

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département des Sciences et Techniques

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Génie Mécanique

Spécialité : Energétique

**La Convection forcée dans une plusieurs espace annulaire
Entre deux cylindres elliptiques**

Préparé par : - Fennour Djalal
- Bouzeraa Ayyoub

Soutenue devant le jury

Président: Zeghbid Ilham

Examineur: Boubeghal Abd Elwahab

Encadré par : Zerari Khalil

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciement

ON REMERCIE DIEU LE TOUT PUISSANT DE NOUS AVOIR DONNÉ LA SANTÉ
ET LA VOLONTÉ D'ENTAMER ET DE TERMINER CE MÉMOIRE.

TOUT D'ABORD, CE TRAVAIL NE SÉRAIT PAS AUSSI RICHE ET
N'AURAIT PAS PU AVOIR LE JOUR SANS L'AIDE ET
L'ENCADREMENT DE **MR KHALIL ZERARI**, ON LE REMERCIE POUR
LA QUALITÉ DE SON ENCADREMENT EXCEPTIONNEL, POUR SA PATIENCE,
SA RIGUEUR ET SA DISPONIBILITÉ DURANT NOTRE PRÉPARATION DE CE
MÉMOIRE

NOUS REMERCIONS NOS AMIS, NOS COLLÈGUES DE L'INSTITUT
DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE AINSI QUE L'ENSEMBLE DES
ENSEIGNANTS ET RESPONSABLES.

NOUS REMERCIONS NOS PARENTS POUR NOUS AVOIR APPRIS À
TOUJOURS ALLER AU BOUT DE NOS RÊVES, AINSI QUE NOS FRÈRES ET
SŒURS.

ENFIN, JE TIENS À REMERCIE TOUS CEUX QUI ONT CONTRIBUÉE DE
PRÈS OÙ DE LOIN À LA RÉALISATION DE CE TRAVAIL.

Convection forcée dans une plusieurs espace annulaire

Entre deux cylindres elliptiques

Résumé :

Cette étude présente une simulation numérique en 3D d'un écoulement laminaire de la convection forcé On considère un écoulement de convection forcée dans plusieurs espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux. Le cylindre intérieur est statique et chauffe par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. On modélisé Le problème par l'équation de continuité, les trois équations de quantité de mouvement et l'équation de l'énergie avec des conditions initiales et aux limites appropriées en utilisant un système de coordonnées elliptiques. On a utilisé la méthode des volumes finis pour la résolution numérique des équations avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre. Pour une géométrie considérée.

Les résultats obtenue montre que il y a une grande différence entre les trois cas étudiés thermique et dynamique spécialement a les valeurs de nombre de Nusselt qui est apparu clairement dans le cas ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75$).

Mots clé : convection forcée, cylindre elliptique, confocaux, la méthode de volumes finis, espace annulaire.

Forced convection in a several annular space between Two elliptical cylinders

Abstract:

This study presents a 3D numerical simulation of a laminar forced convection flow. We consider a forced convection flow in several annular spaces between two horizontal and confocal elliptical cylinders. The inner cylinder is static and heats by a constant heat flow. The outer cylinder is static and adiabatic. The problem is modelled by the continuity equation, the three momentum equations and the energy equation with appropriate initial and boundary conditions using an elliptical coordinate system. The finite volume method was used for the numerical solution of the equations with a second order space-time discretization. For a considered geometry .

The results obtained show that there is a great difference between the three cases studied thermal and dynamic especially has the values of Nusselt number which appeared clearly in the case ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75$).

Keywords: Forced convection, elliptic confocal, confocal elliptical cylinders, finite volume method , annular space.

الحمل الحراري القسري في عدة فضاءات حلقيّة بين أسطوانتين إهليجيتين أفقيتين

ملخص:

تقدم هذه الدراسة محاكاة عددية ثلاثية الأبعاد للجريان الصفحي للحمل القسري ، حيث تم أخذ التدفق الحراري القسري في عدة مسافات حلقيّة بين أسطوانتين أفقيتين و إهليجيتي الشكل متحدتي البؤر. الأسطوانة الداخلية ثابتة وتسخن بواسطة تدفق حراري مستمر منتظم. الاسطوانة الخارجية ثابتة و كظومة. تم طرح المشكلة من خلال معادلة الاستمرارية ومعادلات الزخم الثلاثة ومعادلة الطاقة بشروط أولية وحدودية مناسبة باستخدام نظام إحداثيات إهليجي. تم حل المعادلات باستعمال طريقة الحجوم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية في الفضاء و الزمن . من أجل المظاهر الهندسية. بينت النتائج المتحصل عليها وجود فرق كبير بين الحالات الثلاث الحرارية والديناميكية المدروسة وخاصة في قيم رقم نوسلت والتي ظهرت بوضوح في هذه الحالة ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 0.75$) .

الكلمات المفتاحية : الحمل الحراري المختلط ، أسطوانات متحدة البؤر إهليجية الشكل ، طريقة الحجوم المنتهية.

Nomenclature

a	Demi distance focal	(m)
C_p	Chaleur massique a pression constante	(J/kg.K)
g	Accélération de la pesanteur	(m/s ²)
h_1	Coefficient métrique radial	(m)
h_2	Coefficient métrique azimutal	(m)
h_3	Coefficient métrique axial	(m)
h	Coefficient local de la convection	(W/m ² .K)
k	Conductivité thermique de fluide	(W/m .K)
L	Longueur du conduit	(m)
P	Pression	(Pa)
P_1 ou bien P_i	Périmètre du cylindre intérieur	(m)
q_w	Densité de flux de chaleur a la surface du cylindre intérieure	(W/m ²)
S	Surface de la section droite du conduit (section d'écoulement)	(m ²)
t	Temps	(s)
T	Température	(c/ K)
V_ε	Vitesse radiale	(m/s)
V_η	Vitesse azimutale	(m/s)
V_z	Vitesse axiale	(m/s)
Z	Coordonnée axiale	(m)
ε_i	Rayon de cylindre elliptique intérieur	

ε_o Rayon de cylindre elliptique extérieur

Symboles Grecs

B	Coefficient d'expansion thermique	(1/K)
Δt	Pas de temps	(s)
Δ	Intervalle fini	
μ	Viscosité dynamique	(kg/m .s)
P	Masse volumique	(kg/m ³)
ε	Coordonnée elliptique radiale	
η	Coordonnée elliptique azimutale	
ν	Viscosité cinématique	(m ² /s)

Indices

i	Surface du cylindre intérieure	
m	Valeur moyenne	
Max	Valeur maximale	
Min	Valeur minimale	
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini	
n, s, e, w, f, b	Fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas	
N, S, E, W, F, B	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas	

u	Maillage décale suivant la direction radiale
v	Maillage décale suivant la direction angulaire
W	Maillage décale suivant la direction axiale
0	Entre du conduit

Exposants

*	Variable adimensionnelle
t	Désigne l'instant
$t + \Delta t$	Désigne l'instant $t + \Delta t$
$t - \Delta t$	Désigne l'instant $t - \Delta t$

Les nombres adimensionnels

Gr	Nombre de Grashof
Pr	Nombre de Prandtl
Re	Nombre de Reynolds
Br	Nombres de Brinkman
$Nu(\eta, z)$	Nombre de Nusselt local
$Nu(z)$	Nombre de Nusselt axial
Ra	Nombre de Rayleigh

Table de matières

Résumé

Nomenclature

Table de matières

Liste des figures

Liste des tableaux

<i>Introduction générale</i>	1
<i>Chapitre I : Etude bibliographique</i>	3
<i>Chapitre II : Modèle Mathématique</i>	11
2.1 Introduction	12
2.2 Description du problème.....	12
2.2.1 Rappel mathématique sur les coordonnées elliptique	13
2.2.2. Le modèle mathématique.....	14
2.2.2.1. Formulation mathématique.....	14
a) L'équation de continuité.....	14
b) L'équation de quantité de mouvement suivant ε	15
c) L'équation de quantité de mouvement suivant η	15
d) L'équation de quantité mouvement suivant z	15
e) L'équation d'énergie.....	15
f) Conditions initiales et aux limites.....	15
2.2.2.2 La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique	17
a)L'équation de continuité.....	17
b) L'équation de quantité de mouvement suivant ε	17
c)L'équation de quantité de mouvement suivant η	18
d) L'équation de quantité mouvement suivant z	18

e) L'équation d'énergie.....	18
f) Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles.....	18
2.3 Les Bilans thermique et massique.....	19
2.3.1 Bilan thermique global.....	19
2.3.2 Bilan massique global.....	20
2.4. Le nombre de Nusselt.....	21
2.4.1. Le nombre de Nusselt local.....	21
2.4.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne.....	21
Chapitre III : Etude numérique.....	22
3.1. Introduction.....	23
3.2. La méthode de résolution.....	23
3.3. Le maillage.....	23
3.4. Détails de discrétisation:.....	26
3.4.1. Discrétisation de l'équation de continuité.....	30
3.4.2. Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	30
3.4.3. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant ε	33
3.5. La discrétisation des conditions aux limites.....	44
3.5.1. Les conditions aux limites thermiques.....	45
3.5.2. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant ε	47
3.5.3. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant η	48
3.5.4. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant z	50
3.6. L'équation de discrétisation de la pression.....	51

3.7. Convergence:.....	55
Chapitre 4 : Résultats et Discussion	57
4.1. Introduction.....	58
4.2. La premier cas ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1$)	58
4.2.1 L'écoulement axial.....	58
4.2.2. Le champ thermique.....	59
4.2.3. L'évolution du nombre de Nusselt axial	60
4.3. La deuxième cas ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1$).....	61
4.3.1. L'écoulement axial	61
4.3.2. Le champ thermique	63
4.3.3. L'évolution du nombre de Nusselt axial	64
4.4. Le dernier cas ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75$)	64
4.4.1. L'écoulement axial	64
4.4.2. Le champ thermique.....	65
4.3.4. L'évolution du nombre de Nusselt axial	66
4.5. Comparaison des résultats.....	67
Chapitre 5 : Conclusion Générale	68
Bibliographies	70

Liste des figures

2.1: géométrie et condition aux limites du problème (n'est pas à l'échelle).....	12
2.2 : Systèmes de coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire.....	13
3.1 : Le volume fini typique.....	24
3.2. Le maillage numérique utilise (a) et sa projection en coupe (b). La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.....	26
3.3. Maillage suivant les coordonnées (η, z)	27
3.4. Maillage suivant les coordonnées (η, ε)	28
3.5. Maillage suivant les coordonnées (ε, z)	29
3.6. La projection de maillage décalé suivant ε sur la surface (ε, z)	34
3.7. La projection de maillage décalé suivant η sur la surface (ε, η)	35
3.8. Maillage axial à la sortie du conduit.....	46
4.1. Le champ numérique de la vitesse axial ($\varepsilon_i = 0.5$ et $\varepsilon_o = 1$) a déférent valeur a Z^*	59
4.2. Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.5$ et $\varepsilon_o = 1$) a déférent valeur.....	60
4.3. La variation de nombre de Nusselt axial par rapport a z^* ($\varepsilon_i = 0.5$ et $\varepsilon_o = 1$).....	61
4.4. Le champ numérique de la vitesse axial ($\varepsilon_i = 0.75$ et $\varepsilon_o = 1$) a déférent valeur de Z^*	62
4.5. Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.75$ et $\varepsilon_o = 1$) a déférent valeur de Z^*	63
4.6. La variation de nombre de Nusselt axial par rapport a Z^* ($\varepsilon_i = 0.75$ et $\varepsilon_o = 1$).....	64
4.7. Le champ numérique de la vitesse axial ($\varepsilon_i = 0.5$ et $\varepsilon_o = 0.75$) a déférent valeur de Z^* ..65	
4.8. Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.5$ et $\varepsilon_o = 0.75$) a déférent valeur de Z^* ..66	
4. 9. Les nombres de Nusselt axiaux $Nu (Z^*)$ en déférent espace annulaire.....	67

Liste des tableaux

2.1. Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles.....	17
2.2. Les propriétés thermophysiques et paramètre de contrôle.....	19
3.1. Les valeurs de débit d`entrée et de sortie avec l`Erreur pour les trois cas	56
3.2. Les valeurs de q_1 et q_6 avec les valeurs d`erreurs pour les trois cas	56
4.1. Les résultats obtenus a partir de calcule Numérique pour les trois cas.....	67

Introduction Générale

Introduction Générale

La chaleur est une forme d'énergie qui correspond à l'agitation des molécules ou des atomes de la matière. Plus la vitesse d'agitation des particules est élevée plus la température du corps est élevée.

La chaleur se transfère d'un système physique à un autre selon trois modes de transfert : conduction, convection et rayonnement.

L'amélioration du transfert de chaleur est un objectif capital dans plusieurs applications, et pour ce faire, un grand nombre de chercheurs ont mené une multitude d'essais numériques et expérimentaux portant sur la description des phénomènes régissant les modes de transfert de chaleur.

L'objectif de ce travail scientifique (simulation numérique) est de déterminer l'effet d'une variation des valeurs des rayons de cylindre intérieure et extérieure sur le transfert de chaleur de la convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques.

Notre mémoire est divisée en cinq chapitres, répartis comme suit :

Dans le premier chapitre on a présenté quelques travaux précédents des chercheurs sur les transferts thermiques des convections forcées, mixtes et les résultats de leurs travaux.

Dans le deuxième chapitre : nous présentons en détail les équations dimensionnelles et adimensionnelles qui modélisent la conservation de masse, les équations de quantités d'énergie et de mouvement avec leurs conditions initiales et aux limites.

Dans le troisième chapitre : nous présentons les détails de la méthode des volumes finis utilisée pour discrétiser le domaine géométrique et les équations du modèle mathématique.

Dans le quatrième chapitre : on a présenté les résultats qui nous se trouvent après le traitement d'un écoulement de convection avec une variation entre les valeurs de rayon en cylindre externe et cylindre interne.

Finalement **dans le cinquième chapitre** qui contient une conclusion générale on a présenté une discussion et interprétations des résultats importants de ce travail indiquant l'effet des plusieurs espaces annulaires (variation d'une valeur de rayon intérieur et extérieur cylindre interne et externe) sur la convection forcée entre deux cylindres elliptiques.

Chapitre I
Etude Bibliographique

1. Introduction :

Notre recherche bibliographie synthétisée est divisée en trois parties, une première partie concerne la convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindres. La deuxième partie sur la convection forcée, naturelle et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres. Et la dernière partie sur la convection forcée et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres excentriques.

1.1. La convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindres :

O. Terhmina et A. Mojtabi [1] font une étude de l'écoulement de la convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans la région d'entrée d'un espace annulaire compris entre deux cylindres coaxiaux et isothermes. Pour résoudre le problème la méthode différence fini a été utilisée. Les résultats montrent, dans le cas de grands nombres de Prandtl, la longueur d'établissement dynamique devient négligeable devant la longueur d'établissement thermique. Par conséquent, dans ce cas, le problème thermique peut être résolu en considérant que le régime dynamique est établi à partir de la section d'entrée. L'établissement du régime dynamique s'accompagne d'une légère réduction de la longueur d'établissement thermique. Le transfert de chaleur, local ou global, ne dépend que de l'abscisse axiale réduite $X = Z/L$, et de la température du fluide à l'entrée de l'espace annulaire.

L'étude de la convection forcée d'un fluide non-newtonien dans un espace annulaire tournant est étudié par **Meriem Amoura et.al [2]**. Les équations de conservation sont résolues par la méthode d'élément finis mixte avec l'utilisation du modèle de Carreau comme model rhéologique. Les résultats montrent qu'on peut mettre en évidence l'influence de l'indice de comportement et du nombre de Reynolds sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur caractérisée par le nombre de Nusselt.

D.maitra et K.S.Raju [3] ont menés un travail expérimental sur la convection forcée pour obtenir des données de transfert de chaleur en appliquant un chauffage à courant continu à la paroi interne. Un écoulement laminaire entièrement développé a été induit dans un appareil à anneau vertical, et la direction de l'écoulement vers le haut a été testée sous certains gradients de pression. Les résultats théoriques de vitesse, de température et de chute de pression ont été présentés par différents rapports de rayon et nombres Ra jusqu'à 1×10^8 . Les résultats expérimentaux ont été obtenus à une diminution de nombre de Reynolds de $Re=1200$ jusqu'à $Re=200$ et $Ra = 2.5 \times 10^5$ lorsque l'eau s'écoule dans un anneau dont la

paroi interne subit un flux thermique constant. Les effets de convection libre ne sont pas prédominants lorsque $Ra=10^3$, et une forte augmentation du nombre de Nu est observée.

Ching-Chi Wu et.al [4] ont étudié une simulation numérique d'un écoulement turbulent à convection forcée dans un tube elliptique torsadé. Une réalisation à été faite pour obtenir les caractéristiques de chute de pression et de transfert de chaleur du tube elliptique torsadé. En raison de la paroi torsadée, les tubes elliptiques torsadés entraînent une chute de pression, la perte de charge du tube elliptique torsadé avec $d = 96$ mm augmente de 58%-60% par rapport au tube ovale. Parmi les résultats obtenus, les tubes elliptiques torsadés peuvent améliorer le transfert de chaleur. Et le nombre de Nusselt moyen avec $d = 96$ mm augmente de 16%-19% par rapport au tube ovale.

Klaleche Sofiane et Madjour Abderrahmane [5] travaillent sur une simulation numérique du transfert de chaleur par convection forcée entre deux disques coaxiaux dont le disque inférieur est soumis à un flux thermique constant, lors d'un écoulement laminaire de deux fluides conventionnels séparément (l'eau et l'éthylène glycol). Au but de la mise en évidence de l'effet des nano-fluides sur les performances thermiques en convection forcée et ce pour les nombres de Reynolds : ($Re= 250, 500, 1000, 1500, 2000$). Les résultats montrent que l'augmentation du transfert de chaleur en convection forcée est proportionnelle à l'augmentation du nombre de Reynolds et la fraction volumique des nanoparticules présentes dans les nano-fluides. Le nano-fluide à base d'Ethylène Glycol (E.G) présente une meilleure performance en comparaison avec l'eau.

Djamaa Youba et Benabdellah Iskander [6] font une simulation numérique en trois dimensions sur la convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques. Les équations sont résolues numériquement par la méthode des volumes finies. Le transfert de chaleur par convection forcée entre les deux cylindres présente un comportement et augmente de manière significative, pour le nombre de Nusselt local ce transfert diminue dans la région chaude et augmente dans les régions froides.

1.2. La convection forcée, naturelle et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres:

K.Zerari et.al [7] travaillent sur une simulation numérique sur l'effet des propriétés thermophysiques sur la convection mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux. La méthode des volumes finis est utilisée avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre dans l'espace et dans le temps pour la résolution des

équations du modèle. Parmi ces résultats, la prise en compte de la convection mixte avec des propriétés physiques variables donne un sens physique sur l'écoulement et les champs thermiques qui sont qualitativement et quantitativement différents de ceux de la convection forcée avec des propriétés dépendantes de la température et les cas de la convection mixte avec des propriétés constantes, le nombre de Nusselt obtenu est également plus élevé dans ce cas. L'amélioration du transfert de chaleur obtenue en considérant la convection naturelle au sein de la convection mixte avec des propriétés physiques dépendant de la température augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof qui est proportionnel au flux thermique imposé à la surface du cylindre intérieur.

Meriem Benmerkhi [8] élabore une étude numérique sur la convection forcée et mixte dans un espace annulaire elliptique horizontal et incliné rempli par une mousse métallique. La méthode numérique des volumes finis a été utilisée pour la résolution des systèmes. Les résultats obtenus montrent qu'avec les paramètres géométriques, dynamiques et thermiques considérés, avec une petite inclinaison négative de l'espace annulaire est recommandée pour obtenir un transfert de chaleur amélioré proche de celui de l'espace annulaire horizontal tout en surmontant la chute de pression totale. Les aspects qualitatifs des résultats de cette étude ne sont pas limités au système utilisé spécifique ; elle a été appliquée à tout système de convection mixte forte (avec des propriétés physiques du fluide variables), dans un conduit incliné et assez long, rempli de tout milieu poreux qui a une conductivité thermique effective supérieure à celle du liquide utilisé.

A. Mojtabi et J.-P. Caltagirone [9] ont étudié une analyse de transfert de chaleur en convection mixte laminaire entre deux cylindres coaxiaux horizontaux. Ce problème est résolu par la méthode des perturbations ainsi qu'un modèle aux différences finies. Les résultats obtenus les ont conduits à caractériser les lignes de courant et à relier les différents pas d'hélices constituant ces lignes aux nombres de Rayleigh, Prandtl et Reynolds.

M.Ciambi et al [10] font une étude sur le transfert thermique par convection mixte dans un espace annulaire concentrique et horizontal pour des conditions d'écoulement de transition. Les expériences sont faites pour déterminer la convection mixte dans un espace annulaire entre tubes concentriques horizontaux pour des nombres de Reynolds dans le domaine $2200 < Re < 5000$. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à la valeur critique Re_1 , qui dépend du nombre de Rayleigh, du rapport des diamètres et de la position longitudinale, l'écoulement le long des cotes de l'espace annulaire est laminaire et hélicoïdal. Pour $Re >$

Re_1 , il y a une rupture dans le mouvement hélicoïdal, avec transition à la turbulence au sommet et dans les régions latérales du passage annulaire. Le nombre de Nusselt local au sommet du tube intérieur est respectivement inférieur, égal ou supérieur à celui de la base pour $Re < Re_1$, $Re = Re_1$ et $Re > Re_1$. Le nombre de Nusselt moyen sur la circonférence est faiblement dépendant de la position longitudinale et peut être exprimé en fonction des nombres de Rayleigh et de Reynolds, et du rapport des diamètres des tubes.

S.Kotake et N.Hattori [11] travaillent sur une étude numérique sur la convection mixte thermique pour un écoulement laminaire établi dans un espace annulaire horizontal. Les équations aux différences finies obtenues sont résolues par la méthode de différenciation quadratique pour stabiliser les termes de convection avec une précision suffisante. Les résultats numériques montrent que l'écoulement de la convection libre et forcée combinée dans l'anneau annulaire est étudié. Le vortex associé augmente sa force avec le nombre de Grashof, surtout plus rapidement dans le cas du chauffage de la paroi interne, agissant de manière à réduire la différence de température. Les conditions thermiques à la paroi entraînent une différence remarquable dans le comportement de l'écoulement. La condition de température de paroi constante qui limite le changement de la température de la paroi atténue la réduction de la différence de température et provoque de fortes circulations tourbillonnaires vortex, en particulier dans le cas d'un chauffage de la paroi extérieure.

Meriem Khemici et.al [12] élaborent une étude numérique sur le développement de la convection mixte dans un conduit annulaire chauffé avec des propriétés dépendantes de la température. Le modèle des équations sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis avec une précision de deuxième ordre dans l'espace et dans le temps. Les résultats obtenus montrent que le flux transversal est toujours à l'origine de la variation circumférentielle de la température et des propriétés physiques du fluide. Par contre, la variation azimutale de la température dans une section donnée est importante. Ce phénomène est démontré par la variation circumférentielle de la température de la paroi. Il y a une grande différence de température entre le haut et le bas du cylindre externe. Bien que les propriétés physiques dépendent de la température (la viscosité dynamique sans dimension (μ^*)), varie de (l'entrée 1,018 à la sortie 0,232) et enfin, le nombre de Nusselt obtenu augmente avec l'augmentation de la température. Et le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation du chauffage volumétrique.

H.K.Dawood et.al [13] font une recherche sur le transfert de chaleur et l'écoulement de fluide en convection forcée, naturelle et mixte dans l'espace annulaire. Cette revue présente l'amélioration de la performance thermique des équipements d'échanges de chaleur et de transport d'énergie à faible coût financier. Cet article présente un examen complet des études antérieures sur le transfert de chaleur et l'écoulement des fluides par convection forcée naturelle et mixte à travers des anneaux. Les effets de plusieurs paramètres, tels que le nombre Ra, le rapport d'aspect, les paramètres géométriques, le nombre Re et le flux de chaleur. Le transfert de chaleur et l'écoulement des fluides à travers des anneaux semblent être les seules solutions plausibles à l'ère de la nanotechnologie.

H.A.Mohammed et.al [14] ont étudié expérimentalement les transferts de chaleur par convection libre et forcée dans les régions d'entrée thermique d'anneaux concentriques horizontaux pour des flux d'air laminaires en développement thermique et en développement thermique complet. Le nombre Re est compris entre 200 et 1000 et le nombre Gr entre $6,2 \times 10^5$ et $1,2 \times 10^7$. Des tubes longs de 2520 mm de longueur ($L/D_h = 63$) et des tubes courts de 504 mm de longueur ($L/D_h = 12,6$) servent de sections d'entrée. La température de surface à un faible nombre Re est plus élevée que celle à un nombre Re élevé en raison de la domination de la convection libre dans le processus de transfert de chaleur combiné. Par conséquent, les valeurs Nu_x des nombres Re élevés étaient plus élevées que celles des nombres Re faibles en raison de la domination de la convection forcée dans le processus de transfert de chaleur.

Kailash C. Karki et Suhas V.Patankar [15] démontrent une étude numérique sur la convection mixte laminaire dans la région d'entrée d'un anneau horizontal. Cette analyse est basée sur la forme parabolique des équations de Navier-Stokes, qui sont résolues en utilisant une procédure de marche. Les résultats sont présentés pour le développement des profils de vitesse, le champ de température, le gradient de pression local, et le nombre de Nusselt moyennement circonférentielle. Ces résultats révèlent que l'écoulement secondaire induit par la flottabilité a une influence considérable sur l'écoulement du fluide et les caractéristiques de transfert de chaleur de l'écoulement en développement.

Nazrul Islam et.al [16] font une simulation numérique de transfert de chaleur par convection mixte dans la région d'entrée d'un anneau horizontal. La procédure numérique de base utilisée est l'algorithme SIMPLE qui utilise la méthode des différences finies pour résoudre les équations de quantité de mouvement et d'énergie. L'augmentation du nombre de

Rayleigh à pour effet d'accroître à la fois le transfert de chaleur et la chute de pression. Cependant, l'augmentation du transfert de chaleur est substantiellement plus importante que l'augmentation correspondante de la chute de pression. Pour $Ra=10^5$ et $Ra =10^7$, les nombres de Nusselt à $Z_t =0.1$ sont environ 30% et 110% plus élevés que les nombres de Nusselt correspondants en convection forcée pure, respectivement.

1.3. La convection forcée et mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindre excentrique :

Tanxiao Zhu et.al [17] font une étude expérimentale et simulation sur la convection forcée dans un espace annulaire excentrique vertical. La méthode utilisée c'est les éléments finis pour la solution numérique. L'étude montre que le nombre de Nusselt dans le canal annulaire augmente avec l'augmentation de nombre de Reynolds. Dans l'étude des effets du rayon, la taille peut grandement influencée sur Nu. La variation de Nu avec le rapport de rayon est non linéaire. Les résultats indiquent que lorsque le Nu diminue de 0.53 à 0.44, pour $Re > 4700$, le Nu augmente avec la diminution de l'aspect de rayon et pour $Re < 4700$, Nu augmente avec la diminution de l'aspect du rayon, et ce dernier diminue de 0,33 à 0,25, $Re > 4000$, Nu diminue avec la diminution de l'aspect de rayon et pour $Re < 4000$ Nu augmente avec la diminution de l'aspect du rayon.

E.Fattahi et.al [18] ont mis au point sur le transfert de chaleur par convection mixte dans un anneau excentrique en utilisant le modèle de Lattice Boltzmann (LBM). L'effet de l'excentricité sur le transfert de chaleur à différents endroits a été examiné à $Ra = 10^4$ et $\sigma = 2$. Le LBM à double population est une approche efficace pour simuler la convection naturelle dans une géométrie qui comprend des frontières courbes et mobiles. L'augmentation du transfert de chaleur est élevée pour une position radiale sans dimension de $r = 3/4$, ce qui était le cas lorsque le cylindre intérieur était placé loin du centre et plus près du cylindre extérieur. Le nombre moyen de Nu augmente lorsque le cylindre intérieur se déplace vers le bas quelle que soit la position radiale.

R.Husseini et.al [19] ont étudié expérimentalement la convection forcée dans un anneau excentrique vertical à extrémité ouverte sous différentes excentricités, flux de chaleur et vitesses d'entrée d'air. Un tube extérieur et un tube intérieur isolé sous des conditions limités du flux thermique constant ont été examinés. Les résultats montrent que le taux de transfert de chaleur dans un anneau excentrique était supérieur à celui de l'anneau concentrique et du tube simple. Le taux de transfert de chaleur dans un anneau excentrique

augmente avec l'augmentation du rapport d'excentricité lorsque la convection forcée turbulente est considérée. Un rapport d'excentricité optimal d'environ 0,5 est observé dans un écoulement laminaire. Le coefficient de transfert de chaleur par convection est à son maximum de cette excentricité.

M.A.I.El-Shaarawi et.al [20] font une étude numérique sur le développement de la convection forcée laminaire dans des anneaux excentriques. Un algorithme numérique à différences finies est développé pour résoudre ce modèle. Les résultats numériques sont présentés pour les profils de vitesse de développement et la chute de pression dans des anneaux de rayon 0.5 et 0.9 sur une excentricité sans dimension comprise entre 0.1 et 0.8. Les paramètres de transfert de chaleur sont présentés pour un fluide de $Pr = 0.7$ dans les conditions d'une paroi interne chauffée de manière isotherme tandis que la paroi externe est maintenue à la température d'entrée du fluide.

Chapitre II
Modèle Mathématique

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre on a présenté la modélisation mathématique du problème. Dans cette modélisation on a écrit les équations différentielles aux dérivées partielles de la conservation de masse, les trois équations de la quantité de mouvement et de l'énergie, avec les équations des conditions initiales et aux limites. Dans ce problème les équations sont écrites dans les coordonnées elliptiques.

La forme non dimensionnelle des équations modélisant est obtenue par la normalisation des variables dépendantes et indépendantes avec des échelles caractéristiques appropriées. Le transfert thermique est quantifié par des nombres de Nusselt locaux et moyens.

2.2. Description du problème:

On considère un écoulement de convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques. Le cylindre intérieur est statique et chauffé par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Les rayons elliptiques des cylindres intérieurs et extérieurs vont changer dans les trois cas : pour le premier cas ($\varepsilon_i=0.5, \varepsilon_o=1$) et le deuxième cas ($\varepsilon_i=0.75, \varepsilon_o=1$) et le dernier cas ($\varepsilon_i=0.5, \varepsilon_o=0.75$) respectivement. La demi-distance focale de l'ellipse de la section droite du conduit est égale à 0.0045 m. La longueur du conduit est 100 fois la demi-distance focale. A l'entrée du conduit, le fluide (eau) a une vitesse axiale constante égale à 2.231×10^{-2} (m/s) et une température uniforme égale à 20°C.

Le schéma, qui n'est pas à l'échelle, du problème est présenté dans la **Figure 2.1** :

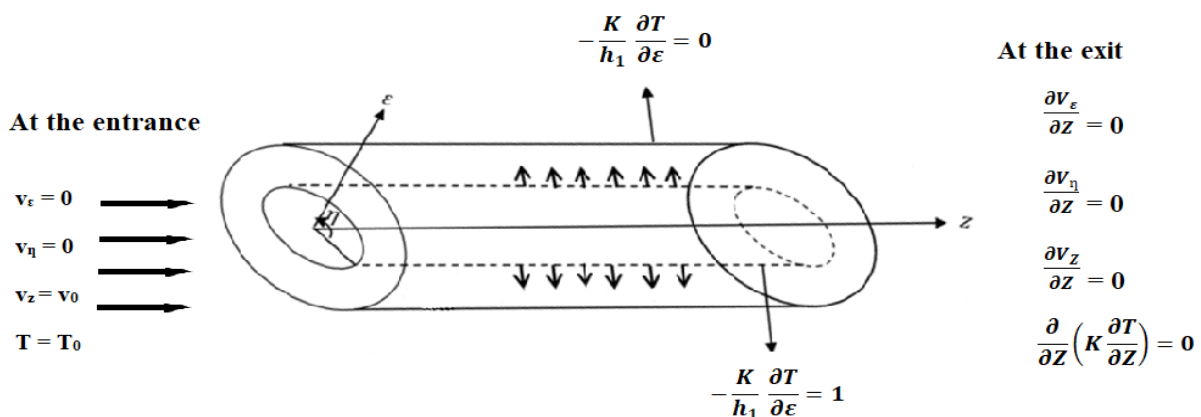


Figure 2.1 : Géométrie et condition aux limites du problème (n'est pas à l'échelle)

2.2.1. Rappel mathématique sur les coordonnées elliptiques

Les coordonnées elliptiques : sont les coordonnées curvilignes orthogonales à l'espace vectoriel tridimensionnel .ils sont définis par référence à deux points localises à l'aide de coordonnées cartésiennes.

La **Figure .2.2.** Représente les coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire. Suivant la direction normale à ce plan (la direction axiale), les coordonnées elliptique et cartésienne sont confondues. Les formules de transformation des coordonnées elliptiques aux coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} X &= a \cosh(\varepsilon) \cos(\eta) \\ Y &= a \sinh(\varepsilon) \sin(\eta) \\ Z &= z \end{aligned} \quad (2.1)$$

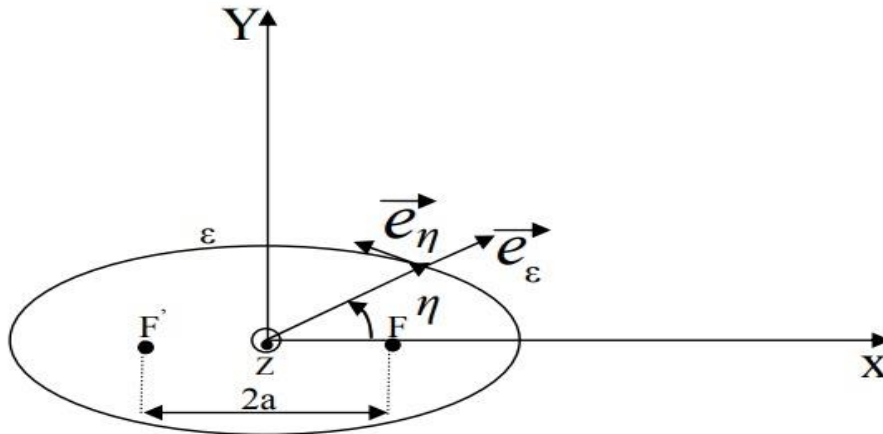


Figure 2.2 : Systèmes des coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire.

F et F' Sont les foyers de l'ellipse et a c'est la demi-distance focale. L'angle augmente suivant la direction antihoraire. On définit aussi le déterminant du Jacobien par :

$$|j| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) & a \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) & 0 \\ a \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) & a \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 (\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)) \quad (2.2)$$

Les coefficients métriques h_1, h_2, h_3 sont définis par :

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h_1 = a \sqrt{\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)} \quad (2.3)$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h_2 = a \sqrt{\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)} \quad (2.4)$$

$$h_3^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2 \quad \rightarrow \quad h_3 = 1 \quad (2.5)$$

Le déterminant de Jacobien s'écrit en fonction des coefficients métriques comme suit :

$$|j| = h_1 h_2 h_3 = a^2 \left(\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta) \right) \quad (2.6)$$

Le volume différentiel en coordonnées elliptiques est proportionnel au déterminant du Jacobien :

$$dV = |j| d\varepsilon d\eta dz = h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz = h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \quad (2.7)$$

La surface différentielle, sur le plan polaire, est :

$$dS = h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (2.8)$$

2.2.2. Le modèle mathématique :

Les équations dimensionnelles qui modélisent le problème sont écrites dans les coordonnées elliptiques qui sont naturellement adaptées à la géométrie du problème. L'écoulement est supposé visqueux, laminaire et quasi-incompressible, avec l'utilisation de l'approximation de **Boussinesq**

2.2.2.1. Formulation mathématique :

A $t=0$ on a: $V_\varepsilon = 0, V_\eta = 0, V_z = 0, T = T_0$

A $t > 0$ on a les équations de conservation :

a) L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.9)$$

b) L'équation de quantité du mouvement suivant ε :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho V_\varepsilon)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \rho V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] \\
= & -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P_h}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) \\
& \left. - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] + \rho \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) g
\end{aligned} \tag{2.10}$$

c) L'équation de quantité du mouvement suivant η :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho V_\eta)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{h_2}{\partial} - \rho V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\
= & -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P_h}{\partial \eta} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right. \\
& - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \\
& \left. + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] \\
& + \rho \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) g
\end{aligned} \tag{2.11}$$

d) L'équation de quantité du mouvement suivant z :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] \\
= & -\frac{\partial P_h}{\partial z} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

e) L'équation d'énergie :

$$\begin{aligned}
& C_p \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_p \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] \\
= & \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

f) Conditions initiales et aux limites :

Dans ce problème on a une variation de diamètre de cylindre intérieur et extérieur :

***Première cas ($\varepsilon_i=0.5, \varepsilon_o=1$) :**

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.5, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.14)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 1, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.15)$$

$$t > 0 \quad z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.16)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.17)$$

***Deuxième cas ($\varepsilon_i=0.75, \varepsilon_o=1$):**

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.75, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.18)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 1, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.19)$$

$$t > 0 \quad Z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.20)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.21)$$

***Dernier cas ($\varepsilon_i=0.5, \varepsilon_o=0.75$) :**

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.5, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.22)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.75, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.23)$$

$$t > 0 \quad z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.24)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.25)$$

2.2.2.2. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique

Les variables adimensionnelles et les propriétés thermophysiques sont normalisées par leurs échelles caractéristiques pour obtenir des quantités adimensionnelles qui sont présentées dans le **Tableau 2.1**.

$\mathbf{h}_1^* = \frac{h_1}{a}$	$\mathbf{h}_2^* = \frac{h_2}{a}$
$\mathbf{z}^* = \frac{z}{a}$	$\mathbf{t}^* = \frac{V_0 t}{a}$
$\mathbf{V}_\varepsilon^* = \frac{V_\varepsilon}{V_0}$	$\mathbf{V}_\eta^* = \frac{V_\eta}{V_0}$
$\mathbf{V}_z^* = \frac{V_z}{V_0}$	$\mathbf{T}^* = \frac{T - T_0}{\frac{q_w a}{K_0}}$
$\mathbf{P}^* = \frac{P - P_0}{\rho V_0^2}$	
$\mathbf{K}^* = \frac{K}{K_0}$	$\mathbf{L}^* = \frac{L}{a}$

Tableau 2.1 Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles

a) L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] = 0 \quad (2.26)$$

b) L'équation de quantité du mouvement suivant ε :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\varepsilon^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\varepsilon^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} - V_\eta^{*2} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right] \\ & = -\frac{1}{h_1^*} \frac{\partial P^*}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) - 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\varepsilon^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu^* \frac{V_\eta^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_2^* \frac{V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) \\ & \left. - 2\mu^* \frac{1}{h_2^*} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* h_1^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \end{aligned} \quad (2.27)$$

c) L'équation de quantité du mouvement suivant η :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\eta^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\eta^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^{*2} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right] \\
& = -\frac{1}{h_2^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re } h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
& \quad - 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\mu^* h_1^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* h_2^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right. \\
& \quad \left. + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{h_2^*}{\partial \varepsilon} - 2\mu^* \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

d) L'équation de quantité du mouvement suivant z :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_z^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_z^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] \\
& = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re } h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(2\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* h_1^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

e) L'équation d'énergie :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* T^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* T^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* T^*)}{\partial z^*} \right] \\
& = \frac{1}{\text{Re } Pr h_1^* h_2^*} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k^* h_1^* h_2^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

f) Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles:

$$t^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = T^* = 0 \quad (\text{condition initiale}) \tag{2.31}$$

$$t^* > 0, \varepsilon = 0.5, 0.75 \quad V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = 0, -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 1 \tag{2.32}$$

(sur la paroi de cylindre intérieur)

$$t^* > 0, \varepsilon = 0.75, 1 \quad V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 0 \tag{2.33}$$

(sur la paroi de cylindre extérieure)

$$t^* > 0, z^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = 0, V_z^* = 1, T^* = 0 \tag{2.34}$$

(à l'entrée de conduit)

$$t^* > 0, z^* = L^* = 100, \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \tag{2.35}$$

(à la sortie de conduit)

Certaines constantes, les valeurs de référence et les paramètres de contrôle (dynamiques et thermiques) sont précisées dans le **Tableau 2.2**. Notre choix des dimensions de la géométrie et des paramètres dynamiques et thermiques permet l'étude de l'influence de la flottabilité et la réduction progressive de la viscosité.

a	0.0045 m
g	9.81 m/s ²
β	1.8×10^{-4} /K
μ_0	1.006×10^{-3} kg/m*s
ν_0	1.006×10^{-6} m ² /s
k_0	0.597 W/m·K
V_0	2.231×10^{-2} m/s
T_0	293 K
ρ	1000.52 kg/m ³
C_p	4182 J/kg·K
$Re = \frac{\rho V_0 a}{\mu_0}$	100
$Pr = \frac{C_p \mu_0}{k_0}$	7

Tableau 2.2 : Les propriétés thermophysiques et paramètre de contrôle

2.3. Les Bilans :massique et thermique :

L'écoulement et le transfert thermique doivent satisfaire les bilans massique et thermique présentés ci-dessous.

2.3.1. Bilan thermique global:

Le bilan thermique global est obtenu en intégrant l'équation de l'énergie sur le domaine d'écoulement. En régime permanent obtenu dans tous les cas de cette étude, le bilan thermique global montre que la puissance calorifique fournie au fluide par la paroi intérieure chauffée du cylindre est égale à la puissance calorifique fournie par le fluide environnant en dehors de la limite. Bassin versant. Le bilan global peut être décrit par une équation :

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \quad (2.36)$$

On a une variation dans la valeur des rayons intérieur et extérieur d'une cylindres donc :

$$q_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_i} d\eta dz^* \quad \text{La puissance thermique donnée (par conduction) au}$$

fluide à travers la paroi du cylindre elliptique intérieur.

$$q_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_i} d\eta dz^* \quad \text{La puissance thermique échangée (par}$$

conduction) au niveau de la paroi du cylindre elliptique extérieur. Cette puissance est nulle sachant que le cylindre extérieur est adiabatique.

$$q_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad \text{La puissance thermique échangée par}$$

conduction à l'entrée du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considère.

$$q_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=100} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad \text{La puissance thermique échangée par}$$

conduction a la sortie du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considères.

$$q_5 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} V_{z\varepsilon}^* T_\varepsilon^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad \text{La puissance thermique échangée par}$$

convection a l'entrée du conduit. Cette puissance est nulle sachant que $T_e^* = 0$

$$q_6 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} V_{zS}^* T_S^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad \text{La puissance thermique échangée par}$$

convection à la sortie du conduit. Evidemment, cette puissance est très importante. A une section donnée du conduit (a un certain z^*) la température moyenne est définie comme suit :

$$T_m^*(Z^*) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=\varepsilon_i}^{\varepsilon=\varepsilon_0} V_Z^*(\varepsilon, \eta, Z^*) T^*(\varepsilon, \eta, Z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=\varepsilon_i}^{\varepsilon=\varepsilon_0} V_Z^*(\varepsilon, \eta, Z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta} \quad (2.37)$$

2.3.2. Bilan massique global:

L'intégration de l'équation de continuité sur le domaine d'écoulement montre l'égalité des débits massiques (et volumiques) de l'entrée et la sortie du conduit :

$$\int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} V_{z\varepsilon}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} V_{zS}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad (2.40)$$

2.4. Le nombre de Nusselt:

Le transfert thermique peut être quantifié par un nombre de Nusselt.

2.4.1. Le nombre de Nusselt local :

$$Nu(\eta, z^*) = - \frac{1}{h_1^* (T_w^*(\eta, z^*) - T_m^*(z^*))} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_i} \quad (2.41)$$

2.4.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne :

Si on intègre le nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre intérieur et on divise le Résultat par ce périmètre, on obtient le nombre de Nusselt axial:

$$Nu(z^*) = \frac{1}{P_1^*} \int_0^{2\pi} Nu(\eta, z^*) \sqrt{\sinh^2(\varepsilon_i) + \sin^2(\eta)} d\eta \quad (2.42)$$

Si on intègre le nombre de Nusselt axial sur la longueur du cylindre intérieur et on divise le résultat par cette longueur, on obtient le nombre de Nusselt moyen du conduit (un nombre réel positif):

$$\overline{Nu} = \frac{1}{100} \int_0^{100} Nu(z^*) dz^* \quad (2.43)$$

Chapitre III
Etude Numérique

3.1. Introduction :

La méthode numérique utilisée dans ce travail a été présentée dans ce chapitre. Le maillage et la discussion en détail de la discrétisation de toutes les équations qui régissent ce problème avec les conditions initiales et aux limites ont été démontrés. Et on terminera ce chapitre avec les critères de convergence.

3.2. La méthode de résolution :

On a un écoulement tridimensionnel entre deux cylindres elliptiques les équations modelisantes sont écrites dans les coordonnées elliptiques. Ces équations sont non linéaires et ne peuvent pas se résoudre analytiquement. On a fait une résolution numérique de ce problème. On a utilisé la méthode des volumes finis parmi plusieurs méthodes pour résoudre ses équations. Les équations aux différences ont une propriété conservatrice, cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume fini typique et vérifié de l'ensemble du domaine numérique. Dans cette méthode toutes les variables scalaires telles la température, la pression sont stockées dans les centres des volumes tandis que les vecteurs telles les composantes des vitesses sont stockés sur les faces des volumes du contrôle.

3.3. Le maillage :

La création d'un maillage est une étape extrêmement importante qui consiste à diviser le domaine géométrie du problème en un nombre précis de ce domaine. L'ensemble de ces derniers forme le maillage en 2D ou en 3D. La **Figure.3.1.** illustre un volume de contrôle typique de notre problème physique. Le point P situé au centre du volume de contrôle typique est entouré dans chaque direction par deux faces et deux nœuds dans chaque direction et les points NS, EW, FB représente la direction radiale, la direction azimutale et finalement suivant la direction axiale.

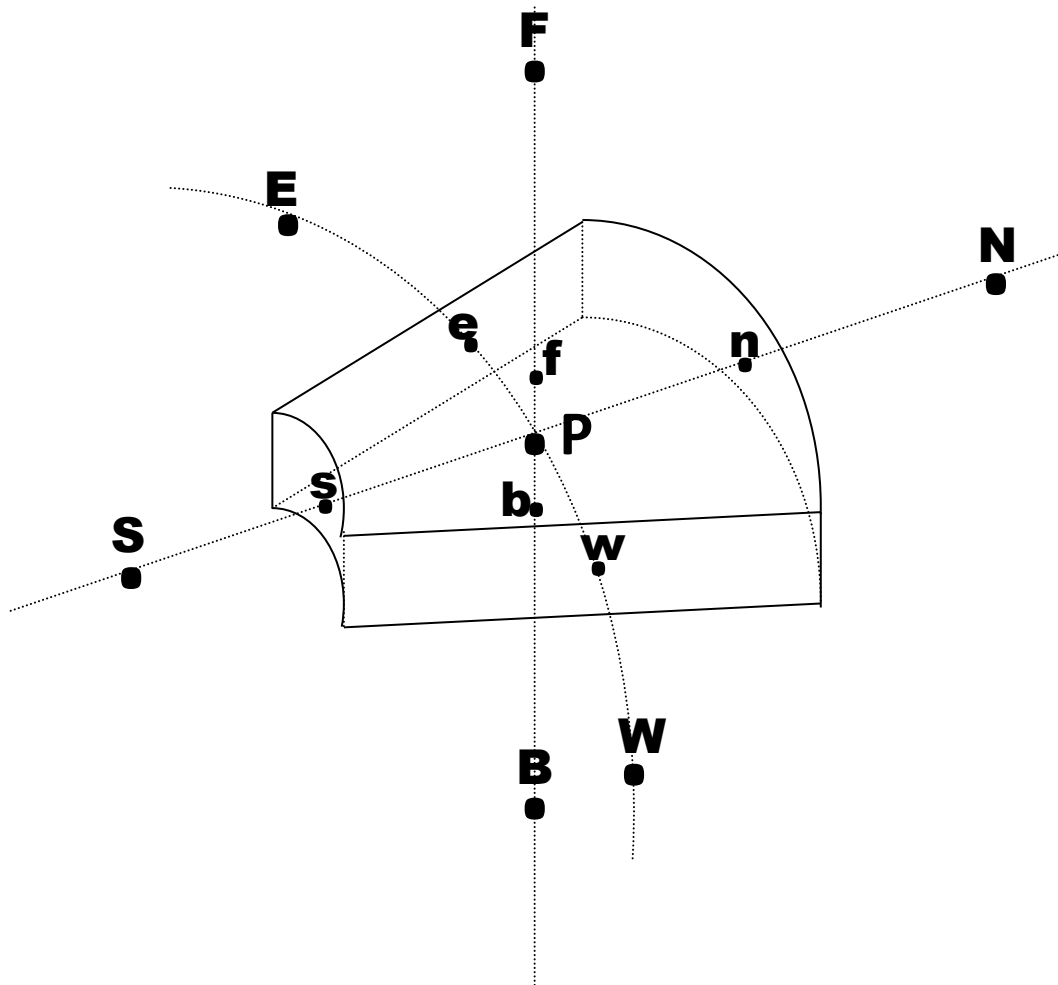
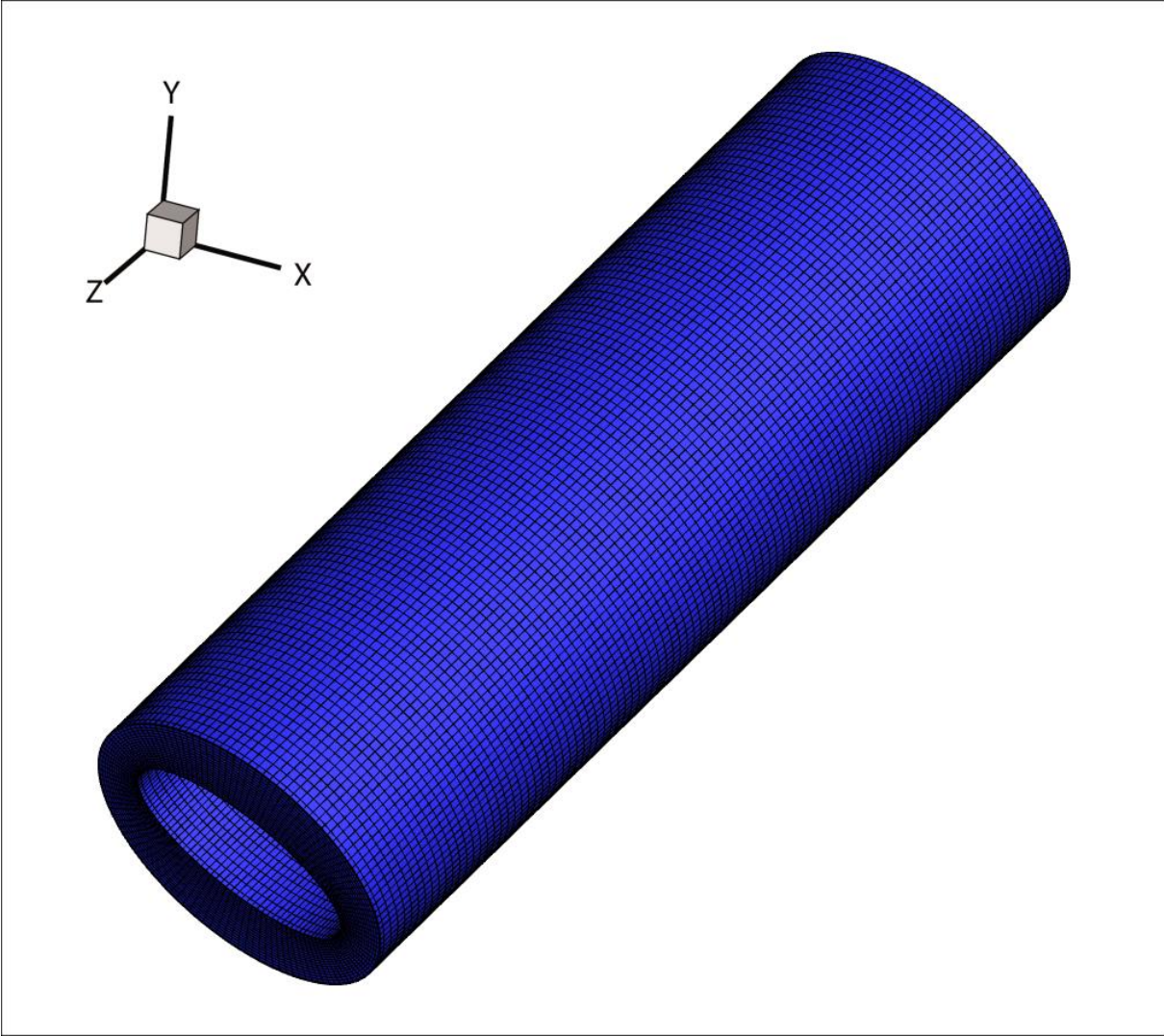


Figure.3.1 : Le volume fini typique

Le maillage que nous avons choisi pour faire notre étude est schématiquement représentée sur la **Figure. 3.2**. Il est composé de **22** points suivant la direction radiale, **102** points suivant la direction axiale et **125** points suivant la direction azimutale. Tout maillage plus dense que celui qu'on a utilisé (**22*102*125**) et le temps de calcul qui dépassent les durées pratiques. Toutefois, nous pensons que notre maillage peut être amélioré par un raffinement, surtout suivant les directions azimutales et axiales, pour mieux discerner des variations qualitatives et quantitatives importantes de certains phénomènes complexes.

a)



b)

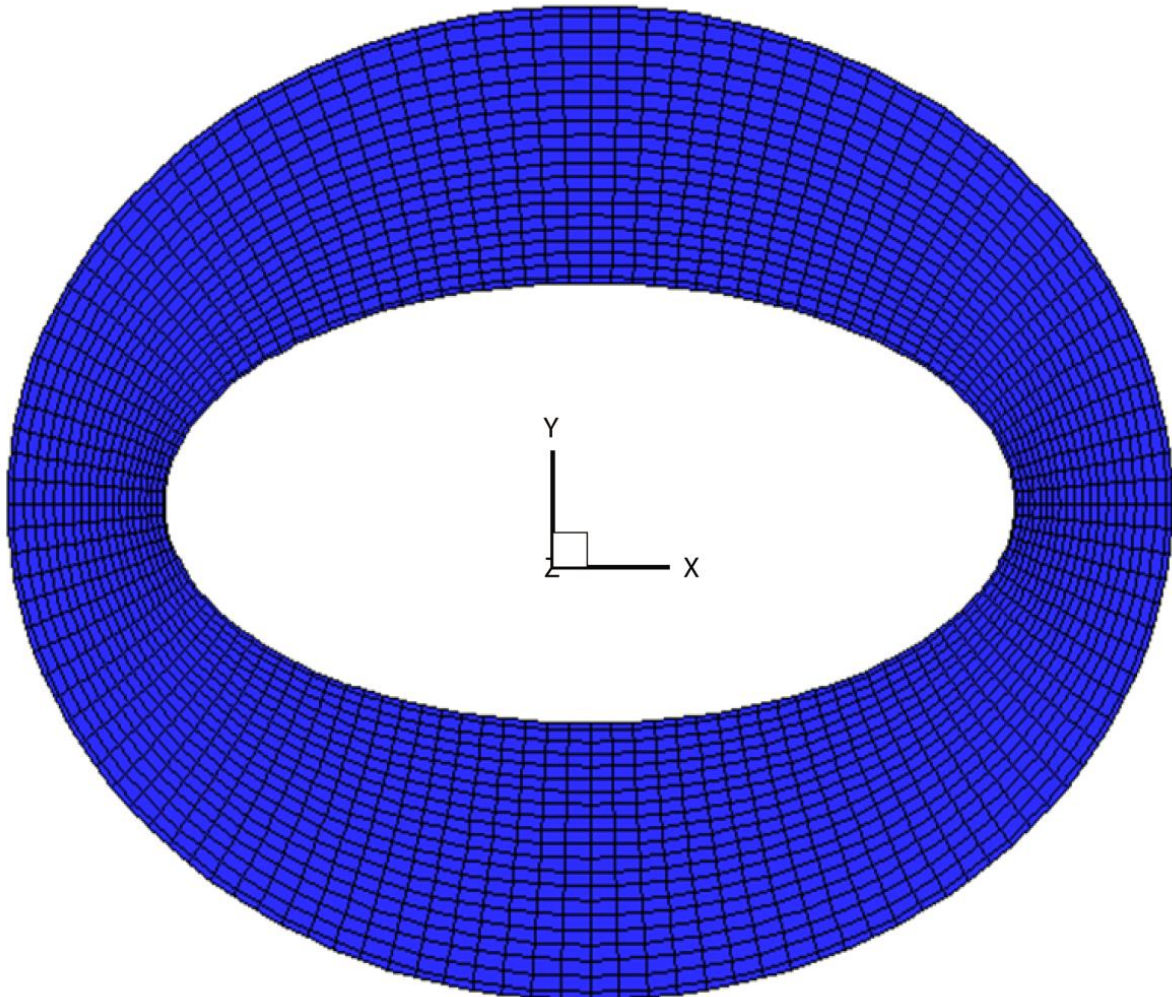


Figure. 3.2. Le maillage numérique utilisé (a) et sa projection en coupe (b). La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.

3.4. Détails de discrétisation :

Les discrétisations de l'équation de continuité et de l'équation de l'énergie sont faites dans un maillage non décalé dont les représentations surfaciques sont illustrées dans les **Figures 3.3 - 3.5**. Pour la clarté de la présentation, les étoiles des variables non dimensionnelles sont réduites.

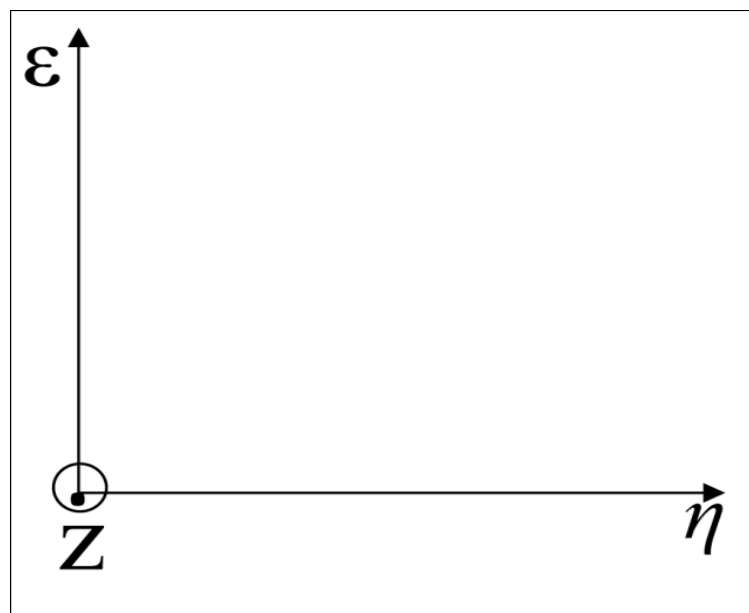
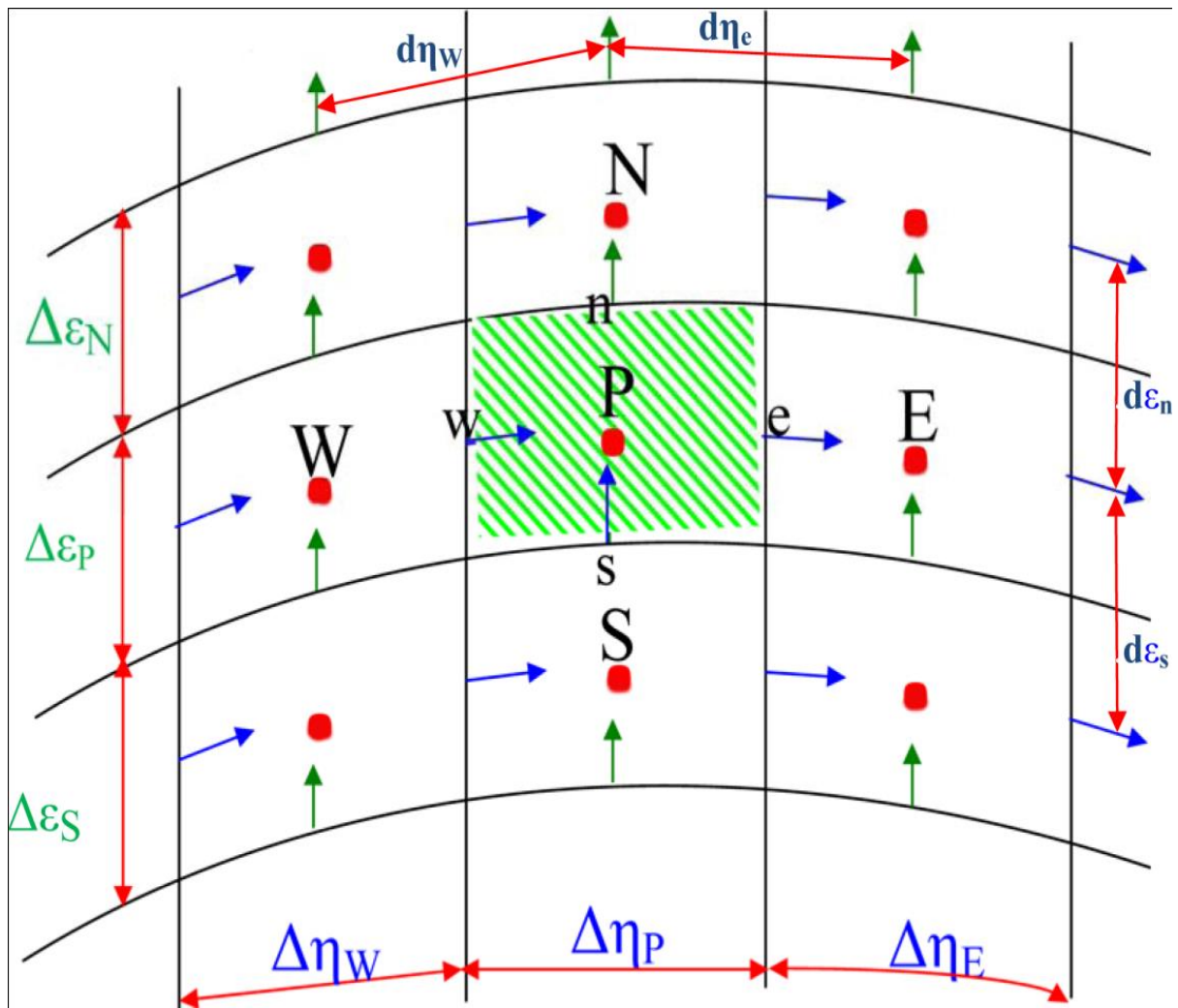


Figure .3.4. Maillage suivant les coordonnées (η, ϵ)

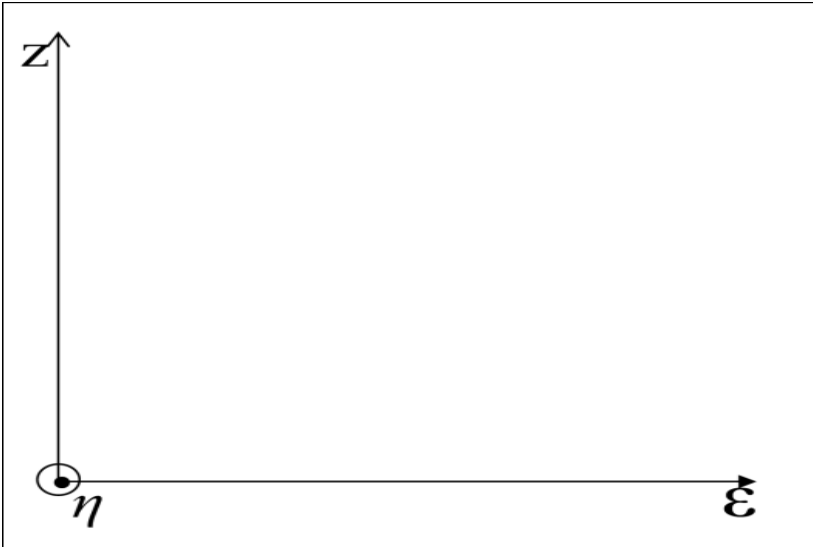
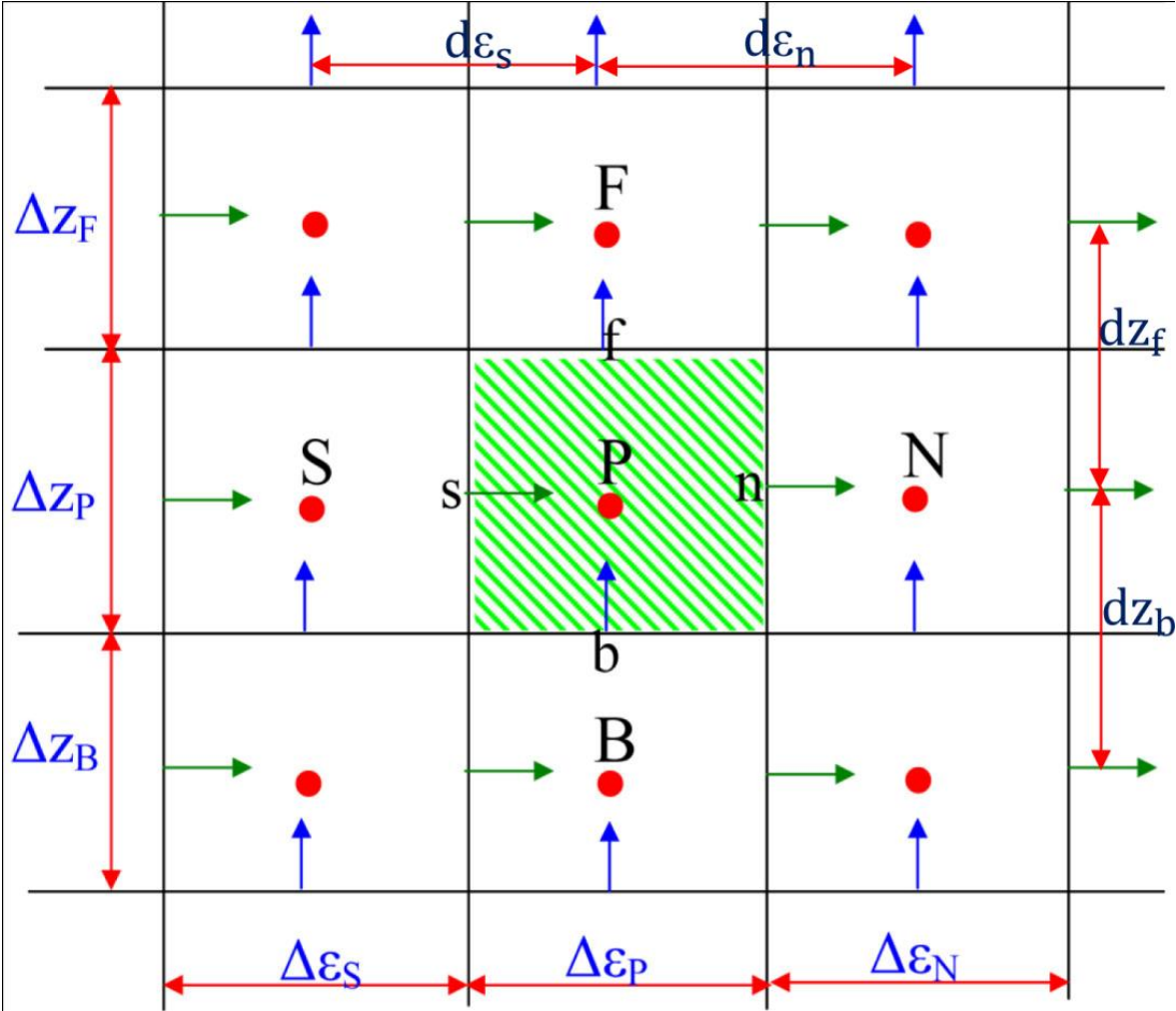


Figure .3.5. Maillage suivant les coordonnées (ϵ, z)

3.4.1. Discrétisation de l'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.1)$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de continuité par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini. Tous les termes dépendants du temps sont évalués au temps $(t+\Delta t)$.

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_2 V_\varepsilon]_S^n \Delta \eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_S^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p$$

$$\int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 V_\eta]_w^e \Delta \varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 h_2 V_z]_b^f \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\ = [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p$$

Le résultat de la discrétisation est:

$$[h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_S^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p + [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p + \\ [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p = 0 \quad (3.3)$$

3.4.2. Discrétisation de l'équation de l'énergie :

Soit l'équation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] = \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (3.4)$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de l'énergie par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini.

La discrétisation temporelle du terme transitoire est faite par le schéma **d'Euler-Backward** ayant une précision du second ordre :

$$\int_S^n \int_w^e \int_b^f \frac{\partial T}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3T_p^{t+\Delta t} - 4T_p^t + T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** (ayant une précision du second ordre) et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées (ayant une précision du second ordre) :

$$\begin{aligned}
& \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_2 V_\varepsilon T]_s^n \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon T|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon T|_s^{t+\Delta t}] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& = 2 \left[h_{2n} V_\varepsilon|_n^t \left(\frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon|_s^t \left(\frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& - \left[h_{2n} V_\varepsilon|_n^{t-\Delta t} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon|_s^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 V_\eta T]_w^e \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta T|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta T|_w^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& = 2 \left[h_{1e} V_\eta|_e^t \left(\frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta|_w^t \left(\frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& - \left[h_{1e} V_\eta|_e^{t-\Delta t} \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta|_w^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 h_2 V_z T]_b^f \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& = [h_1 h_2 V_z T|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z T|_b^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& = 2 \left[h_{1f} h_{2f} V_z|_f^t \left(\frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z|_b^t \left(\frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& - \left[h_{1f} h_{2f} V_z|_f^{t-\Delta t} \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z|_b^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

La discrétisation spatiale du terme diffusif suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
& \int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{K}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_s^n \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& = \frac{K}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_n^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_s^{t+\Delta t} \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& = \frac{K}{\text{RePr}} \left[\frac{\left(\frac{T_N^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right)}{-\left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right)} \right] \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{K}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^e \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{K}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e^{t+\Delta t} - \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_w^{t+\Delta t} \Big] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{K}{\text{RePr}} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{T_E^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \\ - \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{K}{\text{RePr}} \left[h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^f \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{K}{\text{RePr}} \left[\begin{array}{c} h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_f^{t+\Delta t} \\ - h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b^{t+\Delta t} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{K}{\text{RePr}} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{T_F^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{dz_f} \right) \\ - \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

On réarrange l'équation de l'énergie sous la forme standard suivante :

$$A_p T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + S \quad (3.5)$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont :

$$\begin{aligned}
A_N &= \frac{K}{\text{RePr}} & , A_S &= \frac{K}{\text{RePr}} \\
A_E &= \frac{K}{\text{RePr}} & , A_W &= \frac{K}{\text{RePr}} \\
A_F &= \frac{K}{\text{RePr}} h_{1f} h_{2f} & , A_B &= \frac{K}{\text{RePr}} h_{1b} h_{2b} \\
A_p &= \frac{3}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} + A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{4T_p^t - T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \Delta z_p - 2 \left[h_{2n} V_\varepsilon |_n^t \left(\frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^t \left(\frac{T_p^t + T_s^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& + \left[h_{2n} V_\varepsilon |_n^{t-\Delta t} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[h_{1e} V_\eta |_e^t \left(\frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^t \left(\frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + \left[h_{1e} V_\eta |_e^{t-\Delta t} \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[h_{1f} h_{2f} V_z |_f^t \left(\frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^t \left(\frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& + \left[h_{1f} h_{2f} V_z |_f^{t-\Delta t} \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

3.4.3. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant ε :

Concernant la discrétisation des équations de quantité de mouvement et pour ne pas alourdir ce mémoire on présente seulement la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction radiale.

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant la direction radiale. Les figures **.3.6-3.7** représentent les projections du maillage sur les surfaces (ε, η) et (ε, z) . La projection sur la surface (η, z) est similaire à celle du maillage non décalé. Soit l'équation de la quantité du mouvement suivant ε :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] \quad (3.6) \\
& = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\text{Re} h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) \\
& \left. - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta)
\end{aligned}$$

On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume de contrôle décalé.

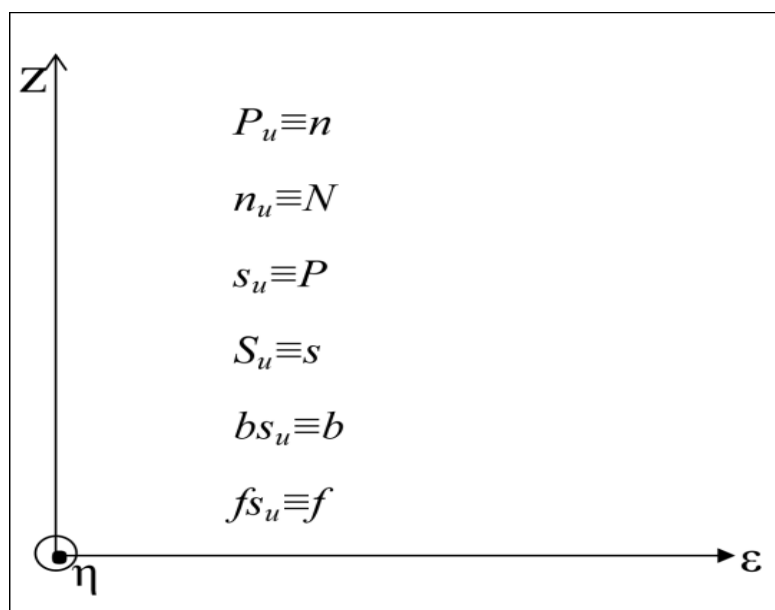
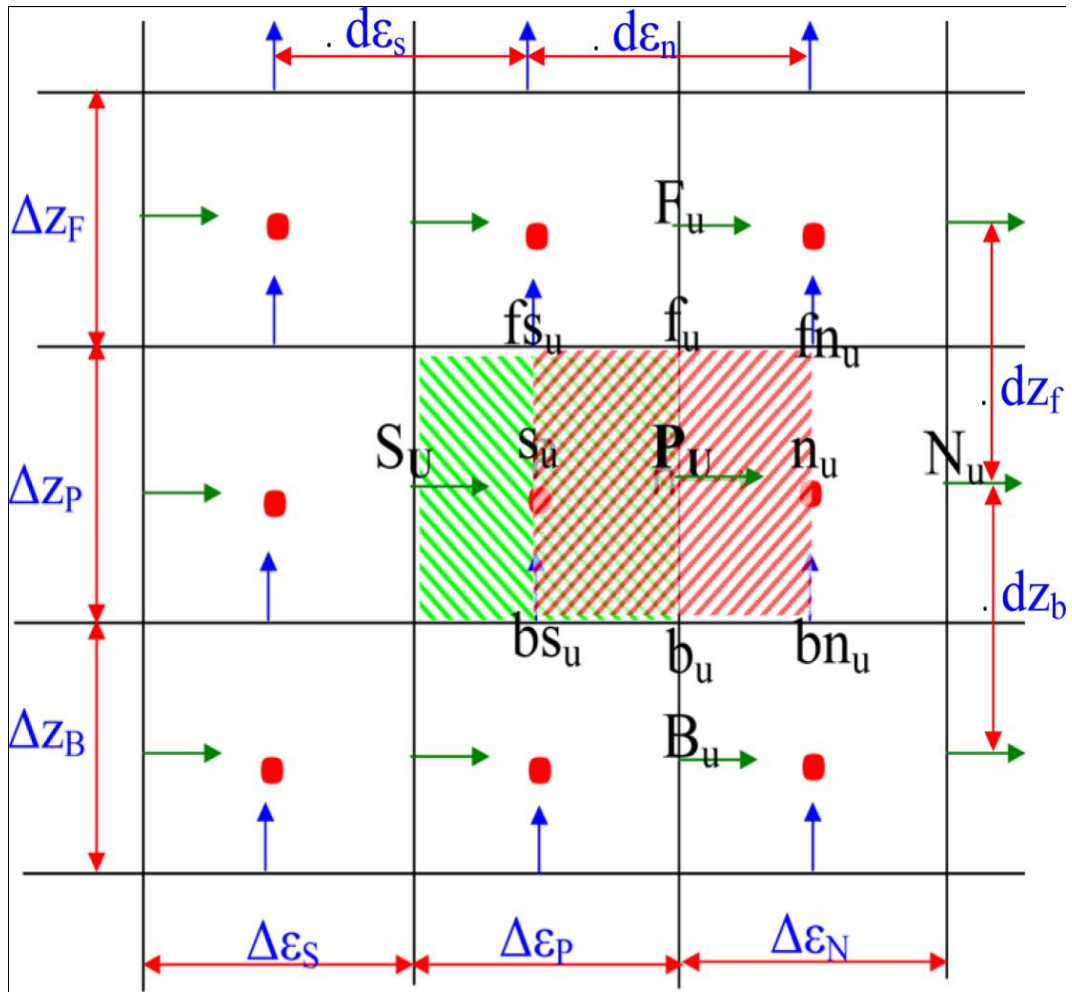


Figure .3.6. La projection de maillage décalé suivant ϵ sur la surface (ϵ, z)

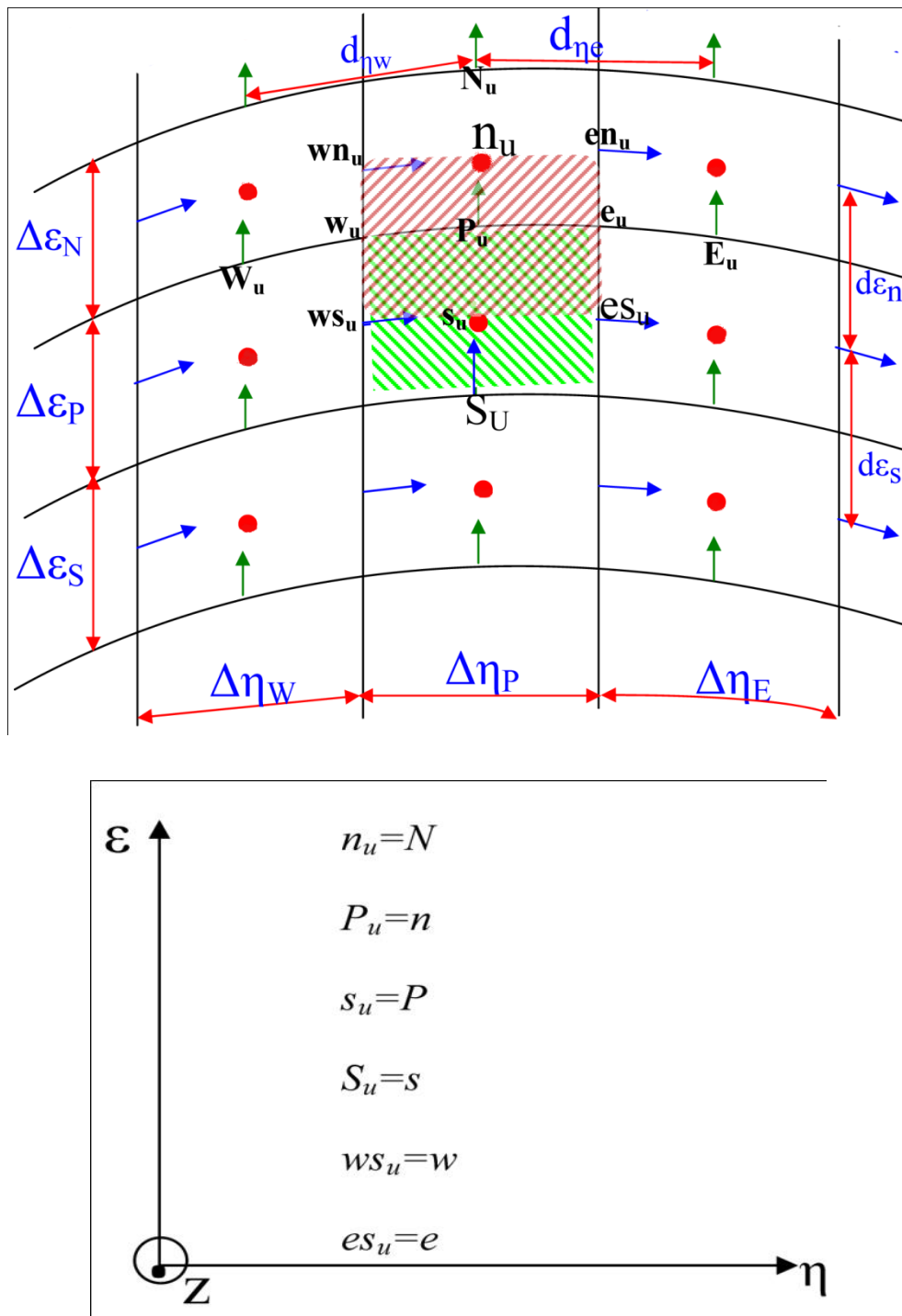


Figure.3.7 .La projection de maillage décalé suivant ϵ sur la surface (ϵ, η)

La discrétisation temporelle du terme transitoire suit le schéma **d'Euler-Backward**.
La vitesse est localisée au centre du volume fini décalé.

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_{\varepsilon p_u}^{t+\Delta t} - 4V_{\varepsilon p_u}^t + V_{\varepsilon p_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p_u} h_{2p_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume fini.

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{s_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{n_u}^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{s_u}^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[\begin{array}{l} h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \\ - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[\begin{array}{l} h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &= [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{e_u}^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{w_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &= 2 \left[\begin{array}{l} h_{1e_u} \left(\frac{V_\eta^{t} e n_u + V_\eta^{t} e s_u}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \\ - h_{1w_u} \left(\frac{V_\eta^{t} w n_u + V_\eta^{t} w s_u}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &\quad - \left[\begin{array}{l} h_{1e_u} \left(\frac{V_\eta^{t-\Delta t} e n_u + V_\eta^{t-\Delta t} e s_u}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - h_{1w_u} \left(\frac{V_\eta^{t-\Delta t} w n_u + V_\eta^{t-\Delta t} w s_u}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&= [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{w_u}^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{w_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&= 2 \left[\begin{aligned} &h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf n_u}^t + V_{zf s_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon F_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \\ &- h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_{zb n_u}^t + V_{zb s_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon B_u}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&\quad - \left[\begin{aligned} &h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf u}^{t-\Delta t} + V_{zf s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_{zb u}^{t-\Delta t} + V_{zb s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= 2V_{\varepsilon P_u}^t \left[\frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta e s_u}^t + V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&\quad - V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} \left[\frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\eta V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -V_\eta V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= -2 \left[\frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta e s_u}^t + V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&\quad + \left[\frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de pression est implicite. La position de la pression est exacte (sans approximation).

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [-P]_{S_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} h_{2P_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= [P_{S_u}^{t+\Delta t} - P_{n_u}^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des quatre premiers termes diffusifs est semi-implicite parce que la discrétisation temporelle des vitesses est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation temporelle des autres termes diffusifs est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation spatiale des termes diffusifs est faite avec le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume.

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{2}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\varepsilon dz &= \frac{2}{Re} \left[\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right]_{s_u}^{n_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= \frac{2\mu}{Re} \left[\frac{\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta \varepsilon_N}}{\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta \varepsilon_P}} \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[\mu h_1 h_2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]_{b_u}^{f_u} \Delta \varepsilon_n \Delta \eta_p \\ &= \frac{\mu}{Re} \left[\frac{h_{1f_u} h_{2f_u} \frac{V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{dz_f}}{-h_{1b_u} h_{2b_u} \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t}}{dz_b}} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{-2\mu}{V_\varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} \left[V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= \frac{-2\mu}{Re} \frac{1}{h_{1P_u} h_{2P_u}} \left[V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{P_u} \left[\frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{v_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[2\mu \frac{v_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{s_u}^{n_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[\frac{2\mu}{Re} \left[\frac{1}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta n_u}^t + V_{\eta w n_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{n_u} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta s_u}^t + V_{\eta w s_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{s_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= \left[\frac{2\mu}{Re} \left[\frac{1}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{n_u} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{s_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{-1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{V_z}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-1}{Re} \left[\mu \frac{V_z}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{w_u}^{e_u} \Big|_{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
&= 2 \left[\frac{-1\mu}{Re} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{e_u} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{w_u} \Big|_{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
&\quad - \left[\frac{-1\mu}{Re} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{e_u} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{w_u} \Big|_{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta Z_p
\end{aligned}$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{V_\eta}{h_2} \right]_{s_u}^{n_u} \Big|_{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$= \frac{2\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{2n_u}} \left(\frac{V_\eta^{t e n_u} + V_\eta^{t w n_u}}{2} \right) \right. \\
\left. - \frac{1}{h_{2s_u}} \left(\frac{V_\eta^{t e s_u} + V_\eta^{t w s_u}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$- \frac{\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{2n_u}} \left(\frac{V_\eta^{t-\Delta t e n_u} + V_\eta^{t-\Delta t w n_u}}{2} \right) \right. \\
\left. - \frac{1}{h_{2s_u}} \left(\frac{V_\eta^{t-\Delta t e s_u} + V_\eta^{t-\Delta t w s_u}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right]_{w_u}^{e_u} \Big|_{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$= \frac{2\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - \right. \\
\left. \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$- \frac{\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
\left. - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[\mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&= \frac{2\mu}{Re} \left[\begin{array}{c} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf n_u}^t - V_{zf s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \\ -h_{2b_u} \left(\frac{V_{zb n_u}^t - V_{zb s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&\quad - \frac{1\mu}{Re} \left[\begin{array}{c} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf n_u}^{t-\Delta t} - V_{zf s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \\ -h_{2b_u} \left(\frac{V_{zb n_u}^{t-\Delta t} - V_{zb s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{-2\mu}{Re h_1 h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-2\mu}{Re} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} [V_\eta]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= 2 \left[\begin{array}{c} \frac{-2}{Re} \mu \frac{1}{h_{22P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta e s_u}^t}{2} \right) \\ - \left(\frac{V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{2} \right) \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} \frac{-2}{Re} \mu \frac{1}{h_{22P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \left(\frac{V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[\mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\mu}{Re} \left[\begin{array}{c} h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta en_u}^t - V_{\eta es_u}^t}{h_{2en_u} - h_{2es_u}} \right) \\ \\ -h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta wn_u}^t - V_{\eta ws_u}^t}{h_{2wn_u} - h_{2ws_u}} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&- \frac{\mu}{Re} \left[\begin{array}{c} h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} - V_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{h_{2en_u} - h_{2es_u}} \right) \\ \\ -h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} - V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{h_{2wn_u} - h_{2ws_u}} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de la poussée thermique est explicite et sa discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
&\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{GrT \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz}{Re^2 \sqrt{h_1 h_2}} \\
&= \frac{Gr}{Re^2} T_{P_u}^{t+\Delta t} \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= 2 \frac{Gr}{Re^2} \left(\frac{T_N^t + T_P^t}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&- \frac{Gr}{Re^2} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

Le résultat de la discrétisation spatiotemporelle est mis sous la forme standard:

$$\begin{aligned}
A_{P_u} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} &= A_{N_u} V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t} + A_{E_u} V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} + S_u + \\
&[P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Ou

$$A_{P_u} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = A_{N_u} V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t} + A_{E_u} V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} + S$$

(3.8)

$$A_{N_u} = \frac{2\mu}{Re} \frac{1}{\Delta \varepsilon_N} \Delta \eta_p \Delta Z_p, \quad A_{S_u} = \frac{2\mu}{Re} \frac{1}{\Delta \varepsilon_P} \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$A_{E_u} = \frac{\mu}{Re} \frac{1}{d \eta_e} d \varepsilon_n \Delta Z_p, \quad A_{W_u} = \frac{\mu}{Re} \frac{1}{d \eta_w} d \varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$A_{F_u} = \frac{\mu}{Re} \frac{1}{d z_f} d \varepsilon_n \Delta \eta_p, \quad A_{B_u} = \frac{\mu}{Re} \frac{1}{d z_b} d \varepsilon_n \Delta \eta_p$$

$$A_{P_u} = \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_u} h_{2P_u} d \varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p + \frac{\mu}{Re} \frac{1}{h_{1P_u} h_{2P_u}} \left. \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right|_{P_u} \left. \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right|_{P_u} d \varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$+ A_{N_u} + A_{S_u} + A_{E_u} + A_{W_u} + A_{F_u} + A_{B_u}$$

$$S = S_u + [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$S_u = \frac{4V_{\varepsilon P_u}^t - V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{2P_u} d \varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$-2 \left[h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$+ \left[h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right.$$

$$\left. - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p$$

$$-2 \left[h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta e s_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d \varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$+ \left[h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right.$$

$$\left. - h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d \varepsilon_n \Delta Z_p$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zfn_u}^t + V_{zfs_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon F_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_{zbn_u}^t + V_{zbs_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon B_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
& + \left[\begin{aligned} & h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zfn_u}^{t-\Delta t} + V_{zfs_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ & - h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_{zbn_u}^{t-\Delta t} + V_{zbs_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
& - 2V_{\varepsilon P_u}^t \left[\frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t + V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
& + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} \left[\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
& + 2 \left[\frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t + V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
& - \left[\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
& + 2 \left[\frac{2\mu}{Re} \left[\frac{1}{h_{1n_u}} \left(\frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta wn_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{1}{h_{1s_u}} \left(\frac{V_{\eta es_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
& - \left[\frac{2\mu}{Re} \left[\frac{1}{h_{1n_u}} \left(\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{1}{h_{1s_u}} \left(\frac{V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
& + 2 \left[\frac{-1}{Re} \left[\frac{\mu_{e_u}^t}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{\mu_{w_u}^t}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& - \left[\frac{-1\mu}{Re} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& + \frac{2\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{2n_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon en_u}^t + V_{\varepsilon wn_u}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon es_u}^t + V_{\varepsilon ws_u}^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
& - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{2n_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon en_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon wn_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon es_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& - \frac{\mu}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& + \frac{2\mu}{Re} \left[h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf n_u}^t - V_{zf s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) - h_{2b_u} \left(\frac{V_{zb n_u}^t - V_{zb s_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
& - \frac{1\mu}{Re} \left[h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf n_u}^{t-\Delta t} - V_{zf s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) - h_{2b_u} \left(\frac{V_{zb n_u}^{t-\Delta t} - V_{zb s_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
& + 2\mu \left[\frac{-2}{Re} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\left(\frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta s u}^t}{2} \right) - \left(\frac{V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s u}^t}{2} \right) \right] \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& - \mu \left[\frac{-2}{Re} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\left(\frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta s u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& + \frac{2\mu}{Re} \left[h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta e n_u}^t - V_{\eta s u}^t}{h_{2e n_u} - h_{2e s u}} \right) - \mu_{w_u}^t h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta w n_u}^t - V_{\eta w s u}^t}{h_{2w n_u} - h_{2w s u}} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& - \frac{1\mu}{Re} \left[h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} - V_{\eta s u}^{t-\Delta t}}{h_{2e n_u} - h_{2e s u}} \right) - h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} - V_{\eta w s u}^{t-\Delta t}}{h_{2w n_u} - h_{2w s u}} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
& + 2 \frac{Gr}{Re^2} \left(\frac{T_N^t + T_P^t}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& - \frac{Gr}{Re^2} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} \cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

3.5. La discrétisation des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont discrétisées et les équations de discrétisation sont écrites sous la forme standard.

3.5.1. Les conditions aux limites thermiques :

Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :

La condition thermique à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_i, \varepsilon = \varepsilon_o$) est :

$$-\frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1 \quad (3.9)$$

Elle discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_{1\varepsilon=\varepsilon_i}} \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_1} = 1 \quad (3.10)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_N^{t+\Delta t} + h_{1\varepsilon=0.5} d\varepsilon_1 \quad (3.11)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 1, A_S = 0, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = h_{1\varepsilon=0.5} d\varepsilon_1$$

Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :

La condition thermique à cette limite ((à $\varepsilon = \varepsilon_i, \varepsilon = \varepsilon_o$)) est :

$$-\frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (3.12)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_{1\varepsilon=\varepsilon_o}} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_{IL-1}} = 0$$

(3.13)

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_S^{t+\Delta t} \quad (3.14)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 1, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = 0$$

A l'entrée du conduit:

La condition thermique à cette limite (à $z = 0$) est :

$$T = 0 \quad (3.15)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$T_P^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.16)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W, A_F, A_B = 0, S = 0$$

A la sortie du conduit :

La condition thermique à cette limite (à $z = 100$) est :

$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0$, cette condition impose un flux diffusif constant à la sortie du conduit.

Pour illustrer la discrétisation, un schéma du maillage axial, à la sortie du conduit, est représenté sur la **Figure 3.8**. Le point P est à la limite axiale, le point B est l'avant dernier point qui est précédé du point B'.

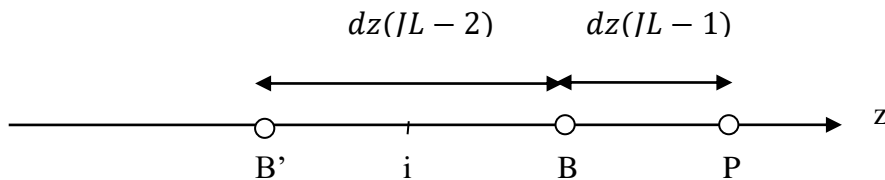


Figure.3.8. Maillage axial à la sortie du conduit

La constance du flux diffusif est approchée par la discrétisation :

$$\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = \frac{T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-2}} \quad (3.17)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + (T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}) \quad (3.18)$$

Avec la forme explicite du dernier terme à droite :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}]) \quad (3.19)$$

La dernière équation est mise sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1, A_N = 0, A_S = 0, A_E = 0, A_W = 0, A_F = 0, A_B = 1$$

$$S = \frac{dz(JL-1)}{dz(JL-2)} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}])$$

3.5.2. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant ε :

Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $(\varepsilon = \varepsilon_i)$) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.20)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.21)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite $((\varepsilon = \varepsilon_o))$ est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.22)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.23)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

A l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (3.24)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.25)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = A_{B_u} = S = 0$$

A la sortie du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 100$) est :

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = 0 \quad (3.27)$$

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.28)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1, A_{N_u} = A_{S_u} = A_{E_u} = A_{W_u} = A_{F_u} = S = 0, A_{B_u} = 1$$

3.5.3. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant η : Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite ((à $\varepsilon = \varepsilon_i$)) est :

$$V_\eta = 0 \quad (3.29)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.30)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_0$) est :

$$V_\eta = 0 \quad (3.31)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.32)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

A l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_\eta = 0 \quad (3.33)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.34)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = A_{B_v} = S = 0$$

A la sortie du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 100$) est :

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial z} = 0 \quad (3.35)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t}}{dz_{JL-1}} = 0 \quad (3.36)$$

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.37)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1, A_{N_v} = A_{S_v} = A_{E_v} = A_{W_v} = A_{F_v} = S = 0, A_{B_v} = 1$$

3.5.4. Les conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement suivant z :

Sur la paroi extérieure du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_i$) est :

$$V_z = 0 \quad (3.38)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.39)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = S = 0$$

Sur la paroi intérieure du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon = \varepsilon_o$) est :

$$V_z = 0 \quad (3.40)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.41)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = S = 0$$

A l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_z = 1 \quad (3.42)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 1 \quad (3.43)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = A_{B_w} = 0, S = 1$$

A la sortie du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 100$) est :

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (3.44)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_{JL-1}} = 0 \quad (3.45)$$

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (3.46)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1, A_{N_w} = A_{S_w} = A_{E_w} = A_{W_w} = A_{F_w} = S = 0, A_{B_w} = 1$$

3.6. L'équation de discrétisation de la pression :

Pour résoudre les équations de discrétisation des trois composantes de la vitesse il faut préciser la pression qui est présente dans les sources de ces équations. La détermination de la pression dans les points centrés des volumes finis nécessite une équation de discrétisation de la pression. Cette équation est obtenue par une manipulation combinant les équations de discrétisation de continuité et des quantités de mouvement. Utilisant les équations de discrétisation des vitesses, on définit les pseudos vitesses :

$$\hat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_u}} \left[A_{N_u} (2V_{\varepsilon N_u}^t - V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t}) + A_{S_u} (2V_{\varepsilon S_u}^t - V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}) + A_{E_u} (2V_{\varepsilon E_u}^t - V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_u} (2V_{\varepsilon W_u}^t - V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}) + A_{F_u} (2V_{\varepsilon F_u}^t - V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t}) + A_{B_u} (2V_{\varepsilon B_u}^t - V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}) + S_u \right]$$

$$\hat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_v}} \left[A_{N_v} (2V_{\eta N_v}^t - V_{\eta N_v}^{t-\Delta t}) + A_{S_v} (2V_{\eta S_v}^t - V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}) + A_{E_v} (2V_{\eta E_v}^t - V_{\eta E_v}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_v} (2V_{\eta W_v}^t - V_{\eta W_v}^{t-\Delta t}) + A_{F_v} (2V_{\eta F_v}^t - V_{\eta F_v}^{t-\Delta t}) + A_{B_v} (2V_{\eta B_v}^t - V_{\eta B_v}^{t-\Delta t}) + S_v \right]$$

$$\hat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_w}} \left[A_{NP_w} (2V_{zN_w}^t - V_{zN_w}^{t-\Delta t}) + A_{S_w} (2V_{zS_w}^t - V_{zS_w}^{t-\Delta t}) + A_{E_w} (2V_{zE_w}^t - V_{zE_w}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_w} (2V_{zW_w}^t - V_{zW_w}^{t-\Delta t}) + A_{F_w} (2V_{zF_w}^t - V_{zF_w}^{t-\Delta t}) + A_{B_w} (2V_{zB_w}^t - V_{zB_w}^{t-\Delta t}) + S_w \right]$$

On remarque que les pseudos vitesses sont des vitesses calculées sans les différences de pression dans les sources. Ces pseudos vitesses sont calculées, au temps $t + \Delta t$, dans les

volumes finis avec les vitesses à des temps précédents ($t, t - \Delta t$), avec le schéma d'Adam-Bashforth, parce que les vitesses au temps ($t + \Delta t$) sont inconnues. Les relations entre les vitesses et les pseudos vitesses sont :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t})h_{2P_u}\Delta\eta_P\Delta Z_P}{A_{P_u}} = \widehat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) d_{P_u}$$

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t})h_{1P_v}\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P}{A_{P_v}} = \widehat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) d_{P_v}$$

$$V_{z P_w}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t})h_{1P_w}h_{2P_w}\Delta\varepsilon_P\Delta\eta_P}{A_{P_w}} = \widehat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_{P_w}$$

Compte tenu de la correspondance des positions du maillage typique et des maillages décalés, ces équations sont réécrites :

$$V_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) d_n$$

$$V_{\eta e}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{\eta e}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) d_e$$

$$V_{z f}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{z f}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_f$$

Aussi, il est déduit que :

$$V_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} + (P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_s$$

$$V_{\eta w}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{\eta w}^{t+\Delta t} + (P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_w$$

$$V_{z b}^{t+\Delta t} = \widehat{V}_{z b}^{t+\Delta t} + (P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_b$$

L'utilisation des six équations précédentes dans l'équation de discrétisation de continuité (3.1) nous donne une équation de discrétisation de pression sous la forme standard:

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S \quad (3.47)$$

$$A_N = h_{2n}\Delta\eta_P\Delta Z_P d_n$$

$$A_S = h_{2s}\Delta\eta_P\Delta Z_P d_s$$

$$A_E = h_{1e}\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P d_e$$

$$A_W = h_{1w}\Delta\varepsilon_P\Delta Z_P d_w$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e$$

$$A_F = h_{1f} h_{2f} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_f$$

$$A_B = h_{1b} h_{2b} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_b$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B$$

$$S = (h_{2s} \hat{V}_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} - h_{2n} \hat{V}_{\varepsilon n}^{t+\Delta t}) \Delta \eta_P \Delta Z_P + (h_{1w} \hat{V}_{\eta w}^{t+\Delta t} - h_{1e} \hat{V}_{\eta e}^{t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ + (h_{1b} h_{2b} \hat{V}_{zb}^{t+\Delta t} - h_{1f} h_{2f} \hat{V}_{zf}^{t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P$$

Donc si on a les pseudos vitesses, on peut calculer la source S et donc la pression. Sachant que les pseudos vitesses sont calculées avec des approximations de la vitesse, appelées estimations de la vitesse, la pression calculée ne peut être considérée qu'une estimation de pression qui nécessite une correction. Si cette estimation de pression est utilisée dans les équations de discrétisation des quantités de mouvement on obtient un champ de vitesse qui est une nouvelle estimation qui nécessite une correction. Il est clair que pour l'obtention d'un champ de pression correct, il faut un champ de vitesse correct et vice-versa. Évidemment, les corrections de vitesse et de pression sont liées. A un point donné, la correction de la vitesse est liée aux corrections des vitesses à des points adjacents et des corrections de pression. Mais il y'a une méthode qui lie la correction de la vitesse à un point aux seules corrections de la pression. Cette méthode est au cœur de l'algorithme **SIMPLER** utilisé dans nos calculs est qui sera présenté plus tard. Avec cette méthode, on détermine une équation de correction de la pression et une fois la correction de la pression obtenue elle est directement utilisée pour corriger le champ de vitesse.

Les relations entre les estimations et les corrections de vitesse et de pression sont définies par :

$$V^{t+\Delta t} = V^{*t+\Delta t} + V'^{t+\Delta t}$$

$$P^{t+\Delta t} = P^{*t+\Delta t} + P'^{t+\Delta t}$$

$V^{t+\Delta t}$: Est la vitesse correcte, $V^{*t+\Delta t}$ est l'estimation de la vitesse à corriger et $V'^{t+\Delta t}$ est la correction de la vitesse. $P^{t+\Delta t}$: Est la pression correcte, $P^{*t+\Delta t}$ est l'estimation de la pression à corriger et $P'^{t+\Delta t}$ est la correction de la pression.

On introduit les corrections de vitesse (fonctions seulement des corrections de pression) comme suit :

$$V_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} = V_{\varepsilon n}^{*t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) d_n$$

$$V_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} = V_{\varepsilon s}^{*t+\Delta t} + (P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_s$$

$$V_{\eta e}^{t+\Delta t} = V_{\eta e}^{*t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) d_e$$

$$V_{\eta w}^{t+\Delta t} = V_{\eta w}^{*t+\Delta t} + (P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_w$$

$$V_{z f}^{t+\Delta t} = V_{z f}^{*t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_f$$

$$V_{z b}^{t+\Delta t} = V_{z b}^{*t+\Delta t} + (P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_b$$

Si ces les six dernières équations sont utilisées dans l'équation de discrétisation de continuité (3.5), on obtient une équation de discrétisation de la correction de pression :

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S' \quad (3.48)$$

$$A_N = h_{2n} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_n$$

$$A_S = h_{2s} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_s$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e$$

$$A_W = h_{1w} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_w$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e$$

$$A_F = h_{1f} h_{2f} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_f$$

$$A_B = h_{1b} h_{2b} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_b$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B$$

$$S' = (h_{2s} V_{\varepsilon s}^{*t+\Delta t} - h_{2n} V_{\varepsilon n}^{*t+\Delta t}) \Delta \eta_P \Delta Z_P + (h_{1w} V_{\eta w}^{*t+\Delta t} - h_{1e} V_{\eta e}^{*t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P$$

$$+ (h_{1b} h_{2b} V_{z b}^{*t+\Delta t} - h_{1f} h_{2f} V_{z f}^{*t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P$$

La solution séquentielle des systèmes d'équations linéaires des variables dépendantes (composantes des vitesses, pression et température) suivent l'algorithme **SIMPLER** dont les étapes sont citées ci-après:

1) Initialisation (ou mise à jour) des vitesses, de la température et propriétés physiques :

$$V_{\varepsilon}^t, V_{\varepsilon}^{t-\Delta t}, V_{\eta}^t, V_{\eta}^{t-\Delta t}, V_z^t, V_z^{t-\Delta t}, T^t, T^{t-\Delta t}$$

2) Calcul des coefficients des équations de discrétisation des vitesses.

3) Calcul des pseudos vitesses.

4) Les pseudos vitesses sont utilisés dans la source de l'équation de discrétisation de pression. Cette dernière est résolue (dans tous les points) pour obtenir un champ de pression considéré comme une estimation.

5) Le champ de la pression estimée est utilisé dans les sources des équations de discrétisation des vitesses. Ces dernières sont résolues donnant un champ de vitesse considéré comme une estimation de la vitesse à corriger.

6) Les estimations des vitesses sont utilisées dans la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression. Cette dernière est résolue pour obtenir un champ de la correction de la pression.

7) La correction de la pression est utilisée pour corriger le champ de vitesse.

8) Le champ de vitesse corrigé est utilisé dans l'équation de discrétisation d'énergie. Cette dernière est résolue pour obtenir le champ de température.

9) On vérifie l'atteinte du régime permanent (stationnaire) caractérisé par l'invariance temporelle de toutes les variables calculées et la satisfaction des bilans massique et thermique globaux. Si le régime permanent est atteint, on arrête les calculs. Sinon, on augmente le temps d'un pas (de temps) et on retourne à l'étape 1.

3.7. Convergence:

A partir des conditions initiales, la marche dans le temps est continue, avec des pas de temps $5 \times 10^{-4} \geq \Delta t^* \geq 10^{-4}$ jusqu'à l'atteinte du régime permanent. En ce régime, les champs dynamique et thermique sont invariants dans le temps. Dans tous les cas on a obtenu une très bonne satisfaction du bilan massique global (l'égalité des débits entrant et sortant). La valeur du débit entrant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} v_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.850656 \quad (3.49)$$

$$\int_{\varepsilon=0.75}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} v_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 2.352333 \quad (3.50)$$

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=0.75} \int_0^{2\pi} v_{z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 1.498624 \quad (3.51)$$

Et celle du débit sortant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} v_{z_s}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.850656 \quad (3.52)$$

$$\int_{\varepsilon=0.75}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} v_{z_s}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 2.352333 \quad (3.53)$$

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=0.75} \int_0^{2\pi} v_{z_s}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 1.498624 \quad (3.54)$$

Cependant, la satisfaction du bilan thermique global n'est obtenue qu'avec une certaine précision. Ce bilan précise par l'équation (2.31) est discuté dans le deuxième chapitre ou il a été mentionné que pour tous les cas considérés, les termes q_2 , q_3 , q_4 et q_5 sont négligeables. Ce qui a été démontré les calculs. Donc, la satisfaction du bilan thermique global est vérifiée par l'égalité des termes q_1 et q_6 . Dans le premier et le dernier cas la valeur de q_1 est 0.7651 mais au deuxième cas est égal à 0.9619. La valeur de q_6 varie suivant les cas, comme il est précisé dans le **Tableau 3.2**. Dans ce tableau, on rapporte que la valeur absolue de la différence relative entre q_1 et q_6 ne dépassent pas 3.3%, et donc on conclue que la satisfaction du bilan thermique global est obtenue avec une bonne précision.

	$(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1)$	$(\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1)$	$(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75)$
Débit entrée	3.850656	2.352333	1.4986
Débit sortie	3.850656	2.352333	1.4986
Erreur (%)	0	0	0

Tableau 3.1. Les valeurs de débit d'entrée et de sortie avec l'erreur pour les trois cas

	$(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1)$	$(\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1)$	$(\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75)$
q_1	0.7651	0.9619	0.7651
q_6	0.7523	0.9365	0.7404
Erreur = $\left \frac{q_1 - q_6}{q_1} \right$ (%)	1.67%	2.6%	3.22 %

Tableau 3.2. Les valeurs de q_1 et q_6 avec les valeurs d'erreurs pour les trois cas

Chapitre IV
Résultats et discussions

4.1. Introduction:

Dans ce chapitre, on a présenté le détail de nos résultats avec discussions et interprétations. A l'aide du code **FORTRAN** et de logiciel **TECPLOT 360 EX 2020 R2** et **L'ORIGINE.6**. Les résultats obtenus présentés par différentes valeurs des rayons intérieurs et extérieurs par les deux cylindres elliptiques. Finalement on a fait une comparaison entre les valeurs de nombre de Nusselt axial, la vitesse, la température entre les trois cas.

4.2. Le premier cas ($\varepsilon_i = 0.5$, $\varepsilon_o = 1$) :

4.2.1. L'écoulement axial :

La **Figure 4.2** présente les variations : radiale et angulaire de la vitesse axiale dans les quatre positions axiales ($z^*=25.5$, $z^*=50.5$, $z^*=75.5$, $z^* = 100$). Dans l'intervalle ($z^* = 0$ jusqu'à $z^*=25.5$), l'écoulement, uniforme à l'entrée, se développe axialement. Dans cette zone, l'écoulement subit des variations suivant les trois directions elliptiques. Des couches limites se forment sur les faces des cylindres et leurs épaisseurs augmentent axialement. La variation axiale de l'écoulement induit un écoulement secondaire, relativement faible, dans les sections droites du conduit. L'origine physique de cet écoulement secondaire est la conservation de masse comme l'exige l'équation de continuité de l'écoulement. Dans l'intervalle ($z^* = 25.5$ jusqu'à $z^*=100$), une fois la longueur d'entrée hydrodynamique atteinte, l'écoulement secondaire disparaît et l'écoulement devient complètement axial et hydro-dynamiquement développé (suivant la direction axiale). Donc, dans cet intervalle, l'écoulement est unidirectionnel, avec un seul composant de vitesse, et bidimensionnel, la vitesse axiale dépend seulement des deux coordonnées polaires. La vitesse axiale croît radialement à partir de la paroi du cylindre interne pour atteindre un maximum local au voisinage à la moitié de l'entrefer elliptique puis elle décroît en allant vers la surface de cylindre extérieur. Dans la direction azimutale la vitesse augmente dans le sens antihoraire jusqu'à la valeur maximale située à $\eta = \frac{\pi}{2}$ et ensuite elle diminue jusqu'à $\eta = \pi$. Par symétrie par rapport à l'axe elliptique horizontal, on obtient les mêmes variations dans la moitié inférieure du conduit. La vitesse maximale, égale à 1.91, de l'écoulement est située dans deux positions à ($\varepsilon = 0.775$, $\eta = \frac{\pi}{2}$) et ($\varepsilon = 0.775$, $\eta = \frac{3\pi}{2}$).

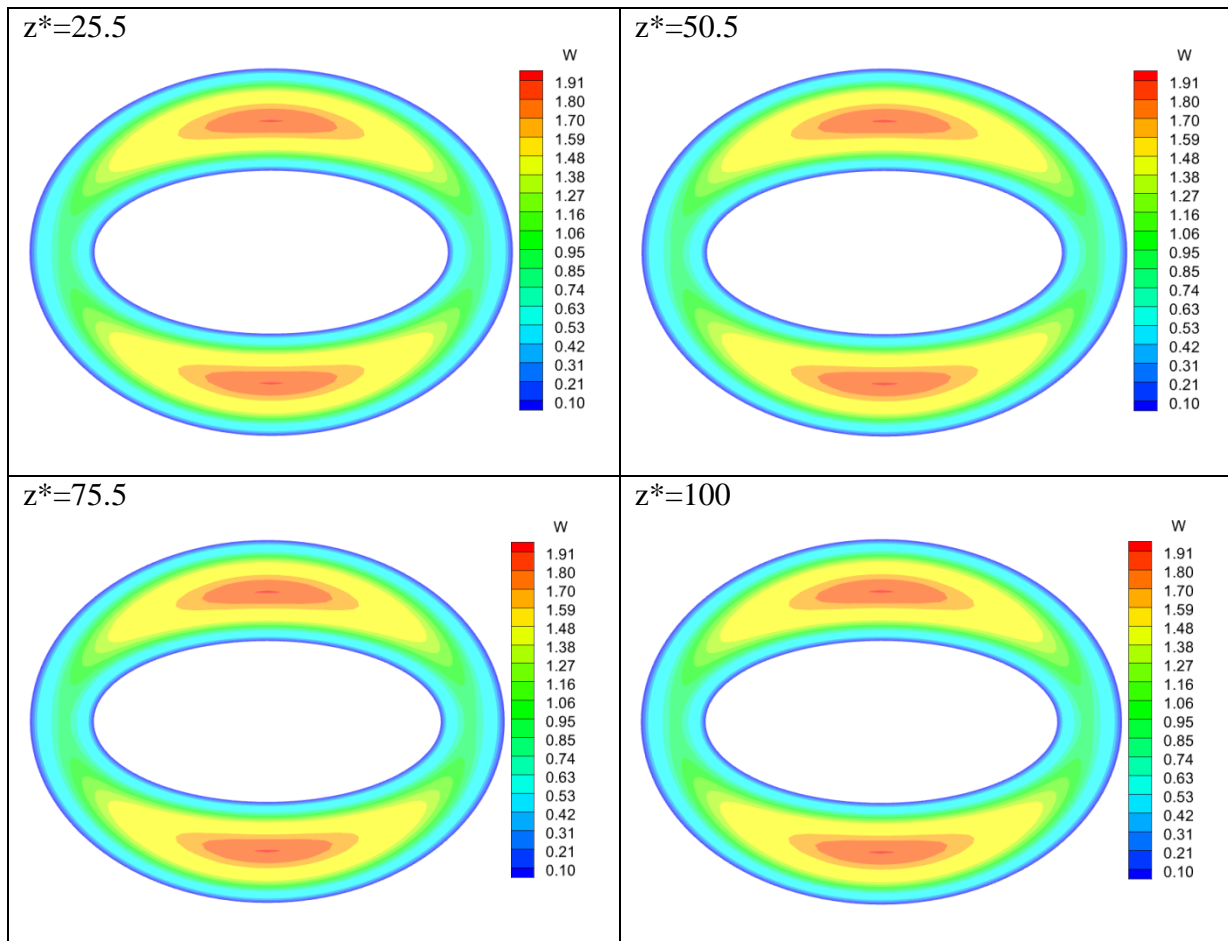


Figure .4.1.Le champ numérique de la vitesse axiale ($\varepsilon_i = 0.5$, $\varepsilon_o = 1$) à différente valeur de z^*

4.2.2. Le champ thermique :

Le champ thermique est en développement axial continue entre l'entrée et la sortie du conduit. La **Figure .4.1.** Présente le champ numérique de la température pour le cas ($\varepsilon_i = 0.5$ et $\varepsilon_o = 1$) à quatre stations axiales arbitrairement choisies ($z^* = 25.5$, $z^* = 50.5$, $z^* = 75.5$, $z^* = 100$). On a observé que la température relativement élevée dans la partie centrale de l'enceinte en raison à l'emplacement de la partie chauffée du cylindre inférieur. Ce champ thermique par rapport des axes elliptiques est symétrique. Dans la direction angulaire, la température diminue à partir de l'axe horizontal elliptique vers l'axe elliptique vertical. Dans le sens radial, La température diminue entre le cylindre intérieur chauffé et le cylindre extérieur adiabatique. En direction axiale, le champ thermique est caractérisé par une croissance axiale monotone de l'entrée jusqu' à la sortie du canal à cause de l'ajout axial du

chauffage au long du cylindre intérieur, la température maximal $T_{max} = 0.4118$ située à ($\varepsilon=0.7625, \eta= 4.7123$).

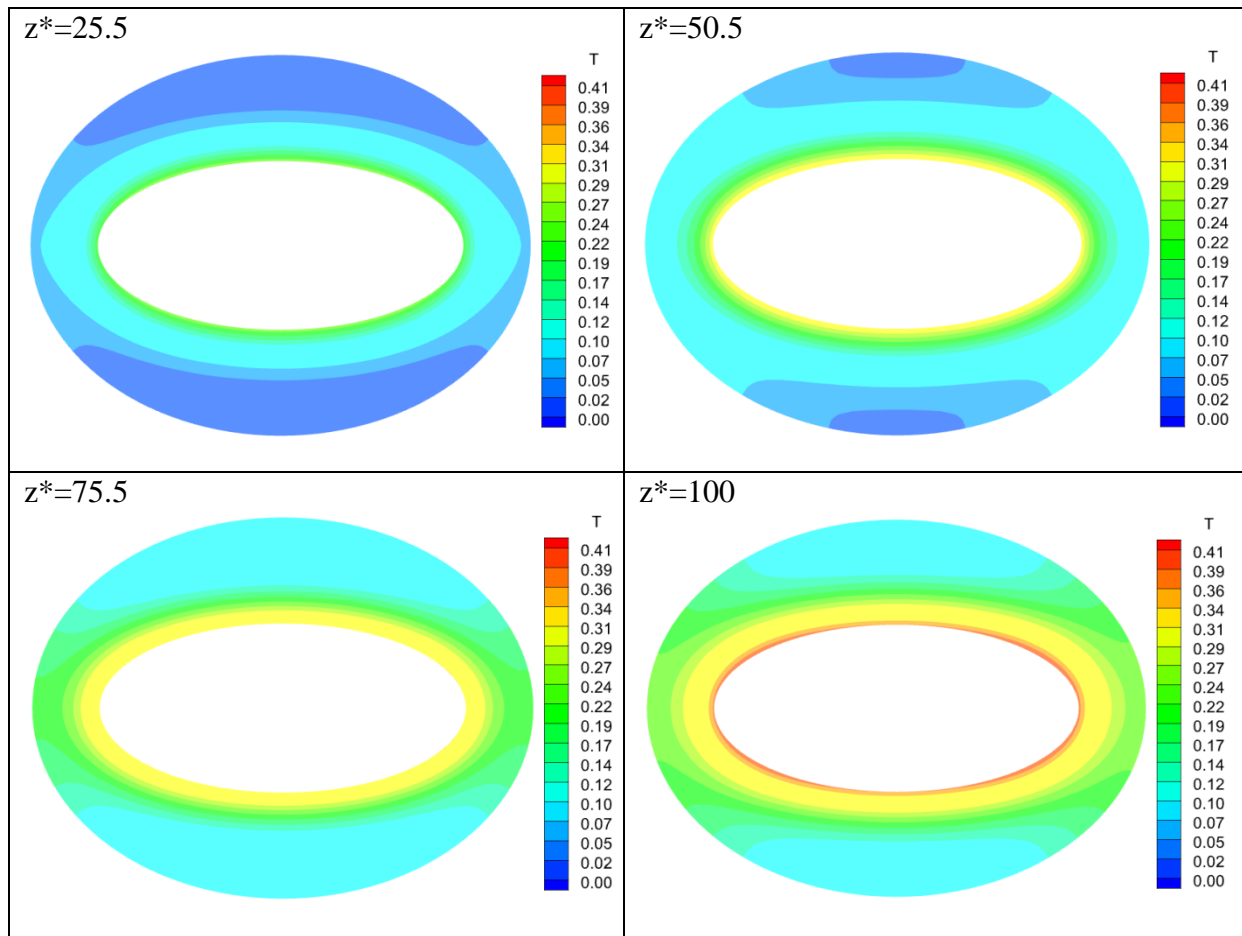


Figure .4.2.Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1$) à différente valeur du z^*

4.2.3. L'évolution du nombre de Nusselt axial :

La **figure 4.3.**représente la courbe de la variation de nombre de Nusselt axial par rapport à z^* ou ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1$). On divise la discussion en trois parties :

Le premier intervalle ($z^*=0$ jusqu'à $z^* = 10.5$) : le nombre de Nusselt axial diminue rapidement à partir de l'entrée jusqu'à $z^*=10.5$ et atteint la valeur $Nu(z^*=10.5) = 7.26$. Un grand transfert de chaleur effectué entre la paroi du cylindre intérieur et le fluide de travail. A partir de $z^*=10.5$ (le début de la deuxième partie) le nombre de Nusselt axial continue à diminuer mais lentement par rapport au cas précédent, jusqu'à $z^* = 50.5$ où sa valeur dans cette position est du $Nu(z^*=50.5) = 5.18$. Dans la dernière partie qui commence à $z^*=50.5$ et termine à $z^*=100$ le nombre de Nusselt axial commence à faiblir et reste stable jusqu'à la

sortie du conduit. La valeur minimal de nombre de Nusselt axiale est située à la sortie du conduit ($Nu(z^*=100)=5.04$).

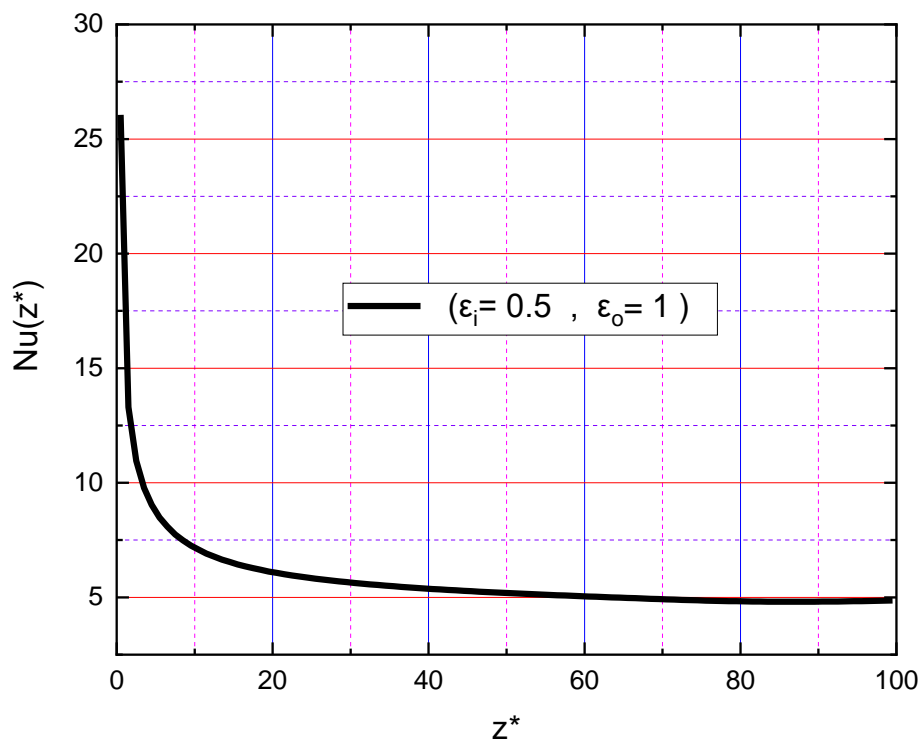


Figure 4.3: la variation de nombre de Nusselt axial par rapport à z^* ($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_o = 1$)

4.3. Deuxième cas ($\epsilon_i = 0.75$, $\epsilon_o = 1$) :

4.3.1. L'écoulement axial :

Le **Figure .4.4.** Présente Le champ numérique de la vitesse axiale (hydrodynamique), ($\epsilon_i = 0.75$ et $\epsilon_o = 1$) à quatre stations axiales arbitrairement choisies ($z^* = 25.5$, $z^* = 50.5$, $z^* = 75.5$, $z^* = 100$). La vitesse axiale maximale est égale à 1.8867 et située à ($\epsilon = 0.9124$ $\eta = 4.079$ $z^* = 98.5$). Elle est claire qu'on a une symétrie horizontale et verticale de la variation de l'écoulement axiale.

A partir de l'entrée jusqu'à $z^* = 25.5$, on a une variation de la vitesse axiale suivant les trois directions (radiale, azimutale, axiale). La vitesse maximale commence ($z^* = 0$ jusqu'à $z^* = 25.5$) à concentré de la forme de croissant dans la partie supérieure et inférieure du grand entrefer ($\eta = \frac{\pi}{2}$ et $\eta = \frac{3\pi}{2}$).

A partir de $z^*= 25.5$ jusqu'à $z^*=100$ l'écoulement se développe hydrodynamique. La vitesse augmente radialement à partir de la paroi du cylindre intérieure ($\varepsilon_i = 0.75$, $w = 0$) à une valeur maximale située presque au milieu de l'entrefer ($\varepsilon \cong 0.875$). A partir de ce point elle commence à diminuer vers la paroi de cylindre adiabatique. Concernant les variations azimutales, la vitesse axiale augmente à partir de $\eta=0$ pour atteindre sa valeur maximale à $\eta=\frac{\pi}{2}$, à partir de ce point elle commence à diminuer suivant la direction azimutale pour atteindre des valeurs minimales à $\eta=\pi$. On obtient la même variation dans la moitié inférieure du conduit.

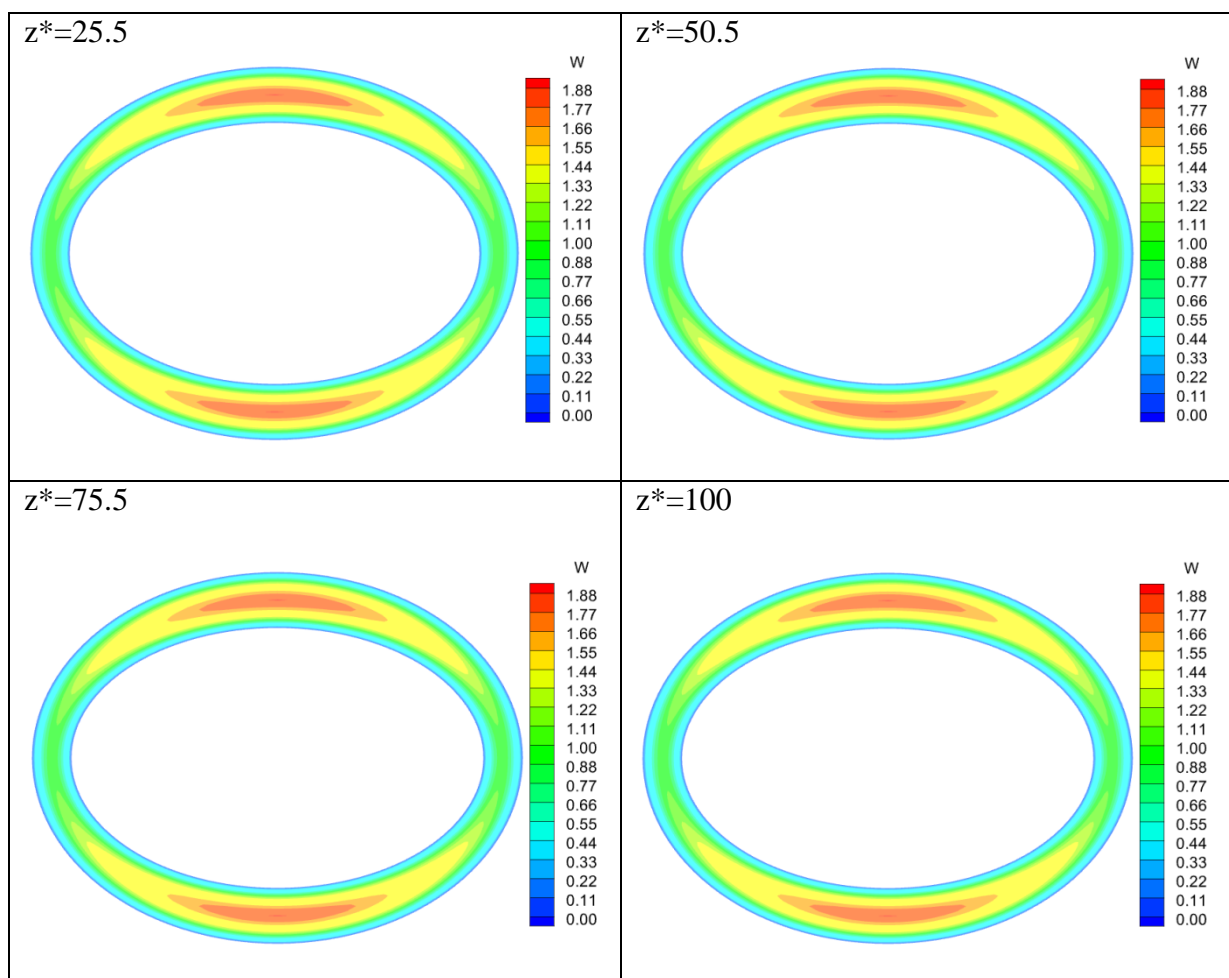


Figure .4.4. Le champ numérique de la vitesse axiale ($\varepsilon_i = 0.75$, $\varepsilon_o = 1$) à différentes valeurs de z^*

4.3.2. Le champ thermique :

Le champ numérique de la température pour le cas ($\varepsilon_i = 0.75$, $\varepsilon_o = 1$) a été présenté dans la **Figure .4.5** à quatre stations axiales arbitrairement choisies ($z^* = 25.5$, $z^* = 50.5$, $z^* = 75.5$, $z^* = 100$). La température maximal $T_{max} = 0.634$ est située à ($\varepsilon = 0.90$, $\eta = 4.053$, $z^* = 100$). La variation radiale de la température augmente radialement à partir du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur. Concernent la variation azimutale, la température diminue à partir de $\eta = 0$ jusqu'à $\eta = \frac{\pi}{2}$ et à partir de ce point augmente vers $\eta = \pi$ et par symétrie horizontale on trouve les mêmes variations dans la partie inférieure du conduit. Elle est claire que les grandes températures situées dans les cotes droite et gauche de la conduite où on trouve un petit entrefer ,par contre, les températures minimales situées près de la paroi intérieure du cylindre extérieur (dans la partie inférieure et supérieure) ($\varepsilon = 0.91$, ($\eta = \frac{\pi}{2}$ et $\eta = \frac{3\pi}{2}$)), la température augmente axialement à partir de l'entrée ($z^* = 0$) (sa valeur à l'entrée est minimal est égale à 0) jusqu'à la sortie du conduit.

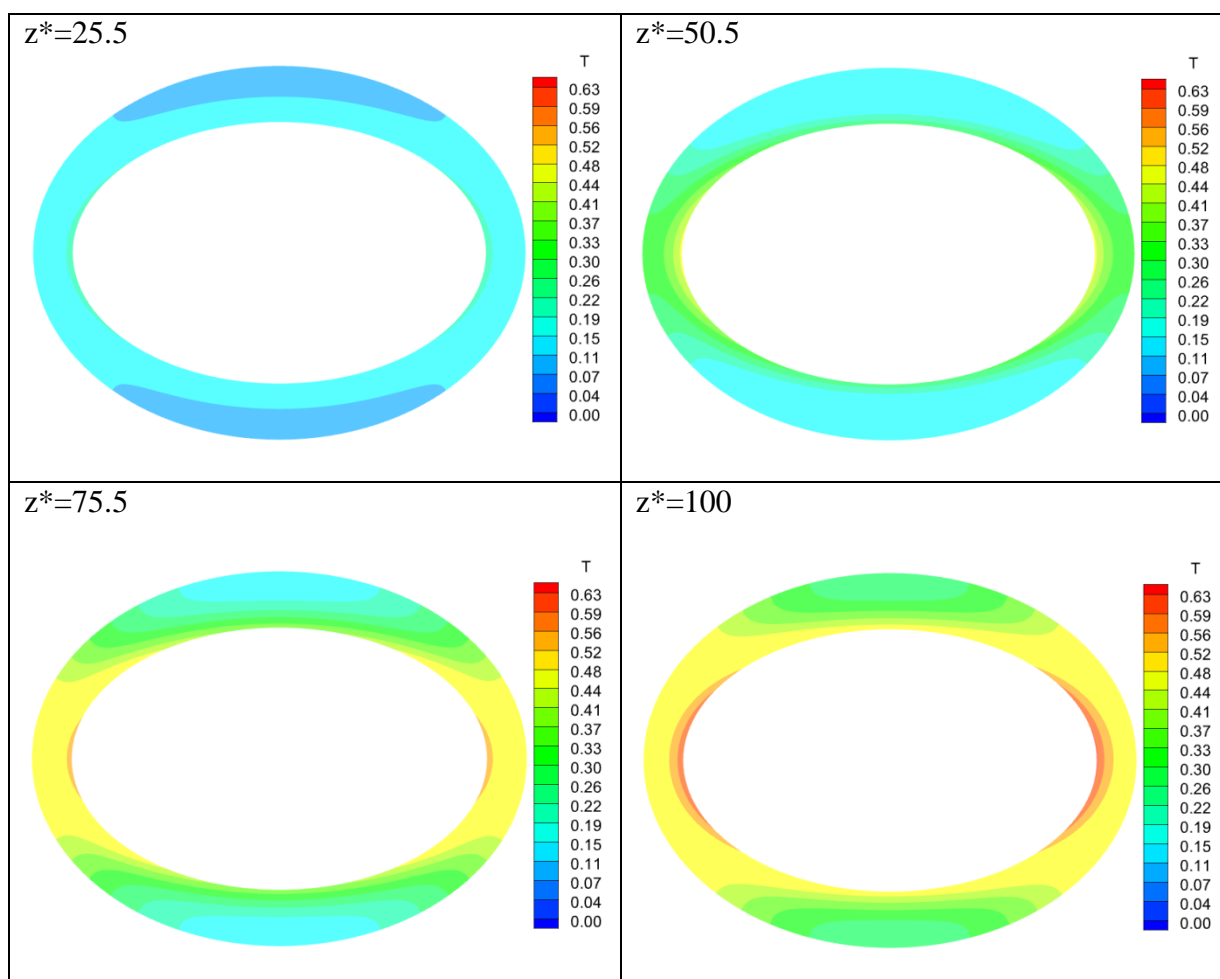


Figure .4.5.Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.75$, $\varepsilon_o = 1$) à déférent valeur de z^*

4.3.3. L'évolution du nombre de Nusselt axial :

La Figure 4.6 présente la courbe d'une variation de nombre de Nusselt axial. Dans l'intervalle ($z^*=0$, $z^*=20.5$) le nombre de Nusselt axial diminue progressivement (rapidement) pour atteindre une valeur $Nu(z^*=20.5)=8.27$. A partir de $z^*=20.5$ jusqu'à $z^*=69.5$, le transfert thermique est presque stable et sa valeur est constante 5.10. A partir de $z^*=70.5$ les valeurs de nombre de Nusselt commence accroître légèrement pour atteindre une valeur maximale qui égale 8.51 qui reste constante jusqu'à la sortie du conduit.

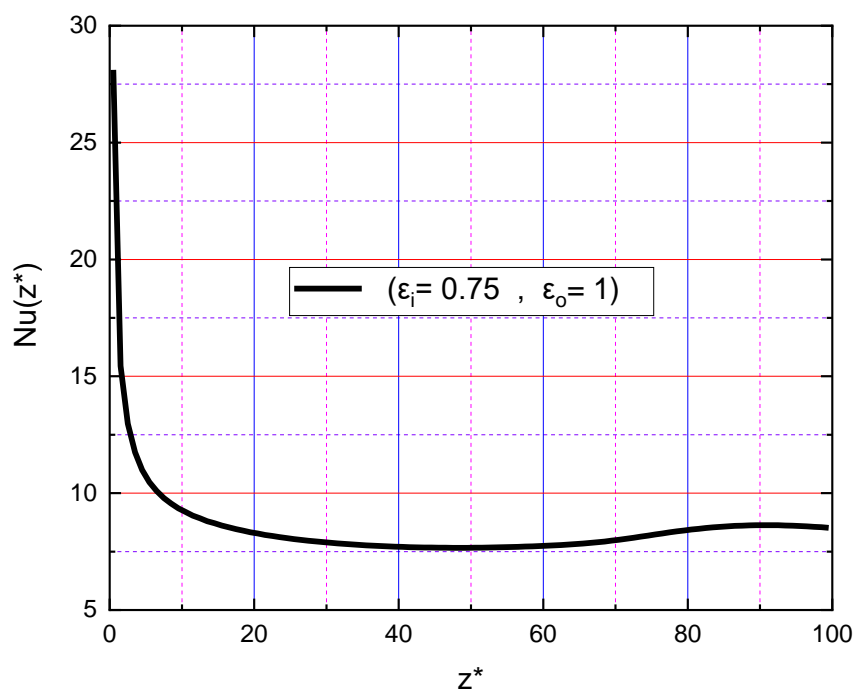


Figure4.6:la variation de nombre de Nusselt axial par rapport a z^* ($\epsilon_i = 0.75$, $\epsilon_o = 1$)

4.4. Dernier cas ($\epsilon_i = 0.5$, $\epsilon_o = 0.75$)

4.4.1 L'écoulement axial :

La Figure .4.7. présente Le champ numérique de la vitesse axial ($\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 0.75$) à quatre stations axiales arbitrairement choisies ($z^* = 25.5$, $z^* = 50.5$, $z^* = 75.5$, $z^* = 100$). Il est clair qu' il y a une symétrie horizontale et verticale, les variations de la vitesse axiale sont presque identiques quantitativement pour les trois directions (radiale, azimutale et axiale) par rapport aux deux cas précédents ,par contre qualitativement la vitesse maximale pour ce cas elle est la plus grande et sa valeur est égale à 1.99 qui située à ($\epsilon = 0.63, \eta = 4.73, z =$

38.5), l'explication physique de cette vitesse maximale est la surface de l'espace annulaire est la plus petite pour les trois cas étudiés 1.49 et les deux cas 3.8 , 2.35 respectivement . Les deux couches limites pour les deux surfaces des cylindres (chauffé et adiabatique) qui donne une longueur d'établissement (développé) petite par rapport à les autres. Le rôle principal de l'écoulement axial (convection forcée) est de faire un grand transfert thermique dans la partie supérieure et inférieure du grand entrefer à cause d'une vitesse axiale maximale.

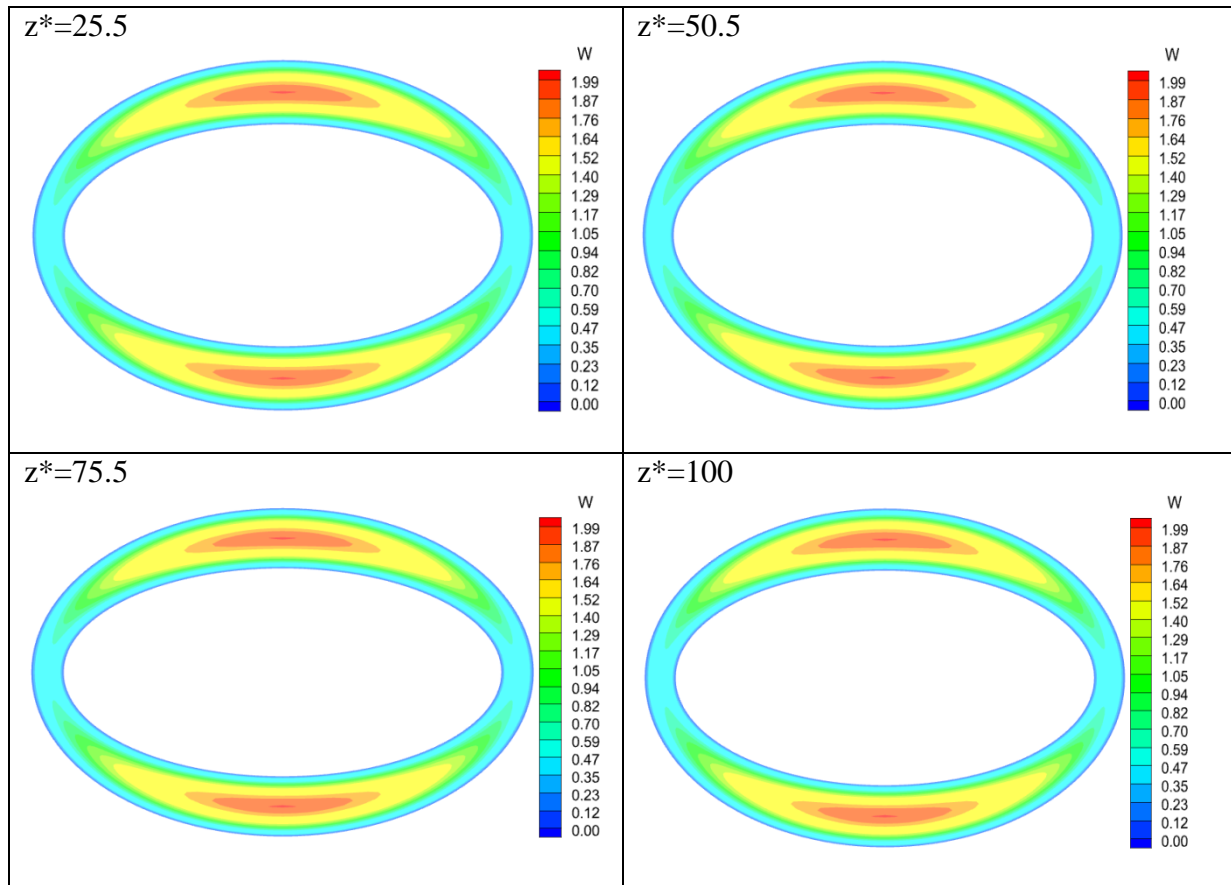


Figure .4.7. Le champ numérique de la vitesse axial ($\varepsilon_i = 0.5$ et $\varepsilon_o = 0.75$) à différentes valeurs de z^*

4.4.2. Le champ thermique :

La **Figure .4.8.** présente Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.5$, $\varepsilon_o = 0.75$) à quatre stations axiales arbitrairement choisies ($z^* = 25.5$, $z^* = 50.5$, $z^* = 75.5$, $z^* = 100$). Il est clair qu'il y a un symétrie horizontale et verticale ,les variations de la température sont presque identiques quantitativement pour les trois directions (radiale , azimutale ,axiale) par rapport aux deux cas précédents ,par contre qualitativement la température maximale pour ce cas elle est la plus grande que les deux cas précédents et sa valeur $T_{max}=0.65$ qui est située à

($\varepsilon = 0.63$, $\eta = 4.71$, $z^* = 37.5$), l'explication physique de l'emplacement de la température (dans le petit entrefer à gauche et à droite). Si on a une vitesse maximale on a une température minimale et vice versa.

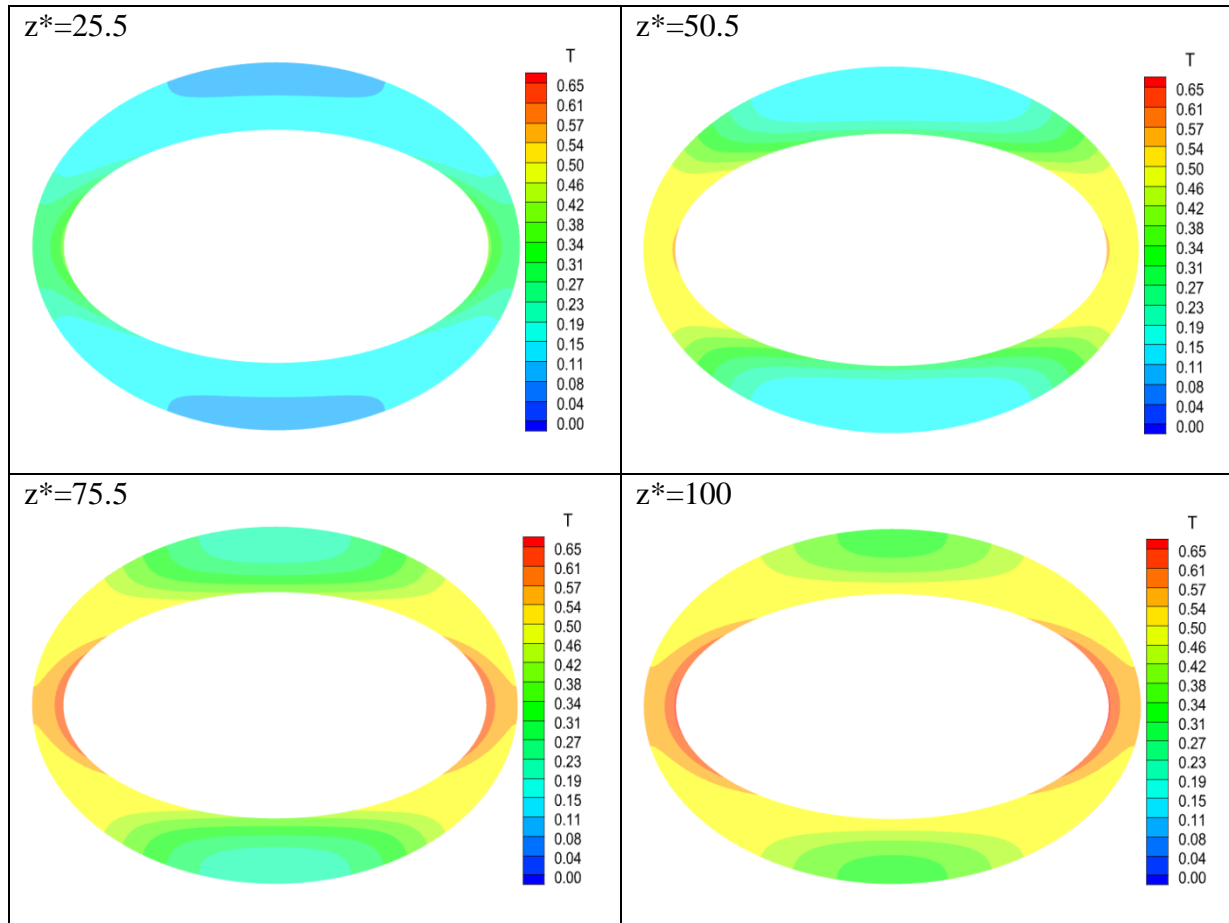


Figure 4.8. Le champ numérique de la température ($\varepsilon_i = 0.5$, $\varepsilon_o = 0.75$) a différent valeur de z^*

4.4.3. L'évolution des nombres du Nusselt axiaux :

Le **Figure.4. 9.** présente les variations des nombres de Nusselt axiaux $Nu(z^*)$ pour les trois cas (($\varepsilon_i = 0.5$, $\varepsilon_o = 1$), ($\varepsilon_i = 0.75$, $\varepsilon_o = 1$) et ($\varepsilon_i = 0.5$, $\varepsilon_o = 0.75$)). On compare les nombres de Nusselt axiaux des trois cas sus-cités. On voit qu'à partir de l'entrée du conduit jusqu'à $z^* = 4.5$, la diminution importante du nombre de Nusselt axial est la même pour tous les cas. Il est clair que le nombre de Nusselt pour le dernier cas est plus grand par rapport à les autres. Les variations de transfert thermique sont qualitativement semblables, Par contre quantitativement est différent. Finalement, les valeurs des nombres de Nusselt moyens sont : 5.86, 8.59 ,10.14, respectivement. La surface de l'espace annulaire la plus petite donne une

longueur d'établissement (développé de la couche limite) petite, qui augmente le transfert de chaleur vers la direction axiale.

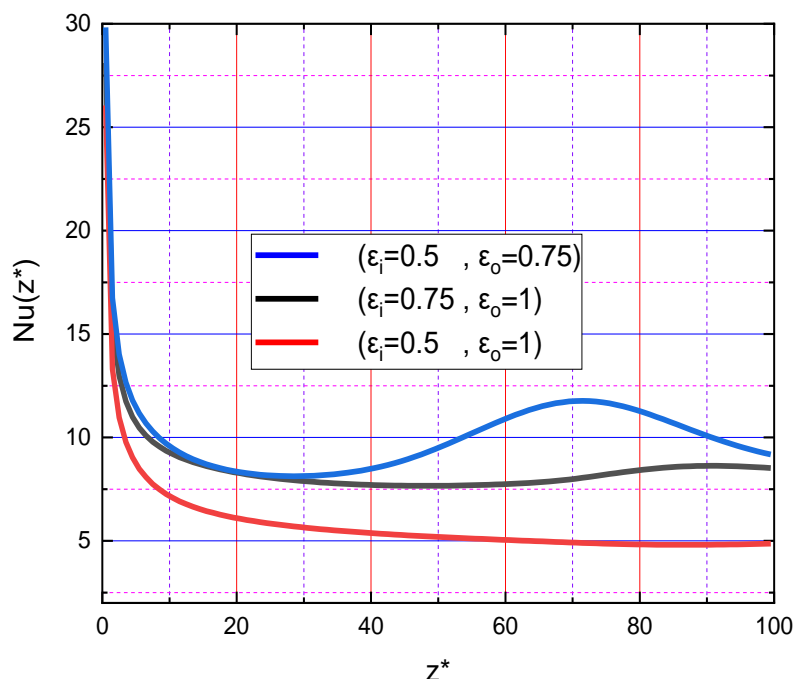


Figure.4. 9. Les nombres de Nusselt axiaux $Nu(z^*)$ en différents espaces annulaires

4.5 .Comparaison des résultats

Le **Tableau4.1.** présente les résultats obtenus à partir des calculs numérique pour les trois cas. On remarque qu'il ya une relation de contraire entre la valeur de la surface de l'espace annulaire et les autres valeurs (température maximale, vitesse axiale maximale, nombre de Nusselt moyen, température moyenne à la sortie) où la surface de l'espace annulaire diminue les autres valeurs du tableau est augmentée. Donc la valeur de la surface de l'espace annulaire c'est le contrôle des autres propriétés.

	Surface de l'espace annulaire	Température maximale	Vitesse axiale maximale	Nombre de Nusselt moyen	Température moyenne a la sortie
$(\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 1)$	3.85	0.411	1.91	5.86	0.20
$(\epsilon_i = 0.75, \epsilon_o = 1)$	2.35	0.63	1.88	8.59	0.40
$(\epsilon_i = 0.5, \epsilon_o = 0.75)$	1.49	0.65	1.99	10.14	0.51

Tableau4.1. Les résultats obtenus à partir du calcul numérique pour les trois cas

Chapitre V

Conclusion générale

Conclusion générale :

Ce travail démontre une étude numérique à trois dimensions sur le transfert de chaleur par convection forcée dans plusieurs espaces annulaires entre deux cylindres elliptiques horizontaux et confocaux. Le cylindre intérieur est statique et chauffé par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Dans ce mémoire on a fait une variation dans la valeur des rayons elliptiques des cylindres : intérieur et extérieur ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1$), ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1$) et dernièrement ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75$). La demi-distance focale des ellipses de la section droite du conduit est égale à 0.0045m. La longueur du conduit est 100 fois la demi- distance focale.

Le modèle mathématique de ce problème est constitué d'un système d'équations qui régit par l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites. On a discrétisé ces équations selon une approche numérique basée sur la méthode des volumes finis. On a construit aussi un code de calcul personnel, écrit en langage de Fortran.

A l'aide du code **FORTTRAN** et de logiciel **TECPLOT 360 EX 2020 R2** et **L'ORIGINE.6** on a obtenu les résultats de la simulation dans les trois cas ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 1$), ($\varepsilon_i = 0.75, \varepsilon_o = 1$) et ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75$) qui'est présenté en détail avec discussions et interprétations. Une discussion de champ dynamique et de champ thermique a été effectuée pour les trois cas et on finira notre travail par une comparaison entre les résultats obtenus.

Les résultats obtenus montrent qu'il y a une grande différence entre les trois cas étudiés thermique et dynamique spécialement à des valeurs de nombre de Nusselt qui est apparu clairement dans le cas ($\varepsilon_i = 0.5, \varepsilon_o = 0.75$). Il a été noté que le changement de la surface de l'espace annulaire est d'une grande importance dans le transfert de chaleur, car plus l'espace annulaire est petit meilleur est le transfert de chaleur, et cela est du à la vitesse du développement de l'écoulement et aussi la réunion rapide des deux couche limites.

Nos perspectives futures sont nombreuses; nous pensons à l'amélioration du transfert thermique par le remplissage de l'espace annulaire avec un milieu poreux et à l'étude de l'effet de l'inclinaison du conduit par rapport à l'horizontal sur le transfert thermique et la chute de pression axiale. Ces études peuvent êtres détaillées avec les variations des paramètres de contrôles géométriques, dynamiques et thermiques. Et en peut faire la même étude et la même géométrie mais avec les propriétés thermophysiques variables.

Bibliographies

- [1] **TERHMINA, Omar; MOJTABI, Abdelkader.** Ecoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire. *International journal of heat and mass transfer*, 1988, 31.3: 583-590.
- [2] **AMOURA, M.; ZERAIBI, N.; GARECHE, M.** Etude de la convection forcée d'un fluide non-Newtonien dans un espace annulaire tournant. 2007.
- [3] **D. Maitra, K.S. Raju,** Combined free and forced convection laminar heat transfer in a vertical annulus, *J. Heat Transf.* 97 (1975) 135.
- [4] **WU, Ching-Chi, YANG, Yue-Tzu, HUANG, Kuan-Hao, et al.** Numerical simulation of turbulent flow forced convection in a twisted elliptical tube. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, vol. 132, p. 199-208.
- [5] **KLALECHE, Sofiane et MADJOUR, Abderrahmane.** *Simulation numérique de la convection forcée entre deux disques en présence d'un nanofluide.* 2015. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou.
- [6] **Djamaa Youba, Benabdellah Iskander,** convection forcée dans l'espace annulaire entre deux cylindre elliptiques, mémoire master 2021, centre universitaire Mila.
- [7] **ZERARI, K.; AFRID, M.; GROULX, D.** Forced and mixed convection in the annulus between two horizontal confocal elliptical cylinders. *International journal of thermal sciences*, 2013, 74: 126-144.
- [8] **BENMERKHI, Meriem.** Convection forcée et mixte dans un espace annulaire elliptique horizontal et incliné rempli par une mousse métallique. 2016.
- [9] **MOJTABI, Abdelkader; CALTAGIRONE, J.-P.** Analyse du transfert de chaleur en convection mixte laminaire entre deux cylindres coaxiaux horizontaux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1980, 23.10: 1369-1375.

Bibliographies

- [10] **M. Ciampi, S. Faggiani, W. Grassi, G. Tuoni, F.P. Incropera**, Mixed convection heat transfer in horizontal, concentric annuli for transitional flow conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 30, Issue 5, 1987, Pages 833-841, ISSN 0017-9310, [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90003-2).
- [11] **KOTAKE, S.; HATTORI, N.** Combined forced and free convection heat transfer for fully-developed laminar flow in horizontal annuli. *International journal of heat and mass transfer*, 1985, 28.11: 2113-2120.
- [12] **KHEMICI Meriem; BOUFENDI Toufik; TOUAHRI Sofiane.** Numerical study of developing laminar mixed convection in a heated annular duct with temperature dependent properties. *Thermal Science*, 2019, 23.6 Part A: 3411-3423.
- [13] **DAWOOD, H. K., MOHAMMED, H. A., SIDIK, Nor Azwadi Che, et al.** Forced, natural and mixed-convection heat transfer and fluid flow in annulus: A review. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2015, vol. 62, p. 45-57.
- [14] **H.A. Mohammed, A. Campo, R. Saidur**, Experimental study of forced and free convective heat transfer in the thermal entry region of horizontal concentric annuli, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 37 (7) (2010) 739–747.
- [15] **KARKI, Kailash C. et PATANKAR, Suhas V.** Laminar mixed convection in the entrance region of a horizontal annulus. *Numerical heat transfer*, 1989, vol. 15, no 1, p. 87-99.
- [16] **N. Islam, U.N. Gaitonde, G.K. Sharma**, Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli, *Int. Heat Mass Transfer* 44 (11) (2001) 2107–2120
- [17] **ZHU, Tanxiao, et al.** Experimental and simulation study of forced convection in vertical eccentric annular space. *International Journal of Thermal Sciences*, 2021, 161: 106735.

Bibliographies

- [18] **E .Fattahi, M. Farhadi, K. Sedighi, Lattice Boltzmann** simulation of mixed convection heat transfer in eccentric annulus, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 38 (8) (2011) 1135–1141
- [19] **R .Hosseini, M. Ramezani, M.R. Mazaheri,** Experimental study of turbulent forced convection in vertical eccentric annulus, *Energy Convers. Manag.* 50 (9) (2009) 2266–2274.
- [20] **M.A.I. El-Shaarawi, H.I. Abualhamayel, E.M.A. Mokheimer,** Developing laminar forced convection in eccentric annuli, *Heat Mass Transf.* 33 (5–6) (1998) 353–362
- [21] **S.V. Patankar,** *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New-York, (1980).