilibre

$$\sum F/x = 0 \implies N_2 - 30 = 0$$

$$\implies N_2 = 30 \text{ KN}$$

Calcul de la contrainte

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{30}{6.5} = 4.62 \text{ KN/cm}^2 = 46.2 \text{ MPa}$$



2. Détermination de l'allongement total Δl

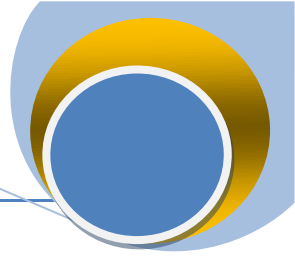
On a:

$$\Delta L = \sum \frac{N \cdot L}{E \cdot S}$$

$$\Delta L = \frac{N_1 L_1}{E S_1} + \frac{N_2 L_2}{E S_2}$$

$$E = 2.10^6 \text{ Kg/cm}^2 = 2.10^4 \text{ KN/cm}^2$$

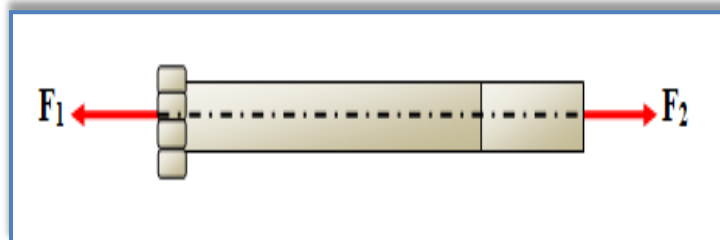
$$\Delta L = \frac{30 \times 50}{2.10^4 \times 4} + \frac{30 \times 35}{2.10^4 \times 6.5} = 0,0268 \text{ cm}$$



Exercice 03

Soit la vis ci-dessous de longueur 150 mm et de diamètre 16mm, en équilibre sous l'action des deux forces F_1 et F_2 d'intensité chacune 1000daN. La vis est en acier et son module d'élasticité longitudinal est de 200GPa.

- 1- A quel type de contrainte est soumise la vis
- 2- Calculer la valeur de la contrainte.
- 3- Si on adopte un coefficient de sécurité de 4, calculer la résistance élastique de l'acier.
- 4- Déterminer l'allongement de la vis.



Solution

1. Traction –extension-Allongement.

2. Calcul de la valeur de la contrainte

$$S = \pi R^2 = \pi 8^2 = 201.6 \text{ mm}^2$$

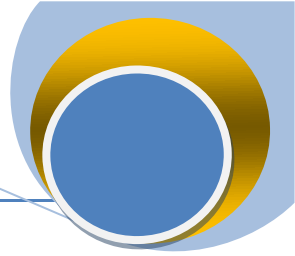
$$\sigma = \frac{F}{S} = 49.6 \text{ MPa}$$

3. Calcul de la résistance élastique de l'acier

Si on adopte un coefficient de sécurité de 4, on a: $\sigma \leq \frac{\sigma_e}{s}$

Donc: $\sigma_e \geq 49.6 \times 4$

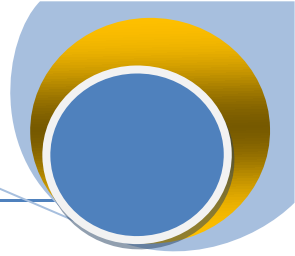
$$\sigma_e \geq 198.41 \text{ MPa}$$



4. Déterminer l'allongement de la vis

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\Delta L = \frac{\sigma \times L}{E} = 0.0372\text{mm}$$



CHAPITRE 04: FLEXION SIMPLE

4. INTRODUCTION

Il existe plusieurs types de flexions (pure, plane, déviée). Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plane simple. En RDM, cette sollicitation tient un rôle prépondérant car elle est fréquente dans les mécanismes et les problèmes de poutre. Dans ce chapitre, nous étudierons les efforts tranchants et les moments de flexion; nous allons voir de quelle façon ils varient d'une zone à l'autre le long de la poutre et où sont situées les zones les plus sollicitées afin de pouvoir déterminer le type de poutre à utiliser.

4.2. Définition

Les éléments d'une structure soumise à la flexion simple sont principalement les poutres quelles soient isostatiques ou continues. Considérons une poutre reposant sur deux appuis soumise à une charge concentrée verticale ou uniformément répartie. Après déformation, cette poutre accuse une flèche et on constate que les fibres situées en partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que les fibres situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

Entre ces deux régions, il existe une fibre ni tendue ni comprimée; c'est la fibre neutre. Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance y de la fibre considérée par rapport à la fibre neutre.

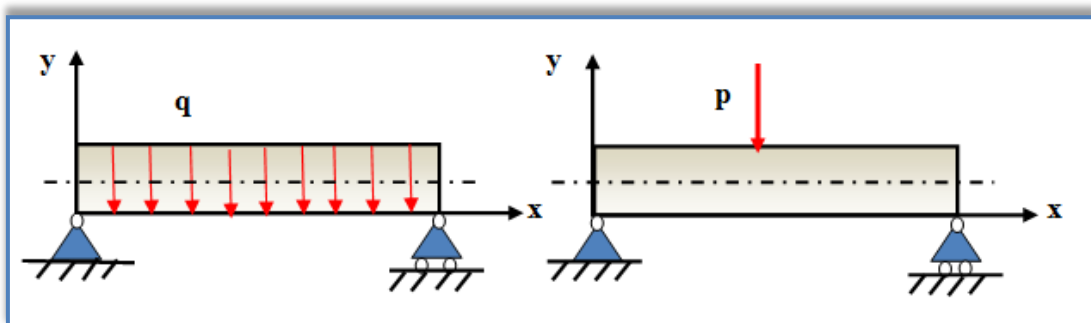


Fig.4.1. Poutres en flexion simple

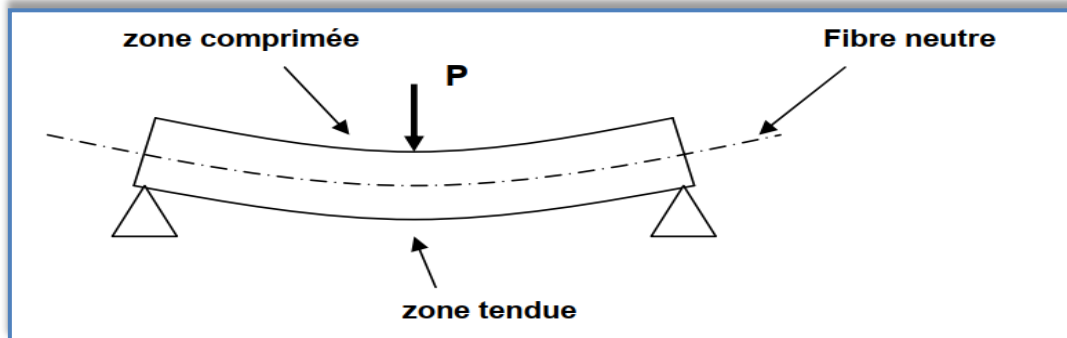
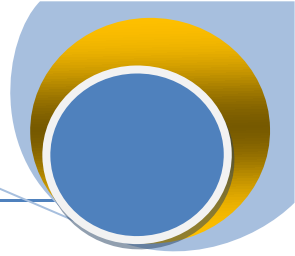


Fig.4.2. Poutres après déformation

4.3. Type de flexion

On définit différents types de flexion en fonction de la géométrie de la poutre, de la configuration des actions mécaniques extérieures et des valeurs prises par les composantes du torseur des efforts intérieurs ou de cohésion (T_y , T_z , N_x , M_{tx} , M_{fy} , M_{fz}).

Flexion pure

Les composantes des éléments de réduction des forces de cohésion ont pour valeur:

$$\tau_{\text{coh}} = \begin{pmatrix} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y = 0 & M_{fy} = 0 \\ T_z = 0 & M_{fz} \neq 0 \end{pmatrix}$$

Flexion composée

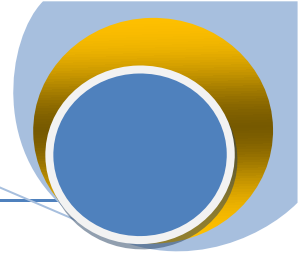
$$\tau_{\text{coh}} = \begin{pmatrix} N \neq 0 & M_t = 0 \\ T_y \neq 0 & M_{fy} = 0 \\ T_z = 0 & M_{fz} \neq 0 \end{pmatrix}$$

Flexion plane simple

$$\tau_{\text{coh}} = \begin{pmatrix} N = 0 & M_t = 0 \\ T_y \neq 0 & M_{fy} = 0 \\ T_z = 0 & M_{fz} \neq 0 \end{pmatrix}$$

Avec

T_y : Effort tranchant dans le sens de y,



M_{fz} : Moment de flexion autour de l'axe z.

Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plane simple et pure.

4.4. Hypothèses particulières à la flexion plane simple

On considèrera dans cette étude des poutres les hypothèses suivantes:

1. Le matériau est homogène et isotrope
2. Sa forme est celle d'une poutre à axe rectiligne
3. Sa section droite possède un axe de symétrie et donc admet un plan de symétrie longitudinal
4. Les forces appliquées à la poutre, sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plan de symétrie longitudinal ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci.
5. Les forces appliquées sont soit concentrées en un point (ou localisées), soit réparties suivant une loi déterminée.
6. Les déformations sont petites, pour ne pas modifier l'intensité des forces, ni leur distance respective. Les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne au cours du phénomène de la déformation (hypothèses de Navier-Bernoulli).

4.5. Moment fléchissant, effort tranchant

Un élément est soumis à la flexion simple lorsque les forces agissant sur lui (y compris les réactions d'appuis), et situées à gauche d'une section droites (**S**), peuvent être réduites, par rapport au centre de gravité de (**S**), à un moment de flexion (M_f) d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section (**fig4.3**), et à un effort tranchant (**T**) exercé dans le plan de la section. On utilise la méthode des sections en faisant une coupe à la distance x de l'appui gauche de la poutre. On note que le moment fléchissant M_f est déterminé par rapport à l'axe Z c.à.d. M_{fz} et l'effort tranchant T_y par rapport l'axe Y .

Dans le cas de la flexion simple $N_x = 0$

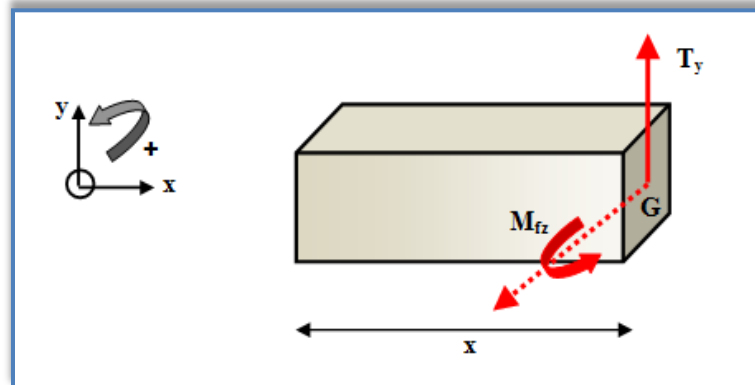
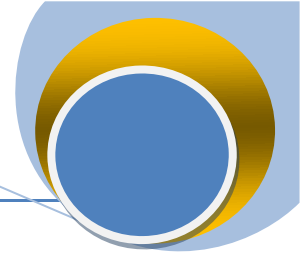


Fig.4.3. Convention de signe, cas du tronçon gauche

Pour déterminer les efforts intérieurs M_{fz} et T_y , on écrit l'équation d'équilibre des forces agissant sur le tronçon à gauche ou à droite de la coupe, on choisira le tronçon où les équations d'équilibre sont plus simples à écrire.

4.5.1. Les moments fléchissant

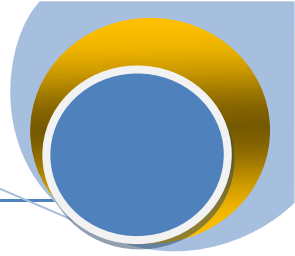
Le moment fléchissant $M(x)$ au droit d'une section S de la poutre soumise à la flexion simple, est la somme algébrique des moments par rapport à la fibre neutre de la section, de toutes les forces situées d'un même côté de la section (à gauche ou à droite). Dans ces forces, il faut inclure les réactions d'appuis.

Les moments fléchissant sont positifs lorsqu'ils rendent la poutre concave vers le haut. Ils sont négatifs dans le cas contraire.

4.5.2. Les efforts tranchants

Les efforts tranchants $T(x)$, dans une section droite (S) d'une poutre soumise à la flexion plane simple est la somme algébrique de tous les efforts situés d'un même côté de la section (à gauche ou à droite). Dans ces efforts, il faut inclure les réactions d'appuis.

Les efforts tranchants sont positifs lorsqu'ils tendent à faire monter la partie gauche de la poutre par rapport à la partie droite.



4.6. Contraintes normales en flexion

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. Dans la zone comprimée en (haut) les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent.

Pour les besoins de la démonstration nous avons exagéré la courbure, mais en réalité, la poutre ne subit pas une flexion aussi grande, au cours de la déformation, le tronçon considéré initialement prismatique se transforme en portion de tore de rayon moyen R intercepté d'un angle $d\theta$.

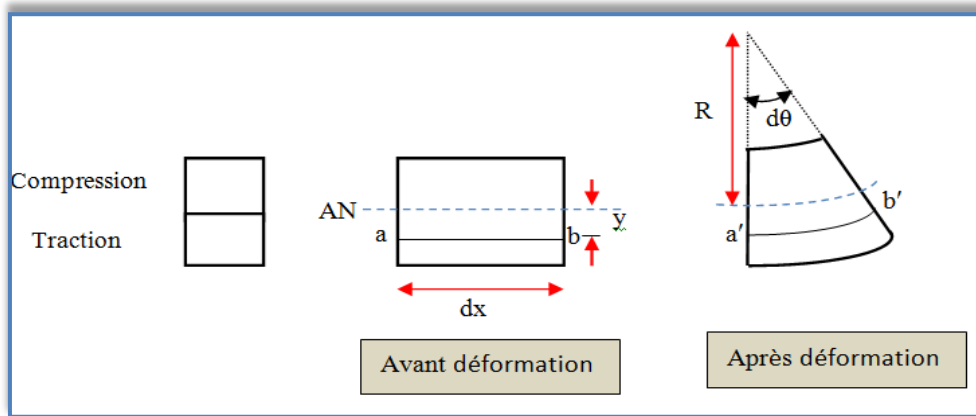


Fig.4.4. Transformation d'une section avant et après déformation

L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit:

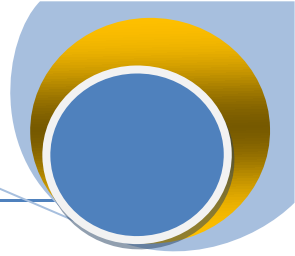
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx}$$

Avec: $dx = R d\theta$

D'où: $\varepsilon = \frac{y}{R}$ et $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

Cette déformation engendre alors une contrainte que l'on peut déterminer à partir de la loi de Hooke:

$$\sigma = \frac{E}{R}y$$



Soit une poutre simplement appuyée sur ces deux extrémités et sollicitée par deux moments extérieurs comme c'est illustré par la figure 4.5. Considérons un tronçon découpé hors de la poutre par le plan a-a parallèle au plan OYZ.

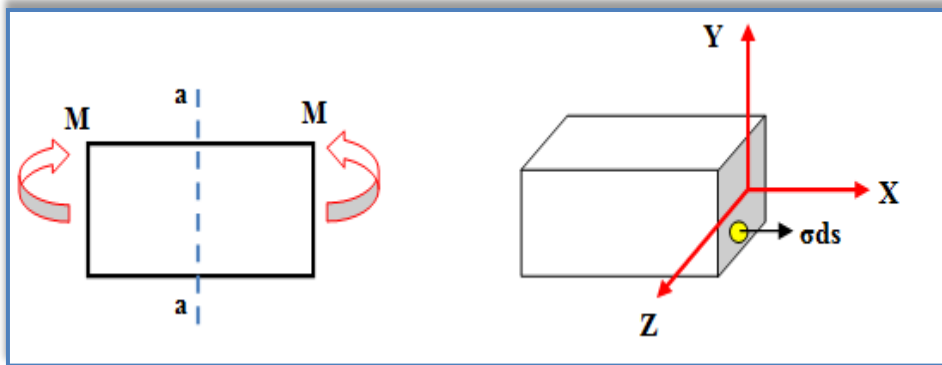


Fig.4.5. Schéma d'une poutre simplement appuyée sur ces deux extrémités

L'équilibre des moments appliqués sur le tronçon permet d'écrire:

$$M = \iint_S \sigma y ds$$

En introduisant la valeur de σ on obtient:

$$M = \iint_S \frac{E}{R} y^2 dS = \frac{EI_z}{R}$$

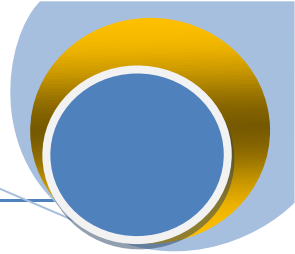
On peut en déduire finalement la relation recherchée:

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

4.7. Diagramme de répartition des contraintes normales

Dans la section (S) d'abscisse x d'une poutre fléchie, les contraintes normales σ sont proportionnelles à la distance y de la fibre étudiée au plan des fibres neutres.

- Il y a répartition linéaire des contraintes. Les contraintes maximales se trouvent sur les lignes les plus éloignées de la surface neutre.
- Tous les points situés à une même distance y ont la même contrainte.
- La contrainte maxi s'exerce à la périphérie de la poutre.



- $\sigma_x = 0$, pas de contrainte pur $y = 0$

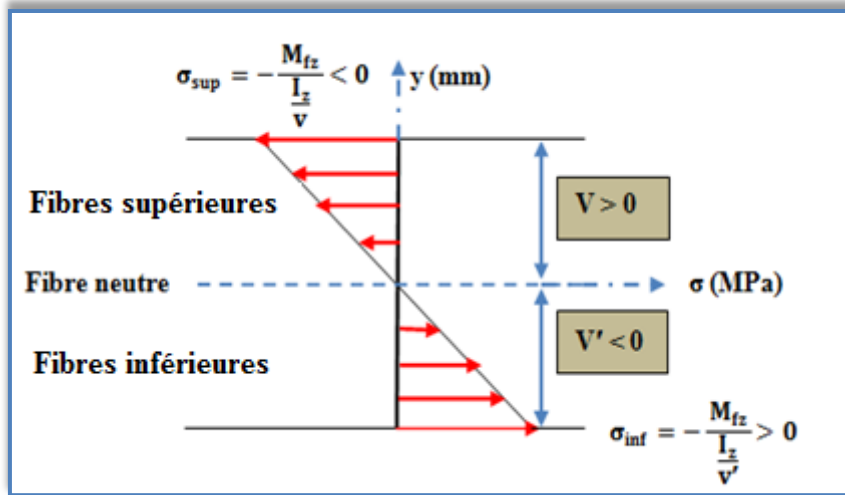


Fig.4.6. Diagramme de répartition des contraintes normales

Si on appelle “v” la plus grande distance de la matière à l’axe neutre “ $v = y_{\max}$ ”, Par convention, on note: $y_{\max} = v$, $y_{\min} = v'$,

La formule générale de flexion ou de contrainte normale sur la section est donnée par

- Contrainte dans la fibre supérieure extrême: $\sigma_{\text{Sup}} = -\frac{M_{fz}}{\frac{I_z}{v}} = -\frac{M_{fz}}{W_{el}}$
- Contrainte dans la fibre inférieure extrême: $\sigma_{\text{Inf}} = -\frac{M_{fz}}{\frac{I_z}{v'}} = -\frac{M_{fz}}{W'_{el}}$

Avec:

σ : Contrainte normale en MPa,

$M_{fz}(x)$: Moment fléchissant en N.mm,

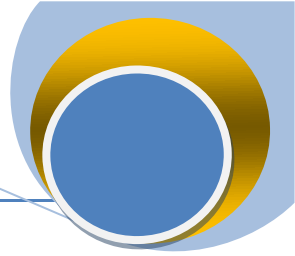
I : Moment d’inertie (ou quadratique) en mm^4 ,

v et v' : Distance y entre la fibre étudiée et l’axe neutre en mm.

Remarque

On note W_{el} le rapport $\frac{I_z}{v}$; C’est le module de flexion de la section pour la fibre supérieure.

W'_{el} est le module de flexion de la section pour la fibre inférieure. Si la section est symétrique, $W_{el} = -W'_{el}$



4.8. Calcul de la contrainte de cisaillement

Une variation du moment de flexion M est accompagnée d'un effort tranchant T . Comme il y a un effort tranchant T , donc on a une contrainte tangentielle de cisaillement τ . En cisaillement pur, la contrainte tangentielle de cisaillement est supposée uniforme dans toute la section cisailée ($\tau = \text{constante}$ et $T = \text{constant}$) et qui est calculée comme suit:

$$T_y(x) = \iint_S \tau_{xy} dS$$

La contrainte de cisaillement moyennes egale á:

$$\tau_{xymoy} = \frac{T_y(x)}{S}$$

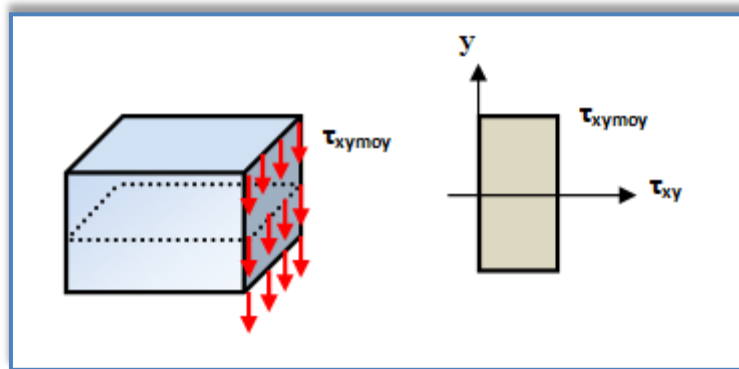


Fig.4.7. Répartition uniforme de τ_{xy} soumise au cisaillement

En réalité, le cisaillement n'est pas uniforme dans toute la section cisailée ($\tau \neq \text{constante}$). On constate que la variation de τ en fonction de y est parabolique. La contrainte tangentielle est donnée par la formule:

$$\tau = \frac{T_y W_{Gz}}{b I_{Gz}}$$

où

$W_{(Gz)}$: Est le moment statique de la poutre par rapport à l'axe (G, G_z)

b : Largeur de la section dans la couche considérée.

I_z : Moment d'inertie.

T : L'effort tranchant

τ : Contrainte tangentielle.

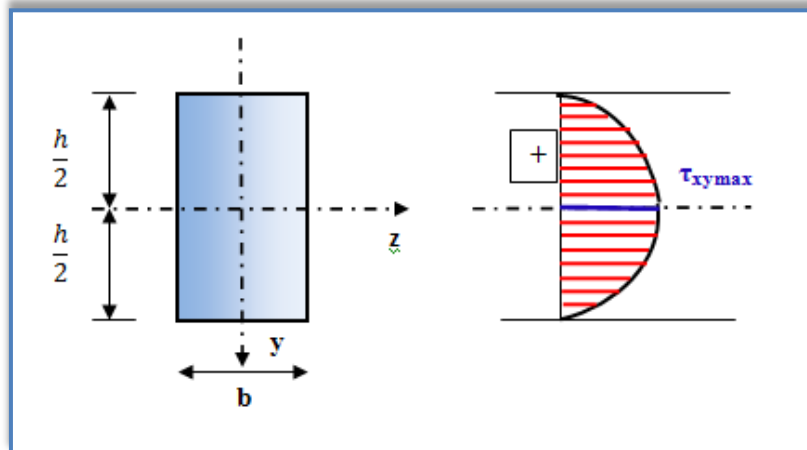
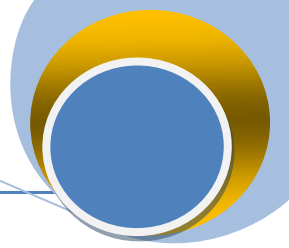


Fig.4.8. La distribution des contraintes tangentielle le long de la section transversale de la poutre rectangulaire soumise à la flexion simple.

- **Contrainte tangentielle maximale**

Pour la section rectangulaire

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{\tau_{\text{moy}}}{A}$$

Avec: $A = b \times h$

Pour la section circulaire

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{\tau_{\text{moy}}}{A}$$

Avec: $A = \frac{\pi D^2}{4}$

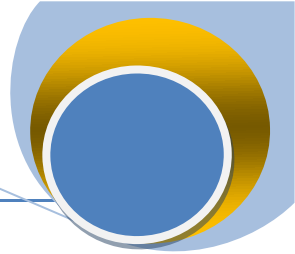
4.9. Etude de la déformée en flexion

L'équation de la déformée d'une poutre en flexion est donnée sous la forme $y = f(x)$. Elle est principalement basée sur la résolution de l'équation différentielle suivante:

$$y''(x) = -\frac{M_f(x)}{E.I}$$

Avec:

M(x): le moment fléchissant à la section d'abscisse x,



E: Le module d'élasticité longitudinale (module d'Young),

I: Le moment d'inertie de la section,

y'': Dérivée seconde du déplacement en y.

La flèche $y(x)$ et l'angle de rotation $\theta(x)$ de la poutre donnée sont déterminés respectivement par le rapport du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une section x de la poutre fictive à la rigidité de la poutre donnée c'est-à-dire:

$$\theta(x) = \frac{T(x)}{E \cdot I}$$

$$y(x) = \frac{M(x)}{E \cdot I}$$

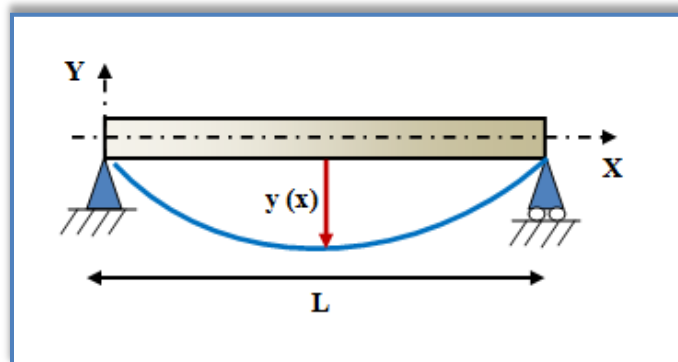


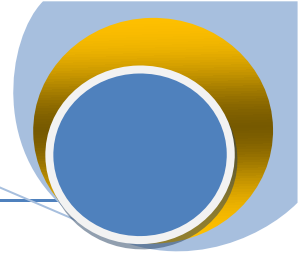
Fig.4.9. Poutre déformée (la flèche)

Les constantes d'intégration s'obtiennent grâce aux conditions aux limites (appuis, encastremets...).

Exemple de conditions aux limites:

Appui simple	$y = 0$	
Encastrement	$y = 0$	$\theta = 0$

On calcule la flèche maximale et on vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite f_{lim} : $y_{max} < f_{lim}$



4.10. Conditions de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale $\sigma_{réelle}$ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension σ_{pe} . On a:

$$\sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

s: Est un coefficient de sécurité La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit:

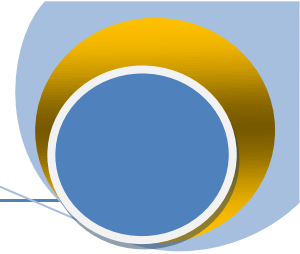
$$\sigma_{réelle} = \frac{M_{fmax}}{\frac{I_{GZ}}{y_{max}}} < \sigma_{pe}$$

4.11. Diagrammes de V et M à partir des équations d'équilibre

D'après les comportements déjà étudiés dans les chapitres précédents, nous pouvons déduire que l'effort tranchant et le moment fléchissant ne sont pas constants, mais qu'ils varient en fonction de x. Il est donc nécessaire, pour faire une étude rigoureuse, d'établir des diagrammes qui donnent les valeurs de T et de M en tous points et qui permettent d'identifier les zones critiques où T et M atteignent des valeurs extrêmes.

Méthode

- 1- Calculer les réactions d'appuis,
- 2- Déterminer le nombre de coupes à effectuer et délimiter la poutre en sections,
- 3- Résoudre les conditions d'équilibre pour chaque coupe afin de déterminer comment varie T et M en tout point de la section,
- 4- Calculer les valeurs aux limites de chaque section,
- 5- Tracer les diagrammes de T et M à partir des relations trouvées et des conditions aux limites.



4.12. Relation différentielle entre la charge, l'effort tranchant et le moment fléchissant

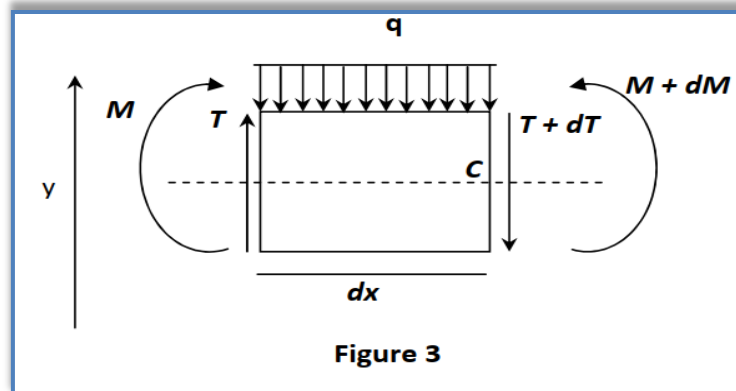


Fig.4.10. Poutre droite symétrique chargée

Considérant par exemple une poutre droite symétrique chargée dans son plan de symétrie mais (non soumise à une répartition des moments toutefois) et isolons par deux sections, un tronçon dx sur lequel agit une charge répartie transversale.

Sur le tronçon dx , les grandeurs T et M subissent les variations dT et dM , l'équilibre du tronçon est régi par les équations de la statique.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \text{D'où on tire} \Rightarrow \mathbf{q} = - \frac{dT}{dx}$$

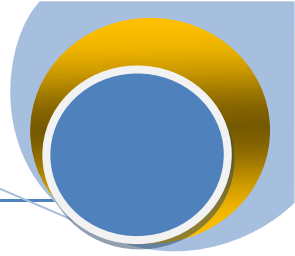
$$\sum M/G1 = 0 \Rightarrow \text{D'où on tire} \Rightarrow \mathbf{T} = \frac{dM}{dx}$$

On trouve aussi après remplacement dans les deux équations précédentes

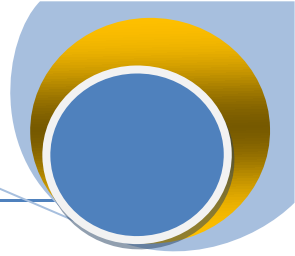
$$\mathbf{q} = - \frac{d^2M}{dx^2}$$

Pour faciliter la construction et le contrôle des diagrammes de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M . On peut citer ces relations qui permettent de tirer quelques renseignements :

- 1- L'effort tranchant est la tangente de l'angle formé par la tangente au diagramme de M au niveau de la section considérée et l'axe longitudinal de la poutre. De même, la valeur absolue de la charge répartie représente la tangente de l'angle formé par la tangente au diagramme de T et l'axe longitudinal de la poutre.



- 2- Là où T est nul, M a une valeur extrême.
- 3- Là où T passe par la valeur zéro de façon discontinue, le diagramme de M perd son allure monotone.
- 4- Là où T subit un saut mais sans passer par zéro, le diagramme de M présente un point anguleux (M change de pente).
- 5- La variation de M sur un tronçon donné est égale à l'aire du diagramme de T sur ce tronçon.
- 6- La concavité du diagramme de M est tournée dans le sens contraire de la charge q .
- 7- Le diagramme de T doit se refermer (en partant de l'extrémité gauche). Ce corollaire exprime la nullité de la résultante des forces et permet en même temps de retrouver les forces localisées.
- 8- Le diagramme de M d'un système symétrique (géométrie et chargement) est symétrique tandis que celui de T est antisymétrique.

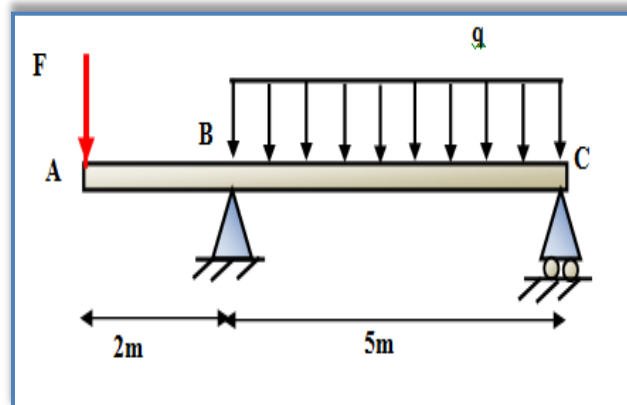


EXERCICES

EXERCICE 01

Tracer les diagrammes des efforts tranchants T et des moments fléchissant M_f de la poutre représentée ci dessous. On prendra:

$$q = 3.5 \text{ KN/m} ; F = 5 \text{ KN.}$$



Solution

1. Détermination des réactions d'appuis

En appliquant le principe d'équilibre,

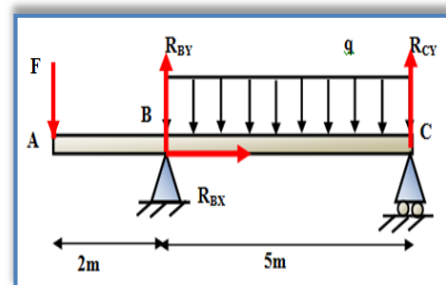
$$\Sigma F/X = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 0$$

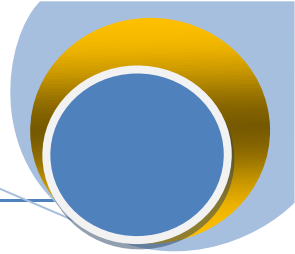
$$\Sigma M/B = 0 \Rightarrow R_{Cy} \times 5 - q \times \frac{5^2}{2} + F \times 2 = 0$$

$$R_{Cy} = 6.75 \text{ KN}$$

$$\Sigma M/C = 0 \Rightarrow -R_{By} \times 5 + q \times \frac{5^2}{2} + F \times 7 = 0$$

$$R_{By} = 15.75 \text{ KN}$$





Détermination de M et T dans chaque tronçon

Tronçon $0 < x < 2$

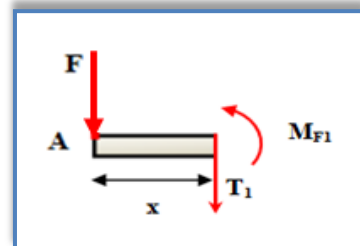
$$\sum F/Y = 0 \Rightarrow T_1 = -F = -5 \text{ KN}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow F_1 \cdot x + M_{F1} = 0$$

$$M_{F1} = -F_1 \cdot x = -5x$$

$$X = 0 \rightarrow M_{F1} = 0$$

$$X = 2 \rightarrow M_{F1} = -10 \text{ KN.m}$$



Tronçon $2 < x < 7$

$$\sum F/Y = 0 \Rightarrow -T_2 - F - q(x-2) + R_{BY} = 0$$

$$T_2 = 3.5 \cdot x - 17.75$$

$$X = 2 \rightarrow T_2 = 10.75 \text{ KN}$$

$$X = 7 \rightarrow T_2 = -6.75 \text{ KN}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_{F2} = -F_1 \cdot x + R_{BY} \cdot (x-2) - q \frac{(x-2)^2}{2}$$

$$M_{F2} = -1.75x^2 + 17.75x - 38.5$$

$$X = 2 \rightarrow M_{F2} = -10 \text{ KN.m}$$

$$X = 7 \rightarrow M_{F2} = 0$$

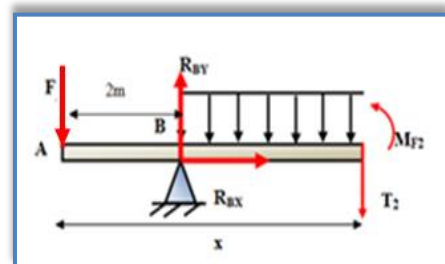
Le moment fléchissant est nul dans le point au $M_{F2} = 0$

$-1.75x^2 + 17.75x - 38.5 = 0$ On obtient une équation de deuxième degré, donc il faut calculer delta on trouve $x = 3,14 \text{ m}$, $M_{F2} = 0$

Pour l'effort tranchant la dérivée de moment fléchissant est égale à zéro:

$$-3.5x + 17.75 = 0 \text{ Donc } x = 5,07 \text{ m}$$

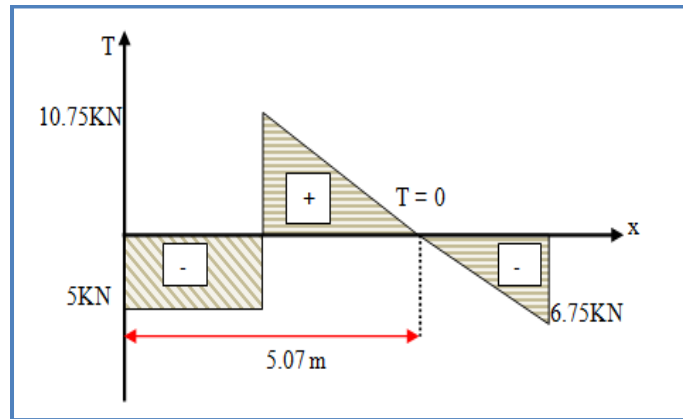
Pour $x = 5,07 \text{ m}$, le moment est maximum, $M_{F2\text{max}}(x = 5.07) = 6.5 \text{ KN.m}$



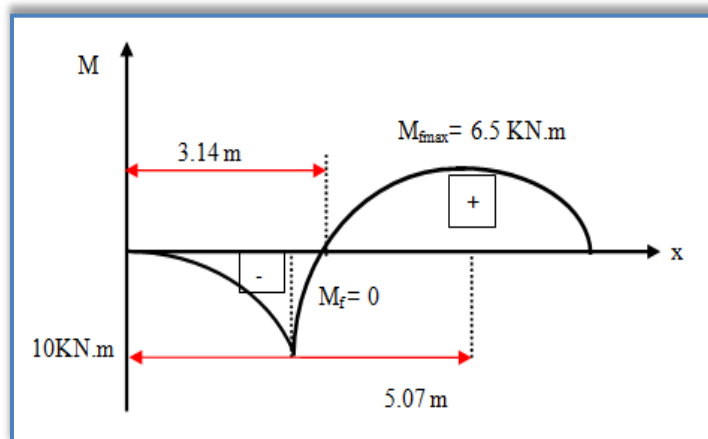


2. Tracées des diagrammes

EFFORT TRANCHANT

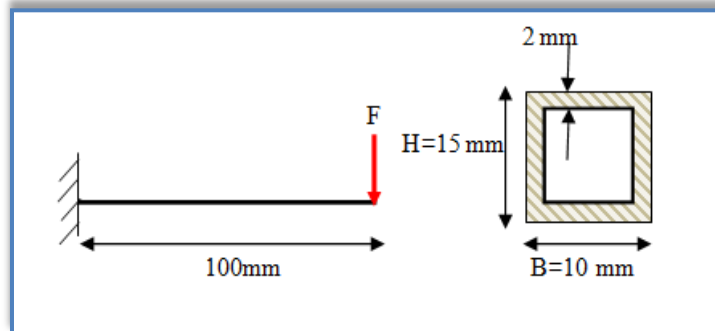
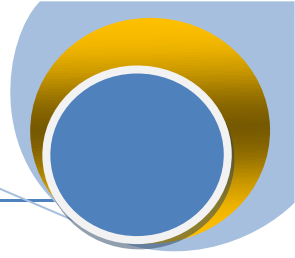


Moment fléchissant



Exercice 02

Soit une poutre cantilever encadrée à son extrémité gauche, sollicitée par une force concentrée d'intensité 1000N sur son extrémité droite.



- Calculer la valeur de la flèche maximale;
- Vérifier sa résistance à la flexion;
- Calculer la charge maximale qu'elle peut supporter en flexion.

On donne: $\sigma_e = 200 \text{ N/mm}^2$; $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

Solution

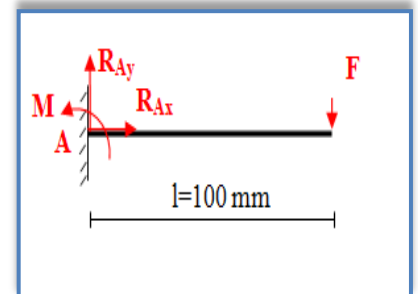
1- Calcul des réactions à l'encastrement

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - F = 0 \Rightarrow R_{Ay} = F = 1000 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M + F.l = 0$$

$$\Rightarrow M = F.l = 1000 \cdot 100 = 10^5 \text{ N.mm}$$



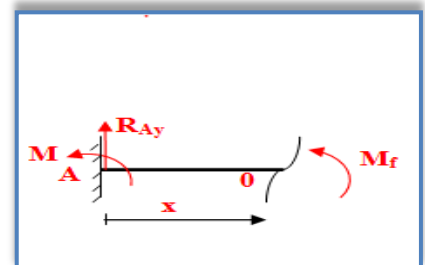
2- Calcul du moment fléchissant $0 \leq x \leq l$

$$\Sigma M_0 = 0 \Rightarrow M_f = R_y \cdot x - M \Rightarrow M_f = F \cdot x - F.l$$

$$\Rightarrow M_f = 1000 \cdot x - 10^5$$

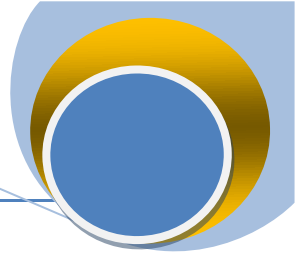
$$\text{Pour } x = 0 \Rightarrow M_f = -10^5 \text{ N.mm}$$

$$x = l = 100 \Rightarrow M_f = 0 \text{ N.mm}$$



3- Expression de la déformée

D'après l'équation de la ligne élastique, nous avons:



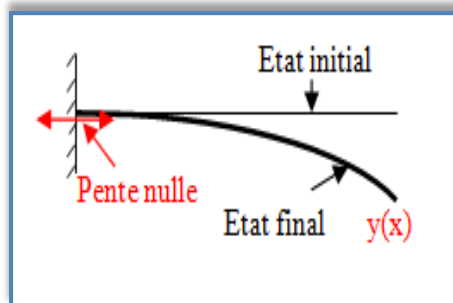
$$y''(x) = \frac{-1}{EI} Mf = \frac{-1}{EI} (F \cdot x - F \cdot l)$$

Après une première intégration, nous obtenons:

$$y'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Fx^2}{2} + F \cdot lx + C_1 \right) \quad (1)$$

En considérant la condition aux limites suivante, nous pouvons déterminer la valeur de la constante d'intégration C_1 :

$$y'(x = 0) = 0 \quad (2)$$



La prise en compte de l'équation (2) dans (1), permet d'écrire:

$$y'(x = 0) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F \cdot 0^2}{2} + F \cdot l \cdot 0 + C_1 \right) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

L'équation 1 devient alors:

$$y'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{2}x^2 + F \cdot l \cdot x \right) \quad (3)$$

Après une intégration de l'équation 3, nous aurons :

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{6}x^3 + \frac{F \cdot l}{2}x^2 + C_2 \right) \quad (4)$$

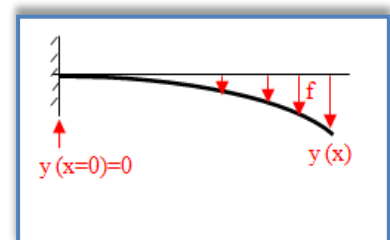
Pour déterminer la constante C_2 , nous allons considérer la condition aux limites suivante :

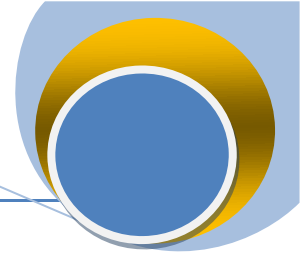
$$y(x = 0) = 0 \quad (5)$$

La prise en compte de l'équation (5) dans (4) :

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{6}0^3 + \frac{F \cdot l}{2}0^2 + C_2 \right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Finalement, l'expression de la déformée est la suivante:





$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{6}x^3 + \frac{F \cdot l}{2}x^2 \right) \quad (6)$$

4- Expression de la flèche maximale

Il est évident que la flèche maximale se situe à $x = l$, alors:

$$y_{\max} = y(x = l) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{F}{6}l^3 + \frac{F \cdot l}{2}l^2 \right) = \frac{2 \cdot Fl^3}{6EI} = \frac{Fl^3}{3EI}$$

$$y_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI} \quad (7)$$

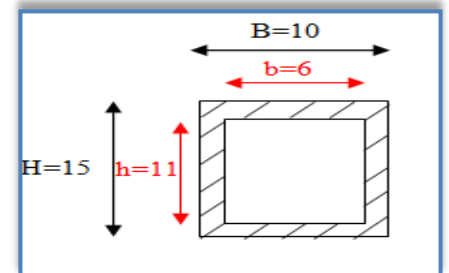
$$\text{AN : } y_{\max} = \frac{1000 \cdot 100^3}{3 \cdot 210000 \cdot 2147} = 0,739 \text{ mm}$$

$$\text{Ou : } I = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10 \cdot 15^3 - 6 \cdot 11^3}{12} = 2147 \text{ mm}^4$$

5- Vérification à la résistance

Les conditions de la résistance à la flexion s'écrivent:

$$\sigma_{\text{fle}} = \frac{|M_{f\max}|}{I_y} \times y \leq [\sigma] \quad (8)$$



$y_{\max} \leq [y]$ Cette condition ne sera pas considérée puisque $[y]$ n'est pas spécifiée dans l'exercice.

Vérification de la condition décrite par l'équation (8):

$$\text{On a : } M_{f\max} = -10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

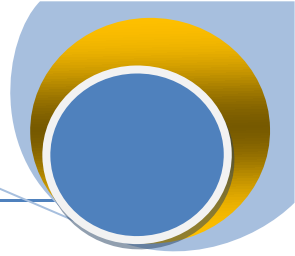
$$I_y = 2147 \text{ mm}^4$$

$$y = \frac{H}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ mm}$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_e}{s} = \frac{200}{2} = 100 \text{ N/mm}^2$$

- Calcul de la contrainte de la flexion appliquée:

$$\sigma_{\text{fle}} = \frac{+10^5}{2147} \times 7,5 = 349,32 \text{ N/mm}^2$$



La condition de résistance n'est pas vérifiée puisque $\sigma_{fle} = 349,32 \text{ N/mm}^2$ est supérieur à $[\sigma] = 100 \text{ N/mm}^2$, autrement dit, la poutre ne pourra pas supporter la force $F = 1000 \text{ N}$

6- Calcule de la charge maximale qui peut supporter la poutre

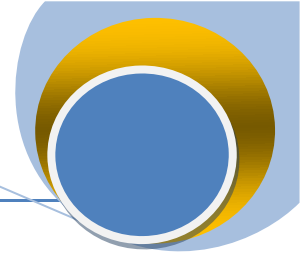
L'objectif de cette partie est de calculer la charge maximale tout en respectant la condition de résistance (équation 8):

$$\text{On a: } \sigma_{fle} = \frac{|M_{fmax}|}{I_y} \times y \leq [\sigma]$$

Ou : $M_{fmax} = -F.l$ voir le titre 2 relatif au calcul du moment fléchissant.

$$\Rightarrow \sigma_{fle} = \frac{+F.l}{I_y} \cdot y \leq [\sigma] \quad \Rightarrow F_{max} \leq \frac{[\sigma].I_z}{l.y} = \frac{100 \cdot 2147}{7,5 \cdot 100}$$

$$\Rightarrow F_{max} \leq 286,26 \text{ N}$$



CHAPITRE 05: Cisaillement

5. Introduction

Le cisaillement simple correspond dans la pratique à une sollicitation d'extension-compression bi axiale, Le concept de cisaillement est utilisé dans plusieurs domaines tel que les différents assemblages de constructions (assemblages boulonnés, clavetés, rivetés, soudés, dans les entailles à bois, etc.)

Nous présenterons dans ce qui suit les expressions relatives à la sollicitation de cisaillement à savoir l'expression de la contrainte, de la déformation et la condition de résistance.

5.2. Définition

Un corps est sollicité au cisaillement lorsqu'il est soumis à deux forces opposées appliquée perpendiculairement à la fibre moyenne. Les forces engendrent un glissement entre deux sections planes voisines qui sont en contact. Un solide soumis au cisaillement, peut être modélisé de la façon suivante:

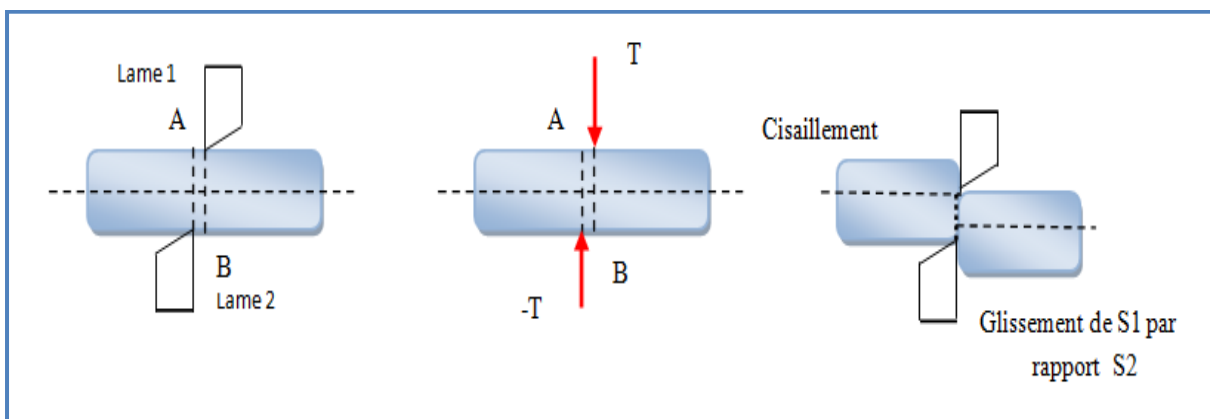
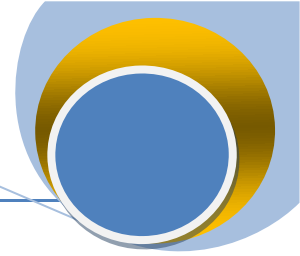


Fig.5.1. Représentation du cisaillement.

Une section droite (S) d'une poutre (E) est sollicitée au cisaillement simple si $N = 0$, $M_t = M_{fy} = M_{fz} = 0$ et $T_y \neq 0$ ou $T_z \neq 0$, les éléments de réduction au centre de surface G de (S) du torseur des efforts de cohésion sont:



$$\tau_{\text{coh}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \tau_{\text{coh}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, le cisaillement présente un effet couteau se qui provoque des contraintes tangentielles agissant perpendiculairement à la fibre moyenne, et situent dans le même plan de la section droite de l'élément étudié.

Il existe de nombreux dispositifs utilisant la sollicitation de cisaillement (outils, cisailles, poinçons ...). Le cisaillement simple correspond dans la pratique à une sollicitation d'extension-compression biaxiale.

5.3. Cisaillement simple – cisaillement pur

5.3.1. Cisaillement simple Il y a du cisaillement simple lorsque l'on applique deux forces T et -T perpendiculairement à l'axe d'une poutre, par exemple les points d'application des forces sont légèrement décalés d'une quantité notée dd. Il y a du pincement si les forces sont à la même abscisse tandis qu'il y a de la flexion si elles sont très éloignées. Il en résulte ainsi un moment de couple d'intensité de (TT×dd) qui crée de la flexion.

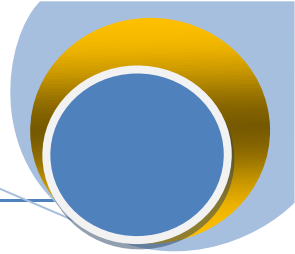
5.3.2. Cisaillement pur Si dd est trop faible, il y a un cisaillement pur (cisaillement théorique dont le torseur de cohésion ne contient qu'un effort tranchant); si dd est important, il y a un cisaillement simple (qui contient un moment de flexion, donc une contrainte normale).

5.4. Contrainte de cisaillement

Le cisaillement provoque des contraintes tangentielles à la surface de la section. Chaque élément de surface dS supporte une contrainte de cisaillement τ contenue dans la section cisailée S. En cisaillement, les contraintes normales sont nulles. En supposant que Les contraintes tangentielles produites par l'effort tranchant (T) sont réparties d'une manière uniforme dans la section soumise au cisaillement (S), la valeur de la contrainte vaut:

$$T(x) = \iint_S \tau \cdot dS$$

$$T(x) = \tau \cdot \iint_S dS$$



Donc
$$\tau = \frac{T}{S} \dots \dots \dots (1)$$

τ : Est appelée contrainte de cisaillement, Elle se mesure en Newton/m² (ou Pascal),

$\frac{T}{S}$: C'est l'intensité de l'effort tranchant par unité de surface.

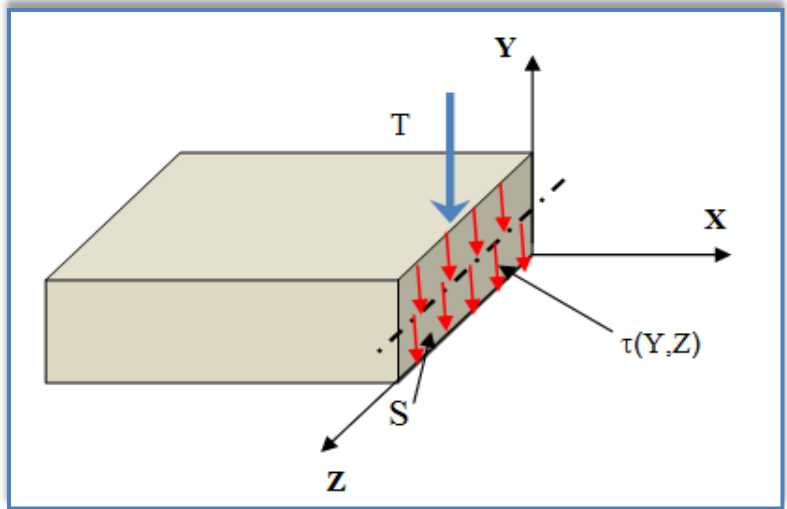


Fig.5.2. Contrainte de cisaillement

5.6. Essai de cisaillement

La sollicitation de cisaillement pur est un cas très particulier de la RDM car elle est impossible à réaliser expérimentalement. D'autre part le cisaillement simple concerne une section de la poutre et non la poutre entière. Les essais et résultats qui suivent permettent toutefois de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite et serviront ainsi dans le calcul de pièces soumises au cisaillement.

L'essai de cisaillement consiste à soumettre une éprouvette de section rectangulaire à deux charges **T** et **-T** très voisines et distantes de dx.

Si dx est infiniment petit, on se rapproche des conditions de cisaillement pur. L'éprouvette se déforme comme l'indique la figure5.3. On augmente la charge **T** progressivement jusqu'à rupture de l'éprouvette et au cours de l'essai, on relève la valeur du déplacement dy.

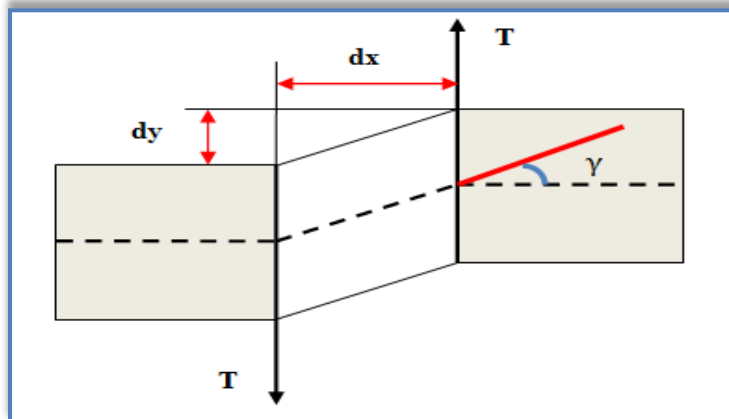
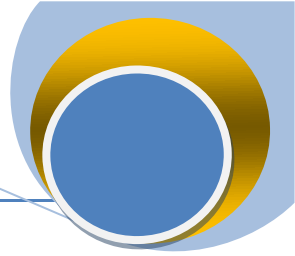


Fig.5.3. Schéma descriptive d'une section droite sollicitées au cisaillement

Si on trace la variation du glissement dy en fonction de l'effort T , on obtient la courbe représentée à la figure, L'essai de cisaillement fourni une courbe similaire à celle de l'essai de traction, avec une zone de déformation de cisaillement élastique et une zone de déformation plastique.

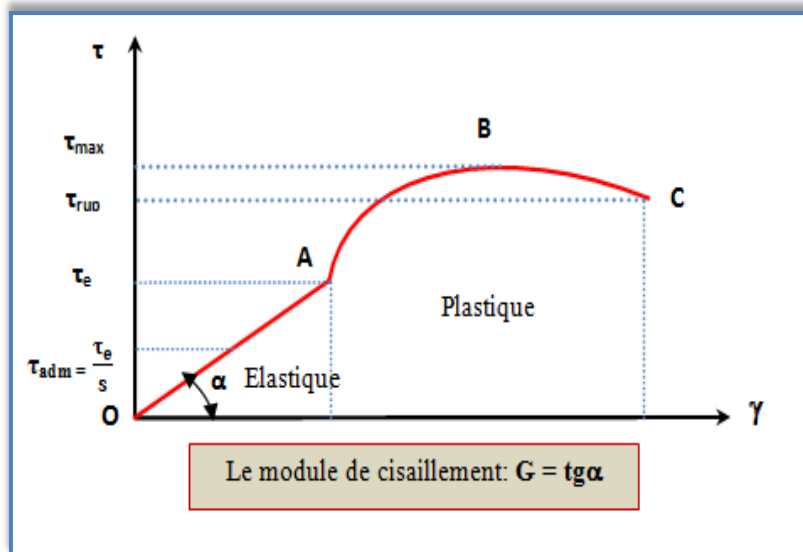


Fig.5.4. Courbe contraintes-déformations pour l'essai de cisaillement.

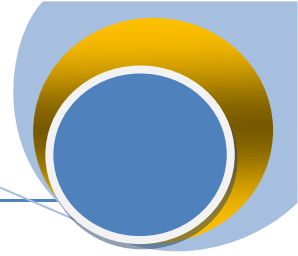
L'essai de cisaillement donne les résultats suivants:

τ_e : Contrainte élastique,

τ_{adm} : Contrainte pratique ou admissible,

τ_{max} : Contrainte maximale,

τ_{rup} : Contrainte de rupture,



s: Coefficient de sécurité.

- **Zone OA:** c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de T jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa forme initiale, la contrainte T / S est proportionnelle à la déformation γ la relation contrainte-déformation est linéaire et réversible.
- **Zone ABC:** c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de T jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa forme initiale. (Déformations plastiques), au delà de τ_e (limite élastique en cisaillement du matériau), la relation contrainte-déformation n'est plus linéaire ni réversible.

5.7. Relation entre contrainte et déformation

Pour beaucoup de matériaux, la déformation de cisaillement est linéairement proportionnelle à la contrainte de cisaillement dans certaines limites (glissement faible). Cette tendance linéaire est semblable au cas de la traction et de la compression directe.

Lorsqu' une poutre est soumise au cisaillement, la section subit un déplacement latéral d'une valeur dy . Chaque section de la poutre subit un glissement latéral par rapport à la section voisine, donc la ligne moyenne s'incline d'un angle γ appelé angle de glissement relatif.

$$\text{tg} (\gamma) \approx \gamma \approx \frac{dy}{dx}$$

Dans les limites de la proportionnalité, la loi de Hook en cisaillement s'écrit:

$$\tau = G \gamma$$

On peut écrire aussi : $\tau = G \frac{dy}{dx}$

Avec:

γ : L'angle de glissement (en rd),

τ : La contrainte tangentielle,

G: Est une caractéristique appelée module d'élasticité transversal ou module de coulomb en MPa.

On donne quelques valeurs de G pour certains matériaux:

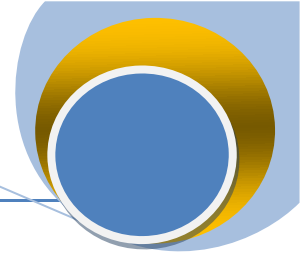


Tableau 5.1. Valeurs de G

Matériau	Fonte	Acier	Laiton	Duralimin	Plexiglas
G (MPa)	40000	80000	34000	32000	11000

Le module de cisaillement G est lié au module d'élasticité E par la relation:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Pour l'acier et les matières possédant le même coefficient de Poisson, on a $G \approx 0,385 E$

E: Module d'élasticité longitudinale (module de Young) ; pour la plupart des aciers $E \approx 210000$ MPa;

ν : Coefficient de Poisson; Pour la plupart des aciers $\nu \approx 0,3$

5.8. Condition de résistance au cisaillement

Pour une pièce sollicitée au cisaillement, et pour des raisons de sécurité, la valeur de la contrainte tangentielle τ ne doit pas dépasser la valeur de la contrainte maximale admissible τ_{adm} appelée encore résistance pratique au glissement R_{pg} .

Avec:

$$\tau_{adm} = R_{pg} = R_{eg} / s.$$

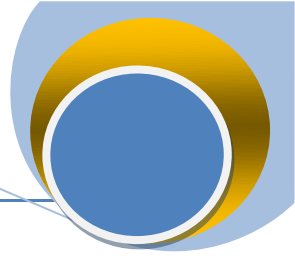
s: Est le coefficient de sécurité.

D'où la condition de résistance d'une pièce au cisaillement s'écrit: $\tau < \tau_{adm}$

Peut de fabricant indiquent la valeur de R_{pg} , ils n'indiquent que les résultats d'essais de traction valeur de R_{eg} , un coefficient permet d'établir une relation entre les deux:

Tableau 5.2. Valeurs de R_{pg}

Acier doux et alliage d'aluminium $R_{eg} < 500$ MPa	$R_{pg} = 0.5 R_{eg}$
Acier mi dur $R_{eg} < 500$ MPa	$R_{pg} = 0.7 R_{eg}$
Acier dur $R_{eg} > 500$ MPa	$R_{pg} = 0.8 R_{eg}$

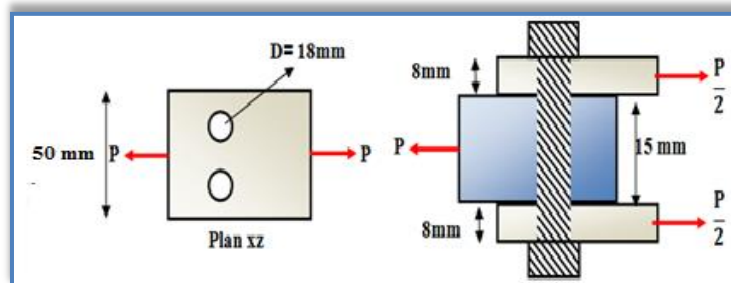


Exercices

Exercice 01

Deux bandes d'acier sont assemblées par 2 rivets comme le montre la figure, vérifier la résistance de l'assemblage.

- $\bar{\sigma} = 80\text{N/mm}^2$ Plaque
- $\bar{\tau} = 45\text{N/mm}^2$ Rivets
- $P = 2500 \text{ daN}$



Solution

Verification de la resistance

$$1. \tau_{\max} \leq \bar{\tau} \quad \tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{S}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\frac{P}{2}}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{P}{2\pi D^2}$$

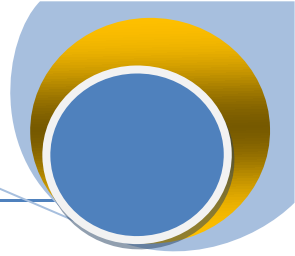
$$\tau_{\max} = \frac{25000 \times 4}{2 \times 3.14 \times 18^2} = 49.15\text{N/mm}^2$$

On trouve que $49,15 \text{ N/mm}^2 > 45 \text{ N/mm}^2$, donc condition non vérifiée

$$2. \sigma_{\max} \leq \bar{\sigma} \quad \sigma_{\max} = \frac{N}{S}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{(50 - 2 \times 18) \times 15}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{30000}{(14) \times 15} = 142,86\text{N/mm}^2$$

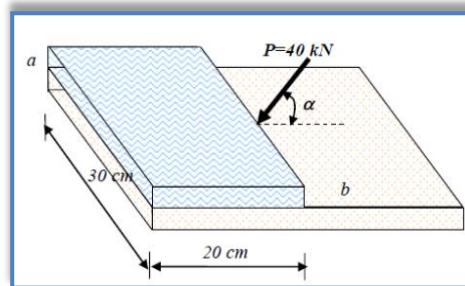


On trouve que $142,86 \text{ N/mm}^2 > 80 \text{ N/mm}^2$. Donc condition non vérifiée

EXERCICE 02

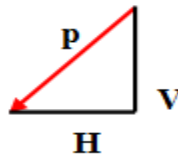
Soit la figure ci -contre. La force P tend à cisailer la butée le long du plan (a-b) si $P= 40\text{KN}$, $\alpha = 45^\circ$, calculer la contrainte de cisaillement sur le plan (a-b).

On donne $\bar{\tau} = 5\text{N/mm}^2$. Vérifier la résistance de l'assemblage



Solution

3. Calcul de la contrainte de cisaillement sur le plan (a-b)



La force qui produit la contrainte de cisaillement est bien la composante horizontale:

$$H = P \cdot \cos \alpha = 40 \cdot \cos 45^\circ = 28.28 \text{ KN}$$

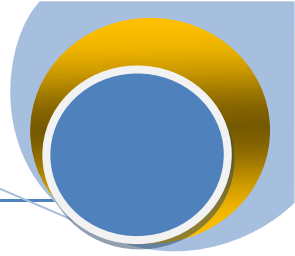
$$\text{La contrainte de cisaillement : } \tau = \frac{H}{A} = \frac{28.28}{20 \times 30} = 0.0471 \text{ KN/cm}^2$$

$$\tau = 0.47 \text{ MPa}$$

4. Vérification de la résistance

$$\tau_{\max} \leq \bar{\tau}$$

$$\tau_{\max} = 0.47 \text{ N/mm}^2 < 5 \text{ N/mm}^2 \text{ condition vérifiée.}$$



CHAPITRE 06: TORSION SIMPLE

6.1. Introduction

Comme pour les chapitres précédents, nous allons dans ce chapitre développer une autre sollicitation très répondeu dans les structures mécaniques assurant la transmission des mouvements de rotation qui est la torsion.

Ce type de sollicitation se rencontre surtout dans la conception de machines sous forme d'arbres de transmission, d'arbres dans les réducteurs et multiplicateurs de vitesse à engrenages et dans certains éléments de machines tels les barres de torsion et les ressorts hélicoïdaux. Les poutres utilisées dans la construction métallique subissent très souvent de la torsion qui s'additionne à la flexion

L'étude de la torsion, en général se fait pour les poutres circulaire, mais dans la réalité et dans le domaine du bâtiment et des travaux publics, on rencontre des poutres de différentes formes, pour cette raison, on essaye de porter quelques notions complémentaires, qui concernent de telles sections et structures en torsion uniforme.

Nous présenterons dans ce qui suit la définition, la contrainte, l'expression de la déformation ainsi que la condition de résistance pour la sollicitation de torsion

6.2. Définition

Une poutre est sollicitée en torsion lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments de torsion M_t égaux et opposés, portés par la ligne moyenne.

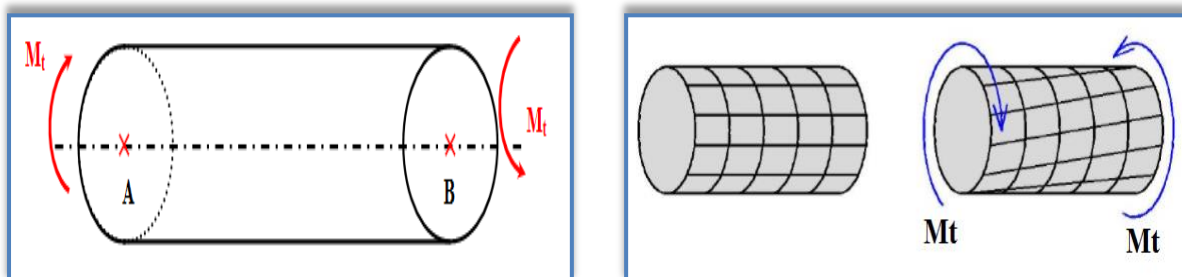
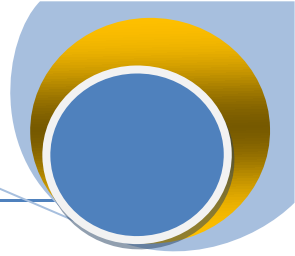


Fig.6.1. Torsion d'une barre circulaire



Une poutre est sollicitée à la torsion lorsque le système des forces extérieures crée des efforts internes représentables par un torseur dont le seul élément de réduction au centre de gravité de chaque section droite est le moment de torsion M_t ($N=0$, $T=0$, $M_t \neq 0$), le torseur des efforts intérieurs se présente sous la forme suivante :

$$\tau_{\text{coh}} = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cette partie de cours, on se restreindra à l'étude des poutres à section droite circulaire. Sinon, les sections droites ne restent pas planes, elles se gauchissent.

6.3. Essais de torsion

L'essai de torsion consiste à encastré une poutre (cylindre de révolution) à son extrémité gauche. On trace avant l'essai une génératrice C_0D_0 du cylindre puis, on applique à l'extrémité droite, de section (S) de centre de gravité G_1 , un système de forces extérieures pouvant se réduire à un seul vecteur moment M_t porté par l'axe (Gx). L'extrémité libre de la poutre tourne d'un angle appelé angle de torsion, On augmente graduellement la valeur de l'intensité du moment et on mesure la rotation d'angle α d'une section droite autour de son axe, on mesure les déformations de la poutre,

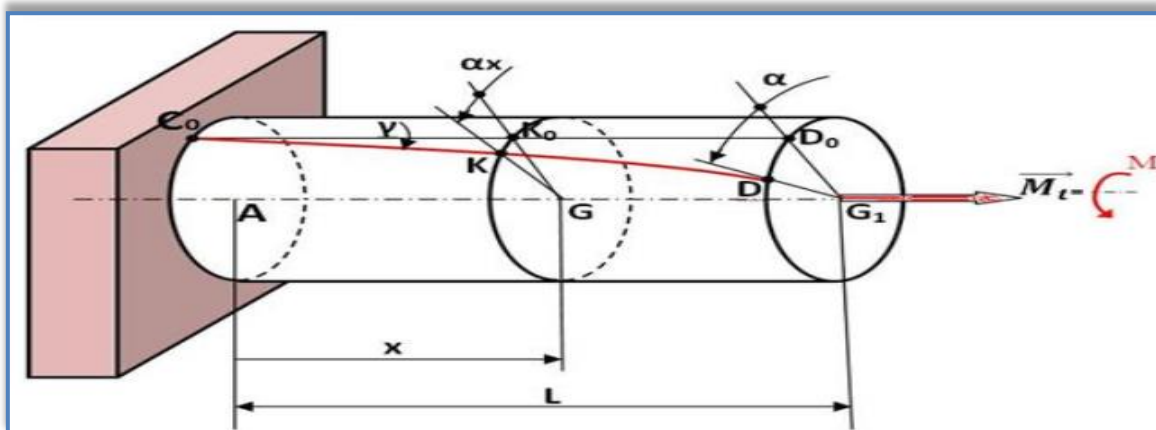


Fig.6.2. Illustration de l'essai de torsion simple.

On obtient la courbe ci-dessous. La courbe obtenue est semblable à celle de l'enregistrement de l'essai d'extension. (Ici courbe pour une éprouvette en acier doux)

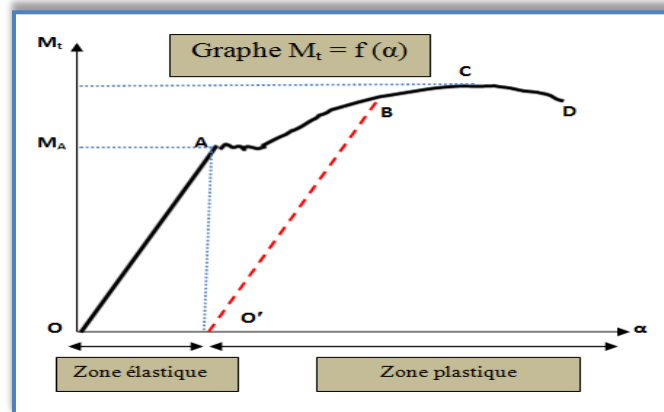
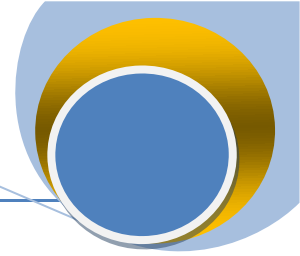


Fig.6.3. Courbe moment de torsion en fonction de l'angle de rotation

La visualisation de la courbe $M_t = f(\alpha)$ permet de distinguer deux zones:

Zone OA: Zone élastique, l'angle α est proportionnel au moment de torsion M_t . Si on annule M_t , la déformation disparaît.

Zone AB: Zone plastique, la déformation augmente rapidement et devient permanente. Si le chargement cesse, l'éprouvette ne reprend pas son état initial en O; elle a subi une déformation permanente, par exemple de B elle revient en O', soit une déformation permanente OO'.

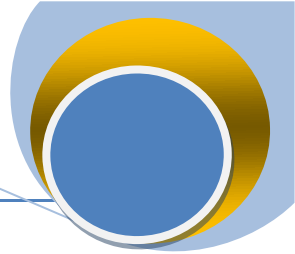
6.4. Déformation élastique

L'essai montre que toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe et que la distance relative entre deux sections reste sensiblement constante. Toutes les fibres se déforment donc suivant une hélice, sauf la ligne moyenne qui reste droite. On constate que le rapport $\theta = \frac{\alpha(x)}{x}$ reste toujours constant dans le domaine élastique. Ce rapport est appelé angle unitaire de torsion exprimée en [rad /mm].

α = Angle de rotation de la section S en rad qui est proportionnel à la distance des sections.

x = Distance séparant S à la section de référence S0 en mm.

En torsion, les sections de la poutre tournent et glissent les unes par rapport aux autres causées par les 2 couples opposées. Donc on a un glissement qui n'est qu'un cisaillement en torsion caractérisée par une déformation angulaire de glissement appelée aussi distorsion exprime par:



$$\tan \gamma = \frac{bb'}{ab}$$

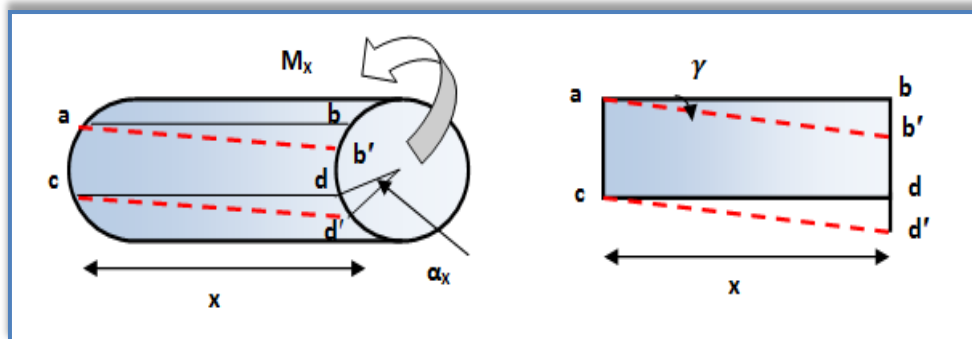


Fig.6.4. Déformation angulaire

On a: $bb' = r \alpha_x$, et $ab = x$,

On tenant compte du fait que l'angle γ est petit, on peut assimiler $\tan \gamma$ à γ et on obtient:

$$\gamma = r \frac{\alpha_x}{x} = r \theta$$

6.5. Calcul des contraintes tangentielles de torsion

La torsion engendre des contraintes de cisaillement tangentielles à cause de rotation d'axe de la fibre moyenne qui provoque un glissement des sections droites les unes par rapport aux autres.

On coupe le cylindre en une section (S) et on exprime que la partie isolée est en équilibre sous l'action du moment de torsion M_t et des forces de cohésion dans la section (S).

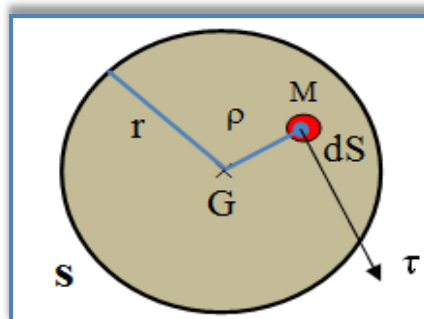
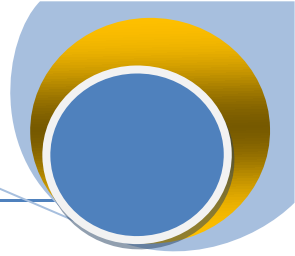


Fig.6.5. Equilibre d'une section circulaire sous l'effet de torsion

dS : Élément de surface situé à une distance ρ de l'axe Gx , soumis à une contrainte de cisaillement τ . L'effort élémentaire de cisaillement dF vaut donc:



$$\tau = dF.dS$$

Exprimons la valeur de la sollicitation de torsion en fonction des contraintes τ :

$$M_t = \iint_S \rho . \tau . dS$$

Donc:

$$\tau = G.\theta.\rho$$

Avec:

τ : Contrainte tangentielle qui agit sur une section de surface provoquant ainsi une rotation d'une angle unitaire θ ,

θ : Angle unitaire de torsion,

ρ : Distance du point M (appartient à dS) au centre de la section (mm)

G : Module d'élasticité transversale, qui peut être lié au module d'élasticité "E" comme suit:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

D'où:

Comme $G.\theta$ est identique pour chaque dS, on obtient finalement:

$$M_t = G.\theta.\iint \rho^2.dS$$

On a donc: $M_t = G.\theta.I_0$

I_0 : Moment d'inertie polaire de (S)/ à G

On sait aussi que:

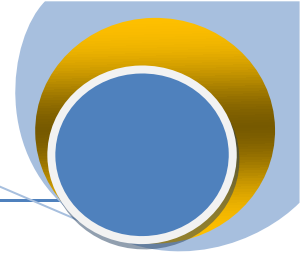
$$\tau = G.\theta.\rho$$

On peut donc exprimer la contrainte de cisaillement en fonction de M_t ,

$$\tau = \frac{M_t}{I_0} \rho \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{M_t}{\rho}$$

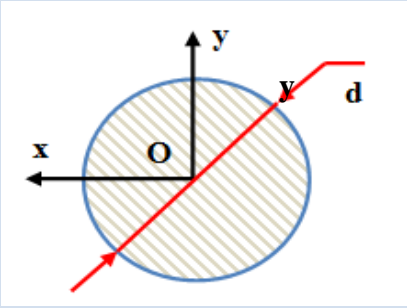
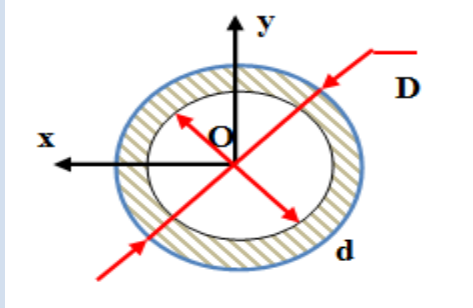
Dans cette équation le rapport (I_0/ρ) est le module de torsion. Son unité est le m^3 .

Les sections les plus sollicitées en torsion se trouvent dans la surface extérieure, on obtient:



$$\tau = \frac{M_t}{I_0} R$$

Tableau.6.1. Moment quadratique polaire en fonction de la section.

Moment quadratiques particuliers	
	
$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$	$I_0 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$

En torsion, les contraintes dans une section droite se réduisent à des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ , et on peut montrer (qu'elles sont orthogonales au rayon et proportionnelles à la distance au centre de la section (Fig). La contrainte est nulle au centre et maximale sur la surface extérieure.

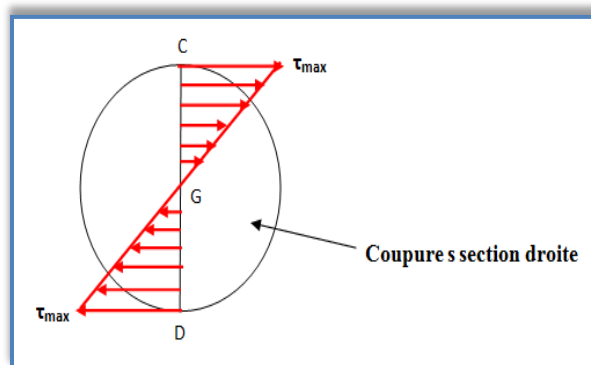
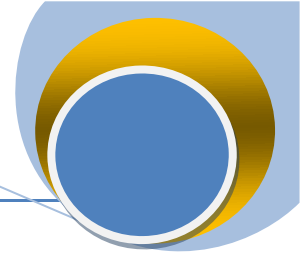


Fig.6.6. Contraintes de cisaillement dues à la torsion

6.6. Condition de résistance

Pour des conditions de sécurité, la contrainte tangentielle doit rester inférieure à la limite d'élasticité R_e . On définit R_{pg} , la contrainte pratique de glissement et on adopte un coefficient de sécurité s tels que:



$$R_{pg} = \frac{R_e}{s}$$

La condition de résistance s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\tau_{\max} = R \frac{M_{t\max}}{I_0} \leq R_{pg}$$

6.7. Condition de rigidité

Pour les systèmes de transmission qui tournent vite (typiquement avec des vitesses de rotation supérieures à 750 tr/min), on doit limiter les déformations de torsion du cylindre de transmission pour éviter les vibrations, Le calcul des dimensions des barres poutres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite θ_{\lim} .

D'où la condition de rigidité d'une pièce en en torsion:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_0} \leq \theta_{\lim}$$

En général, on adopte $\theta_{\lim} = (0.5.\pi / 180).10^{-3}$ rd /mm.

6.8. Concentration des contraintes

Les arbres présentent généralement de brusques variations de sections (gorges, épaulements, rainures de clavettes. . .). Au voisinage de ces variations de section, la répartition des contraintes n'est pas linéaire. Il y a concentration de contrainte.

$$\tau_{\text{eff max}} = k_t \cdot \tau_{\text{théorique}}$$

τ_{effmax} : Contrainte maximale effective (MPa),

$\tau_{\text{théorique}}$: Contrainte théorique sans concentration (MPa),

k_t : Coefficient de concentration de contrainte relatif à la torsion.il est déterminé par des tableaux ou abaqes. K_t dépend essentiellement des dimensions et du type de variation de la section.

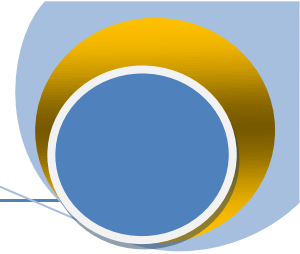


Tableau.6.2. Valeurs de Coefficient de concentration

K _t pour rainure de clavettes				
$\frac{\text{rayon congé}}{\text{profondeur rainure}} = \frac{r}{c}$	0.5	0.3	0.2	0.1
	2.1	2.7	3.5	5.4

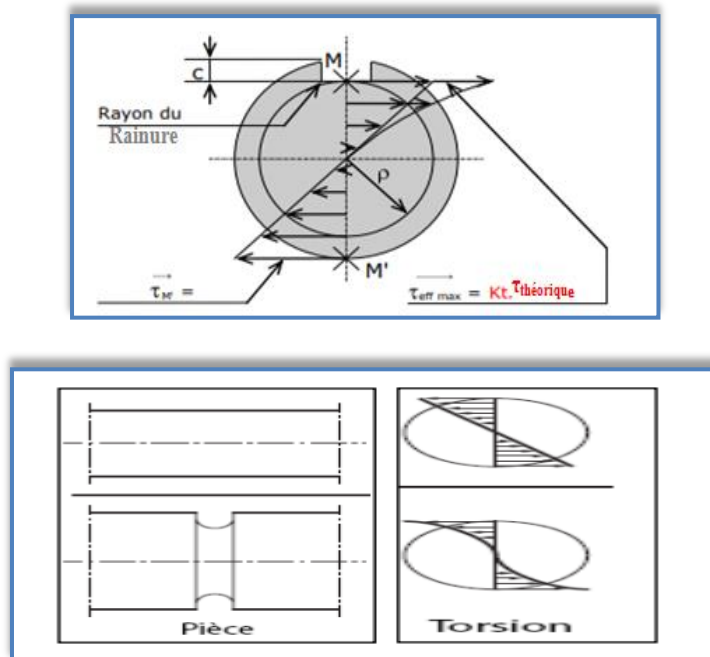


Fig.6.7. Concentration des contraintes.

6.9. Transmission de puissance

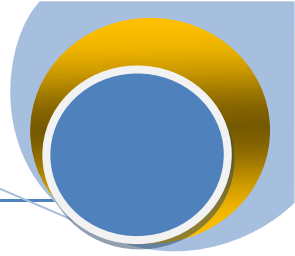
Dans de nombreuses applications de torsion on connaît la puissance à transmettre et non le moment de torsion. Si tel est le cas, connaissant la puissance P à transmettre (en watt) et la vitesse de rotation n de cet arbre (en tours par minute), nous pouvons retrouver le moment de torsion M_t par la relation:

$$P = M_t \times \omega$$

Avec ω vitesse angulaire en (rad/s) et la relation entre n et ω s'écrit comme suit:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

Alors : $M_t = \frac{P}{\frac{\pi n}{30}}$

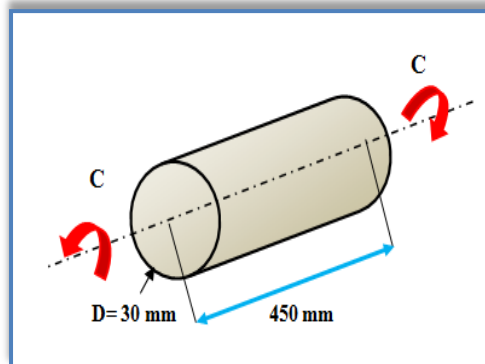


Exercices

Exercice 01

Un cylindre est soumis à un couple de torsion $C = 1.5 \text{ KN.m}$. le module de coulomb vaut 78 GPa , calculer,

1. La contrainte tangentielle maximum dans le cylindre,
2. La distorsion des génératrices en radian et en degrés,
3. L'angle de rotation des sections extrêmes en degrés.



Solution

5. La contrainte tangentielle maximum

Le moment de torsion M_x est constant tout le long de la barre, $M_x = C = 1.5 \text{ KN.m}$

Considérons une section quelconque G:

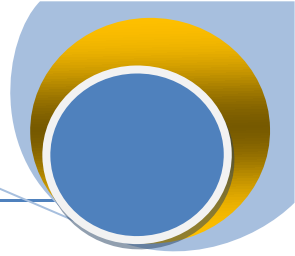
$$\tau_{\max} = \frac{C}{I_G} R$$

Avec: $I_G = \frac{\pi D^4}{32}$

$$\tau_{\max} = \frac{1.5 \times 10^6 \times 15 \times 32}{3,14 \times 30^4} = 283,09 \text{ MPa}$$

2. La distorsion

Appliquant le principe de Hook, On a:



$$\tau = \gamma \times G$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{283.09}{78 \times 10^3} = 0.00363$$

3. L'angle de rotation des sections extrêmes

L'angle de rotation est exprimé par la relation suivante:

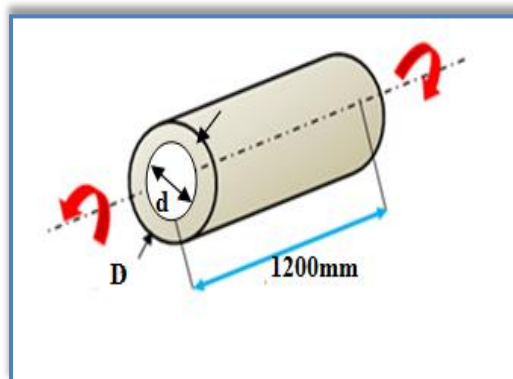
$$\theta_{x\max} = \frac{M_x L}{GI_G} = \frac{1.5 \times 10^6 \times 450 \times 32}{78 \times 10^3 \times 3.14 \times 30^4} = 0.109 \text{ rd}$$

$$\theta_{x\max} = 6.24^\circ$$

EXERCICE 02

Un arbre de torsion tubulaire de diamètre extérieur D , de diamètre intérieur d et de longueur 1200 mm. Doit transmettre une puissance $P = 314 \text{ kW}$ à la vitesse de rotation $n = 1500 \text{ tr/min}$ et l'angle de torsion total entre les extrémités doit être 20° . Cet arbre en acier à une résistance pratique $R_{pg} = 400 \text{ N/mm}^2$, $G = 8.10^4 \text{ N/mm}^2$

Calculer les valeurs des diamètres d , D et faire la vérification.

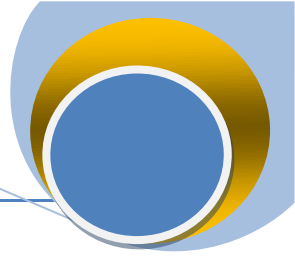


Solution

1. Valeur de D et d

La contrainte en chaque point est définie par: $\tau = G\theta\rho$, elle est maximum pour $\rho_{\max} = \frac{D}{2} = R$,

$$\text{Donc } \tau = G\theta \frac{D}{2}$$



La condition de résistance est: $\tau = G\theta \frac{D}{2} \leq R_{Pg}$

La valeur de $\theta = \frac{\alpha}{l} = \frac{20}{1200} \times \frac{\pi}{180} = 0.29 \times 10^{-3} \text{rd/mm}$

On obtient alors $D \leq \frac{2R_p}{G\theta} = \frac{2 \times 400}{8 \times 10^4 \times 0.29 \times 10^{-3}} = 34.48 \text{ mm}$

On choisit $D = 34 \text{ mm}$

L'équation du moment de torsion M_t est: $M_t = G\theta I_0 = G\theta \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$

$$\text{Donc } d = \sqrt[4]{D^4 \frac{32M_t}{G\theta\pi}}$$

On calcule d'abord le moment de torsion M_t

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{\pi n}{30}} = \frac{30 \times 314 \times 10^3}{\pi \times 1500} = 2000 \text{ N.m} = 2 \times 10^6 \text{ N.m}$$

$$\text{Donc } d = \sqrt[4]{34^4 \frac{32 \times 2 \times 10^6}{8 \times 10^4 \times 0.29 \times 10^{-3} \times \pi}} = 26 \text{ mm}$$

$$d = 26 \text{ mm}$$

2. Vérification

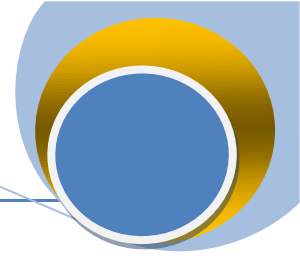
a. Condition de résistance

$$\tau_{\max} = \frac{D M_{t\max}}{2 I_0} \leq R_{pg} = 400 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{17 \times 2 \times 10^6}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)} = 393.84 \text{ N/mm}^2 \leq 400 \text{ N/mm}^2$$

b. Condition de rigidité: $\alpha < 20^\circ$

$$\alpha = \frac{M_{t\max} \times l \times 180}{I_0 G \pi} = \frac{2 \times 10^6 \times 1200 \times 10}{8 \times 10^4 \frac{\pi}{32} (34^4 - 26^4)} = 19.91^\circ < 20^\circ$$



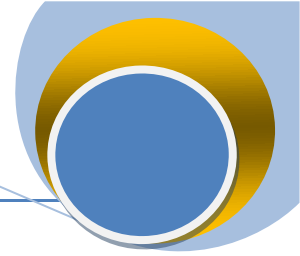
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Les livres

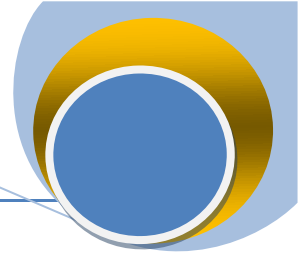
- Jean-Pierre Basset, Patrice Cartraud, Christian Jacquot, Antoine Leroy, Bernard Peseux, Pierre Vaussy. "Introduction à la résistance des matériaux", École d'ingénieur. Nantes, France. 2007.
- Jean Goulet, Jean Piere Boutin, Frederic Lerouge, "Aide mémoire résistance des matériaux", Edition Le Moniteur, 2009.
- Jean-Claude Doubrère, Résistance des Matériaux 11e édition. Edition Eyrolles, 2010.
- Noureddine Bourahla , "Résistance des matériaux de base". Edition GECOTEC,
- Wiliam and Nash, "Resistancedes materiaux 1, cours et problemes" , serie Schaum.
- S.P.TEMOSHENKO. "Resistance des matériaux", tome 1, Edition DUNOD.

Les Polycopies du Cours

- Eltaief Maher, Ben Nejma Manel, "Résistance des Matériaux", ISET de Sousse, 2017-2018.
- Zamila Harichane."Résistance des Matériaux (RDM-II)", Université Hassiba Ben Bouali de Chlef, Mars 2013.
- Pierre Badel, "Cours de résistance des matériaux", Cycle Préparatoire Médecin-Ingénieur, Ecole des Mines Saint Etienne, 2011-2012.
- Zine, "Notes de cours résistance des matériaux (RDM) première partie" 2019-2020.
- Najji, "Notes de cours résistance des matériaux I", Ecole nationale de l'industrie minérale,
- L. Douadji. "Introduction à la résistance des matériaux & Rappel de statique", Faculty of mechanical engineering and process engineering department of Materials Science,
- Ben Hassine Houda, Amdouni Hatem, Hadj Brahim Fawzi, Kalleli Safiedine " Support de cours résistance des matériaux", Institut supérieur des études technologique de Nabeul, Tunisie, 2012-2013.
- Awadi Walid, Karoui Med Fouzi, Chouchen Mohamed, Bouzidi Slim, "Fascicule des travaux pratiques, mécanique générale et RDM", ISET Siliana, 2009-2010.
- Mohammed Chaib, "Polycopie Cours et exercices", Université Ahmed Ben Bella Oran 1, 2018-2019.



- Mouna Souissi, Flore Brue, "Résistance des matériaux", Ecole des hautes études d'ingénieur, 2012-2013.
- Nesrine El Houari, "Travaux pratique des résistances des matériaux", Université Tlemcen, 2017-2018.
- Djamel Ouzandja, "Support de cours en résistance des matériaux (RDM)", Université Mohamed Boudiaf de M'sila, 2017-2018.
- Younès Saadallah, "Polycopié de cours Résistance Des Matériaux", Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel, Mars 2020.
- Bousmaha Mohammed, "Polycopié de cours simplifiée des résistances de matériaux", université des science et technologie Mohamed Boudiaf, Oran1 Année 2018-2019.
- Latefa Sail, Souad Benhachilif, Naouel Djafour, Sabah Ghezali, "Résistance des Matériaux", Université Aboubekr Belkaïd- Tlemcen. 2019-2020.
- Pierre Badel, "Cours de résistance des matériaux", Cycle Préparatoire Médecin-Ingénieur Ecole des Mines Saint Etienne, 2011-2012,
- Imane Benaïssa, "Polycopie de cours et exercices corrigées résistance des matériaux, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, 2019-2020,
- Said Bensaada, Résistance des matériaux, Université Mohamed Khider Biskra,
- Pierre-Alain Boucard, "Cours de Dimensionnement des Structures, résistance des matériaux", IUT Cachan.
- Kissi Benaïssa, "Notes de cours: résistance des matériaux (RDM)", Génie Civil ENSAM de Casablanca, 2017-2018.
- Mustpha Reguig, " Cours: résistances des matériaux", Décembre 2011,
- Zitouni Sabri, "Cours de résistance de matériaux", Iset du kef, 2011-2012.
- Kamel. Mehdi, Sihem. Zaghdoudi, "Cours et Exercices de Résistance des Matériaux", Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs, El Manar, Janvier 2011.
- Bachene Mourad, "Polycopie de Cours Résistance des matériaux", Université de Médéa, 2013.
- N. Drias, B. Guerira, "Cours de résistance des matériaux II avec exercices résolus", Université de Biskra, Dé c e m b r e 2 0 1 8.
- Hadjazi Khamis, "Support de cours en résistance des matériaux", Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, 2013-2014.
- SBAÂ Rania, "Support de cours en résistance des matériaux", Technologie ISET Mahdia, 2013-2014.



Les Sites Web

- <http://www.ispm.ac.ma/wp-content/uploads/2020/05/S220-Chap6-Torsion.pdf>
- <http://pipac.free.fr/torsionc.pdf>
- <http://www.ispm.ac.ma/wp-content/uploads/2020/05/S220-Chap6-Torsion.pdf>
- <https://appx.cchic.ca/svilleneuve/materiaux/chap9.pdf>
- <https://cours-examens.org/images/An-2018/Etudes-superieures/RDM/exo-solutions.pdf>
- <https://www.technologuepro.com/genie-civil/Resistance-Des-Materiaux/chapitre2-Theorie-elementaire-de-la-RDM.pdf>
- <http://constructionmezen.free.fr/sujets/corrigeFLEXION.pdf>
- <http://joho.p.free.fr/EC/COURS%20PJ/COURS%20MECANIQUE/RESISTANCE%20DES%20MATERIAUX/RESISTANCE%20DES%20MATERIAUX%20N1%20exe.pdf>
- <https://www.geniecvl.com/les-appuis-en-construction/>
- <https://www.fichier-pdf.fr/2021/03/29/cours-rdm-3eme-eleve-21docx/preview/page/1/>
- https://foad.ac-amiens.fr/pluginfile.php/166629/mod_resource/content/1/01-R%C3%A9sistance%20des%20mat%C3%A9riaux.pdf
- http://www.ecole.ensicaen.fr/~chateign/enseig/meca/Resistance_des_Materiaux.pdf
- https://www.xr6805.fr/school/sti_web/rdm/intro/intro.htm
- <http://mdevmd.accesmad.org/mediatek/mod/page/view.php?id=9009>
- <https://appx.cchic.ca/svilleneuve/materiaux/chap8.pdf>
- <http://tonepi.com/resistance-des-materiaux-rdm/sollicitation-simple-traction-et-compression-cours.html>
- [https://www.itterbeek.org/uploads/documents/RMChap4\(MomentInertie\).pdf](https://www.itterbeek.org/uploads/documents/RMChap4(MomentInertie).pdf)
- <https://www.rocdacier.com/forum/threads/r%C3%A9action-dappui-moment-fl%C3%A9chissant-effort-tranchant-et-exercice-r%C3%A9solu.1073/>
- [https://www.itterbeek.org/uploads/documents/RMChap6\(Torsion\).pdf](https://www.itterbeek.org/uploads/documents/RMChap6(Torsion).pdf)