

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية  
الشعبية

Démocratique et populaire

République Algérienne

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° d'ordre :.....

N° de série :.....

Présentée pour obtenir le diplôme de  
MASTER II EN GENIE MECANIQUE

Option : ENERGETIQUE

Thème :

**La Convection Forcé Dans l'Espace Annulaire Entre Deux  
Cylindres Elliptiques Horizontaux Avec Propriétés  
Thermophysiques Variables.**

Par :

**Benrabah Chouaib**

**Zaabat Achraf**

Membre jury :

Président :

**Dr.TOUAHRIA ABDELJAWED**

Examineur :

**Dr.HAMIDAN ABASSE**

Encadre par :

**Dr.ZERARI KHALIL**

Soutenue le : .../.../2022

**Années Universitaire 2021/2022**

# **Remerciement**

*Je tiens à dédier ce modeste travail à mon père et ma très*

*Chère maman qui m'ont*

*Encouragé à donner le meilleur de moi-même, et qui m'ont*

*fourni*

*Les moyens d'être ce que je suis aujourd'hui.*

*A toutes les personnes qui m'ont aidé dans mes années*

*d'étude*

*et mon travail et spécialement*

*Je le dédie aussi à mon frère*

*Ayoub , je leurs souhaite*

*Une carrière pleine de succès. Que dieu les garde tous.*

*A tous mes amis sans exception.*

*Je le dédie toute la famille Benrabah et Zaabat*

*A toute mes collègues de promotion 2021-2022*

*A tous ceux qui me sont chers et qui sont aujourd'hui absents*

*Je le dédie spécialement aussi A tous les êtres chers à mon*

*Coeur.*

# Table Des Matières

Nomenclature

Table Des Figures

Liste Des Tableaux

<b>Introduction Générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 Etude Bibliographique</b> .....	4
<b>Chapitre 2 Modèle Mathématique</b> .....	11
2.1. Introduction.....	17
2.2. Description du problème.....	17
2.2.1. Formulation mathématique.....	18
2.2.1.1. L'équation de continuité .....	19
2.2.1.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	19
2.2.1.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	19
2.2.1.4. L'équation de quantité mouvement suivant $z$ ... ..	19
2.2.1.5. L'équation d'énergie .....	20
2.2.1.6. Conditions initiales et aux limites .....	20
2.2.2. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique .....	21
2.2.2.1. L'équation de continuité .....	21
2.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	21
2.2.2.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	21
2.2.2.4. L'équation de quantité mouvement suivant $z$ .....	21
2.2.2.5. L'équation d'énergie.....	22
2.2.2.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelle.....	22
2.3. Modélisation des propriétés physiques variables.....	23
2.4. Les Bilans thermique et massique.....	23
2.4.1 Bilan thermique global.....	23
2.4.2. Bilan massique global.....	24
2.5. Le nombre de Nusselt.....	24
2.5.1. Le nombre de Nusselt local.....	24
2.5.2.Le nombre de Nusselt axial et moyenne.....	25
<b>Chapitre 3 l'étude numérique</b>	
3.1. Introduction.....	28

3.2. Le maillage.....	28
3.3. Détails de discrétisation .....	30
3.3.1. Discrétisation de l'équation de continuité .....	34
3.3.2. Discrétisation l'équation de l'énergie .....	34
3.3.3. Discrétisation l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	38
3.4. Convergence .....	51

#### **Chapitre 4 Résultats et discussion**

4.1. Introduction.....	54
4.2. Pour le premier cas : $Re = 100$ .....	54
4.2.1. L'écoulement axial .....	54
4.2.2. Le champ thermique .....	55
4.3. Pour le deuxième cas : $Re = 200$ .....	57
4.3.1. L'écoulement axial .....	57
4.3.2. Le champ thermique .....	58
4.3. Pour le troisième cas : $Re = 300$ .....	60
4.3.1. L'écoulement axial.....	60
4.3.2. Le champ thermique .....	61

#### **Chapitre 5 Conclusion Générale .....**

#### **Bibliographie.....**

## Nomenclature :

### Les variables dimensionnelles

$a$	Demi distance focal(m)
$c_p$	Chaleur massique à pression constante (J/kg.K)
$g$	Accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )
$h_1$	Coefficient métrique radial(m)
$h_2$	Coefficient métrique azimutal(m)
$h_3$	Coefficient métrique axial
$h(\varepsilon, z)$	Coefficient local de la convection( $W/m^2.K$ )
$K$	Conductivité thermique de fluide ( $W/m.K$ )
$L$	Longueur du conduit(m)
$P$	Pression(Pa)
$P_1$ ou bien $P_i$	Périmètre du cylindre intérieur(m)
$q_w$	Densité de flux de chaleur à la surface du cylindre intérieure ( $W/m^2$ Surface de la section droite du conduit(section d'écoulement)( $m^2$ )
$t$	Temps(s)
$T$	Température(K)
$V_\varepsilon$	Vitesse radiale (m/s)
$V_\eta$	Vitesse azimutale (m/s)
$V_z$	Vitesse axiale (m/s)
$z$	Coordonnée axiale(m)

## Symboles Grecs

$\beta$	Coefficient d'expansion thermique (1/K)
$\Delta t$	Pas de temps (s)
$\Delta$	Intervalle fini
$\mu$	Viscosité dynamique (kg/m.s)
$\rho$	Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )
$\varepsilon$	Coordonnée elliptique radiale
$\eta$	Coordonnée elliptique azimutale
$\nu$	Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s)
$T$	Fonction de ligne de courant

## Indices

i	Surface du cylindre intérieure
m	Valeur moyenne
max	Valeur maximale
min	Valeur minimale
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini
n, s, e, w, f, b	Fait référence aux faces d' un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
N, S, E W, F, B	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
u	Maillage décalé suivant la direction radiale
v	Maillage décalé suivant la direction angulaire
w	Maillage décalé suivant la direction axiale
0	Entré du conduit

## Exposants

*	Variable adimensionnelle
$t$	Désigne l'instant $t$
$t+\Delta t$	Désigne l'instant $t+\Delta t$
$t-\Delta t$	Désigne l'instant $t-\Delta t$

## Les nombres a dimensionnels

Gr	Nombre de Grashof = $(g\beta q_w a^4)/(v_0^2 k_0)$
Nu ( $\eta, z$ )	Nombre de Nusselt local
Nu(z)	Nombre de Nusselt axial
Pr	Nombre de Prandtl = $(c_p \mu_0 / k_0)$
Re	Nombre de Reynolds = $(\rho_0 V_0 a / \mu_0)$

## *Table Des Figures*

2.1. Géométrie et conditions aux limites du problème.....	17
3.1. Représentation de volume fini.....	28
3.2. Le maillage numérique utilise et sa projection en coupe. La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.....	29
3.3. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta$ , $z$ ).....	31
3.4. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta$ , $\varepsilon$ ).....	32
3.5. Maillage suivant les coordonnées ( $z$ , $\varepsilon$ ).....	33
3.6. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta$ , $z$ ).....	39
4.1. Le champ numérique de la vitesse axial dans valeur de $z^*$ et pour ( $Re = 100$ ).....	55
4.2. Le champ numérique de la température ( $Re=100$ ) a différents valeur $z^*$ .....	56
4.3. La variation de nombre du Nusselt par rapport $az^*$ ( $Re=100$ ).....	57
4.4. Le champ numérique de la vitesse axial dans valeur de $z^*$ et pour ( $Re=200$ ).....	58
4.5. Le champ numérique de la température ( $Re=200$ ) a différents valeur $z^*$ .....	59
4.6. La variation de nombre de Nusselt axial par rapport à $z^*$ Pour $Re=200$ .....	60
4.7. Le champ numérique de la température ( $Re=300$ ) a différents valeur $z^*$ .....	61
4.8. Le champ numérique de la température ( $Re=300$ ) a différents valeur $z^*$ .....	62
4.9. Les nombres de Nusselt axiaux $Nu(z^*)$ pour valeur de nombre de Reynolds.....	63



## *Liste Des Tableaux*

2.1. Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles.....	20
2.2 .Les propriétés thermo physiques et paramètre de contrôle.....	22
3.1. $q_1$ et $q_6$ avec Les valeurs de l'erreur dans trois cas.....	46
4.1. Les valeurs de différent variable pour les trois cas de calcule.....	63

# **La convection Forcée Entre Deux Cylindres Elliptiques Avec Des Propriétés ThermoPhysiques Variables.**

## **Résumé :**

Cette étude présente une simulation numérique en trois dimensions d'un écoulement laminaire. De la convection forcée entre deux cylindres elliptiques horizontaux avec des propriétés Thermophysiques variable. Le cylindre intérieur est uniformément chauffé tandis que le cylindre extérieur est adiabatique. L'écoulement et les champs thermiques sont modélisés par l'équation de continuité, les trois équations de quantité de mouvement et l'équation de l'énergie avec des conditions initiales et aux limites appropriées en utilisant un système de coordonnées elliptiques. Les équations du modèle sont résolues numériquement par La méthode des volumes finis avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre.

Les résultat des calculs montre qu' il y a une variation dans la valeur de nombre de Nusselt (coefficient d'échange de chaleur) dans les trois cas, et elle obtient une valeurs maximal pour le cas pour Reynolds  $Re=300$

**Mots clé :** Convection Forcée, Propriétés dépendent de la température, cylindres elliptiques,volumes finis.

# **Forced Convection Between Two Elliptical Cylinders With Variables Thermophysical Properties.**

## **Abstract:**

This study presents a numerical simulation of the three dimensional laminar forced convection between two elliptical horizontal cylinders with variable thermophysical properties. The inner cylinder is uniformly heated whereas the outer cylinder is adiabatic. The flow and thermal fields are modeled by the continuity, momentum and energy equations with appropriate initial and boundary conditions using an elliptical coordinate system. The model equations are numerically solved by a finite volume numerical method with second order accurate spatiotemporal discretization.

The results of the calculations show that there is a variation in the value of Nusselt number (coefficient of heat exchange) in the three cases, and it obtains a maximum value in the case for Reynolds =300.

**Keywords:** Forced convection, Properties dependent on temperature, elliptical cylinders, finite volume.

## الحمل الحراري القسري في الفضاء الحلقي بين أسطوانتين إهليجيتين أفقيتين بخصائص فيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة

ملخص:

تقدم هذه الدراسة محاكاة عددية ثلاثية البعد لجريان رقائقي للحمل الحراري القسري بين أسطوانتين أفقيتين إهليجيتين الشكل مع تعلق الخواص الفيزيائية بدرجة الحرارة. الأسطوانة الداخلية مسخنة بشكل منتظم في حين الأسطوانة الخارجية كاسطة. الجريان والحقل الحراري عبره بواسطة معادلة الاستمرارية، معادلات كمية الحركة ومعادلة الطاقة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية والحدية المناسبة باستخدام نظام الإحداثيات الإهليجي. تم حل المعادلات باستعمال طريقة الحجوم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية في الفضاء والزمن.

أظهرت النتائج أن هناك تغير في قيمة رقم نسلت (معامل التبادل الحراري) في الحالات الثلاث ، ويصل إلى قيمة قصوى في حالة رينولدز = 300.

الكلمات المفتاحية: الحمل القسري ، الخصائص التي تعتمد على درجة الحرارة ، الأسطوانات الإهليجية ، الحجوم المنتهية.

# Introduction Générale

# Introduction Générale

---

Le transfert de chaleur ou bien le transfert thermique c'est l'échange de chaleur entre deux corps fluide solide et solide, solide on a trois modes de transfert de chaleur on distingue la convection, la conduction et le rayonnement dans ce chapitre on parle plus sur la convection et les différents types de ce mode de transfert et dans quel domaine on peut trouver ce transfert.

La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit le plus souvent entre un fluide en mouvement et une paroi solide. La conduction peut être considérée comme un transfert d'énergie dû à des mouvements microscopiques, le phénomène de convection est un transfert dû à des mouvements macroscopiques. On distingue deux types de convection :

- La convection libre ou naturelle où le mouvement du fluide est causé par un champ des forces intérieur (gravité, gradient de densité, gradient de température etc.).
- La convection forcée où le fluide est mis en mouvement par l'action d'un champ de forces externe (pompe, ventilateur etc.).

D'une façon simplifiée, l'objectif principal de l'étude du phénomène de la convection consiste essentiellement à :

- développer des méthodes permettant l'évaluation du paramètre  $h$ , coefficient de convection.
- étudier les différentes formules empiriques utilisées.

Si le mouvement du fluide est dû à l'action d'une force extérieure, la convection est dite forcée et si au contraire, le mouvement du fluide est dû seulement à la différence des masses volumiques suite aux différences de températures, la convection est appelée convection libre ou naturelle. Si maintenant, nous nous intéressons à la nature du mouvement du fluide qui peut être laminaire ou turbulent, la convection aussi peut être aussi considérée comme laminaire ou turbulente. Connaissant les différences entre le mouvement laminaire et turbulent, la convection forcée et libre, nous pouvons dire la quantité de chaleur transférée lors de la convection forcée turbulente est plus importante que celles transférées lors d'une convection naturelle laminaire.

L'expérience montre que le transfert de la chaleur par convection dépend des propriétés thermophysiques du fluide comme la viscosité dynamique, la masse volumique, la capacité calorifique et aussi de la vitesse du fluide. Elle dépend aussi de la géométrie et l'état des surfaces du système ainsi que du type d'écoulement du fluide en question. Tout cela rend la convection le mode le plus compliqué du transfert de chaleur.

## Introduction Générale

---

Notre recherche se le nom la convection forcé entre deux cylindres elliptiques avec des propriétés thermophysiques variables. Au but de faire plusieurs expérience pour trouve l'effet de la variation de coefficient d'échange de chaleur, La viscosité dynamique et le nombre de Reynolds au bien le régime d'écoulement.

Dans notre recherche on a cinq chapitre le premier chapitre représente la recherche bibliographie que on a fait sur notre travaille, Dans le deuxième chapitre on essaye de simplifie notre problème avec des équations mathématiques, le troisième chapitre concernent les méthodes de résolution que on va utilise pour la résoudre des équations mathématiques que l'ont pose dans la deuxième chapitre.

Aussi dans le quatrième chapitre on a l'interprétation des résultats obtenu par le program numérique, en fin dans la conclusion on définie la valeur de notre recherche et l'addition que l'ont donne dans le développement de la convection forcé et ces différent application.

# Chapitre I

## Recherche bibliographié :



Dans cette recherche bibliographique, on a fait un résumé des travaux des plusieurs chercheurs, concernons la convection mixte et forcée entre deux cylindres concentrique et non concentrique.

Le Transfert de chaleur dans un espace annulaire équipé par des blocks isothermes, la bifurcation numériques pour blocks a moins hauteur c'est le thème de recherche de **Ahmed Idrissi et al [1]**, L'expérience est placée deux blocks sur le mur intérieur de cylindre et étudié l'influence de variation de l'angle d'inclinaison des blocs sur la transfert de chaleur et aussi l'effet de nombre de **Rayleigh**. La méthode utilisée dans l'étude numérique c'est la méthode de différence fini et pour la résolution des matrices on utilise L'algorithme de Thomas TDMA. On a trouvé que lorsque le nombre de Rayleigh et proche à 3598 permet l'amélioration de transfert de chaleur par 18%.

La convection mixte dans un tube annulaire hélico c'est le thème de recherche de **M.R.H. Nobari et al. [2]**, pour le but d'étudié l'effet des nombres non dimensionnelle comme nombre de **Reynolds, Prandtl** et **Richardson** sur le chemin de flux du température et aussi le facteur de frottement, le taux de transfert de chaleur sont étudiés en détail. La méthode de différence a été utilisée avec l'approximation de **Boussinesque** pour La résolution de problème. Le résultat montre que le nombre de Richardson joué un rôle major en convection mixte dans un tube annulaire hélico en contrôlent l'effet de flottabilité. Et aussi l'effet de différent paramètre non dimensionnelle dominance sur le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt a l'intérieure de tuyère hélicoïdal.

**Nazrul Islam et.al [3]** font une recherche sur La convection mixte a la région d'entrée dans un tube concentrique horizontal, l'étude et concerné de faire une investigation numérique sur la convection mixte dans le régime laminaire permanent en utilisant la méthode des différences finis et l'algorithme simple pour la résolution d'équation d'énergie est pour la génération d'un code fortran. Parmi ces résultats, le flux secondaire a un effet significatif grâce à la force de flottabilité.

**Zerari Khalil [4]** fait un une simulation numérique sur l'effet de propriétés thermophysique sur la convection mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindre elliptique horizontaux .il utilise la méthode de volume finis avec un discrétisation spatio-temporelle du second ordre pour résoudre les équations de module. il est conclue que la prise en compte de

la convection mixte avec des propriétés physiques variables donne un sens physique sur l'écoulement et les champs thermiques qui sont qualitativement et quantitativement différents de ceux de la convection forcée avec des propriétés dépendantes de la température et les cas de la convection mixte avec des propriétés constantes, le nombre de Nusselt obtenu est également plus élevé dans ce cas. L'amélioration du transfert de chaleur obtenue en considérant la convection naturelle au sein de la convection mixte avec des propriétés physiques dépendant de la température augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof qui est proportionnel au flux thermique imposé à la surface du cylindre intérieur.

Dans le processus de forage, l'espace annulaire peut facilement être excentré. Le phénomène de transport de chaleur se produisant dans de tels tubes et anneau peut être complexe, et l'article de **Lin Riyi et .al [5]** étudie la convection forcée dans un anneau excentrique vertical avec différents rapports de rayon et excentricité (normalisé par la différence de rayon). Des expériences physiques et des simulations numériques ont été menées avec une température d'entrée du tube intérieur et un débit d'eau chaude constants. Les résultats montrent qu'avec l'augmentation des rapports de rayon, le coefficient de transport de chaleur par convection augmente. Pour un rapport de rayon de 1,875, le coefficient de transport thermique augmente lorsque l'excentricité augmente.

**Othmane OULAID et .al [6]**. Proposé une étude numérique sur les transferts couplés de chaleur et de masse avec changement de phase dans un canal incliné. Ce canal est formé de deux plaques planes couvertes par un film mince d'eau et traversé par un écoulement laminaire ascendant d'air humide. Les plaques sont portées à une température constante ( $T_w$ ) et à la concentration de saturation correspondante ( $\omega_w$ ). La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement le système d'équations constitué par celles de Navier-Stokes, de l'énergie et de la concentration. Le couplage vitesse-pression est traité par l'algorithme SIMPLER. Les résultats montrent que les forces d'Archimède thermique et massique décelèrent l'écoulement près des parois du canal et induisent ainsi un renversement de celui-ci. L'importance de ce renversement dépend fortement de l'angle d'inclinaison du canal. Une carte de renversement a été établie pour différents angles d'inclinaison.

Des expériences ont été faites par **J.R.Maughan et.al [7]** sur la convection mixte dans la région d'entrée d'un canal plat chauffé uniformément par le bas. L'effet du flux thermique et l'orientation du canal sur le nombre local de Nusselt est étudié pour  $Pr = 0,7$ ,  $125 < Re < 500$ ,  $7 \cdot 10^3 < Gr^* < 10^6$  et  $0 < \theta < 30^\circ$ . Le transfert thermique est initialement dominé par la convection forcée et montre un déclin rapide en nombre de Nusselt. A la suite de l'apparition de l'instabilité thermique, un développement d'écoulement secondaire cause une forte augmentation du nombre de Nusselt qui est suivie d'un maximum et d'oscillations.

L'article présente des résultats d'une recherche expérimentale de **T.N Tandon H.K Varma C.P Gupta [8]** sur le comportement du transfert de chaleur au cours de la condensation par convection forcée à l'intérieur d'un tube horizontal pour des écoulements gravitaires, semi-annulaires et annulaires. On a effectué une étude qualitative sur l'effet de plusieurs paramètres, tels que le flux massique de frigorigène, la qualité de la vapeur, la chute de température de la pellicule de condensat et la vitesse moyenne de la masse de vapeur, sur le coefficient moyen de transfert de chaleur par condensation. On a observé que les corrélations de **Akers-Rosson** permettaient de prévoir les coefficients de transfert de chaleur à plus ou moins 25% près, pour la plage entière de données. Un examen plus poussé des données a révélé que la nature de la relation pour le coefficient de transfert de chaleur change lorsque l'on passe d'un écoulement annulaire et semi-annulaire à un écoulement gravitaire. On a recommandé l'utilisation de corrélations du type Akers-Rosson avec constante et puissance modifiées pour les deux régimes d'écoulement.

L'étude expérimentale de **M. Hunt C.L.Tien [9]** concerne l'écoulement non Darcien et le transfert de chaleur dans les milieux fibreux à haute porosité. La convection forcée à travers les matériaux de différentes perméabilités, porosités et conductivités thermiques a été considéré. Les résultats montrent que les milieux poreux accroissent le transfert de chaleur à partir d'une surface, en comparaison avec les résultats calculés pour l'écoulement piston ou laminaire dans un canal. Cet accroissement résulte de la diffusion, un phénomène non **Darcien** qui décrit le mélange intra-pore qui apparaît quand le fluide se déplace entre les particules solides.

**François Debray et.al [10]** présenté des mesures de coefficients de frottement et de transfert thermique par convection forcée dans des mini-canaux plans de 1 mm à 250  $\mu\text{m}$

d'épaisseur. Le coefficient de frottement est estimé à partir d'une mesure globale de perte de charge. Le coefficient de transfert thermique est déterminé à partir d'une mesure directe et locale de la température et du flux thermique à la paroi. Les mesures des coefficients de frottement confirment les lois classiques aux incertitudes expérimentales prises. En ce qui concernent les mesures locales de coefficients de transferts, les écarts observés par rapport aux corrélations classiques établies pour des plus grands diamètres peuvent être expliqués qualitativement par la non-uniformité du flux thermique imposé en paroi et les conditions d'établissement partiel des couches limites cinématique et thermique.

**JACQUES CHARRAUDEAU [11]** fait une recherche sur l'influence de gradients des propriétés physiques en convection forcée application au cas de tube. Le système des équations des couches limites dynamiques et thermiques dans le cas d'un écoulement incompressible à répartition de vitesse initiales linéaire et à faibles gradients de propriétés physiques variables a été utilisé. La viscosité dynamique et la conductivité thermique ont été supposés fonction linéaire de la température. Après avoir explicité les variations relatives des profils de vitesses et de températures résultant de l'existence des propriétés physiques variables, on a précisé l'exacte dépendance des variations du frottement pariétal et du flux thermique en fonction du nombre de Prandtl et on a donné la contribution de chaque gradient de propriété physique. On a montré ensuite les possibilités d'utilisation des résultats théoriques par une application effectuée dans le cas du tube.

Les taux de transfert de chaleur pour l'écoulement à travers un canal convergent-divergent à courbe sinusoïdale ont été analysés par **C.-C. Wang, C.-K. Chen [12]**. En utilisant une simple méthode de transformation de coordonnées et la méthode implicite de direction alternée Spline. Les effets de la géométrie ondulée, le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl sur le frottement cutané et le nombre de Nusselt ont été étudiés. Les résultats montrent que les amplitudes du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement cutané augmentent avec une augmentation du nombre de Reynolds et rapport amplitude-longueur d'onde.

**Mete Avci, Orhan Aydin [13]** ont étudié le transfert de chaleur par convection forcée dans des écoulements entièrement développés. Ce développement est hydro-dynamiquement et thermiquement de gaz de la dissipation visqueuse en micro annulaire entre deux micro cylindres concentriques est analysé analytiquement. L'effet de dissipation visqueuse, le

glissement de vitesse et la température saut au mur sont pris en considération. Deux cas différents de conditions aux limites thermiques sont considérés : uniforme flux de chaleur au niveau de la paroi externe et de la paroi interne adiabatique (cas A) et flux de chaleur uniforme au niveau de la paroi interne et de la paroi externe adiabatique (cas B). Des solutions pour les distributions de vitesse et de température et le nombre de Nusselt sont obtenues pour différentes valeurs du rapport d'aspect, du nombre de Knudsen et nombre de Brinkman.

Le transfert de chaleur à convection mixte laminaire pour des flux d'air assistés et opposés dans la zone d'entrée d'une verticale tube circulaire a été étudié expérimentalement enquêté par **Hussein A. Mohammed [14]**. L'utilisation d'une condition aux limites de flux de chaleur à paroi uniforme a été Le dispositif expérimental est conçu pour déterminer l'effet de la direction de l'écoulement. L'effet de l'inclinaison du tube sur la température de surface, nombres de Nusselt locaux et moyens avec Reynolds Variait de 400 à 1600 et le nombre de Grashof de  $2.0 * 10^5$  à  $6.2 * 10^6$ . Les résultats montrent que la température de surface circumférentielle au long de la longueur du tube sans dimension pour un écoulement opposé serait supérieur à celui du flux assisté et du tube horizontal.

**Basant K. Jha et.al [15]** examiné l'influence des fluides générateurs, absorbants de chaleur sur un flux de convection mixte. Dans un micro-anneau concentrique vertical (MCA) prenant en compte le glissement de vitesse et le saut de température à la surface extérieure du cylindre intérieur et à la surface intérieure de cylindre extérieur. La solution exacte des équations de quantité de mouvement et d'énergie est dérivée séparément. En termes de la fonction de Bessel de première et de deuxième espèce pour fluide caloporteur et fonction de Bessel modifiée de premier et second type pour fluide absorbant la chaleur. Lors des calculs numériques, on constate que l'augmentation de la génération de chaleur le paramètre a amélioré la température et la vitesse du fluide mais a réduit le taux de transfert de chaleur à la surface extérieure du cylindre intérieur tandis que la tendance inverse est observée pour le fluide absorbant la chaleur.

**Terhmina et Mojtabi [16]** ont étudié numériquement l'écoulement de la convection forcée dans la région d'entrée d'un espace annulaire, limité par deux cylindres coaxiaux horizontaux isothermes pour des régimes de la vitesse et de température non établis. Le fluide

pénètre dans l'espace annulaire avec une vitesse uniforme et à une température uniforme. Les résultats obtenus avec des nombres de Peclet et les rapports des rayons permettent la corrélation du transfert de chaleur.

Le transfert de chaleur par convection forcée a été étudié expérimentalement dans un anneau vertical avec différence des rapports eau-air, des excentricités et des rapports de rayon, a été étudié par **Tanxiao Zhu et.al [17]**. Un constant débit volumétrique et température du fluide chaud a été considéré. Le rapport de rayon qui fait que Nu augmente brusquement sous conditions de fonctionnement dans cette étude est étudié numériquement. Les équations gouvernantes décrivant la chaleur le transfert et le flux sont discrétisés à l'aide de la méthode des éléments finis. Les résultats indiquent que la relation entre Nu et le rapport de rayon est non linéaire. Les rapports de rayons provoquant une augmentation brutale de Nu sont respectivement de 0,36 et 0,21.

**Keyong Wang et.al [18]** ont étudié analytiquement le transfert de chaleur par convection à travers un conduit annulaire, entièrement rempli d'un poreux bidispersé (BDPM). Le modèle à deux vitesses et deux températures a été utilisé. L'anneau est chauffé des murs intérieurs et extérieurs par des flux de chaleur asymétriques. Les résultats montrent que la bidispersivité profite à l'amélioration du transfert de chaleur dans une plage inférieure de rapport de conductivité thermique efficace par rapport au milieu poreux monodisperse (MDPM).

L'effet de viscosité variable sur la convection laminaire dans une conduite annulaire et horizontale a été étudié numériquement par **Nouar [19]**. A l'entrée de l'annulaire du conduit, l'écoulement est totalement développé, et la température est uniforme. Il a trouvé que, Lorsque la viscosité diminue avec la température il y a une accélération de l'écoulement axial. Dans la partie supérieure du conduit et une décélération à la partie inférieure. Il a constaté aussi que la viscosité variable augmente le transfert thermique global des convections forcées et mixte.

## Chapitre II

# Modèle Mathématique

2.1. Introduction :

Ce chapitre entame la modélisation mathématique du problème physique. Le modèle mathématique est l'ensemble des équations différentielles aux dérivées partielles, de la conservation de masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie; avec les conditions initiales et aux limites. Le modèle mathématique est complété par les fonctions précisant les variations de la viscosité et la conductivité thermique avec la température. Naturellement, les équations modélisantes sont écrites dans les coordonnées elliptiques. La forme non dimensionnelle des équations modélisant est obtenue par la normalisation des variables dépendantes et indépendantes avec des échelles caractéristiques appropriées. Le transfert thermique est quantifié par des nombres de Nusselt locaux et moyens.

2.2. Description du problème:

On considère un écoulement de la convection forcé dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux et concentrique avec des propriétés variables. Le cylindre intérieur est statique et chauffé par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Les rayons elliptiques des cylindres intérieur et extérieur sont égaux à 0.5 et 1.0, respectivement. La demi-distance focale des ellipses de la section droite du conduit est égale à 0.0045m. La longueur du conduit est 100. A l'entrée du conduit, le fluide (eau) a une vitesse axiale constante égale à  $(2.231 \times 10^{-2} \text{ m/s pour Re}=100)$   $(4.462 \times 10^{-2} \text{ m/s pour Re}=200)$   $(6.693 \times 10^{-2} \text{ m/s pour Re}=300)$  et une température uniforme égale à 20°C. Un schéma, qui n'est pas à l'échelle, du problème est présenté dans la **Figure 2.1**.

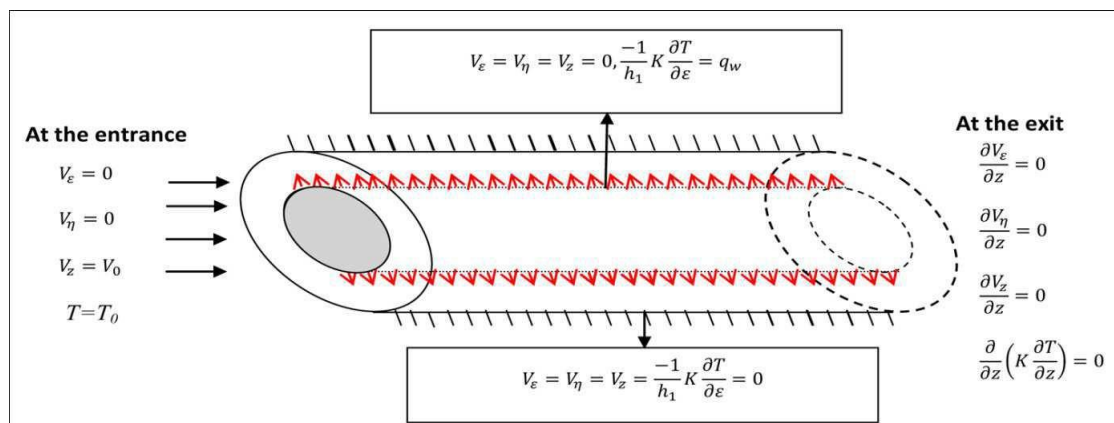


Figure2.1. Géométrie et conditions aux limites du problème.



**2.2.1. Formulation mathématique :**

A  $t=0$  on a :  $V_\varepsilon = 0, V_\eta = 0, V_z = 0, T = T_0$

A  $t > 0$  on a les équations de conservation :

**2.2.1.1. L'équation de continuité :**

$$\frac{1}{h_1 h_1} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.1)$$

**2.2.1.2. L'équation de quantité de mouvement suivant  $\varepsilon$  :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_\varepsilon)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \rho V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] \\ & = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P_h}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] + \rho \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) g \end{aligned} \quad (2.2)$$

**2.2.1.3. L'équation de quantité de mouvement suivant  $\eta$  :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_\eta)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. - \rho V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\ & = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P_h}{\partial \eta} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \rho \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) g \end{aligned} \quad (2.3)$$

**2.2.1.4. L'équation de quantité mouvement suivant z :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{\partial P_h}{\partial z} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

**2.2.1.5. L'équation d'énergie :**

$$\begin{aligned} & C_p \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_p \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

**2.2.1.6. Conditions initiales et aux limites :**

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0, \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.5, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.6)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 1, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.7)$$

$$t > 0 \quad Z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.8)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.9)$$

Les variables adimensionnelles et les propriétés thermophysiques sont normalisées par leurs échelles caractéristiques pour obtenir des quantités adimensionnelles qui sont présentées dans le **Tableau 2.1**.

**Tableau 2.1 Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles.**

$h_1^* = \frac{h_1}{a}$	$h_2^* = \frac{h_2}{a}$
$z^* = \frac{z}{a}$	$t^* = \frac{V_0 t}{a}$

$$\begin{aligned}
V_\varepsilon^* &= \frac{V_\varepsilon}{V_0} & V_\eta^* &= \frac{V_\eta}{V_0} \\
V_z^* &= \frac{V_z}{V_0} & T^* &= \frac{T - T_0}{\frac{q_w a}{k_0}} \\
P^* &= \frac{P - P_0}{\rho_0 V_0^2} & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} \\
k^* &= \frac{K}{K_0} & L^* &= \frac{L}{a}
\end{aligned}$$

## 2.2.2. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique :

### 2.2.2.1. L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] = 0 \quad (2.10)$$

### 2.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\varepsilon^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\varepsilon^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} - V_\eta^{*2} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{h_1^*} \frac{\partial P^*}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) - 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\varepsilon^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu^* \frac{V_\eta^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_2^* \frac{V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) \\
&\left. - 2\mu^* \frac{1}{h_2^*} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \quad (2.11)
\end{aligned}$$

### 2.2.2.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\eta^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\eta^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^{*2} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right] \\
&= -\frac{1}{h_2^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
&- 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* h_2^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \\
&\left. + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{h_2^*}{\partial \varepsilon} - 2\mu^* \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

**2.2.2.4. L'équation de quantité du mouvement suivant z :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* V_z^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* V_z^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] \\ &= -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( 2\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

**2.2.2.5. L'équation d'énergie :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* T^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* T^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* T^*)}{\partial z^*} \right] \\ &= \frac{1}{\text{Re} Pr h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k^* h_1^* h_2^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

**2.2.2.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles:**

$$t^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = T^* = 0 \text{ (condition initiale)} \quad (2.15)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = 0.5, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = 0, -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 1 \text{ (sur la paroi de cylindre intérieur)} \quad (2.16)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = 1, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 0 \text{ (sur la paroi de cylindre extérieure)} \quad (2.17)$$

$$t^* > 0, z^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = 0, V_z^* = 1, T^* = 0 \text{ (à l'entrée de conduit)} \quad (2.18)$$

$$t^* > 0, z^* = L^* = 100, \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \text{ (à la sortie de conduit)} \quad (2.19)$$

Certaines constantes, les valeurs de référence et les paramètres de contrôle (dynamiques et thermiques) sont précisées dans le **Tableau 2.2**.

**Tableau 2.2 Les propriétés thermo physiques et paramètre de contrôle.**

$a$	0.0045 m
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
$\beta$	$1.8 \times 10^{-4}$ /K
$\mu_0$	$1.006 \times 10^{-3}$ kg/m.s
$\nu_0$	$1.006 \times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
$K_0$	0.597 W/m·K
$V_0$	$2.231 \times 10^{-2}$ m/s, $2 \times 2.231 \times 10^{-2}$ m/s, $3 \times 2.231 \times 10^{-2}$ m/s
$T_0$	293 K
$\rho_0$	1000.52 kg/m <sup>3</sup>
$C_p$	4182 J/kg·K

**2.3. Modélisation des propriétés physiques variables:**

Les fittings polynomiaux, assez précis, pour modéliser les variations de la viscosité et la conductivité thermique avec la température. Ces fittings sont précises les fonctions suivantes [4] :

$$\begin{aligned} \mu(T) = & 1.79 \times 10^{-3} - 5.861 \times 10^{-5}(T - 273.15) + 1.260 \times 10^{-6} \\ & \times (T - 273.15)^2 - 1.736 \times 10^{-8}(T - 273.15)^3 + 1.420 \times 10^{-10} \\ & \times (T - 273.15)^4 - 6.177 \times 10^{-13}(T - 273.15)^5 + 1.092 \times 10^{-15} \\ & \times (T - 273.15)^6 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$k(T) = -1.050 + 0.0108T - 2.172 \times 10^{-5}T^2 + 1.389 \times 10^{-8}T^3 \tag{2.21}$$

**2.4. Les Bilans thermique et massique :**

**2.4.1. Bilan thermique global:**

Le bilan thermique global est obtenu en intégrant l'équation de l'énergie sur le domaine d'écoulement. En régime permanent obtenu dans tous les cas de cette étude, le bilan thermique global montre que la puissance calorifique fournie au fluide par la paroi intérieure chauffée du cylindre est égale à la puissance calorifique fournie par le fluide environnant en dehors de la limite( Bassin versant). Le bilan global peut être décrit par une équation :

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \tag{2.21}$$

$q_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} d\eta dz^*$  La puissance thermique donnée (par conduction) au fluide à travers la paroi du cylindre elliptique intérieur.

$q_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=1} d\eta dz^*$  La puissance thermique échangée (par conduction) au niveau de la paroi du cylindre elliptique extérieur. Cette puissance est nulle sachant que le cylindre extérieur est adiabatique.

$q_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  La puissance thermique échangée par conduction a l'entrée du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considère.

$q_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=100} h_1^* h_2^* d\eta$  La puissance thermique échangée par conduction a la sortie du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considérés.

$q_5 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} V_{z\varepsilon}^* T_\varepsilon^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  La puissance thermique échangée par convection a l'entrée du conduit. Cette puissance est nulle sachant que  $T_e^* = 0$

$q_6 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} V_{zs}^* T_s^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  La puissance thermique échangée par convection a la sortie du conduit. Evidemment, cette puissance est très importante. A une section donnée du conduit (a un certain  $z^*$ ) la température moyenne est définie comme suit :

$$T_m^*(Z^*) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_Z^*(\varepsilon, \eta, z^*) T^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_Z^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta} \quad (2.22)$$

La température moyenne adimensionnelle est égale à zéro à l'entrée du conduit, et augmente linéairement dans la direction axiale. Cette augmentation linéaire est facilement démontrée par un bilan thermique global, appliqué à un tronçon du conduit de longueur  $z$ , et la considération de l'équation 2.21 ainsi, à la sortie du conduit, le bilan thermique global nous donne :

$$T_m^*(100) = \frac{100}{\text{RePr}} \frac{P_1^*}{S^*} + \frac{1}{\text{RePr}} \frac{1}{S^*} \int_0^{2\pi} \int_{0.5}^1 \left[ k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{100} - k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_0 \right] h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \approx \frac{100}{\text{RePr}} \frac{P_1^*}{S^*} \quad (2.23)$$

$P_1^*$ : Est le perimetre adimensionnel de cylinder intérieur

$$P_1^* = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 h^2(0.5) + \sin^2(\eta)} d\eta = 5.356 \quad (2.24)$$

$S^*$ : Est la surface adimensionnelle de la section droite du conduit (section découlement):

$$S^* = \int_{0.5}^1 \int_0^{2\pi} [\sin^2 h^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)] d\eta d\varepsilon = 3.851 \quad (2.25)$$

L'approximation dans l'équation, est justifiée par le fait que le terme négligé représente la différence de la diffusion thermique axial, entre l'entrée et la sortie de l'espace annulaire, que est très faible par rapport au terme qui représente le chauffage de cylindre intérieur.

**2.4.2. Bilan massique global:**

L'intégration de l'équation de continuité sur le domaine d'écoulement montre l'égalité des débits massiques (et volumiques) de l'entrée et la sortie du conduit :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} \rho V_{z\varepsilon}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} \rho V_{zs}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad (2.26)$$

**2.5. Le nombre de Nusselt:**

Le transfert thermique peut être quantifié par un nombre de Nusselt.

**2.5.1. Le nombre de Nusselt local :**

$$q_w = h(\eta, z)(T(0.5, \eta, z) - T_m(z)) = - \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} \quad (2.27)$$

De cette équation, il vient :

$$h(\eta, z) = \frac{- \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5}}{(T(0.5, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.28)$$

Si on définit le nombre de Nusselt local à la paroi du cylindre intérieur :

$$Nu(\eta, z) = \frac{ah(\eta, z)}{k_0} \quad (2.29)$$

Et avec l'équation donc l'équation on obtient :

$$Nu(\eta, z) = \frac{a \left[ - \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} \right]}{k_0(T(0.5, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.30)$$

Ou sous forme adimensionnelle :

$$Nu(\eta, z^*) = \frac{1}{[(0.5, \eta, z^*) - T_{m=}(z^*)]} \frac{-1}{h_1^*} K^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} = \frac{1}{([(0.5, \eta, z^*) - T_{m}^*(z^*)]} \quad (2.31)$$

**2.5.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne :**

Si on intègre le nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre intérieur et on divise le Résultat par ce périmètre, on obtient le nombre de Nusselt axial:

$$Nu(z^*) = \frac{1}{P_1^*} \int_0^{2\pi} Nu(\eta, z^*) \sqrt{\sinh^2(0.5) + \sin^2(\eta)} d\eta \quad (2.32)$$

Si on intègre le nombre de Nusselt axial sur la longueur du cylindre intérieur et on divise le résultat par cette longueur, on obtient le nombre de Nusselt moyen du conduit (un nombre réel positif):

$$\bar{Nu} = \frac{1}{100} \int_0^{100} Nu(z^*) dz^* \quad (2.33)$$



## Chapitre III

# L'étude Numérique

### 3.1. Introduction :

Ce chapitre constitue plusieurs parties, dans la première partie concernent l'étude numérique de problème posé dans la deuxième chapitre. La méthode numérique a été utilisée pour la résolution du problème et aussi le maillage utilisé. Dans la deuxième partie on a parlé le détail de la discrétisation de l'équation de continuité et l'équation de l'énergie, l'équation de quantité de mouvement suivant la direction azimutale et les conditions aux limites et initial. On a terminé ce chapitre par les critères de convergence et montre le bilan énergétique et thermique.

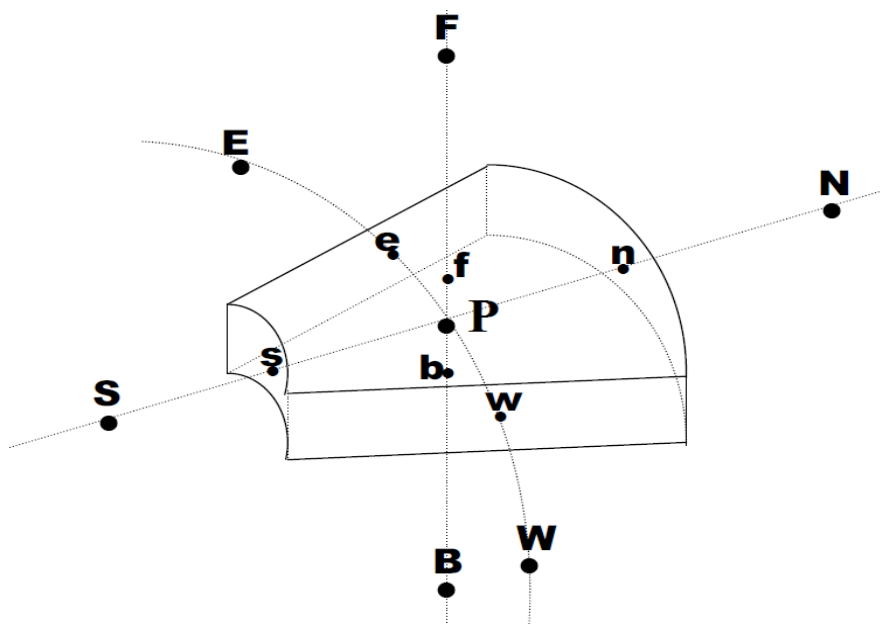
### 3.2. Le Maillage :

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine physique étudié en un domaine de calcul qui se compose d'un nombre fini de volumes. Chaque volume sera repéré par un nœud et limité par six faces. La **Figure 3.1.** illustre un volume de contrôle typique. Le point P situé au centre du volume de contrôle typique est entouré dans chaque direction par deux faces et deux nœuds dans chaque direction.

\*pour la direction radiale, les points aux nœuds sont notés N, S et les faces sont repérées par n et s.

\*pour la direction azimutale, les points aux nœuds sont notés E, W et les faces sont repérées par e et w.

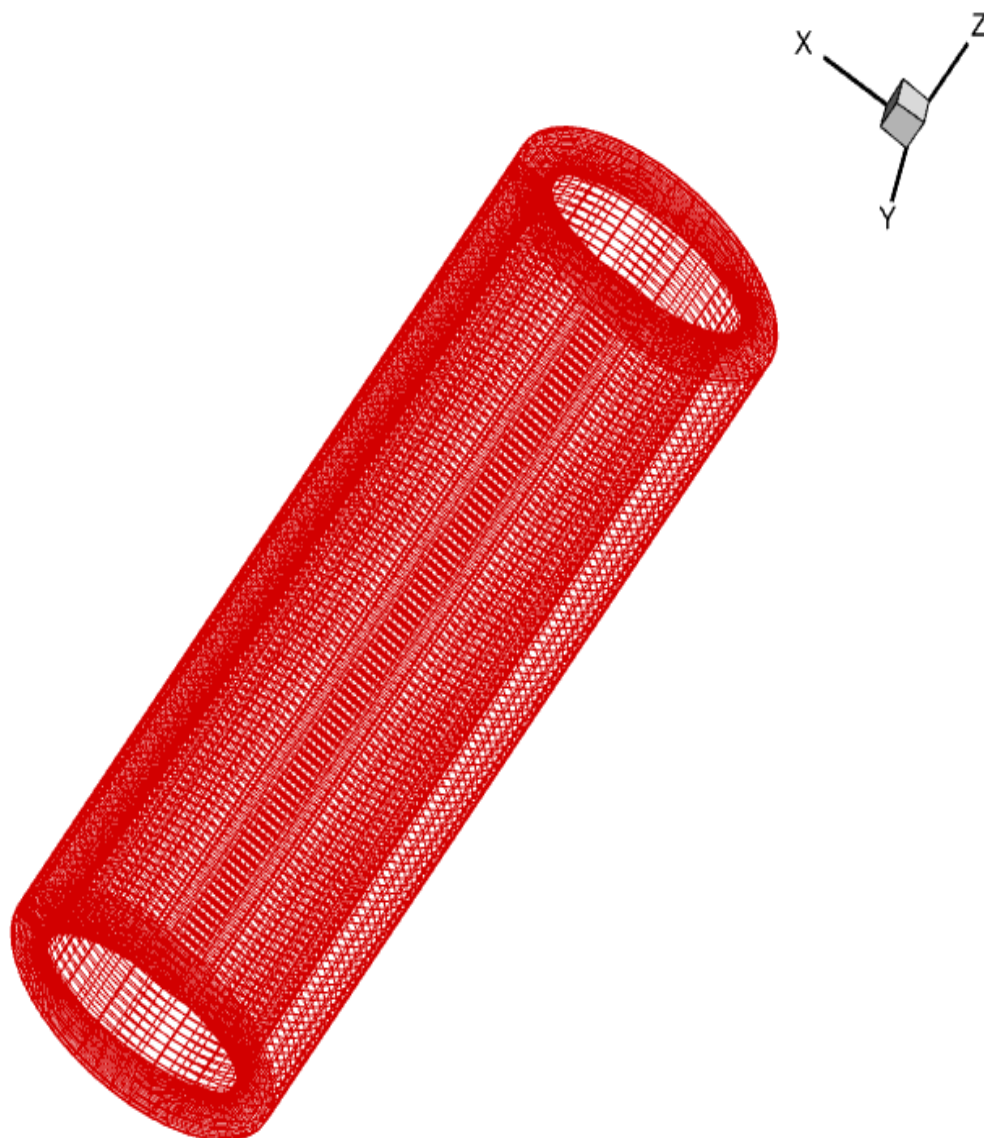
\* finalement suivant la direction axiale, les nœuds sont notés F, B et les faces sont notées f, b.



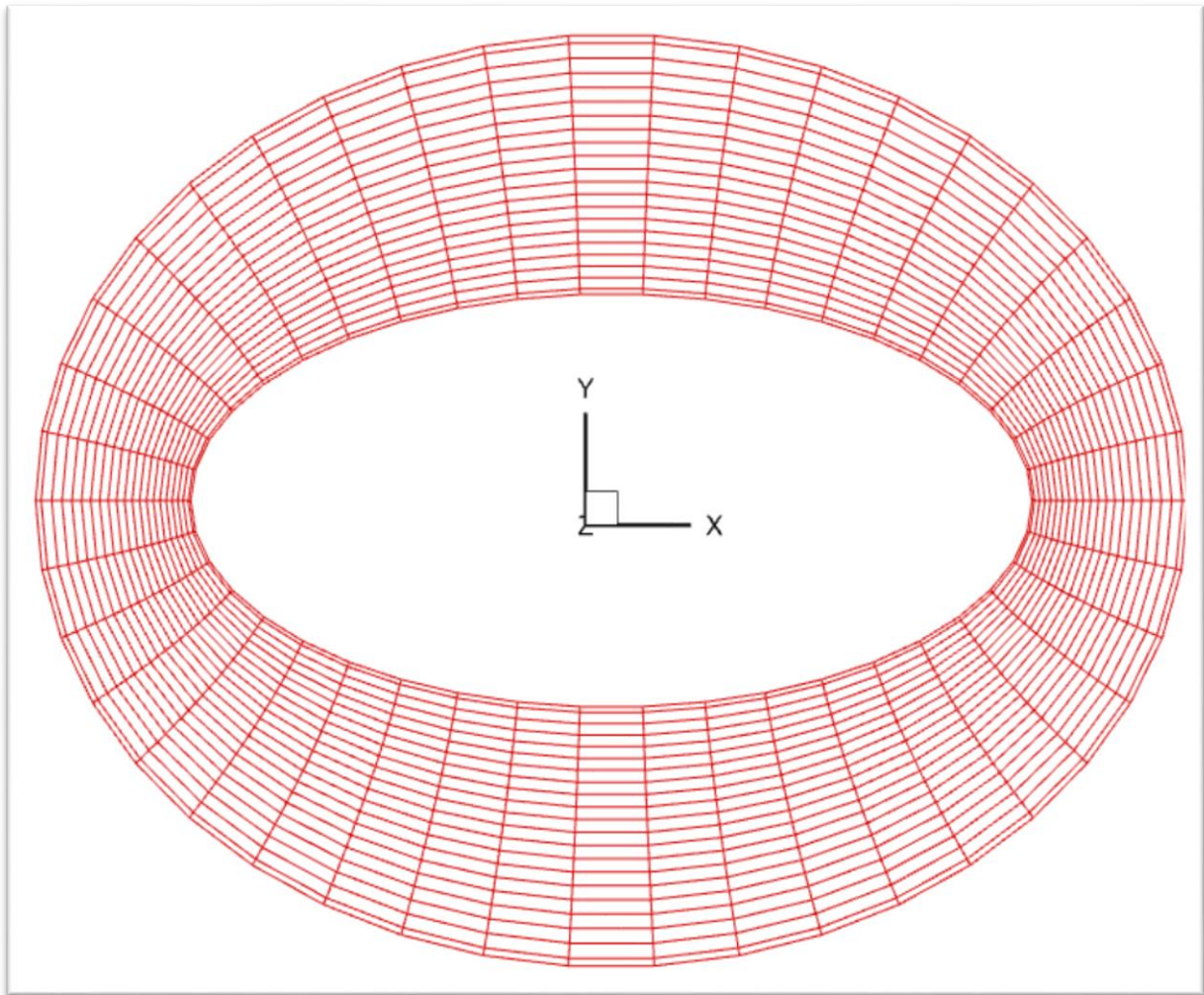
**Figure 3.1.** représentation de volume fini.

Le maillage que nous avons choisi pour faire notre étude est schématiquement représentée sur la **Figure.3.2**. Il est composé de 32 points suivant la direction radiale, 102 points suivant la direction axiale et 85 points suivant la direction azimutale. Tout maillage plus dense que celui qu'on a utilisé ( $32 \times 102 \times 85$ ) dépasse les capacités de stockage des meilleurs ordinateurs qui nous sont disponibles et des temps de calcul qui dépassent les durées pratiques. Toutefois, nous pensons que notre maillage peut être amélioré par un raffinement, surtout suivant la direction azimutale et axiale, pour mieux discerner des variations qualitative et quantitative importantes de certains phénomènes.

a)



b)



**Figure.3.2.** Le maillage numérique utilisé et sa projection en coupe. La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.

### **3.3. Détails de discrétisation :**

Les discrétisations de l'équation de continuité et de l'équation de l'énergie sont faites dans un maillage non décalé dont les représentations surfaciques sont illustrées dans les **Figures .3.3- 3.5**. Pour la clarté de la présentation, les étoiles des variables non dimensionnelles sont enlevées.

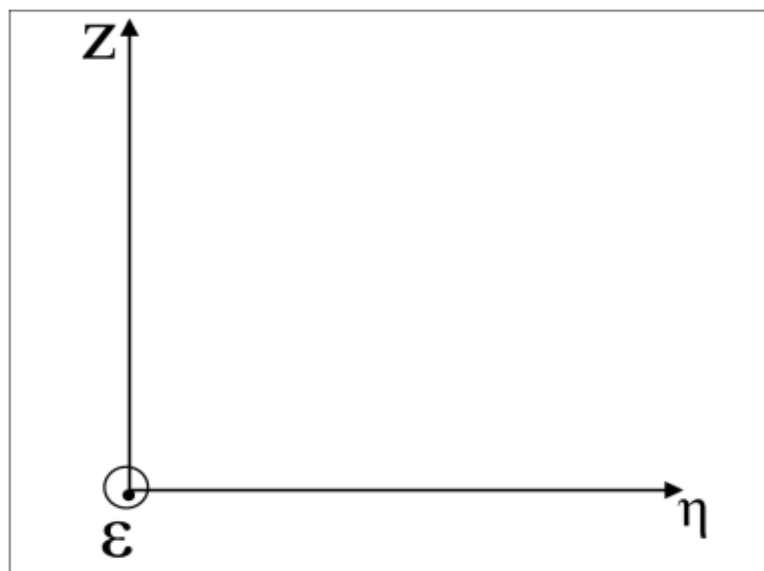
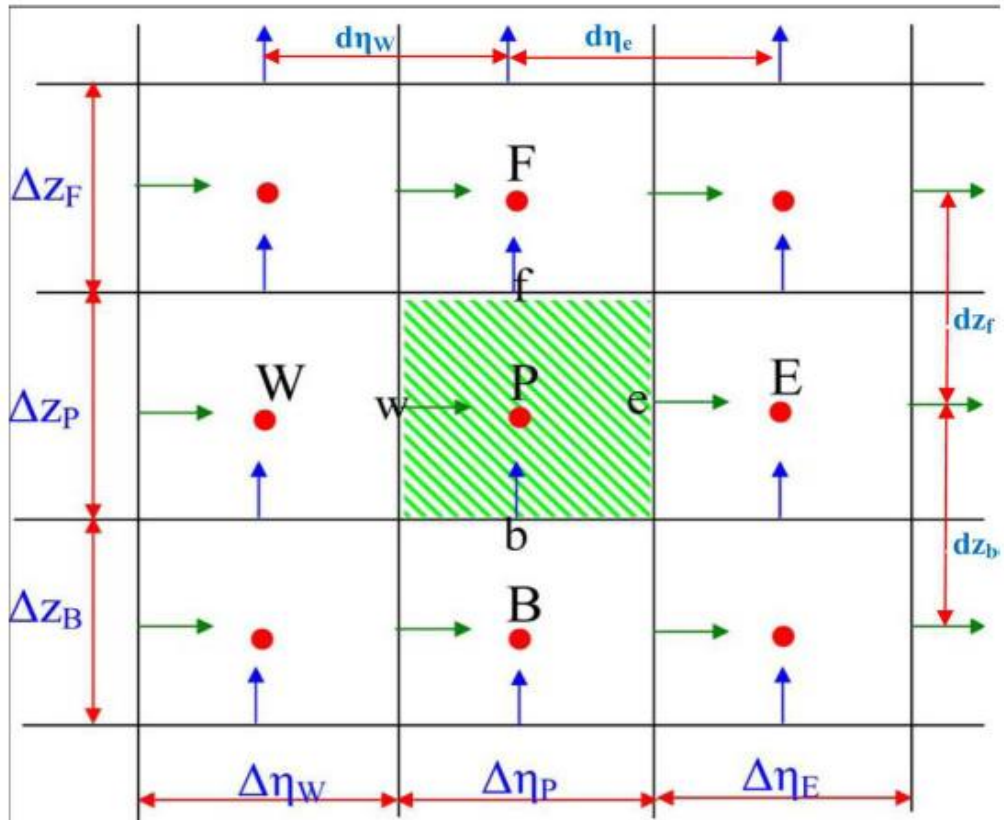


Figure.3.5. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta, z$ )

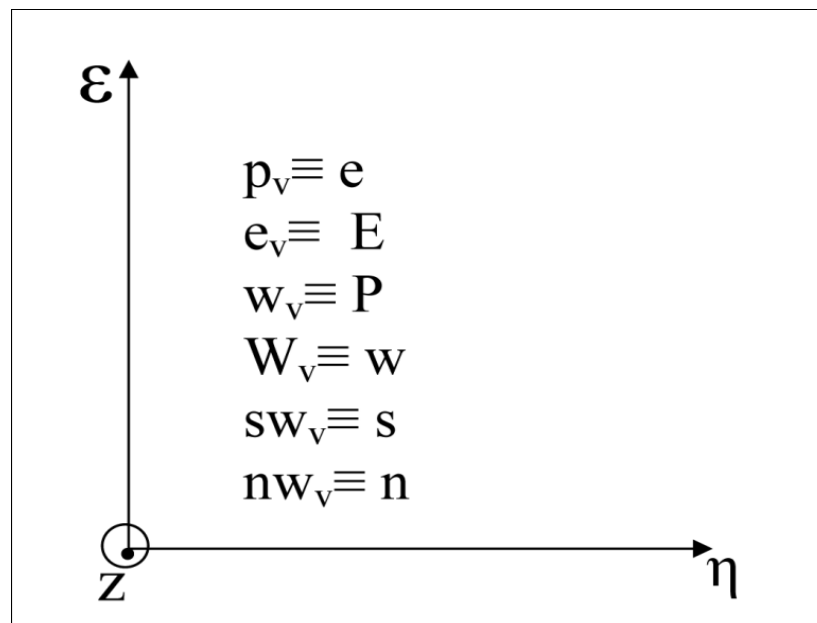
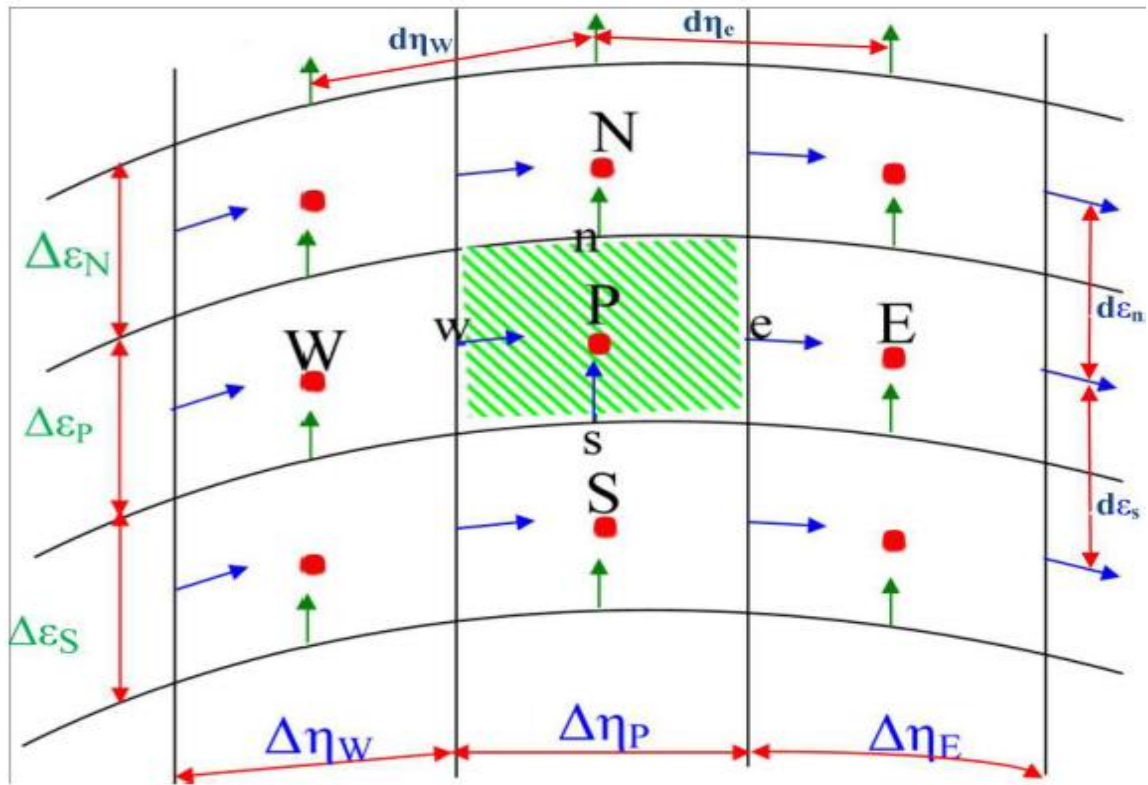


Figure.3.6. Maillage suivant les coordonnées  $(\eta, \epsilon)$ .

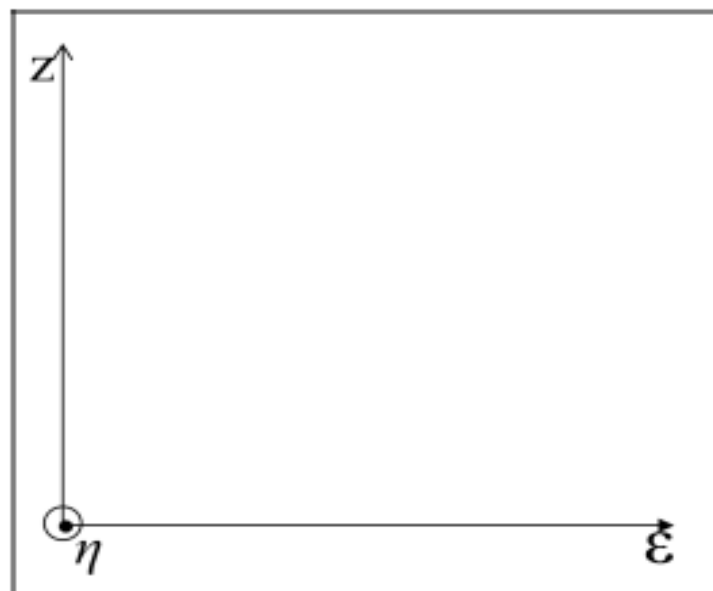
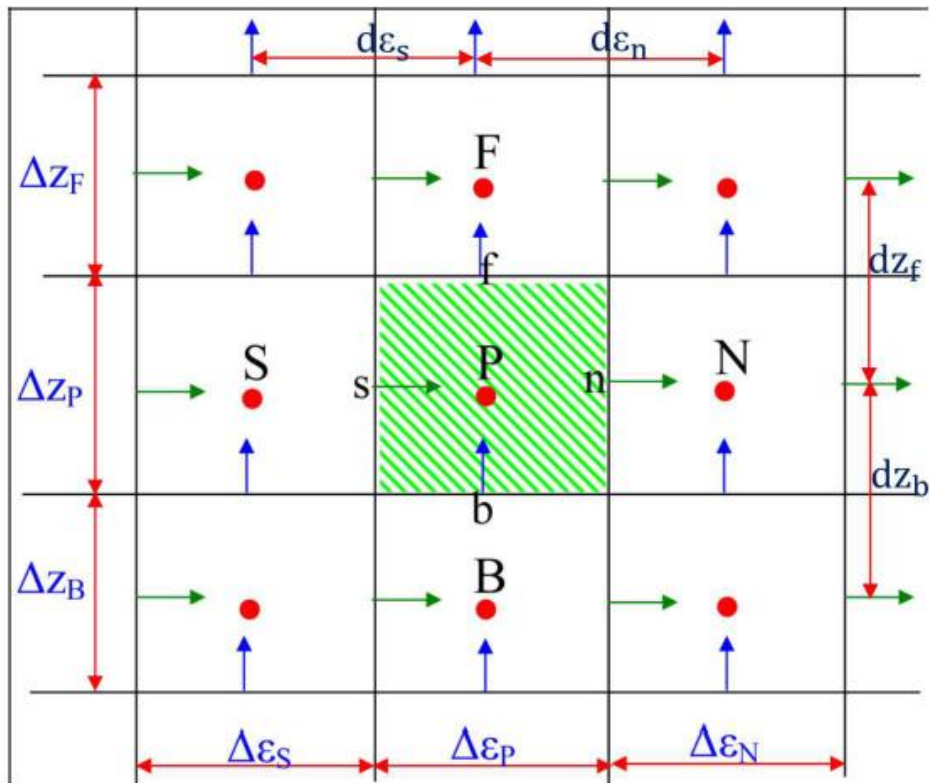


Figure.3.7. Maillage suivant les coordonnées  $(z, \epsilon)$ .

**3.3 .1.Discrétisation de l'équation de continuité :**

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.1)$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de continuité par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini. Tous les termes dépendants du temps sont évalués au temps  $(t + \Delta t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = 0 \quad (3.2) \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_2 V_\varepsilon]_S^n \Delta \eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_S^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 V_\eta]_w^e \Delta \varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 h_2 V_z]_b^f \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\ & = [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \end{aligned}$$

Le résultat de la discrétisation est:

$$\begin{aligned} & [h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_S^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p + [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p + \\ & [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p = 0 \quad (3.3) \end{aligned}$$

**3.3 .2. Discrétisation de l'équation de l'énergie :**

Soit l'équation de l'énergie

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] = \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de l'énergie par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini.

La discrétisation temporelle du terme transitoire est faite par le schéma **d'Euler-Backward** ayant une précision du second ordre :



$$\int_S \int_w \int_b \frac{\partial T}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3T_p^{t+\Delta t} - 4T_p^t + T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** (ayant une précision du second ordre) et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées (ayant une précision du second ordre) :

$$\begin{aligned} \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon T]_S^n |^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon T|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon T|_s^{t+\Delta t}] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_n^t \left( \frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^t \left( \frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_n^{t-\Delta t} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta T]_w^e |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta T|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta T|_w^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ h_{1e} V_\eta |_e^t \left( \frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^t \left( \frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ h_{1e} V_\eta |_e^{t-\Delta t} \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z T]_b^f |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= [h_1 h_2 V_z T|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z T|_b^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= 2 \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_f^t \left( \frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^t \left( \frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &\quad - \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_f^{t-\Delta t} \left( \frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des termes diffusifs est semi implicite parce que la discrétisation de la conductivité thermique (dépendante de la température) est faite avec le schéma **d'Adam-Bashforth** alors que la discrétisation temporelle de la température est implicite. La discrétisation spatiale du terme diffusif suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{K}{\text{RePr}} \left[ \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{K}{\text{RePr}} \left[ \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_n^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K_n^{t+\Delta t} \left( \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - K_s^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K_e^{t+\Delta t} \left( \frac{T_E^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \right. \\
&\quad \left. - K_w^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_f^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad \left. - h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b^{t+\Delta t} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K_f^{t+\Delta t} \left( \frac{T_F^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{dz_f} \right) \right. \\
&\quad \left. - K_b^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

On réarrange l'équation de l'énergie sous la forme standard suivante :

$$A_p T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S K_S^{t+\Delta t} + A_E K_E^{t+\Delta t} + A_W K_W^{t+\Delta t} + A_F K_F^{t+\Delta t} + A_B K_B^{t+\Delta t} + S \tag{3.5}$$

Les conductivités sont discrétisées avec le schéma **d'Adam-Bashforth** :

$$K_n^{t+\Delta t} = 2K_n^t - K_n^{t-\Delta t}$$

$$K_s^{t+\Delta t} = 2K_s^t - K_s^{t-\Delta t}$$

$$K_e^{t+\Delta t} = 2K_e^t - K_e^{t-\Delta t}$$

$$K_w^{t+\Delta t} = 2K_w^t - K_w^{t-\Delta t}$$

$$K_f^{t+\Delta t} = 2K_f^t - K_f^{t-\Delta t}$$

$$K_b^{t+\Delta t} = 2K_b^t - K_b^{t-\Delta t}$$

On note, que quelque soit le temps, on n'a pas les valeurs de la conductivité ( $k_s, k_n, k_e, k_w, k_f, k_b$ ) aux six faces du volume fini typique. Ce qu'on a sont les valeurs des conductivités aux centres du volume fini et des six volumes finis qui lui sont adjacents : ( $k_s, k_N, k_E, k_W, k_F, k_B$ ). La détermination des conductivités des faces est basé sur la continuité du flux de chaleur entre volumes adjacents, à travers les faces qui les séparent. Un volume qu'elles séparent. Ainsi, on peut démontrer qu'à chaque temps :

$$k_e = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_E}{k_E}}$$

$$k_w = \frac{2d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_W}{k_W}}$$

$$k_n = \frac{2d\eta_n}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_N}{k_N}}$$

$$k_s = \frac{2d\eta_s}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_S}{k_S}}$$

$$k_f = \frac{2d\eta_f}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_F}{k_F}}$$

$$k_b = \frac{2d\eta_b}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_B}{k_B}}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont :

$$A_N = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_n^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \Delta\eta_p \Delta z_p, \quad A_S = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_s^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \Delta\eta_p \Delta z_p$$

$$A_E = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_e^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p, \quad A_W = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_w^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p$$

$$A_F = \frac{1}{\text{RePr}} h_{1f} h_{2f} \frac{K_f^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p, \quad A_B = \frac{1}{\text{RePr}} h_{1b} h_{2b} \frac{K_b^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p$$

$$A_p = \frac{3}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p + A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B$$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{4T_p^t - T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \Delta z_p - 2 \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_{n}^t \left( \frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_{s}^t \left( \frac{T_p^t + T_s^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_{n}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_{s}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[ h_{1e} V_\eta |_{e}^t \left( \frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_{w}^t \left( \frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{1e} V_\eta |_{e}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_{w}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_{f}^t \left( \frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_{b}^t \left( \frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& + \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_{f}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_{b}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

### 3.3.3. Discrétisation de l'équation dU quantité de mouvement suivant $\eta$ :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant  $\eta$ . Représentent les projections du maillage sur les surfaces  $(\varepsilon, \eta)$  et  $(\eta, z)$ . La projection sur la surface  $(\varepsilon, z)$  est similaire a celle du maillage non décalé. Soit l'équation de la quantité de mouvement suivant  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\
& = - \frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \\
& \left. - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sinh(\varepsilon) \cosh(\eta) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume de contrôle décalé .

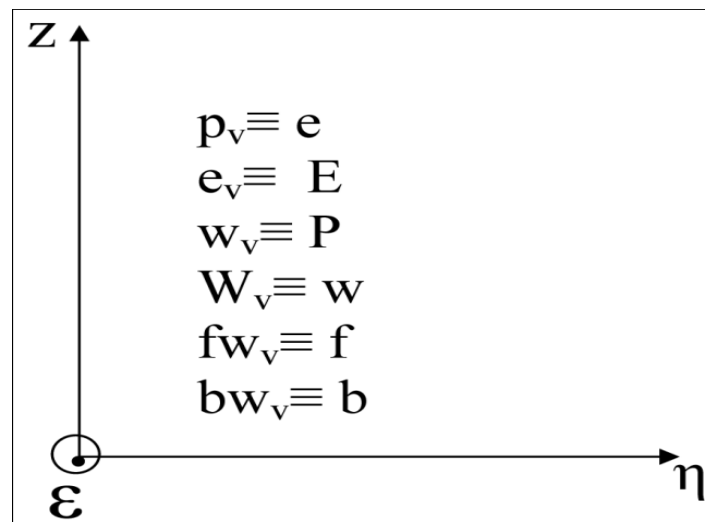
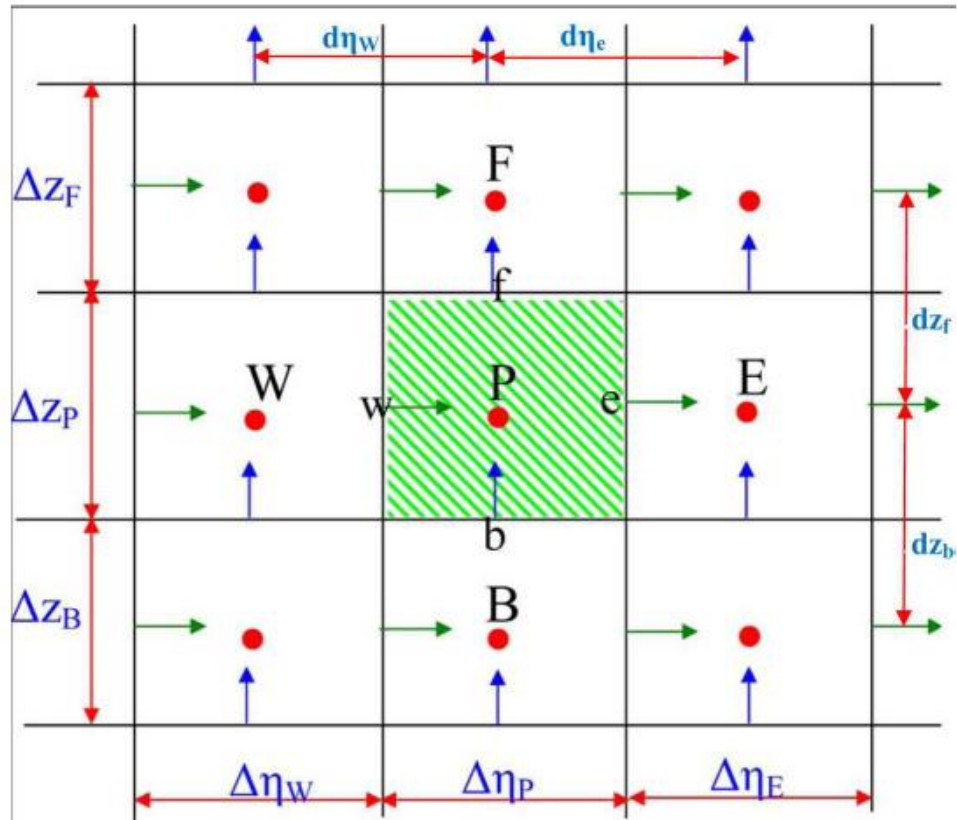


Figure3. 8 : Maillage suivant les coordonnées ( $\eta, z$ )

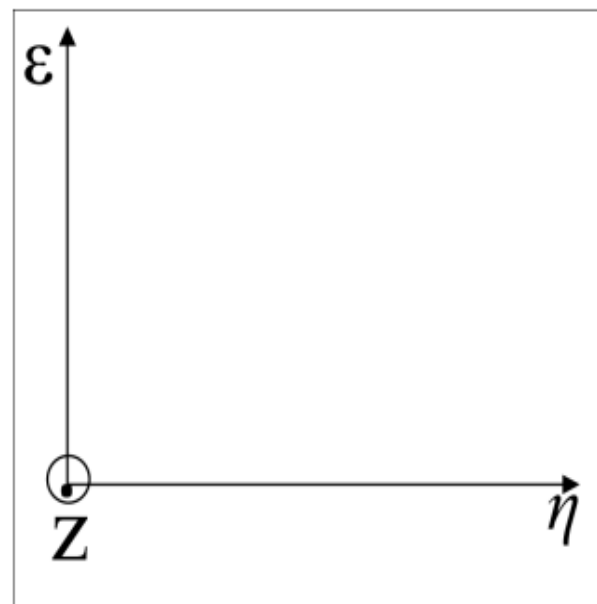
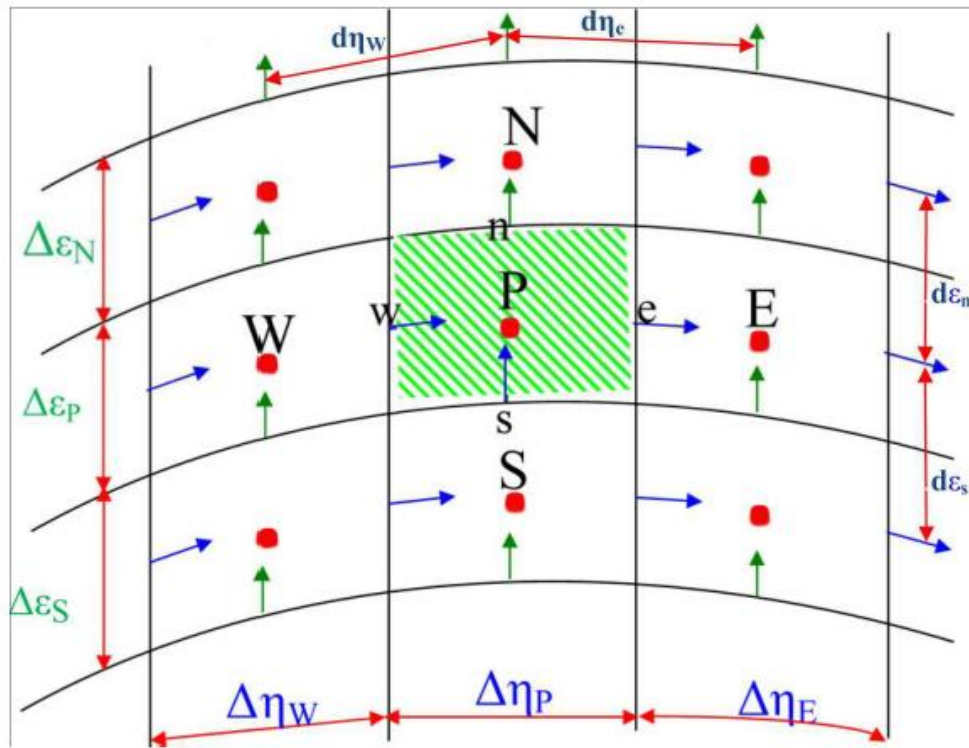


Figure 3.9 : Maillage suivant les coordonnées  $(\eta, z)$

La discrétisation temporelle du terme transitoire suit le schéma d'Euler-Backward. La vitesse est localisée au centre du volume fini décale suivant.

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - 4V_{\eta P_V}^t + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p_V} h_{2p_V} d\varepsilon_p \Delta\eta_e \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont valeurs exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume fini

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_e \Delta z_p \\ &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{n_V}^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{s_V}^{t+\Delta t} \Big] \Delta\eta_e \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_u}^t + V_{\varepsilon n w_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\eta_e \Delta z_p \\ &- \left[ \begin{aligned} &h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{e_V}^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta V_\eta]_{w_V}^{t+\Delta t} \Big] d\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &- \left[ \begin{aligned} &h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{f_V}^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{zfe_V}^t + V_{zfw_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{zbe_V}^t + V_{zbw_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta B_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&- \left[ \begin{aligned} &h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{zfe_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta f w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{zbe_V}^{t-\Delta t} + V_{z b w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&= 2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon nw_V}^t + V_{\varepsilon se_V}^t + V_{\varepsilon sw_V}^t}{4} \right) V_{\eta P_V}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&- \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&= -2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon nw_V}^t + V_{\varepsilon se_V}^t + V_{\varepsilon sw_V}^t}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&+ \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de pression est implicite. La position de la pression est exacte (sans approximation).

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{h_1 h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -[P]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= -[P_{e_V}^{t+\Delta t} - P_{w_V}^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p
\end{aligned}$$



La discrétisation temporelle des quatre premiers termes diffusifs est semi-implicite parce que la discrétisation temporelle des vitesses est implicite alors que celle des viscosités est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation temporelle des autres termes diffusifs est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation spatiale des termes diffusifs est faite avec le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement a leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume.

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} \mu_{n_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta N_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \\ -\mu_{s_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta S_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \end{bmatrix} d\eta_e \Delta z_p$$

$$\mu_{n_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_V}^t - \mu_{n_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{s_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{s_V}^t - \mu_{s_V}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \begin{bmatrix} \mu_{e_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta E_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_E} \\ -\mu_{w_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta W_V}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_p} \end{bmatrix} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\mu_{e_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_V}^t - \mu_{e_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{w_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{w_V}^t - \mu_{w_V}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p d\eta_e$$

$$= \frac{\mu}{Re} \begin{bmatrix} h_{1f_V} h_{2f_V} \frac{V_{\eta F_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{dz_f} \\ -h_{1b_V} h_{2b_V} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_V}^{t+\Delta t}}{dz_b} \end{bmatrix} \Delta \varepsilon_p d\eta_e$$

$$\mu_{f_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_V}^t - \mu_{f_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{b_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_V}^t - \mu_{b_V}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\ &= \frac{1}{Re h_{1P_V} h_{2P_V}} V_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\mu_{P_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_V}^t - \mu_{P_V}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\ &= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{f_V}^t h_{1f_V} \left( \frac{V_{zfeV}^t - V_{zfwV}^t}{d\eta_e} \right) \\ -\mu_{b_V}^t h_{1b_V} \left( \frac{V_{zbeV}^t - V_{zbwV}^t}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\ &= \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{f_V}^{t-\Delta t} h_{1f_V} \left( \frac{V_{zfeV}^{t-\Delta t} - V_{zfwV}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \right) \\ -\mu_{b_V}^{t-\Delta t} h_{1b_V} \left( \frac{V_{zbeV}^{t-\Delta t} - V_{zbwV}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \end{aligned}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{n_V}^t h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t - V_{\varepsilon n w_V}^t}{h_{1neV} - h_{1n w_V}} \right) \\ -\mu_{s_V}^t h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon seV}^t - V_{\varepsilon s w_V}^t}{h_{1seV} - h_{1s w_V}} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$-\frac{1}{Re} \begin{bmatrix} \mu_{n_V}^{t-\Delta t} h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon nw_V}^{t-\Delta t}}{h_{1ne_V} - h_{1nw_V}} \right) \\ -\mu_{s_V}^{t-\Delta t} h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{h_{1se_V} - h_{1sw_V}} \right) \end{bmatrix} d\eta_e \Delta z_p$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-1}{Re} \left[ \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p \\ &= \frac{-2}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_V}^t}{h_{2n_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_{s_V}^t}{h_{2s_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \\ &+ \frac{1}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_V}^{t-\Delta t}}{h_{2n_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_{s_V}^{t-\Delta t}}{h_{2s_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{V_\eta}{h_2} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{2\mu_{P_V}^t}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{1}{h_{2n_V}} \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{h_{2s_V}} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$- \frac{\mu_{P_V}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{1}{h_{2n_V}} \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{h_{2s_V}} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2\mu_{pV}^t}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{1eV}} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1wV}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$- \frac{\mu_{pV}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{1eV}} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1wV}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\int_{sV}^{nV} \int_{wV}^{eV} \int_{bV}^{fV} \frac{-2\mu}{Re h_1 h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^{t+\Delta t} \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} [V_\varepsilon]_{sV}^{nV} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= 2 \left[ \begin{array}{c} \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^t \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon nwV}^t}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\varepsilon seV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$- \left[ \begin{array}{c} \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$\int_{sV}^{nV} \int_{wV}^{eV} \int_{bV}^{fV} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{wV}^{eV} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} 2\mu_{eV}^t \frac{1}{h_{2eV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{eV} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t}{2} \right) \\ - 2\mu_{wV}^t \frac{1}{h_{2wV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wV} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$- \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} 2\mu_{eV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2eV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{eV} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - 2\mu_{wV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2wV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wV} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle du terme de la poussée thermique est explicite et sa discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{GrT \sinh(\varepsilon) \cos(\eta)}{Re^2 \sqrt{h_1 h_2}} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\
 &= \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_V} h_{2P_V}} \sinh(\varepsilon_{P_V}) \cos(\eta_{P_V}) T_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 &= 2 \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_V} h_{2P_V}} \sinh(\varepsilon_{P_V}) \cos(\eta_{P_u}) \left( \frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 &\quad - \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_V} h_{2P_V}} \sinh(\varepsilon_{P_V}) \cos(\eta_{P_V}) \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) d\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

Le résultat de la discrétisation spatiotemporelle est mis sous la forme standard:

$$A_{P_V} V_{\eta P_V}^{t+\Delta} = A_{N_V} V_{\eta N_V}^{t+\Delta} + A_{S_V} V_{\eta S_V}^{t+\Delta} + A_{E_V} V_{\eta E_V}^{t+\Delta} + A_{W_V} V_{\eta W_V}^{t+\Delta} + A_{F_V} V_{\eta F_V}^{t+\Delta} + A_{B_V} V_{\eta B_V}^{t+\Delta} + S_V + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \quad (3.7)$$

Ou

$$A_{P_V} V_{\eta P_V}^{t+\Delta} = A_{N_V} V_{\eta N_V}^{t+\Delta} + A_{S_V} V_{\eta S_V}^{t+\Delta} + A_{E_V} V_{\eta E_V}^{t+\Delta} + A_{W_V} V_{\eta W_V}^{t+\Delta} + A_{F_V} V_{\eta F_V}^{t+\Delta} + A_{B_V} V_{\eta B_V}^{t+\Delta} + S_V \quad (3.8)$$

$$A_{N_V} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{n_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} d\eta_e \Delta Z_p, \quad A_{S_V} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{s_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} d\eta_e \Delta Z_p$$

$$A_{E_V} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{e_V}^{t+\Delta t}}{\Delta\eta_E} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p, \quad A_{W_V} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{w_V}^{t-\Delta t}}{d\eta_p} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p$$

$$A_{F_V} = \frac{1}{Re} h_{1f_V} h_{2f_V} \frac{\mu_{f_V}^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p d\eta_e, \quad A_{B_V} = \frac{1}{Re} h_{1b_V} h_{2b_V} \frac{\mu_{b_V}^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p d\eta_e$$

$$A_{P_V} = \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_V} h_{2P_V} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p + \frac{1}{Re} \frac{\mu_{P_V}^{t+\Delta t}}{h_{1P_V} h_{2P_V}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p$$

$$+ A_{N_V} + A_{S_V} + A_{E_V} + A_{W_V} + A_{F_V} + A_{B_V}$$

$$S = S_V + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p$$

$$S_V = \frac{4V_{\eta P_V}^t - V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_V} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[ h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^t + V_{\varepsilon n_{wV}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s_{eV}}^t + V_{\varepsilon s_{wV}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \\
& + \left[ h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n_{wV}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{wV}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \\
& -2 \left[ h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& -2 \left[ h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{z f_{eV}}^t + V_{z f_{wV}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{z b_{eV}}^t + V_{z b_{wV}}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta B_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
& + \left[ h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{z f_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{z f_{wV}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{z b_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{z b_{wV}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
& -2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^t + V_{\varepsilon n_{wV}}^t + V_{\varepsilon s_{eV}}^t + V_{\varepsilon s_{wV}}^t}{4} \right) V_{\eta P_V}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& + \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n_{wV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{wV}}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& +2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^t + V_{\varepsilon n_{wV}}^t + V_{\varepsilon s_{eV}}^t + V_{\varepsilon s_{wV}}^t}{4} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^t + V_{\varepsilon n_{wV}}^t + V_{\varepsilon s_{eV}}^t + V_{\varepsilon s_{wV}}^t}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& - \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n_{wV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{wV}}^{t-\Delta t}}{4} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon n_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n_{wV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{eV}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{wV}}^{t-\Delta t}}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{f_V}^t h_{1f_V} \left( \frac{V_{z f_{eV}}^t - V_{z f_{wV}}^t}{d\eta_e} \right) - \mu_{b_V}^t h_{1b_V} \left( \frac{V_{z b_{eV}}^t - V_{z b_{wV}}^t}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{Re} \left[ \mu_{fv}^{t-\Delta t} h_{1fv} \left( \frac{V_{zfev}^{t-\Delta t} - V_{zfwv}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \right) - \mu_{bv}^{t-\Delta t} h_{1bv} \left( \frac{V_{zbev}^{t-\Delta t} - V_{zbwv}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{nv}^t h_{2nv} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^t}{h_{1nev}} \frac{V_{\varepsilon nwv}^t}{h_{1nwv}} \right) - \mu_{sv}^t h_{2sv} \left( \frac{V_{\varepsilon sev}^t}{h_{1sev}} \frac{V_{\varepsilon swv}^t}{h_{1swv}} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{nv}^{t-\Delta t} h_{2nv} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t}}{h_{1nev}} \frac{V_{\varepsilon nwv}^{t-\Delta t}}{h_{1nwv}} \right) - \mu_{sv}^{t-\Delta t} h_{2sv} \left( \frac{V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{h_{1sev}} \frac{V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t}}{h_{1swv}} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{-2}{Re} \left[ \frac{\mu_{nv}^t}{h_{2nv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{nv} \frac{(V_{\eta nv}^t + V_{\eta pv}^t)}{2} - \frac{\mu_{sv}^t}{h_{2sv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{sv} \frac{(V_{\eta pv}^t + V_{\eta sv}^t)}{2} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\mu_{nv}^t}{h_{2nv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{nv} \frac{(V_{\eta nv}^{t-\Delta t} + V_{\eta pv}^{t-\Delta t})}{2} - \frac{\mu_{sv}^{t-\Delta t}}{h_{2sv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{sv} \frac{(V_{\eta pv}^{t-\Delta t} + V_{\eta sv}^{t-\Delta t})}{2} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{2}{Re} \mu_{pv}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{2nv}} \left( \frac{V_{\eta nv}^t + V_{\eta pv}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2sv}} \left( \frac{V_{\eta pv}^t + V_{\eta sv}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{Re} \mu_{pv}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{2nv}} \left( \frac{V_{\eta nv}^{t-\Delta t} + V_{\eta pv}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2sv}} \left( \frac{V_{\eta pv}^{t-\Delta t} + V_{\eta sv}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{2}{Re} \mu_{pv}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{1ev}} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^t + V_{\varepsilon sev}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1wv}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwev}^t + V_{\varepsilon swv}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& - \frac{2}{Re} \mu_{pv}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{1ev}} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1wv}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& + 2 \frac{-2}{Re} \mu_{pv}^t \frac{1}{h_{1pv}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pv} \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^t + V_{\varepsilon sev}^t}{2} \right) - \frac{(V_{\varepsilon seev}^t + V_{\varepsilon swv}^t)}{2} \right] \Delta \eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{-2}{Re} \mu_{pv}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1pv}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pv} \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left( \frac{V_{\varepsilon seev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{2}{Re} \left[ 2 \mu_{ev}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2ev}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{ev} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{2} \right) - 2 \mu_{wv}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2wv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wv} \frac{(V_{\varepsilon nwev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t})}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{Re} \left[ 2\mu_{ev}^t \frac{1}{h_{2ev}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{ev} \left( \frac{(V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t)}{2} \right) - 2\mu_{wv}^t \frac{1}{h_{2wv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wv} \left( \frac{(V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon swV}^t)}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& - \frac{1}{Re} \left[ 2\mu_{ev}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2ev}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{ev} \left( \frac{(V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t})}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 2\mu_{wv}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2wv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wv} \left( \frac{(V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t})}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + 2 \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1Pv} h_{2Pv}} \sinh(\varepsilon_{Pv}) \cos(\eta_{Pv}) \left( \frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& - \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1Pv} h_{2Pv}} \sinh(\varepsilon_{Pv}) \cos(\eta_{Pv}) \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle de la viscosité est explicite selon le schéma **d'Adam-Bashforth**. Concernant la discrétisation spatiale de la viscosité au centre et aux interfaces du volume décale, elle est faite avec certaines approximations qui assurent la continuité et l'évaluation correcte des contraintes visqueuses aux endroits indiqués. Ces approximations sont mieux présentées avec une notation indicielle des viscosités qui sont stockées dans les centres des volumes finis typiques (non décales). Dans ce qui suit, la notation  $(i, j, k)$  fait référence à un point centre dans un volume fini typique ; avec le premier, le deuxième et le troisième indice liés aux positions radiale, axiale et angulaire, respectivement. Au centre et aux faces du volume fini décale (suivant  $\eta$ ), les viscosités explicites sont :

$$\mu_{Pv}^t = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta\eta_p}{\mu^{t(i,j,k)}}}$$

$$\mu_{Pv}^{t-\Delta t} = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta\eta_p}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}}$$

$$\mu_{ev}^t = \mu^t(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{ev}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{wv}^t = \mu^t(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{wv}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$



$$\mu_{nV}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{nV}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{sV}^t = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{sV}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{fV}^t = \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t(i,j+1,k)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t(i,j+1,k+1)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{fV}^{t-\Delta t} = \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t-\Delta t(i,j+1,k)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t-\Delta t(i,j+1,k+1)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{bV}^t = \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t(i,j-1,k)}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t(i,j-1,k+1)}}}$$

$$\mu_{bV}^{t-\Delta t} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t-\Delta t(i,j-1,k)}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t-\Delta t(i,j-1,k+1)}}}$$

### 3.4. Convergence :

A partir des conditions initiales, la marche dans le temps est continue, avec des pas de temps  $1 \times 10^{-3}$  jusqu'à l'atteinte du régime permanent. En ce régime, les champs dynamique et thermique sont invariants dans le temps. Dans tous les cas on a obtenu une très bonne satisfaction du bilan massique global (l'égalité des débits entrant et sortant). La valeur du débit entrant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{Z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.8909 \quad (3.9)$$

Et celle du débit sortant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{z_s}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.8509 \quad (3.10)$$

Ce pendant, la satisfaction du bilan thermique global n'est obtenu qu'avec une certaine précision. Ce bilan précise par l'équation (2.31) est discute dans le deuxième chapitre ou il a été mentionne que pour tous les cas considères, les termes  $q_2, q_3, q_4$  et  $q_5$  sont négligeables. Ce qui a été démontré par les calculs. Donc, la satisfaction du bilan thermique global est vérifiée par l'égalité des termes  $q_1$  (constant) et  $q_6$ . Dans tous les cas la valeur de  $q_1$  est 0.7652. La valeur de  $q_1$  varie suivant les cas, comme il est précise dans le **tableau 3.1**. Dans ce tableau, on rapporte que la valeur absolue de la différence relative entre  $q_1$  et  $q_6$  ne dépassent pas 1.8%, et donc on conclue que la satisfaction du bilan thermique global est obtenue avec une bonne précision.

	Re=100	Re=200	Re=300
$q_1$	0.76519	0.38259	0.25506
$q_6$	0.75041	0.37991	0.24588
Erreur = $\left  \frac{q_1 - q_6}{q_1} \right $ (%)	1.93%	0.7%	3.59%

**Tableaux 3.1.**  $q_1$  et  $q_6$  avec Le pourcentage d'erreur dans les trois cas.

**Chapitre IV**

# Résultats Et Discussions

#### 4.1. Introduction :

Dans ce chapitre on a présenté en détail les résultats numériques obtenus à partir de programme généré dans logiciel Fortran pour les trois cas de la convection forcée. Avec des propriétés thermophysiques variables. Et aussi on donne des commentaires sur les figures représentent la variation de la vitesse axial et la température et on terminera notre discussion par le nombre de Nusselt axial.

#### 4.2. Pour le premier cas : $Re = 100$

##### 4.2.1. l'écoulement axial :

La **Figure 4.1.** présente la variation radial et angulaire de la vitesse axial dans les quatre positions axial ( $Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$ ). à partir de l'entrée du cylindre  $Z^* = 0$  jusqu'à  $Z^* = 22.5$  l'écoulement se développe uniformément dans la direction axiale et aussi on a des variations suivant les autres directions radial et azimuthal. Des couches limite se forment sur la paroi intérieure de cylindre extérieur et la paroi extérieure de cylindre intérieur, l'épaisseur de cette couche limite augmente axialement. Lorsque on arrive a  $Z^* = 50.5$  jusqu'à La sortie l'écoulement secondaire disparaît après nous obtient la longueur d'entrée hydrodynamique et la direction d'écoulement devient totalement hydro-dynamiquement développé axialement. Dans cette intervalle  $Z^* = 22.5$  jusqu'à  $Z^* = 100$  l'écoulement bidimensionnel et la vitesse axiale dépende seulement aux deux coordonnées polaire. La vitesse axiale augmente radialement et atteint une valeur maximale à la moitié de l'entrefer entre la paroi de cylindre intérieur et le cylindre extérieur après de dépassé la moitié de l'entrefer l on a une diminution de vitesse a travers la paroi de cylindre extérieur. Suivant la direction azimuthal la vitesse augmente dans le sens antihoraire et arrivé a une valeur maximal a le point  $\eta = \frac{\pi}{2}$  (ça valeur est 1.89 à  $\varepsilon = 0.775$ ) après ce point la vitesse décroît jusqu'à  $\eta = \pi$  tous ça et pour le demi-cylindre supérieur et par symétrie on a la même variation dans le demi-cylindre inférieur par rapport a l'axes horizontale.

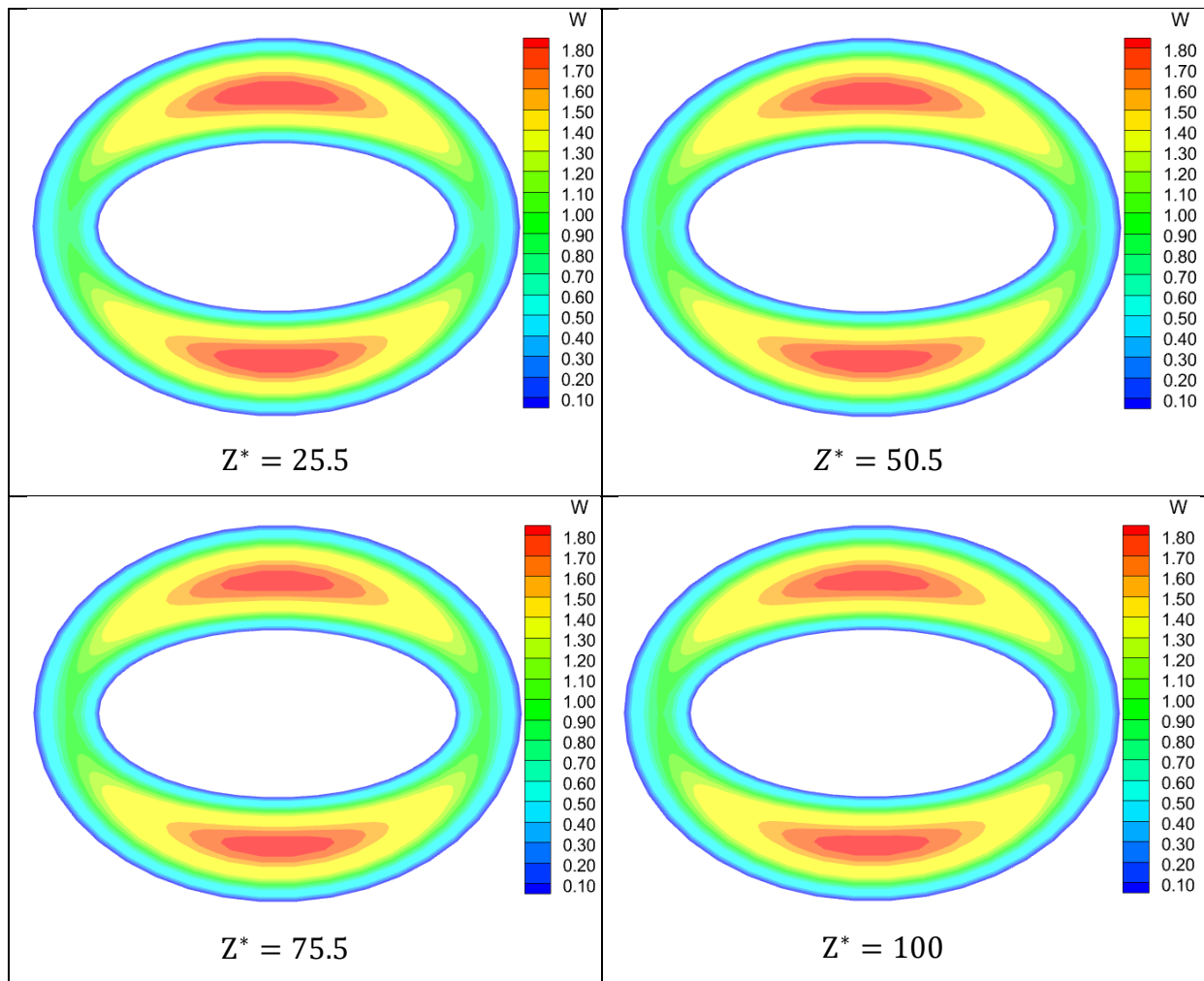


Figure. 4.1. Le champ numérique de la vitesse axiale dans différent valeur de  $Z^*$  et pour  $(Re=100)$

4.2.2. Le champ thermique :

D’après le résultat en remarquons que le champ thermique se développe suivant la direction axial au long de cylindre. La **Figure 4.2.** Présent la variation de champ thermique dans le cas de  $Re=100$  pour quatre points axial choisi comme suit ( $z^* = 25.5, z^* = 50.5, z^* = 75.5, z^* = 100$ ).a partir de la figure on prend une observation que la température est relativement élevé dans la paroi de cylindre intérieur par ce que en a un chauffage pariétal au niveau de la paroi de cylindre intérieur. Par rapport à les axes elliptiques le champ thermique est symétrique. Suivant la direction angulaire la température décroît à partir de l'axe horizontal elliptique vers l'axe vertical. Dans la direction radiale la température diminue à partir de la paroi de cylindre intérieur vers la paroi de cylindre extérieure. Finalement pour le sens axial le champ thermique augment axialement à compter de la entrée de cylindre jusqu’à la sortie de canal car on a un ajout de chaleur le long de cylindre intérieure.

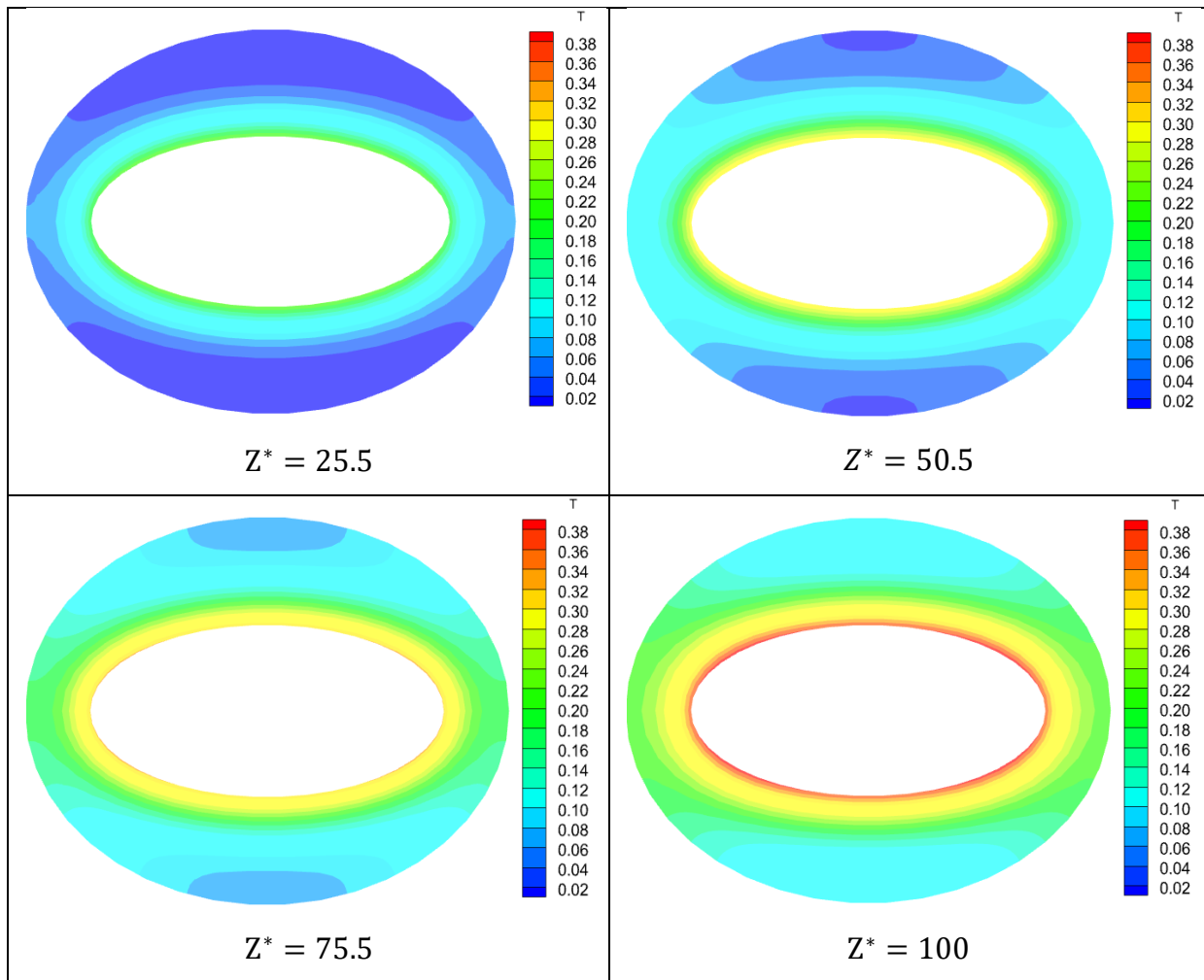
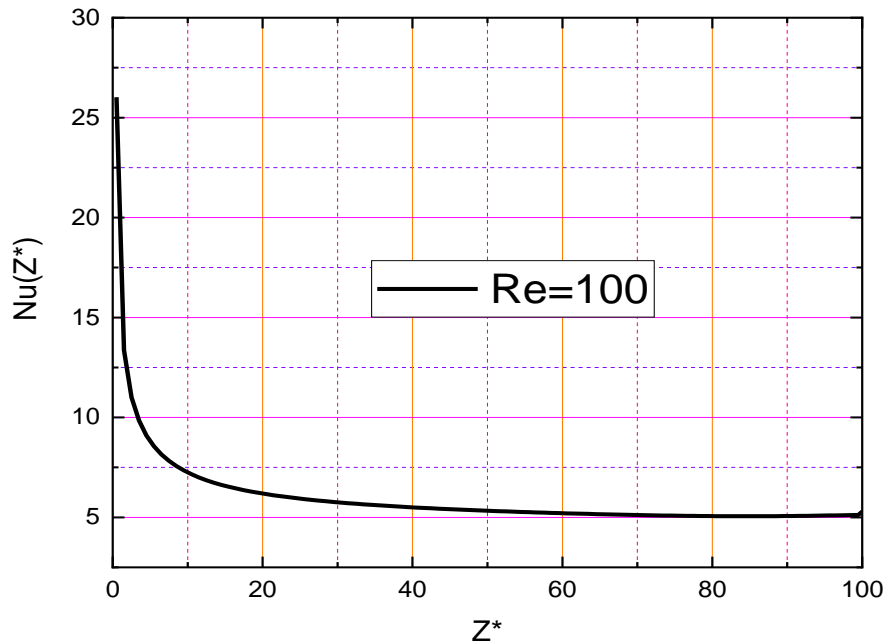


Figure .4.2.Le champ numérique de la température ( $Re = 100$ ) à différents valeur de  $Z^*$



**Figure.4.3.La variation de nombre de Nusselt axial par rapport à Z\* (Re = 100)**

La **Figure 4.3.** Présent la variation de nombre de Nusselt axial, pour le cas de Re=100 en peut diviser la courbe en trois partie, La première partie ( $Z^* = 0, Z^* = 10$ ) la valeur de nombre de nusselt diminue rapidement d'une valeur initial à l'environ de  $Nu= 26.02$  jusqu'à  $Nu= 7,15899$  dans le point  $Z^* = 10.5$ . Dans la deuxième partie pour l'intervalle ( $Z^* = 10.5, Z^* = 70.5$ ) la valeur de nombre de nusselt continue sa diminution lentement et obtenu une valeur de  $Nu= 5,20394$  dans le point  $Z^* = 70.5$ . Finalement dans la troisième partie après de dépassé le point  $Z^* = 70$  et jusqu'à  $Z^* = 100$  Le nombre de Nusselt reste stable jusqu'à la sortie de canal dans une valeur minimal approximé a  $Nu= 5,05825$ .

### 4 .3. Pour le deuxième cas : Re =200

#### 4 .3.1.l'écoulement axial :

La **Figure 4.4.** Présent la variation radial et angulaire de la vitesse axial dans les quatre positions axiaux ( $Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$ ).Après avoir les figure elle est clair que on a une symétrie horizontal et vertical de la variation de l'écoulement axiale. Pour l'intervalle ( $Z^* = 0$  jusqu'à  $Z^* = 44.5$ ) la vitesse commence sa variation suivant les trois directions elliptiques (axial, radial, azimutal) a partir de l'entrée du canal. Pour la direction axial la vitesse maximal égal a ( $1.89$  à ( $\epsilon=0.775, \eta=\frac{\pi}{2}, Z = 44.5$ )) après ce point les variations axial de la vitesse sont négligeable jusqu'à la sortie de cylindre. Concernons la direction radial la vitesse augment et obtient une valeur maximal dans la

moitié de l'entrefer et après en commence sa diminution vers la paroi intérieure de cylindre extérieure. Pour la direction azimuthal on prend une observation que la vitesse croit à partir de point  $\eta=0$  et arrive a une valeur maximal dans  $\eta=\frac{\pi}{2}$  après de dépassé ce point on a une diminution de vitesse jusqu'à  $\eta=\pi$ .

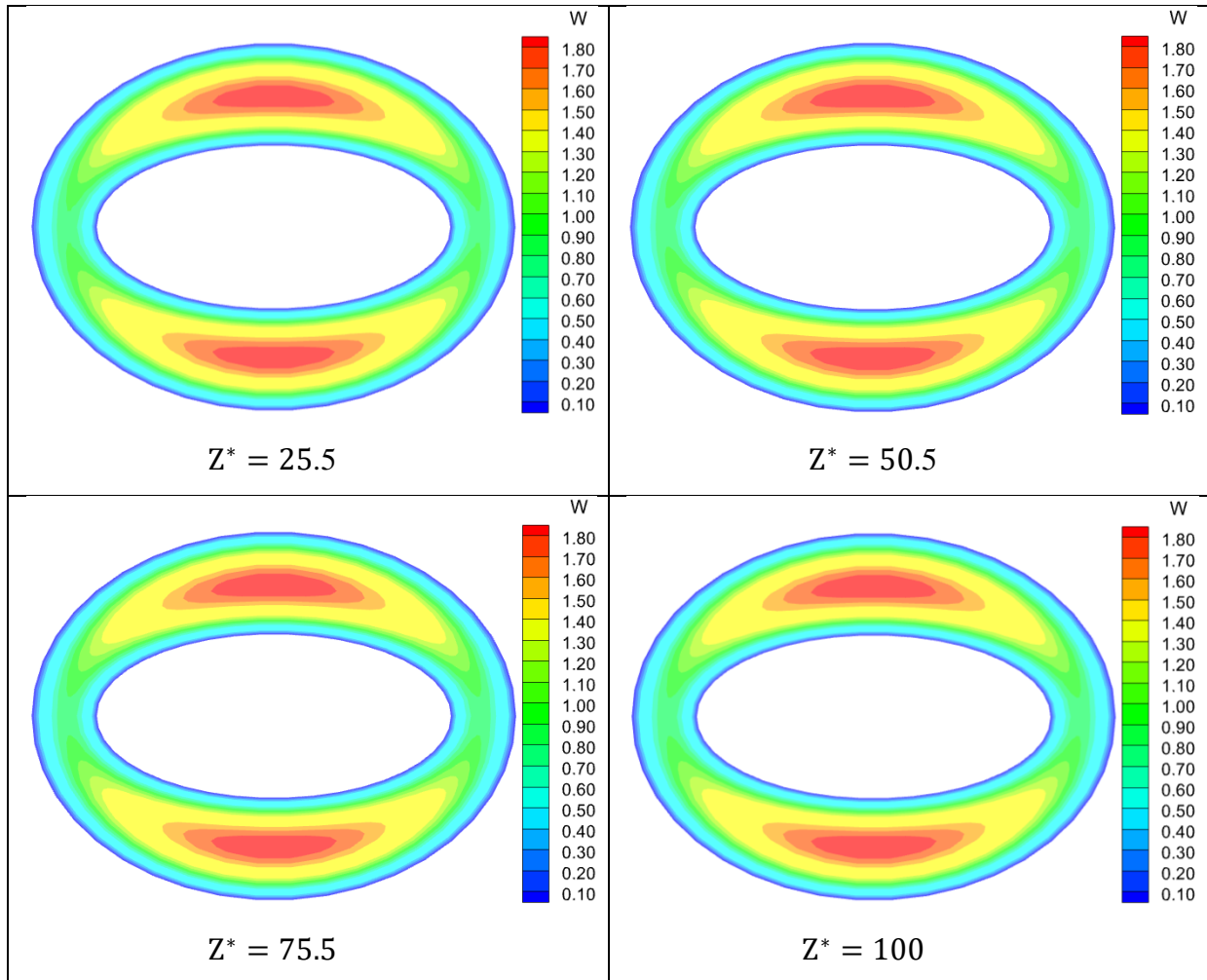


Figure .4.4.Le champ numérique de la vitesse axiale ( $Re = 200$ ) à différents valeur de

#### 4.3.2. Le champ thermique :

D'après le résultat en remarquons que le champ thermique se développe axialement au long du conduit. La **Figure 4.5**. Présente la variation de champ thermique dans le cas de  $Re=200$  pour quatre points axial choisi comme suit ( $z^* = 25.5$ ,  $z^* = 45.5$ ,  $z^*= 75.5$ ,  $z^* = 100$ ).A partir du Figure on a observé que la température augment radialement à partir de cylindre intérieur (qui chaud) vers le cylindre extérieur (adiabatique). Les variations azimuthales sont presque qualitativement identiques au cas de  $Re=100$ . Concernant les



variations axial la température augment a partir de l'entrée de conduit jusqu'à la sortie de conduit la valeur maximal  $T_{\max}=0.291$  a la surface du cylindre interne ( $Z=100$ ).

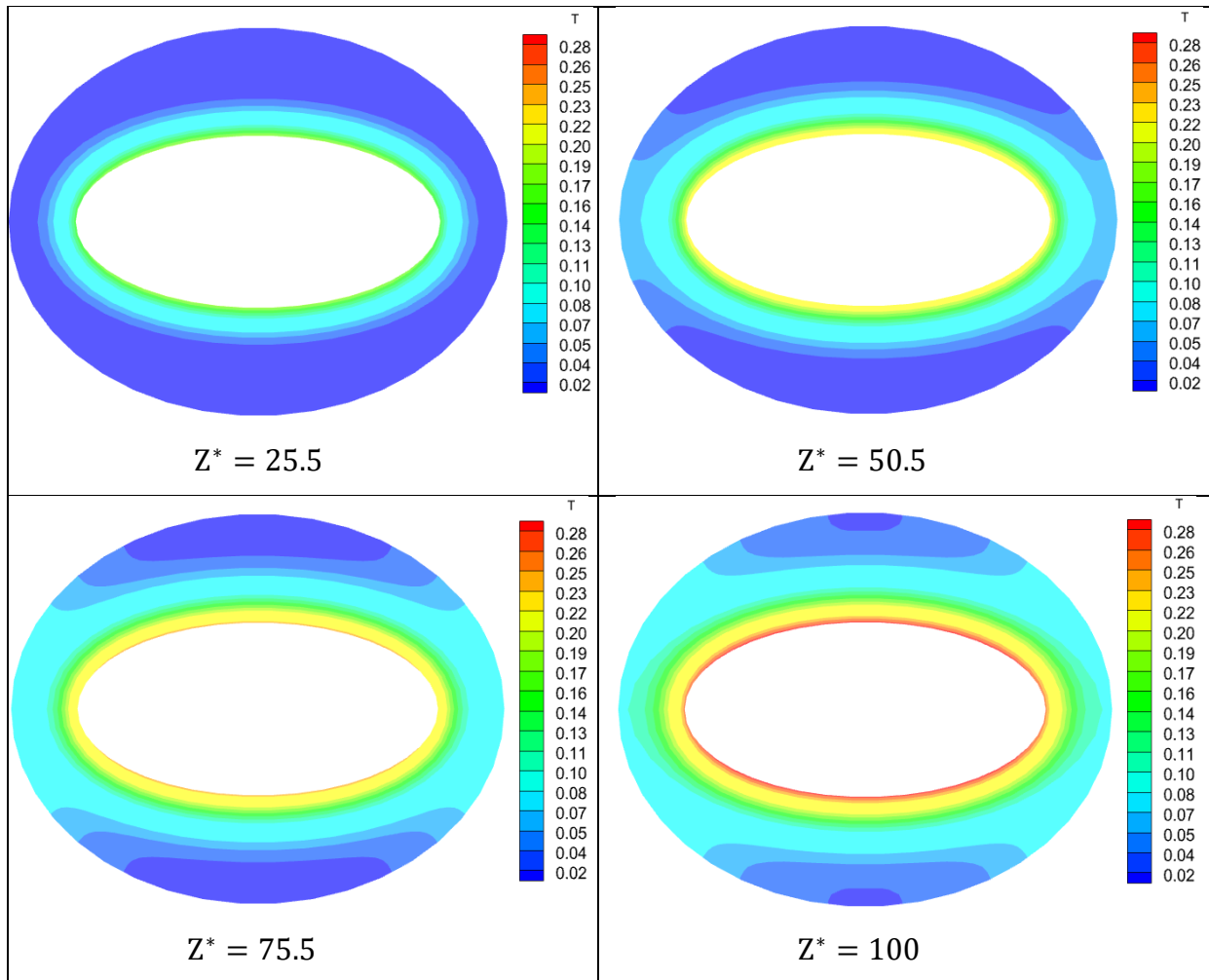
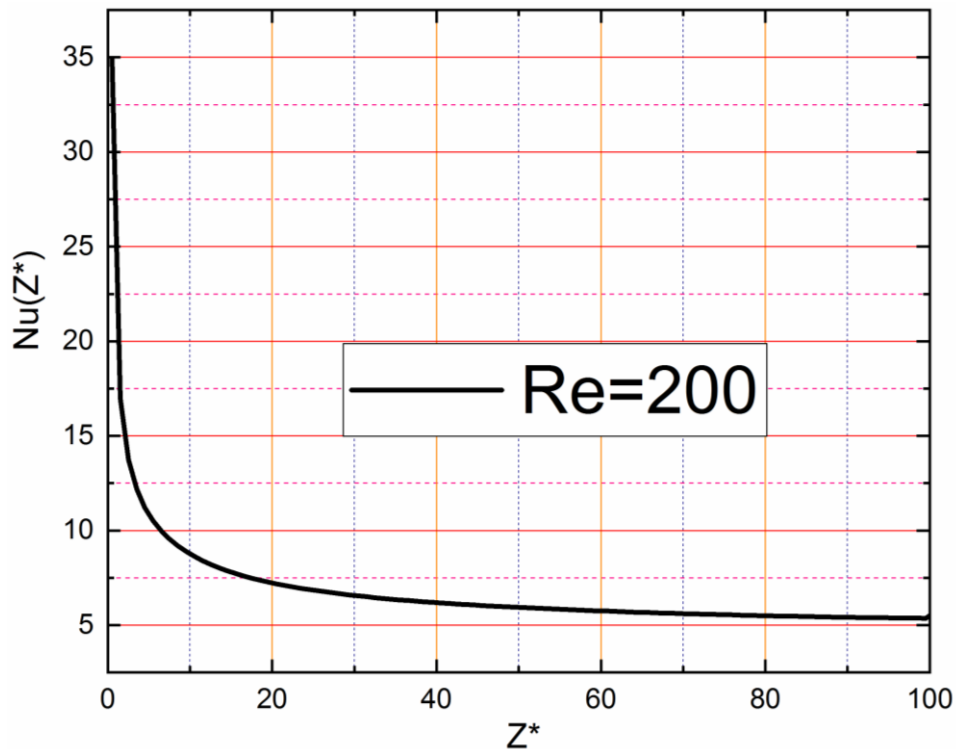


Figure .4.5. Le champ numérique de la température ( $Re = 200$ ) a différents valeur de  $Z^*$



**Figure.4.6. la variation de nombre de Nusselt axial par rapport à ,Z\* Pour Re=200**

La **Figure 4.3.** Présente la variation de nombre de Nusselt axial par rapport à  $Z^*$  pour le cas de  $Re=200$ . A partir de l'entrée jusqu'à  $Z^* = 30.5$  on a un grand transfert entre la paroi de cylindre intérieur et le fluide et sa valeur  $Nu=6,45572(Z^* = 30.5)$ . Après  $Z^* = 30.5$  jusqu'à la sortie du conduit, le nombre de Nusselt diminue l'égerment jusqu'à la sortie de conduit où sa valeur a la sortie ( $Z^* = 100$ )  $Nu=5 .37007$ .

### 4 .3. Pour le dernier cas : $Re =300$ :

#### 4 .3.1.l'écoulement axial :

La **Figure 4.4.** Présente la variation radial et angulaire de la vitesse axial dans les quatre positions axiaux ( $Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$ ).Après avoir les figure nous avons remarqué que on a une symétrie horizontal et vertical de la variation de l'écoulement axiale. Pour l'intervalle ( $Z^* = 0$  jusqu'à  $Z^* = 50.5$ ) la vitesse commence sa variation suivant les trois directions elliptiques (axial, radial, azimutal) à partir de l'entrée du canal. Pour la direction axial la vitesse maximal égal a ( $1.89$  à ( $\epsilon=0.775, \eta=\frac{\pi}{2}, Z = 50.5$ )) après ce point les variations axial de la vitesse sont négligeable jusqu'à la sortie de cylindre. Concernons la direction radial la vitesse augment et obtient une valeur maximal dans la moitié de l'entrefes et après en commence sa diminution vers la paroi intérieure de cylindre

extérieure. Pour la direction azimutal on a trouvé que la vitesse augment a partir de point  $\eta=0$  et arrive a une valeur maximal dans  $\eta=\frac{\pi}{2}$  après de dépassé ce point on a une diminution de vitesse jusqu'à  $\eta=\pi$ .

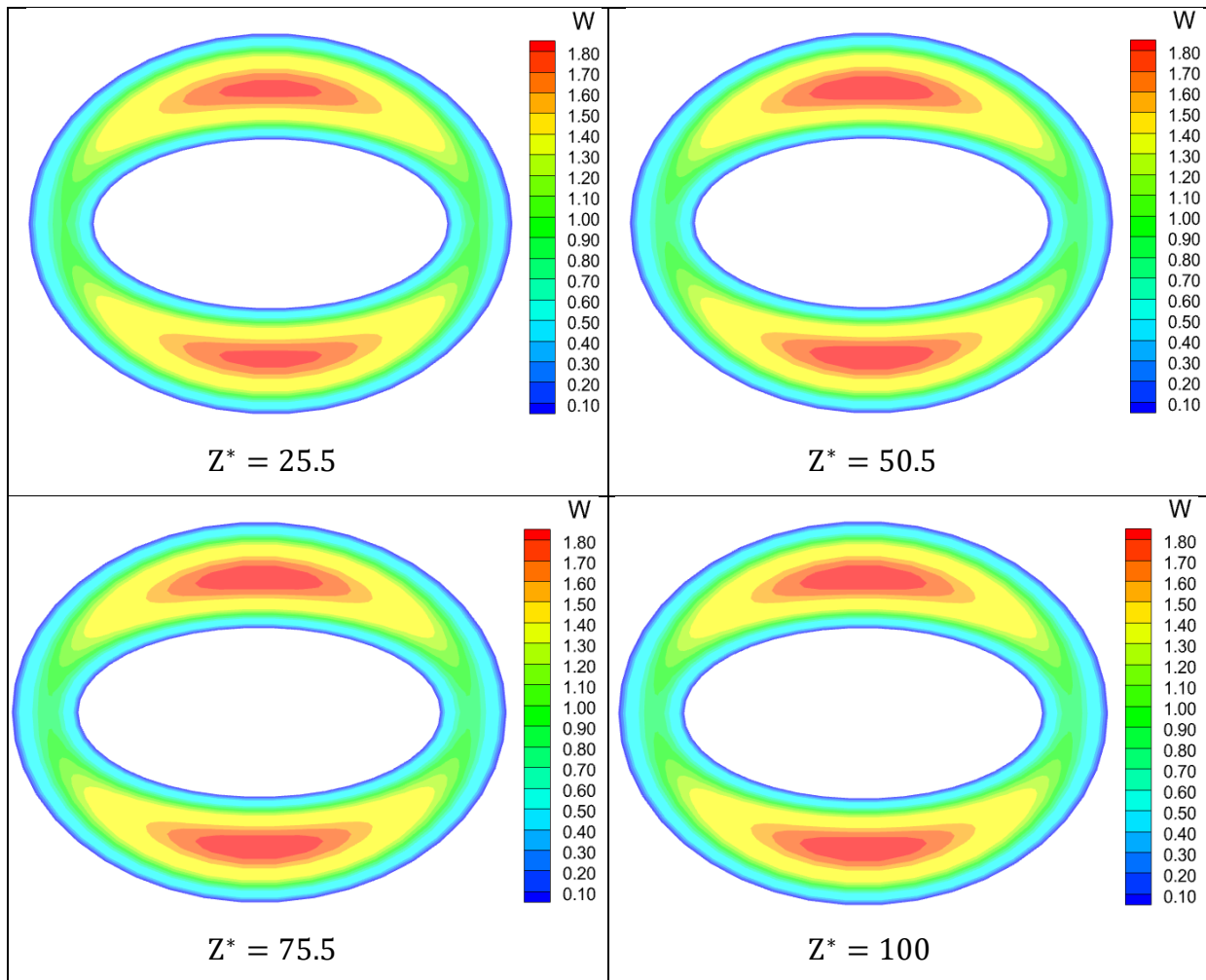


Figure.4.7. Le champ numérique de la vitesse axiale ( $Re = 300$ ) a défèrent valeur de  $Z^*$

#### 4.3.2. Le champ thermique :

D'après le résultat en remarquons que le champ thermique se développe axialement au long du conduit. La **Figure .4.8.** présente la variation de champ thermique dans le cas de  $Re=300$  pour quatre points axial choisi comme suit ( $z^* = 25.5, z^* = 50.5, z^*= 75.5, z^* = 100$ ).A partir du Figure on a observé que la température augment radialement a partir de cylindre intérieur (qui chaud) vers le cylindre extérieur (adiabatique). Les variations azimutal sont presque qualitativement identique au cas de  $Re=100$ . Concernant les variations axial la

température augment a partir de l'entrée de conduit jusqu'à la sortie de conduit la valeur maximal  $T_{\max}=0.2412$  a la surface du cylindre interne ( $Z=100$ ).

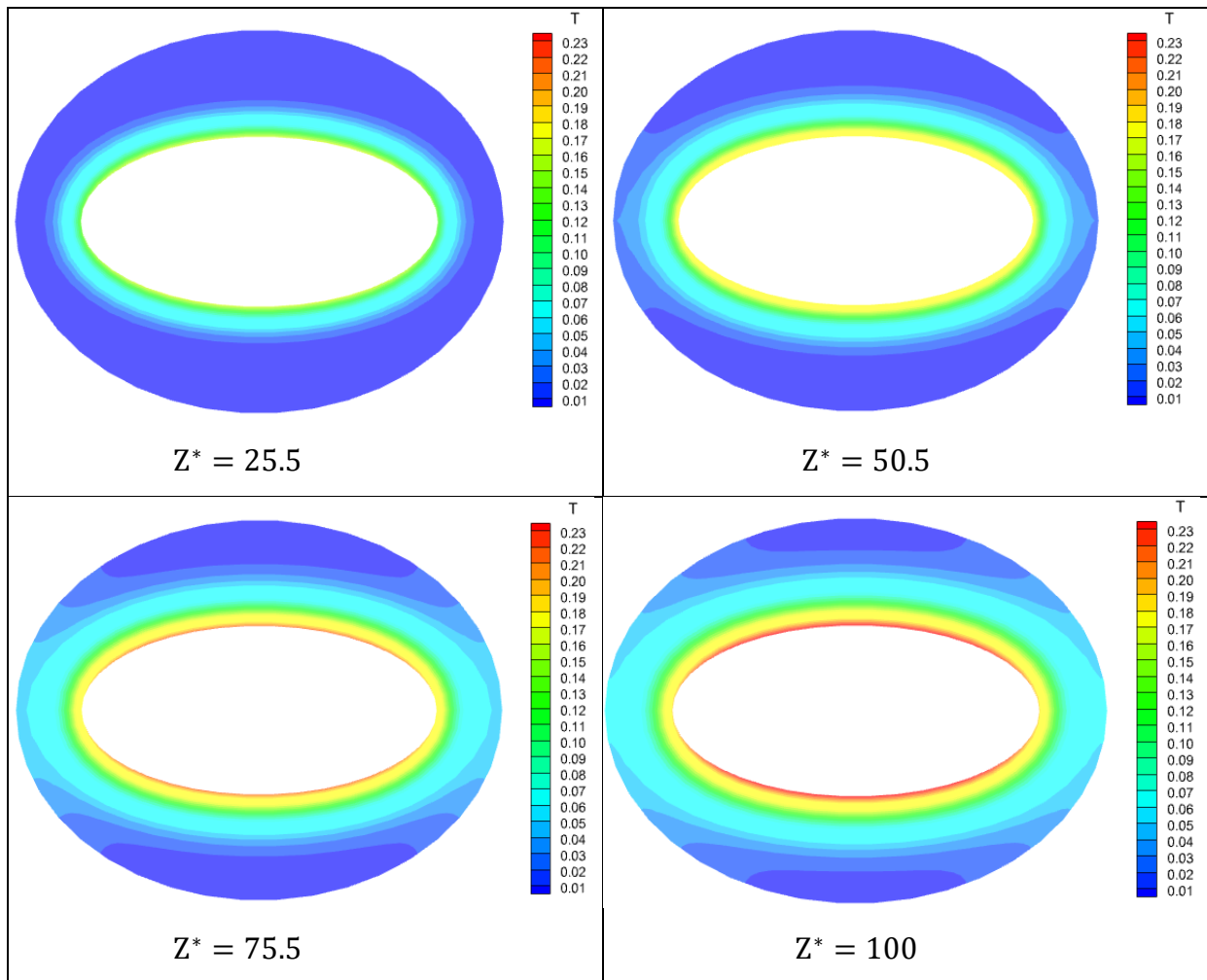
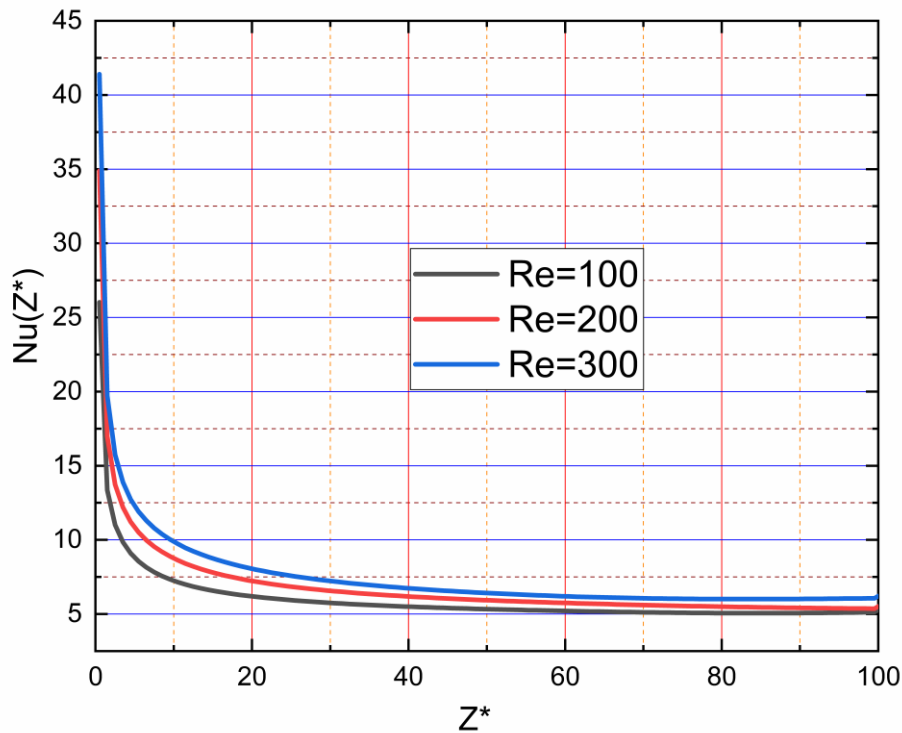


Figure.4.8. Le champ numérique de la température ( $Re = 300$ ) pour Différent valeur de  $Z^*$



**Figure.4.9.** Les nombres de Nusselt axiaux  $Nu (Z^*)$  pour différents valeur de nombre de Reynolds.

Le **Figure.4.8.** Représente Les variations des nombres de Nusselt axiaux  $Nu (Z^*)$  en trois cas ( $Re = 100 , Re = 200 , Re = 300$ ) .On peut diviser les diagrammes en quatre parties. Dans la première partie  $Z^*=0$  jusqu`a environ de  $Z^*=10$  en remarque que les trois diagrammes ( $Nu(Z^*)$ ) diminues identiquement et rapidement .Mais après  $Z^*=10$  jusqu`a  $Z^*=40$  il y a une décélération dans la vitesse de diminution, dans la dernière partie de  $Z^*=40$  jusqu`à la sortie de canal les trois graphes stabiliser dans un certain valeur pour chaque graphe ( $Re=100,Nu=5,08933$  ) ( $Re=200,Nu=5,36683$  ) ( $Re=300,Nu=6,04825$  ) .

	$W_{max}$	$T_{max}$	$Nu_m$	$T_{ms}$
Re=100	1.8935	0.2911	6.0153	0.1987
Re=200	1.8935	0.2911	6.8776	0.0993
Re=300	1.8935	0.2412	7.6256	0.0662

**Tableau 4.1.**Les valeurs de différent variable pour les trois cas de calcul

## Chapitre V

# Conclusion Générale

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de variation de nombre de Reynolds au bien le changement de régime d'écoulement sur l'échange de chaleur. Dans ce cadre, nous avons étudié numériquement la convection forcée entre deux cylindres elliptiques avec des propriétés thermo physiques variables. Le cylindre intérieur est statique et chauffe par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Le modèle mathématique de ce problème est constitué d'un système d'équations qui régit par l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites. On a fait la discrétisation pour les équations en utilisant une approche numérique, à base de la méthode des volumes finis. Pour faire les calculs un code Fortran a été écrit, ce code est généré en langage de Fortran.

Grâce au code FORTRAN et logiciel TECPLOT 360 Aussi L'ORIGINE, et après avoir fait la simulation nous obtenons des résultats pour les trois cas ( $Re=100$   $Re=200$   $Re=300$ ). Illustré en détail avec discussions et interprétations. Une discussion de champ dynamique et de champ thermique a été effectuée pour les trois cas et finalement nous avons fait une comparaison entre les trois cas étudiés et surtout la comparaison des trois nombres de Nusselt.

On a conclu que le changement de régime d'écoulement avec l'augmentation de la valeur de nombre de Reynolds a un effet significatif sur le coefficient d'échange de chaleur et pour la clarification on a trouvé que  $Re=300$  donne le meilleur échange de chaleur.

Notre perspective d'étude est de faire la même étude mais on ajoute l'effet de la convection mixte, et l'effet de l'inclinaison du cylindre.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية  
الشعبية

Démocratique et populaire

République Algérienne

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° d'ordre :.....

N° de série :.....

Présentée pour obtenir le diplôme de  
MASTER II EN GENIE MECANIQUE

Option : ENERGETIQUE

Thème :

**La Convection Forcé Dans l'Espace Annulaire Entre Deux  
Cylindres Elliptiques Horizontaux Avec Propriétés  
Thermophysiques Variables.**

Par :

**Benrabah Chouaib**

**Zaabat Achraf**

Membre jury :

Président :

**Dr.TOUAHRIA ABDELJAWED**

Examineur :

**Dr.HAMIDAN ABASSE**

Encadre par :

**Dr.ZERARI KHALIL**

Soutenue le : .../.../2022



# **Remerciement**

*Je tiens à dédier ce modeste travail à mon père et ma très*

*Chère maman qui m'ont*

*Encouragé à donner le meilleur de moi-même, et qui m'ont*

*fourni*

*Les moyens d'être ce que je suis aujourd'hui.*

*A toutes les personnes qui m'ont aidé dans mes années*

*d'étude*

*et mon travail et spécialement*

*Je le dédie aussi à mon frère*

*Ayoub , je leurs souhaite*

*Une carrière pleine de succès. Que dieu les garde tous.*

*A tous mes amis sans exception.*

*Je le dédie toute la famille Benrabah et Zaabat*

*A toute mes collègues de promotion 2021-2022*

*A tous ceux qui me sont chers et qui sont aujourd'hui absents*

*Je le dédie spécialement aussi A tous les êtres chers à mon*

*Coeur.*

# Table Des Matières

Nomenclature

Table Des Figures

Liste Des Tableaux

<b>Introduction Générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 Etude Bibliographique</b> .....	4
<b>Chapitre 2 Modèle Mathématique</b> .....	11
2.1. Introduction.....	17
2.2. Description du problème.....	17
2.2.1. Formulation mathématique.....	18
2.2.1.1. L'équation de continuité .....	19
2.2.1.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	19
2.2.1.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	19
2.2.1.4. L'équation de quantité mouvement suivant $z$ ... ..	19
2.2.1.5. L'équation d'énergie .....	20
2.2.1.6. Conditions initiales et aux limites .....	20
2.2.2. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique .....	21
2.2.2.1. L'équation de continuité .....	21
2.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	21
2.2.2.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	21
2.2.2.4. L'équation de quantité mouvement suivant $z$ .....	21
2.2.2.5. L'équation d'énergie.....	22
2.2.2.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelle.....	22
2.3. Modélisation des propriétés physiques variables.....	23
2.4. Les Bilans thermique et massique.....	23
2.4.1 Bilan thermique global.....	23
2.4.2. Bilan massique global.....	24
2.5. Le nombre de Nusselt.....	24
2.5.1. Le nombre de Nusselt local.....	24
2.5.2.Le nombre de Nusselt axial et moyenne.....	25
<b>Chapitre 3 l'étude numérique</b>	
3.1. Introduction.....	28

3.2. Le maillage.....	28
3.3. Détails de discrétisation .....	30
3.3.1. Discrétisation de l'équation de continuité .....	34
3.3.2. Discrétisation l'équation de l'énergie .....	34
3.3.3. Discrétisation l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	38
3.4. Convergence .....	51

## **Chapitre 4 Résultats et discussion**

4.1. Introduction.....	54
4.2. Pour le premier cas : $Re = 100$ .....	54
4.2.1. L'écoulement axial .....	54
4.2.2. Le champ thermique .....	55
4.3. Pour le deuxième cas : $Re = 200$ .....	57
4.3.1. L'écoulement axial .....	57
4.3.2. Le champ thermique .....	58
4.3. Pour le troisième cas : $Re = 300$ .....	60
4.3.1. L'écoulement axial.....	60
4.3.2. Le champ thermique .....	61

## **Chapitre 5 Conclusion Générale** .....

## **Bibliographie**.....

## Nomenclature :

### Les variables dimensionnelles

$a$	Demi distance focal(m)
$c_p$	Chaleur massique à pression constante (J/kg.K)
$g$	Accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )
$h_1$	Coefficient métrique radial(m)
$h_2$	Coefficient métrique azimutal(m)
$h_3$	Coefficient métrique axial
$h(\varepsilon, z)$	Coefficient local de la convection( $W/m^2.K$ )
$K$	Conductivité thermique de fluide ( $W/m.K$ )
$L$	Longueur du conduit(m)
$P$	Pression(Pa)
$P_1$ ou bien $P_i$	Périmètre du cylindre intérieur(m)
$q_w$	Densité de flux de chaleur à la surface du cylindre intérieure ( $W/m^2$ Surface de la section droite du conduit(section d'écoulement)( $m^2$ )
$t$	Temps(s)
$T$	Température(K)
$V_\varepsilon$	Vitesse radiale (m/s)
$V_\eta$	Vitesse azimutale (m/s)
$V_z$	Vitesse axiale (m/s)
$z$	Coordonnée axiale(m)

## Symboles Grecs

$\beta$	Coefficient d'expansion thermique (1/K)
$\Delta t$	Pas de temps (s)
$\Delta$	Intervalle fini
$\mu$	Viscosité dynamique (kg/m.s)
$\rho$	Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )
$\varepsilon$	Coordonnée elliptique radiale
$\eta$	Coordonnée elliptique azimutale
$\nu$	Viscosité cinématique (m <sup>2</sup> /s)
$T$	Fonction de ligne de courant

## Indices

i	Surface du cylindre intérieure
m	Valeur moyenne
max	Valeur maximale
min	Valeur minimale
P	Fait référence au nœud P d'un volume fini
n, s, e, w, f, b	Fait référence aux faces d' un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
N, S, E W, F, B	Fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, haut et bas
u	Maillage décalé suivant la direction radiale
v	Maillage décalé suivant la direction angulaire
w	Maillage décalé suivant la direction axiale
0	Entré du conduit

## Exposants

*	Variable adimensionnelle
$t$	Désigne l'instant $t$
$t+\Delta t$	Désigne l'instant $t+\Delta t$
$t-\Delta t$	Désigne l'instant $t-\Delta t$

## Les nombres a dimensionnels

Gr	Nombre de Grashof = $(g\beta q_w a^4)/(v_0^2 k_0)$
Nu ( $\eta, z$ )	Nombre de Nusselt local
Nu(z)	Nombre de Nusselt axial
Pr	Nombre de Prandtl = $(c_p \mu_0 / k_0)$
Re	Nombre de Reynolds = $(\rho_0 V_0 a / \mu_0)$

## *Table Des Figures*

2.1. Géométrie et conditions aux limites du problème.....	17
3.1. Représentation de volume fini.....	28
3.2. Le maillage numérique utilise et sa projection en coupe. La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.....	29
3.3. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta$ , $z$ ).....	31
3.4. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta$ , $\varepsilon$ ).....	32
3.5. Maillage suivant les coordonnées ( $z$ , $\varepsilon$ ).....	33
3.6. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta$ , $z$ ).....	39
4.1. Le champ numérique de la vitesse axial dans valeur de $z^*$ et pour ( $Re = 100$ ).....	55
4.2. Le champ numérique de la température ( $Re=100$ ) a différents valeur $z^*$ .....	56
4.3. La variation de nombre du Nusselt par rapport $az^*$ ( $Re=100$ ).....	57
4.4. Le champ numérique de la vitesse axial dans valeur de $z^*$ et pour ( $Re=200$ ).....	58
4.5. Le champ numérique de la température ( $Re=200$ ) a différents valeur $z^*$ .....	59
4.6. La variation de nombre de Nusselt axial par rapport à $z^*$ Pour $Re=200$ .....	60
4.7. Le champ numérique de la température ( $Re=300$ ) a différents valeur $z^*$ .....	61
4.8. Le champ numérique de la température ( $Re=300$ ) a différents valeur $z^*$ .....	62
4.9. Les nombres de Nusselt axiaux $Nu(z^*)$ pour valeur de nombre de Reynolds.....	63

## *Liste Des Tableaux*

2.1. Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles.....	20
2.2 .Les propriétés thermo physiques et paramètre de contrôle.....	22
3.1. $q_1$ et $q_6$ avec Les valeurs de l'erreur dans trois cas.....	46
4.1. Les valeurs de différent variable pour les trois cas de calcule.....	63



# **La convection Forcée Entre Deux Cylindres Elliptiques Avec Des Propriétés ThermoPhysiques Variables.**

## **Résumé :**

Cette étude présente une simulation numérique en trois dimensions d'un écoulement laminaire. De la convection forcée entre deux cylindres elliptiques horizontaux avec des propriétés Thermophysiques variable. Le cylindre intérieur est uniformément chauffé tandis que le cylindre extérieur est adiabatique. L'écoulement et les champs thermiques sont modélisés par l'équation de continuité, les trois équations de quantité de mouvement et l'équation de l'énergie avec des conditions initiales et aux limites appropriées en utilisant un système de coordonnées elliptiques. Les équations du modèle sont résolues numériquement par La méthode des volumes finis avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre.

Les résultat des calculs montre qu' il y a une variation dans la valeur de nombre de Nusselt (coefficient d'échange de chaleur) dans les trois cas, et elle obtient une valeurs maximal pour le cas pour Reynolds  $Re=300$

**Mots clé :** Convection Forcée, Propriétés dépendent de la température, cylindres elliptiques,volumes finis.

# **Forced Convection Between Two Elliptical Cylinders With Variables Thermophysical Properties.**

## **Abstract:**

This study presents a numerical simulation of the three dimensional laminar forced convection between two elliptical horizontal cylinders with variable thermophysical properties. The inner cylinder is uniformly heated whereas the outer cylinder is adiabatic. The flow and thermal fields are modeled by the continuity, momentum and energy equations with appropriate initial and boundary conditions using an elliptical coordinate system. The model equations are numerically solved by a finite volume numerical method with second order accurate spatiotemporal discretization.

The results of the calculations show that there is a variation in the value of Nusselt number (coefficient of heat exchange) in the three cases, and it obtains a maximum value in the case for Reynolds =300.

**Keywords:** Forced convection, Properties dependent on temperature, elliptical cylinders, finite volume.

## الحمل الحراري القسري في الفضاء الحلقي بين أسطوانتين إهليجيتين أفقيتين بخصائص فيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة

ملخص:

تقدم هذه الدراسة محاكاة عددية ثلاثية البعد لجريان رقائقي للحمل الحراري القسري بين أسطوانتين أفقيتين إهليجيتين الشكل مع تعلق الخواص الفيزيائية بدرجة الحرارة. الأسطوانة الداخلية مسخنة بشكل منتظم في حين الأسطوانة الخارجية كاطمة. الجريان والحقل الحراري عبر عنه بواسطة معادلة الاستمرارية، معادلات كمية الحركة ومعادلة الطاقة مع الأخذ بعين الإعتبار الشروط الإبتدائية والحدية المناسبة باستخدام نظام الإحداثيات الإهليجي. تم حل المعادلات باستعمال طريقة الحجوم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية في الفضاء والزمن.

أظهرت النتائج أن هناك تغير في قيمة رقم نسلت (معامل التبادل الحراري) في الحالات الثلاث ، ويصل إلى قيمة قصوى في حالة رينولدز = 300.

الكلمات المفتاحية: الحمل القسري ، الخصائص التي تعتمد على درجة الحرارة ، الأسطوانات الإهليجية ، الحجوم المنتهية.

# Introduction Générale

# Introduction Générale

---

Le transfert de chaleur ou bien le transfert thermique c'est l'échange de chaleur entre deux corps fluide solide et solide, solide on a trois modes de transfert de chaleur on distingue la convection, la conduction et le rayonnement dans cette recherche on parle plus sur la convection et les différents types de ce mode de transfert et dans quel domaine on peut trouver ce transfert.

La convection est un mode de transfert de chaleur qui se produit le plus souvent entre un fluide en mouvement et une paroi solide. La conduction peut être considérée comme un transfert d'énergie dû à des mouvements microscopiques, le phénomène de convection est un transfert dû à des mouvements macroscopiques. On distingue deux types de convection :

- La convection libre ou naturelle où le mouvement du fluide est causé par un champ des forces intérieur (gravité, gradient de densité, gradient de température etc.).
- La convection forcée où le fluide est mis en mouvement par l'action d'un champ de forces externe (pompe, ventilateur etc.).

D'une façon simplifiée, l'objectif principal de l'étude du phénomène de la convection consiste essentiellement à :

- développer des méthodes permettant l'évaluation du paramètre  $h$ , coefficient de convection.
- étudier les différentes formules empiriques utilisées.

Si le mouvement du fluide est dû à l'action d'une force extérieure, la convection est dite forcée et si au contraire, le mouvement du fluide est dû seulement à la différence des masses volumiques suite aux différences de températures, la convection est appelée convection libre ou naturelle. Si maintenant, nous nous intéressons à la nature du mouvement du fluide qui peut être laminaire ou turbulent, la convection aussi peut être aussi considérée comme laminaire ou turbulente. Connaissant les différences entre le mouvement laminaire et turbulent, la convection forcée et libre, nous pouvons dire la quantité de chaleur transférée lors de la convection forcée turbulente est plus importante que celles transférées lors d'une convection naturelle laminaire.

L'expérience montre que le transfert de la chaleur par convection dépend des propriétés thermophysiques du fluide comme la viscosité dynamique, la masse volumique, la capacité calorifique et aussi de la vitesse du fluide. Elle dépend aussi de la géométrie et l'état des surfaces du système ainsi que du type d'écoulement du fluide en question. Tout cela rend la convection le mode le plus compliqué du transfert de chaleur.

## Introduction Générale

---

Notre recherche se le nom la convection forcé entre deux cylindres elliptiques avec des propriétés thermophysiques variables. Au but de faire plusieurs expérience pour trouve l'effet de la variation de coefficient d'échange de chaleur, La viscosité dynamique et le nombre de Reynolds au bien le régime d'écoulement.

Dans notre recherche on a cinq chapitre le premier chapitre représente la recherche bibliographie que on a fait sur notre travaille, Dans le deuxième chapitre on essaye de simplifier notre problème avec des équations mathématiques, le troisième chapitre concernent les méthodes de résolution que on va utiliser pour résoudre des équations mathématiques que l'ont pose dans la deuxième chapitre.

Aussi dans le quatrième chapitre on a l'interprétation des résultats obtenu par le programme numérique, en fin dans la conclusion on définit la valeur de notre recherche et l'addition que l'ont donne dans le développement de la convection forcé et ces différentes applications.

# Chapitre I

## Recherche bibliographié :

Dans cette recherche bibliographique, on a fait un résumé des travaux des plusieurs chercheurs, concernons la convection mixte et forcée entre deux cylindres concentrique et non concentrique.

Le Transfert de chaleur dans un espace annulaire équipé par des blocks isothermes, la bifurcation numériques pour blocks a moins hauteur c'est le thème de recherche de **Ahmed Idrissi et al [1]**, L'expérience est placée deux blocks sur le mur intérieur de cylindre et étudié l'influence de variation de l'angle d'inclinaison des blocs sur la transfert de chaleur et aussi l'effet de nombre de **Rayleigh**. La méthode utilisée dans l'étude numérique c'est la méthode de différence fini et pour la résolution des matrices on utilise L'algorithme de Thomas TDMA. On a trouvé que lorsque le nombre de Rayleigh et proche à 3598 permet l'amélioration de transfert de chaleur par 18%.

La convection mixte dans un tube annulaire hélico c'est le thème de recherche de **M.R.H. Nobari et al. [2]**, pour le but d'étudié l'effet des nombres non dimensionnelle comme nombre de **Reynolds, Prandtl** et **Richardson** sur le chemin de flux du température et aussi le facteur de frottement, le taux de transfert de chaleur sont étudiés en détail. La méthode de différence a été utilisée avec l'approximation de **Boussinesque** pour La résolution de problème. Le résultat montre que le nombre de Richardson joué un rôle major en convection mixte dans un tube annulaire hélico en contrôlent l'effet de flottabilité. Et aussi l'effet de différent paramètre non dimensionnelle dominance sur le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt a l'intérieure de tuyère hélicoïdal.

**Nazrul Islam et.al [3]** font une recherche sur La convection mixte a la région d'entrée dans un tube concentrique horizontal, l'étude et concerné de faire une investigation numérique sur la convection mixte dans le régime laminaire permanent en utilisant la méthode des différences finis et l'algorithme simple pour la résolution d'équation d'énergie est pour la génération d'un code fortran. Parmi ces résultats, le flux secondaire a un effet significatif grâce à la force de flottabilité.

**Zerari Khalil [4]** fait un une simulation numérique sur l'effet de propriétés thermophysique sur la convection mixte dans l'espace annulaire entre deux cylindre elliptique horizontaux .il utilise la méthode de volume finis avec un discrétisation spatio-temporelle du second ordre pour résoudre les équations de module. il est conclue que la prise en compte de



la convection mixte avec des propriétés physiques variables donne un sens physique sur l'écoulement et les champs thermiques qui sont qualitativement et quantitativement différents de ceux de la convection forcée avec des propriétés dépendantes de la température et les cas de la convection mixte avec des propriétés constantes, le nombre de Nusselt obtenu est également plus élevé dans ce cas. L'amélioration du transfert de chaleur obtenue en considérant la convection naturelle au sein de la convection mixte avec des propriétés physiques dépendant de la température augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof qui est proportionnel au flux thermique imposé à la surface du cylindre intérieur.

Dans le processus de forage, l'espace annulaire peut facilement être excentré. Le phénomène de transport de chaleur se produisant dans de tels tubes et anneau peut être complexe, et l'article de **Lin Riyi et .al [5]** étudie la convection forcée dans un anneau excentrique vertical avec différents rapports de rayon et excentricité (normalisé par la différence de rayon). Des expériences physiques et des simulations numériques ont été menées avec une température d'entrée du tube intérieur et un débit d'eau chaude constants. Les résultats montrent qu'avec l'augmentation des rapports de rayon, le coefficient de transport de chaleur par convection augmente. Pour un rapport de rayon de 1,875, le coefficient de transport thermique augmente lorsque l'excentricité augmente.

**Othmane OULAID et .al [6]**. Proposé une étude numérique sur les transferts couplés de chaleur et de masse avec changement de phase dans un canal incliné. Ce canal est formé de deux plaques planes couvertes par un film mince d'eau et traversé par un écoulement laminaire ascendant d'air humide. Les plaques sont portées à une température constante ( $T_w$ ) et à la concentration de saturation correspondante ( $\omega_w$ ). La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement le système d'équations constitué par celles de Navier-Stokes, de l'énergie et de la concentration. Le couplage vitesse-pression est traité par l'algorithme SIMPLER. Les résultats montrent que les forces d'Archimède thermique et massique décelèrent l'écoulement près des parois du canal et induisent ainsi un renversement de celui-ci. L'importance de ce renversement dépend fortement de l'angle d'inclinaison du canal. Une carte de renversement a été établie pour différents angles d'inclinaison.

Des expériences ont été faites par **J.R.Maughan et.al [7]** sur la convection mixte dans la région d'entrée d'un canal plat chauffé uniformément par le bas. L'effet du flux thermique et l'orientation du canal sur le nombre local de Nusselt est étudié pour  $Pr = 0,7$ ,  $125 < Re < 500$ ,  $7 \cdot 10^3 < Gr^* < 10^6$  et  $0 < \theta < 30^\circ$ . Le transfert thermique est initialement dominé par la convection forcée et montre un déclin rapide en nombre de Nusselt. A la suite de l'apparition de l'instabilité thermique, un développement d'écoulement secondaire cause une forte augmentation du nombre de Nusselt qui est suivie d'un maximum et d'oscillations.

L'article présente des résultats d'une recherche expérimentale de **T.N Tandon H.K Varma C.P Gupta [8]** sur le comportement du transfert de chaleur au cours de la condensation par convection forcée à l'intérieur d'un tube horizontal pour des écoulements gravitaires, semi-annulaires et annulaires. On a effectué une étude qualitative sur l'effet de plusieurs paramètres, tels que le flux massique de frigorigène, la qualité de la vapeur, la chute de température de la pellicule de condensat et la vitesse moyenne de la masse de vapeur, sur le coefficient moyen de transfert de chaleur par condensation. On a observé que les corrélations de **Akers-Rosson** permettaient de prévoir les coefficients de transfert de chaleur à plus ou moins 25% près, pour la plage entière de données. Un examen plus poussé des données a révélé que la nature de la relation pour le coefficient de transfert de chaleur change lorsque l'on passe d'un écoulement annulaire et semi-annulaire à un écoulement gravitaire. On a recommandé l'utilisation de corrélations du type Akers-Rosson avec constante et puissance modifiées pour les deux régimes d'écoulement.

L'étude expérimentale de **M. Hunt C.L.Tien [9]** concerne l'écoulement non Darcien et le transfert de chaleur dans les milieux fibreux à haute porosité. La convection forcée à travers les matériaux de différentes perméabilités, porosités et conductivités thermiques a été considéré. Les résultats montrent que les milieux poreux accroissent le transfert de chaleur à partir d'une surface, en comparaison avec les résultats calculés pour l'écoulement piston ou laminaire dans un canal. Cet accroissement résulte de la diffusion, un phénomène non **Darcien** qui décrit le mélange intra-pore qui apparaît quand le fluide se déplace entre les particules solides.

**François Debray et.al [10]** présenté des mesures de coefficients de frottement et de transfert thermique par convection forcée dans des mini-canaux plans de 1 mm à 250  $\mu\text{m}$

d'épaisseur. Le coefficient de frottement est estimé à partir d'une mesure globale de perte de charge. Le coefficient de transfert thermique est déterminé à partir d'une mesure directe et locale de la température et du flux thermique à la paroi. Les mesures des coefficients de frottement confirment les lois classiques aux incertitudes expérimentales prises. En ce qui concernent les mesures locales de coefficients de transferts, les écarts observés par rapport aux corrélations classiques établies pour des plus grands diamètres peuvent être expliqués qualitativement par la non-uniformité du flux thermique imposé en paroi et les conditions d'établissement partiel des couches limites cinématique et thermique.

**JACQUES CHARRAUDEAU [11]** fait une recherche sur l'influence de gradients des propriétés physiques en convection forcée application au cas de tube. Le système des équations des couches limites dynamiques et thermiques dans le cas d'un écoulement incompressible à répartition de vitesse initiales linéaire et à faibles gradients de propriétés physiques variables a été utilisé. La viscosité dynamique et la conductivité thermique ont été supposés fonction linéaire de la température. Après avoir explicité les variations relatives des profils de vitesses et de températures résultant de l'existence des propriétés physiques variables, on a précisé l'exacte dépendance des variations du frottement pariétal et du flux thermique en fonction du nombre de Prandtl et on a donné la contribution de chaque gradient de propriété physique. On a montré ensuite les possibilités d'utilisation des résultats théoriques par une application effectuée dans le cas du tube.

Les taux de transfert de chaleur pour l'écoulement à travers un canal convergent-divergent à courbe sinusoïdale ont été analysés par **C.-C. Wang, C.-K. Chen [12]**. En utilisant une simple méthode de transformation de coordonnées et la méthode implicite de direction alternée Spline. Les effets de la géométrie ondulée, le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl sur le frottement cutané et le nombre de Nusselt ont été étudiés. Les résultats montrent que les amplitudes du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement cutané augmentent avec une augmentation du nombre de Reynolds et rapport amplitude-longueur d'onde.

**Mete Avci, Orhan Aydin [13]** ont étudié le transfert de chaleur par convection forcée dans des écoulements entièrement développés. Ce développement est hydro-dynamiquement et thermiquement de gaz de la dissipation visqueuse en micro annulaire entre deux micro cylindres concentriques est analysé analytiquement. L'effet de dissipation visqueuse, le

glissement de vitesse et la température saut au mur sont pris en considération. Deux cas différents de conditions aux limites thermiques sont considérés : uniforme flux de chaleur au niveau de la paroi externe et de la paroi interne adiabatique (cas A) et flux de chaleur uniforme au niveau de la paroi interne et de la paroi externe adiabatique (cas B). Des solutions pour les distributions de vitesse et de température et le nombre de Nusselt sont obtenues pour différentes valeurs du rapport d'aspect, du nombre de Knudsen et nombre de Brinkman.

Le transfert de chaleur à convection mixte laminaire pour des flux d'air assistés et opposés dans la zone d'entrée d'une verticale tube circulaire a été étudié expérimentalement enquêté par **Hussein A. Mohammed [14]**. L'utilisation d'une condition aux limites de flux de chaleur à paroi uniforme a été Le dispositif expérimental est conçu pour déterminer l'effet de la direction de l'écoulement. L'effet de l'inclinaison du tube sur la température de surface, nombres de Nusselt locaux et moyens avec Reynolds Variait de 400 à 1600 et le nombre de Grashof de  $2.0 * 10^5$  à  $6.2 * 10^6$ . Les résultats montrent que la température de surface circumférentielle au long de la longueur du tube sans dimension pour un écoulement opposé serait supérieur à celui du flux assisté et du tube horizontal.

**Basant K. Jha et.al [15]** examiné l'influence des fluides générateurs, absorbants de chaleur sur un flux de convection mixte. Dans un micro-anneau concentrique vertical (MCA) prenant en compte le glissement de vitesse et le saut de température à la surface extérieure du cylindre intérieur et à la surface intérieure de cylindre extérieur. La solution exacte des équations de quantité de mouvement et d'énergie est dérivée séparément. En termes de la fonction de Bessel de première et de deuxième espèce pour fluide caloporteur et fonction de Bessel modifiée de premier et second type pour fluide absorbant la chaleur. Lors des calculs numériques, on constate que l'augmentation de la génération de chaleur le paramètre a amélioré la température et la vitesse du fluide mais a réduit le taux de transfert de chaleur à la surface extérieure du cylindre intérieur tandis que la tendance inverse est observée pour le fluide absorbant la chaleur.

**Terhmina et Mojtabi [16]** ont étudié numériquement l'écoulement de la convection forcée dans la région d'entrée d'un espace annulaire, limité par deux cylindres coaxiaux horizontaux isothermes pour des régimes de la vitesse et de température non établis. Le fluide

pénètre dans l'espace annulaire avec une vitesse uniforme et à une température uniforme. Les résultats obtenus avec des nombres de Peclet et les rapports des rayons permettent la corrélation du transfert de chaleur.

Le transfert de chaleur par convection forcée a été étudié expérimentalement dans un anneau vertical avec différence des rapports eau-air, des excentricités et des rapports de rayon, a été étudié par **Tanxiao Zhu et.al [17]**. Un constant débit volumétrique et température du fluide chaud a été considéré. Le rapport de rayon qui fait que Nu augmente brusquement sous conditions de fonctionnement dans cette étude est étudié numériquement. Les équations gouvernantes décrivant la chaleur le transfert et le flux sont discrétisés à l'aide de la méthode des éléments finis. Les résultats indiquent que la relation entre Nu et le rapport de rayon est non linéaire. Les rapports de rayons provoquant une augmentation brutale de Nu sont respectivement de 0,36 et 0,21.

**Keyong Wang et.al [18]** ont étudié analytiquement le transfert de chaleur par convection à travers un conduit annulaire, entièrement rempli d'un poreux bidispersé (BDPM). Le modèle à deux vitesses et deux températures a été utilisé. L'anneau est chauffé des murs intérieurs et extérieurs par des flux de chaleur asymétriques. Les résultats montrent que la bidispersivité profite à l'amélioration du transfert de chaleur dans une plage inférieure de rapport de conductivité thermique efficace par rapport au milieu poreux monodisperse (MDPM).

L'effet de viscosité variable sur la convection laminaire dans une conduite annulaire et horizontale a été étudié numériquement par **Nouar [19]**. A l'entrée de l'annulaire du conduit, l'écoulement est totalement développé, et la température est uniforme. Il a trouvé que, Lorsque la viscosité diminue avec la température il y a une accélération de l'écoulement axial. Dans la partie supérieure du conduit et une décélération à la partie inférieure. Il a constaté aussi que la viscosité variable augmente le transfert thermique global des convections forcées et mixte.

## Chapitre II

# Modèle Mathématique

2.1. Introduction :

Ce chapitre entame la modélisation mathématique du problème physique. Le modèle mathématique est l'ensemble des équations différentielles aux dérivées partielles, de la conservation de masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie; avec les conditions initiales et aux limites. Le modèle mathématique est complété par les fonctions précisant les variations de la viscosité et la conductivité thermique avec la température. Naturellement, les équations modélisantes sont écrites dans les coordonnées elliptiques. La forme non dimensionnelle des équations modélisant est obtenue par la normalisation des variables dépendantes et indépendantes avec des échelles caractéristiques appropriées. Le transfert thermique est quantifié par des nombres de Nusselt locaux et moyens.

2.2. Description du problème:

On considère un écoulement de la convection forcé dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques horizontaux et concentrique avec des propriétés variables. Le cylindre intérieur est statique et chauffé par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Les rayons elliptiques des cylindres intérieur et extérieur sont égaux à 0.5 et 1.0, respectivement. La demi-distance focale des ellipses de la section droite du conduit est égale à 0.0045m. La longueur du conduit est 100. A l'entrée du conduit, le fluide (eau) a une vitesse axiale constante égale à  $(2.231 \times 10^{-2} \text{ m/s}$  pour  $Re=100$ )  $(4.462 \times 10^{-2} \text{ m/s}$  pour  $Re=200$ )  $(6.693 \times 10^{-2} \text{ m/s}$  pour  $Re=300$ ) et une température uniforme égale à  $20^\circ\text{C}$ . Un schéma, qui n'est pas à l'échelle, du problème est présenté dans la **Figure 2.1**.

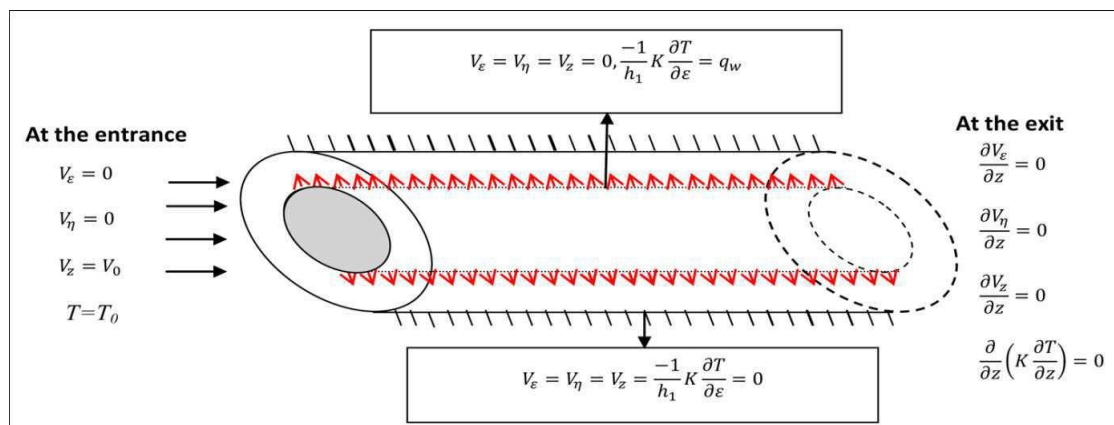


Figure2.1. Géométrie et conditions aux limites du problème.

**2.2.1. Formulation mathématique :**

A  $t=0$  on a :  $V_\varepsilon = 0, V_\eta = 0, V_z = 0, T = T_0$

A  $t > 0$  on a les équations de conservation :

**2.2.1.1. L'équation de continuité :**

$$\frac{1}{h_1 h_1} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.1)$$

**2.2.1.2. L'équation de quantité de mouvement suivant  $\varepsilon$  :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_\varepsilon)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \rho V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] \\ & = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P_h}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] + \rho \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) g \end{aligned} \quad (2.2)$$

**2.2.1.3. L'équation de quantité de mouvement suivant  $\eta$  :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_\eta)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + \rho V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. - \rho V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\ & = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P_h}{\partial \eta} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right. \\ & \quad \left. + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \rho \beta (T - T_0) \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) g \end{aligned} \quad (2.3)$$



**2.2.1.4. L'équation de quantité mouvement suivant z :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho_0 h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] \\ &= -\frac{\partial P_h}{\partial z} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

**2.2.1.5. L'équation d'énergie :**

$$\begin{aligned} & C_p \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_p \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\rho h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(\rho h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

**2.2.1.6. Conditions initiales et aux limites :**

$$t=0 \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0, \quad T = T_0 \quad (\text{condition initiale})$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 0.5, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad q_w = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \quad (\text{sur la paroi de cylindre intérieur}) \quad (2.6)$$

$$t > 0 \quad \varepsilon = 1, \quad V_z = V_\eta = V_\varepsilon = -\frac{1}{h_1} k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{sur la paroi de cylindre extérieur}) \quad (2.7)$$

$$t > 0 \quad Z = 0, \quad V_z = V_0, \quad V_\eta = V_\varepsilon = 0 \quad T = T_0 \quad (\text{à l'entrée de conduit}) \quad (2.8)$$

$$t > 0, z = L, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{à la sortie de conduit}) \quad (2.9)$$

Les variables adimensionnelles et les propriétés thermophysiques sont normalisées par leurs échelles caractéristiques pour obtenir des quantités adimensionnelles qui sont présentées dans le **Tableau 2.1**.

**Tableau 2.1 Les variables et les propriétés thermophysiques adimensionnelles.**

$h_1^* = \frac{h_1}{a}$	$h_2^* = \frac{h_2}{a}$
$z^* = \frac{z}{a}$	$t^* = \frac{V_0 t}{a}$

$$\begin{aligned}
V_\varepsilon^* &= \frac{V_\varepsilon}{V_0} & V_\eta^* &= \frac{V_\eta}{V_0} \\
V_z^* &= \frac{V_z}{V_0} & T^* &= \frac{T - T_0}{\frac{q_w a}{k_0}} \\
P^* &= \frac{P - P_0}{\rho_0 V_0^2} & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} \\
k^* &= \frac{K}{K_0} & L^* &= \frac{L}{a}
\end{aligned}$$

## 2.2.2. La forme adimensionnelle des équations du modèle mathématique :

### 2.2.2.1. L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] = 0 \quad (2.10)$$

### 2.2.2.2. L'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\varepsilon^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\varepsilon^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\varepsilon^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} - V_\eta^{*2} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{h_1^*} \frac{\partial P^*}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) - 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\varepsilon^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( 2\mu^* \frac{V_\eta^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_2^* \frac{V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) \\
&\left. - 2\mu^* \frac{1}{h_2^*} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \quad (2.11)
\end{aligned}$$

### 2.2.2.3. L'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial(h_2^* V_\varepsilon^* V_\eta^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1^* V_\eta^* V_\eta^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1^* h_2^* V_z^* V_\eta^*)}{\partial z^*} + V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^{*2} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \right] \\
&= -\frac{1}{h_2^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right. \\
&- 2\mu^* \frac{1}{h_1^* h_2^*} V_\eta^* \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* h_2^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) + \mu^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h_2^*} \right) \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \\
&\left. + \mu^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h_1^*} \right) \frac{h_2^*}{\partial \varepsilon} - 2\mu^* \frac{1}{h_1^*} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1^*}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu^* \frac{V_\varepsilon^*}{h_2^*} \frac{\partial h_2^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h_1^* h_2^*}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

**2.2.2.4. L'équation de quantité du mouvement suivant z :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* V_z^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* V_z^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* V_z^*)}{\partial z^*} \right] \\ &= -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\text{Re} h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( 2\mu^* h_1^* h_2^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu^* h_2^* \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \mu^* h_1^* \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

**2.2.2.5. L'équation d'énergie :**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial (h_2^* V_\varepsilon^* T^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1^* V_\eta^* T^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1^* h_2^* V_z^* T^*)}{\partial z^*} \right] \\ &= \frac{1}{\text{Re} Pr h_1^* h_2^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k^* h_1^* h_2^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

**2.2.2.6. Conditions initiales et aux limites non dimensionnelles:**

$$t^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = T^* = 0 \text{ (condition initiale)} \quad (2.15)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = 0.5, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = 0, -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 1 \text{ (sur la paroi de cylindre intérieur)} \quad (2.16)$$

$$t^* > 0, \varepsilon = 1, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = V_z^* = -\frac{1}{h_1^*} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} = 0 \text{ (sur la paroi de cylindre extérieure)} \quad (2.17)$$

$$t^* > 0, z^* = 0, V_\varepsilon^* = V_\eta^* = 0, V_z^* = 1, T^* = 0 \text{ (à l'entrée de conduit)} \quad (2.18)$$

$$t^* > 0, z^* = L^* = 100, \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\eta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = 0 \text{ (à la sortie de conduit)} \quad (2.19)$$

Certaines constantes, les valeurs de référence et les paramètres de contrôle (dynamiques et thermiques) sont précisées dans le **Tableau 2.2**.

**Tableau 2.2 Les propriétés thermo physiques et paramètre de contrôle.**

$a$	0.0045 m
$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
$\beta$	$1.8 \times 10^{-4}$ /K
$\mu_0$	$1.006 \times 10^{-3}$ kg/m.s
$\nu_0$	$1.006 \times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s
$K_0$	0.597 W/m·K
$V_0$	$2.231 \times 10^{-2}$ m/s, $2 \times 2.231 \times 10^{-2}$ m/s, $3 \times 2.231 \times 10^{-2}$ m/s
$T_0$	293 K
$\rho_0$	1000.52 kg/m <sup>3</sup>
$C_p$	4182 J/kg·K

**2.3. Modélisation des propriétés physiques variables:**

Les fittings polynomiaux, assez précis, pour modéliser les variations de la viscosité et la conductivité thermique avec la température. Ces fittings sont précises les fonctions suivantes [4] :

$$\begin{aligned} \mu(T) = & 1.79 \times 10^{-3} - 5.861 \times 10^{-5}(T - 273.15) + 1.260 \times 10^{-6} \\ & \times (T - 273.15)^2 - 1.736 \times 10^{-8}(T - 273.15)^3 + 1.420 \times 10^{-10} \\ & \times (T - 273.15)^4 - 6.177 \times 10^{-13}(T - 273.15)^5 + 1.092 \times 10^{-15} \\ & \times (T - 273.15)^6 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$k(T) = -1.050 + 0.0108T - 2.172 \times 10^{-5}T^2 + 1.389 \times 10^{-8}T^3 \tag{2.21}$$

**2.4. Les Bilans thermique et massique :**

**2.4.1. Bilan thermique global:**

Le bilan thermique global est obtenu en intégrant l'équation de l'énergie sur le domaine d'écoulement. En régime permanent obtenu dans tous les cas de cette étude, le bilan thermique global montre que la puissance calorifique fournie au fluide par la paroi intérieure chauffée du cylindre est égale à la puissance calorifique fournie par le fluide environnant en dehors de la limite( Bassin versant). Le bilan global peut être décrit par une équation :

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 \tag{2.21}$$

$q_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} d\eta dz^*$  La puissance thermique donnée (par conduction) au fluide à travers la paroi du cylindre elliptique intérieur.

$q_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=1} d\eta dz^*$  La puissance thermique échangée (par conduction) au niveau de la paroi du cylindre elliptique extérieur. Cette puissance est nulle sachant que le cylindre extérieur est adiabatique.

$q_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0} h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  La puissance thermique échangée par conduction a l'entrée du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considère.

$q_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{-1}{\text{RePr}} k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=100} h_1^* h_2^* d\eta$  La puissance thermique échangée par conduction a la sortie du conduit. Cette puissance est trouvée négligeable dans tous les cas considérés.

$q_5 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} V_{z\varepsilon}^* T_\varepsilon^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  La puissance thermique échangée par convection a l'entrée du conduit. Cette puissance est nulle sachant que  $T_e^* = 0$

$q_6 = \int_0^{2\pi} \int_0^{100} V_{zs}^* T_s^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta$  La puissance thermique échangée par convection a la sortie du conduit. Evidemment, cette puissance est très importante. A une section donnée du conduit (a un certain  $z^*$ ) la température moyenne est définie comme suit :

$$T_m^*(Z^*) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_Z^*(\varepsilon, \eta, z^*) T^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} V_Z^*(\varepsilon, \eta, z^*) h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta} \quad (2.22)$$

La température moyenne adimensionnelle est égale à zéro à l'entrée du conduit, et augmente linéairement dans la direction axiale. Cette augmentation linéaire est facilement démontrée par un bilan thermique global, appliqué à un tronçon du conduit de longueur  $z$ , et la considération de l'équation 2.21 ainsi, à la sortie du conduit, le bilan thermique global nous donne :

$$T_m^*(100) = \frac{100}{\text{RePr}} \frac{P_1^*}{S^*} + \frac{1}{\text{RePr}} \frac{1}{S^*} \int_0^{2\pi} \int_{0.5}^1 \left[ k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_{100} - k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \Big|_0 \right] h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \approx \frac{100}{\text{RePr}} \frac{P_1^*}{S^*} \quad (2.23)$$

$P_1^*$ : Est le perimetre adimensionnel de cylinder intérieur

$$P_1^* = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 h^2(0.5) + \sin^2(\eta)} d\eta = 5.356 \quad (2.24)$$

$S^*$ : Est la surface adimensionnelle de la section droite du conduit (section découlement):

$$S^* = \int_{0.5}^1 \int_0^{2\pi} [\sin^2 h^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)] d\eta d\varepsilon = 3.851 \quad (2.25)$$

L'approximation dans l'équation, est justifiée par le fait que le terme négligé représente la différence de la diffusion thermique axial, entre l'entrée et la sortie de l'espace annulaire, que est très faible par rapport au terme qui représente le chauffage de cylindre intérieur.

**2.4.2. Bilan massique global:**

L'intégration de l'équation de continuité sur le domaine d'écoulement montre l'égalité des débits massiques (et volumiques) de l'entrée et la sortie du conduit :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} \rho V_{z\varepsilon}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = \int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} \rho V_{zs}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta \quad (2.26)$$

**2.5. Le nombre de Nusselt:**

Le transfert thermique peut être quantifié par un nombre de Nusselt.

**2.5.1. Le nombre de Nusselt local :**

$$q_w = h(\eta, z)(T(0.5, \eta, z) - T_m(z)) = - \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} \quad (2.27)$$

De cette équation, il vient :

$$h(\eta, z) = \frac{- \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5}}{(T(0.5, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.28)$$

Si on définit le nombre de Nusselt local à la paroi du cylindre intérieur :

$$Nu(\eta, z) = \frac{ah(\eta, z)}{k_0} \quad (2.29)$$

Et avec l'équation donc l'équation on obtient :

$$Nu(\eta, z) = \frac{a \left[ - \frac{k}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} \right]}{k_0(T(0.5, \eta, z) - T_m(z))} \quad (2.30)$$

Ou sous forme adimensionnelle :

$$Nu(\eta, z^*) = \frac{1}{[(0.5, \eta, z^*) - T_{m=}(z^*)]} \frac{-1}{h_1^*} K^* \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0.5} = \frac{1}{([(0.5, \eta, z^*) - T_{m}^*(z^*)])} \quad (2.31)$$

**2.5.2. Le nombre de Nusselt axial et moyenne :**

Si on intègre le nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre intérieur et on divise le Résultat par ce périmètre, on obtient le nombre de Nusselt axial:

$$Nu(z^*) = \frac{1}{P_1^*} \int_0^{2\pi} Nu(\eta, z^*) \sqrt{\sinh^2(0.5) + \sin^2(\eta)} d\eta \quad (2.32)$$

Si on intègre le nombre de Nusselt axial sur la longueur du cylindre intérieur et on divise le résultat par cette longueur, on obtient le nombre de Nusselt moyen du conduit (un nombre réel positif):

$$\bar{Nu} = \frac{1}{100} \int_0^{100} Nu(z^*) dz^* \quad (2.33)$$

## Chapitre III

# L'étude Numérique



### 3.1. Introduction :

Ce chapitre constitue plusieurs parties, dans la première partie concernent l'étude numérique de problème posé dans la deuxième chapitre. La méthode numérique a été utilisée pour la résolution du problème et aussi le maillage utilisé. Dans la deuxième partie on a parlé le détail de la discrétisation de l'équation de continuité et l'équation de l'énergie, l'équation de quantité de mouvement suivant la direction azimutale et les conditions aux limites et initial. On a terminé ce chapitre par les critères de convergence et montre le bilan énergétique et thermique.

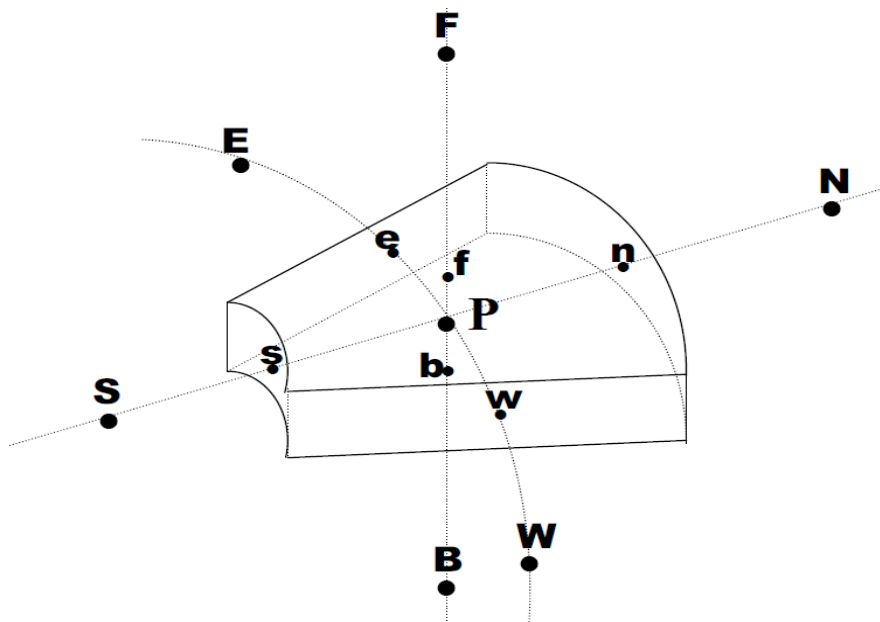
### 3.2. Le Maillage :

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine physique étudié en un domaine de calcul qui se compose d'un nombre fini de volumes. Chaque volume sera repéré par un nœud et limité par six faces. La **Figure 3.1.** illustre un volume de contrôle typique. Le point P situé au centre du volume de contrôle typique est entouré dans chaque direction par deux faces et deux nœuds dans chaque direction.

\*pour la direction radiale, les points aux nœuds sont notés N, S et les faces sont repérées par n et s.

\*pour la direction azimutale, les points aux nœuds sont notés E, W et les faces sont repérées par e et w.

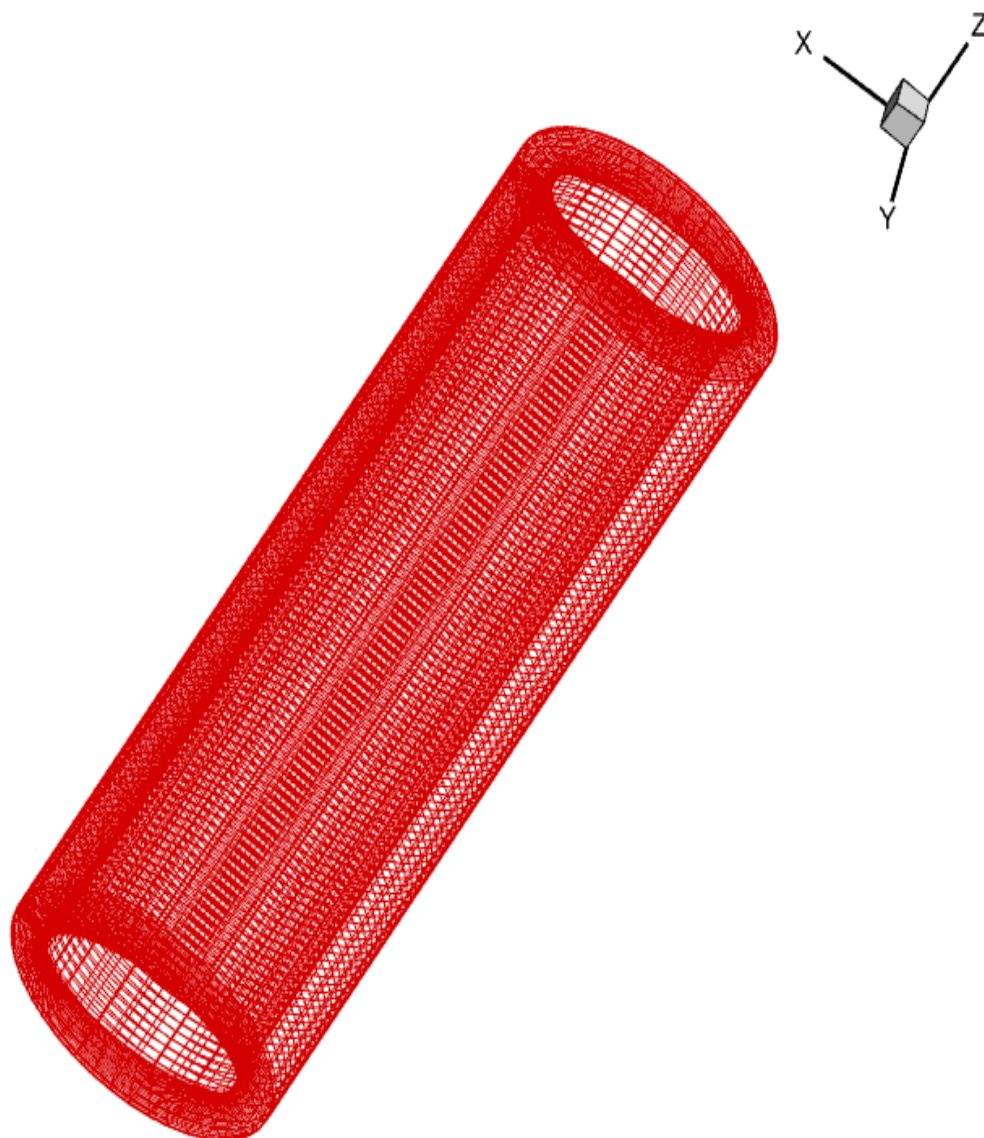
\* finalement suivant la direction axiale, les nœuds sont notés F, B et les faces sont notées f, b.



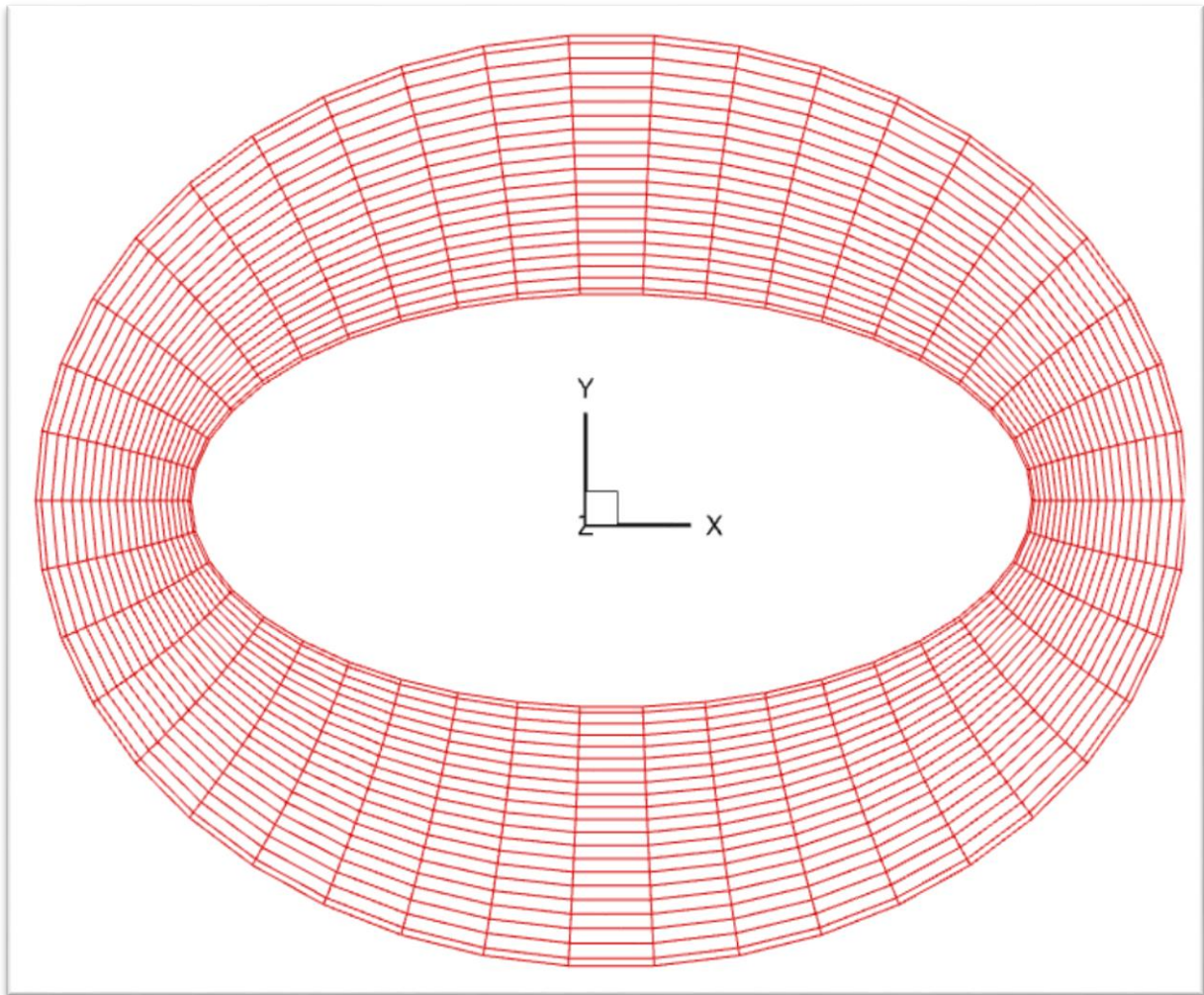
**Figure 3.1.** représentation de volume fini.

Le maillage que nous avons choisi pour faire notre étude est schématiquement représentée sur la **Figure.3.2**. Il est composé de 32 points suivant la direction radiale, 102 points suivant la direction axiale et 85 points suivant la direction azimutale. Tout maillage plus dense que celui qu'on a utilisé ( $32 \times 102 \times 85$ ) dépasse les capacités de stockage des meilleurs ordinateurs qui nous sont disponibles et des temps de calcul qui dépassent les durées pratiques. Toutefois, nous pensons que notre maillage peut être amélioré par un raffinement, surtout suivant la direction azimutale et axiale, pour mieux discerner des variations qualitative et quantitative importantes de certains phénomènes.

a)



b)



**Figure.3.2.** Le maillage numérique utilisé et sa projection en coupe. La longueur du conduit est réduite cinq fois pour une représentation graphique plus claire.

### **3.3. Détails de discrétisation :**

Les discrétisations de l'équation de continuité et de l'équation de l'énergie sont faites dans un maillage non décalé dont les représentations surfaciques sont illustrées dans les **Figures .3.3- 3.5**. Pour la clarté de la présentation, les étoiles des variables non dimensionnelles sont enlevées.

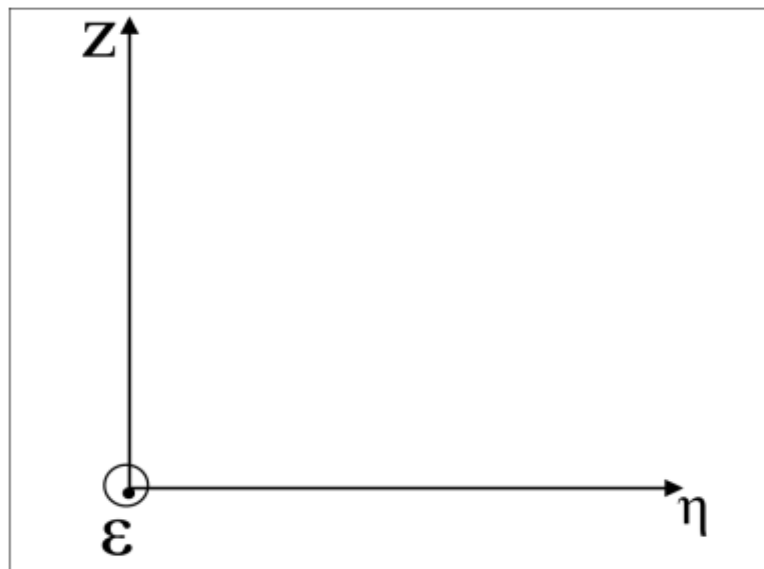
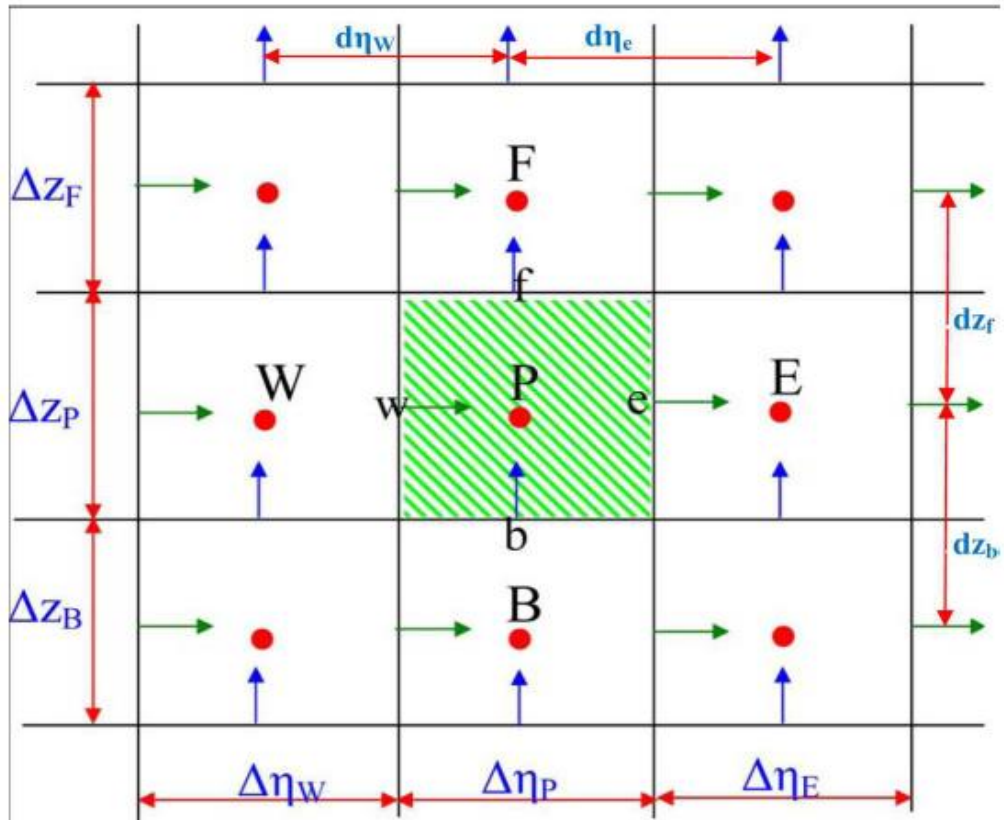


Figure.3.5. Maillage suivant les coordonnées ( $\eta, z$ )

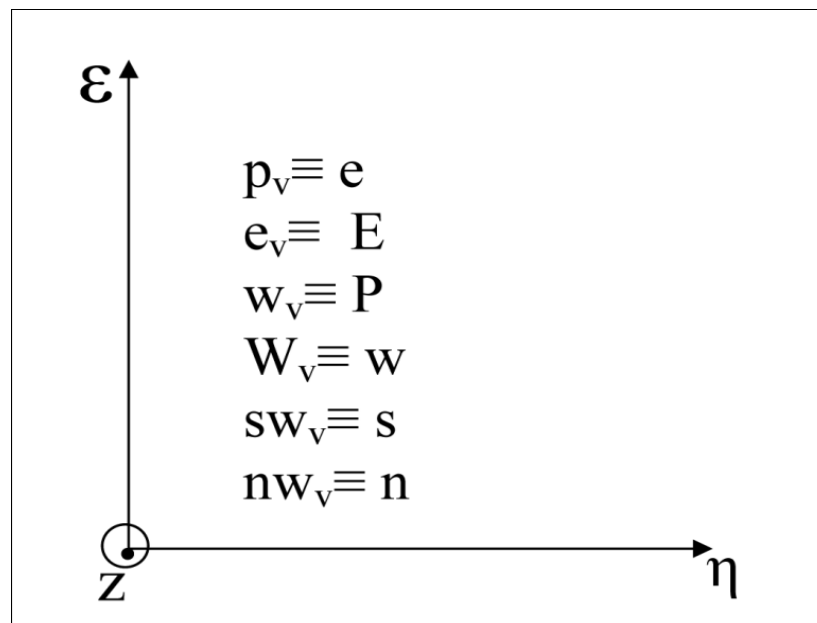
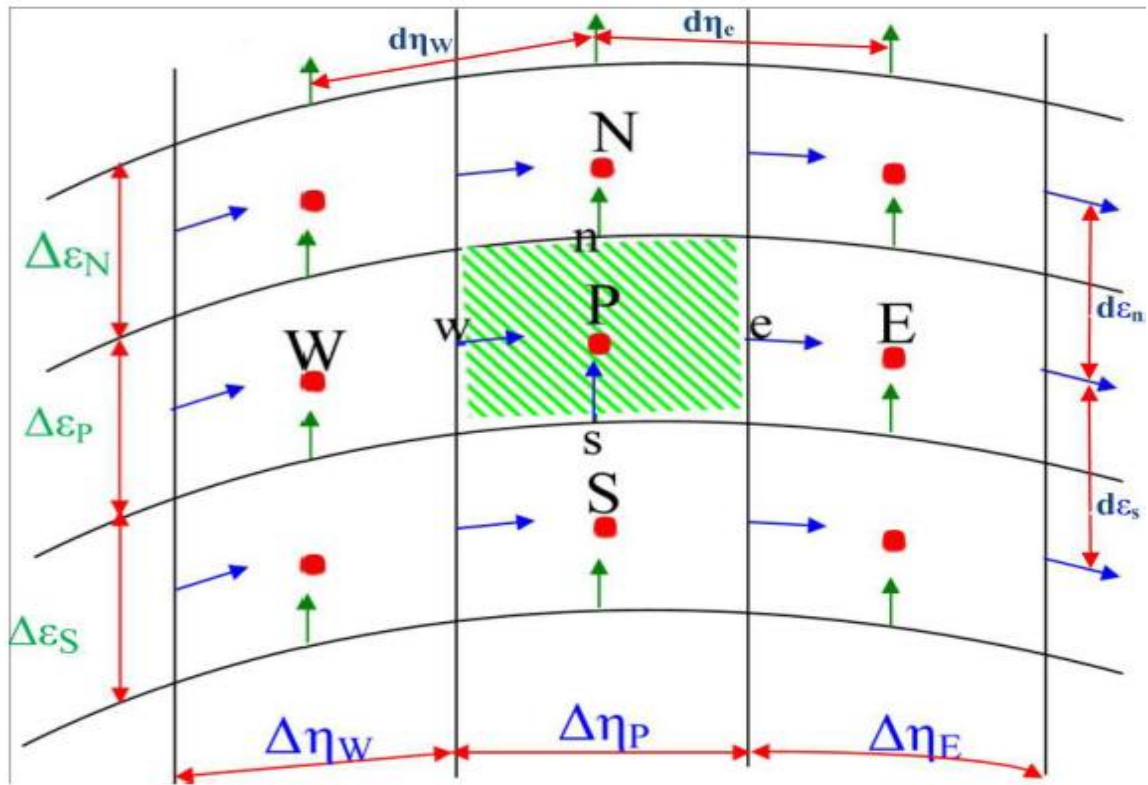


Figure.3.6. Maillage suivant les coordonnées  $(\eta, \epsilon)$ .

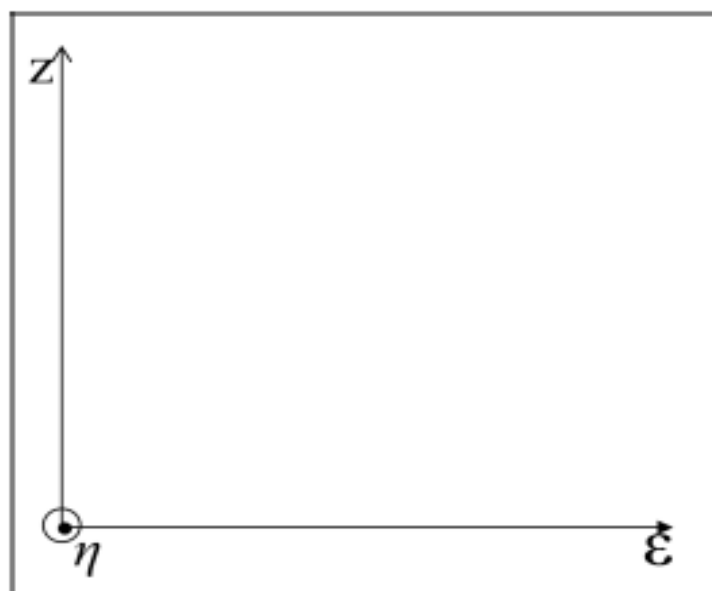
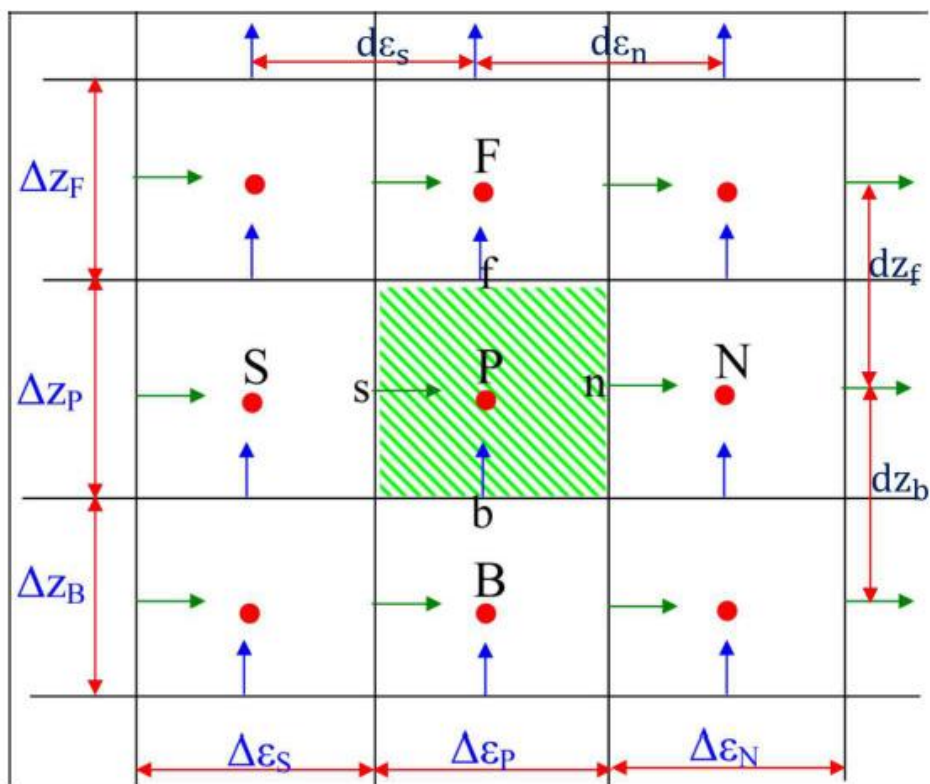


Figure.3.7. Maillage suivant les coordonnées  $(z, \epsilon)$ .

**3.3 .1.Discrétisation de l'équation de continuité :**

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (3.1)$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de continuité par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini. Tous les termes dépendants du temps sont évalués au temps  $(t + \Delta t)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = 0 \quad (3.2) \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_2 V_\varepsilon]_S^n \Delta \eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_S^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 V_\eta]_w^e \Delta \varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\ & \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 h_2 V_z]_b^f \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\ & = [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \end{aligned}$$

Le résultat de la discrétisation est:

$$\begin{aligned} & [h_2 V_\varepsilon]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon]_S^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p + [h_1 V_\eta]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p + \\ & [h_1 h_2 V_z]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p = 0 \quad (3.3) \end{aligned}$$

**3.3 .2. Discrétisation de l'équation de l'énergie :**

Soit l'équation de l'énergie

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] = \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de l'énergie par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites du volume fini.

La discrétisation temporelle du terme transitoire est faite par le schéma **d'Euler-Backward** ayant une précision du second ordre :

$$\int_S \int_w \int_b \frac{\partial T}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3T_p^{t+\Delta t} - 4T_p^t + T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** (ayant une précision du second ordre) et leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées (ayant une précision du second ordre) :

$$\begin{aligned} \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon T]_S^n |^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p = [h_2 V_\varepsilon T|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon T|_s^{t+\Delta t}] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_n^t \left( \frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^t \left( \frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_n^{t-\Delta t} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_s^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta T]_w^e |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p = [h_1 V_\eta T|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta T|_w^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ h_{1e} V_\eta |_e^t \left( \frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^t \left( \frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &\quad - \left[ h_{1e} V_\eta |_e^{t-\Delta t} \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_w^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ \int_S \int_w \int_b \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z T]_b^f |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= [h_1 h_2 V_z T|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z T|_b^{t+\Delta t}] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= 2 \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_f^t \left( \frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^t \left( \frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &\quad - \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_f^{t-\Delta t} \left( \frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des termes diffusifs est semi implicite parce que la discrétisation de la conductivité thermique (dépendante de la température) est faite avec le schéma **d'Adam-Bashforth** alors que la discrétisation temporelle de la température est implicite. La discrétisation spatiale du terme diffusif suit le schéma des différences centrées.



$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( k \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{K}{\text{RePr}} \left[ \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{K}{\text{RePr}} \left[ \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_n^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_s^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K_n^{t+\Delta t} \left( \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - K_s^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_e^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_w^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K_e^{t+\Delta t} \left( \frac{T_E^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \right. \\
&\quad \left. - K_w^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{\text{RePr} h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( k h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_f^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad \left. - h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b^{t+\Delta t} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&= \frac{1}{\text{RePr}} \left[ K_f^{t+\Delta t} \left( \frac{T_F^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{dz_f} \right) \right. \\
&\quad \left. - K_b^{t+\Delta t} \left( \frac{T_p^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

On réarrange l'équation de l'énergie sous la forme standard suivante :

$$A_p T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S K_S^{t+\Delta t} + A_E K_E^{t+\Delta t} + A_W K_W^{t+\Delta t} + A_F K_F^{t+\Delta t} + A_B K_B^{t+\Delta t} + S \tag{3.5}$$

Les conductivités sont discrétisées avec le schéma **d'Adam-Bashforth** :

$$K_n^{t+\Delta t} = 2K_n^t - K_n^{t-\Delta t}$$

$$K_s^{t+\Delta t} = 2K_s^t - K_s^{t-\Delta t}$$

$$K_e^{t+\Delta t} = 2K_e^t - K_e^{t-\Delta t}$$

$$K_w^{t+\Delta t} = 2K_w^t - K_w^{t-\Delta t}$$

$$K_f^{t+\Delta t} = 2K_f^t - K_f^{t-\Delta t}$$

$$K_b^{t+\Delta t} = 2K_b^t - K_b^{t-\Delta t}$$

On note, que quelque soit le temps, on n'a pas les valeurs de la conductivité ( $k_s, k_n, k_e, k_w, k_f, k_b$ ) aux six faces du volume fini typique. Ce qu'on a sont les valeurs des conductivités aux centres du volume fini et des six volumes finis qui lui sont adjacents : ( $k_s, k_N, k_E, k_W, k_F, k_B$ ). La détermination des conductivités des faces est basé sur la continuité du flux de chaleur entre volumes adjacents, à travers les faces qui les séparent. Un volume qu'elles séparent. Ainsi, on peut démontrer qu'à chaque temps :

$$k_e = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_E}{k_E}}$$

$$k_w = \frac{2d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_W}{k_W}}$$

$$k_n = \frac{2d\eta_n}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_N}{k_N}}$$

$$k_s = \frac{2d\eta_s}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_S}{k_S}}$$

$$k_f = \frac{2d\eta_f}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_F}{k_F}}$$

$$k_b = \frac{2d\eta_b}{\frac{\Delta\eta_p}{k_p} + \frac{\Delta\eta_B}{k_B}}$$

Les coefficients de l'équation de discrétisation sont :

$$A_N = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_n^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \Delta\eta_p \Delta z_p, \quad A_S = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_s^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \Delta\eta_p \Delta z_p$$

$$A_E = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_e^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p, \quad A_W = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{K_w^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p$$

$$A_F = \frac{1}{\text{RePr}} h_{1f} h_{2f} \frac{K_f^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p, \quad A_B = \frac{1}{\text{RePr}} h_{1b} h_{2b} \frac{K_b^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p$$

$$A_p = \frac{3}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p + A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B$$

$$\begin{aligned}
S = & \frac{4T_p^t - T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \Delta z_p - 2 \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_{n}^t \left( \frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_{s}^t \left( \frac{T_p^t + T_s^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{2n} V_\varepsilon |_{n}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon |_{s}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_s^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[ h_{1e} V_\eta |_{e}^t \left( \frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_{w}^t \left( \frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{1e} V_\eta |_{e}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta |_{w}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& - 2 \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_{f}^t \left( \frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_{b}^t \left( \frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& + \left[ h_{1f} h_{2f} V_z |_{f}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_{b}^{t-\Delta t} \left( \frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned}$$

### 3.3.3. Discrétisation de l'équation dU quantité de mouvement suivant $\eta$ :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant  $\eta$ . Représentent les projections du maillage sur les surfaces ( $\varepsilon$ ,  $\eta$ ) et ( $\eta$ ,  $z$ ). La projection sur la surface ( $\varepsilon$ ,  $z$ ) est similaire a celle du maillage non décalé. Soit l'équation de la quantité de mouvement suivant  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] \\
& = - \frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re} h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \\
& \left. - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sinh(\varepsilon) \cosh(\eta) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume de contrôle décalé .

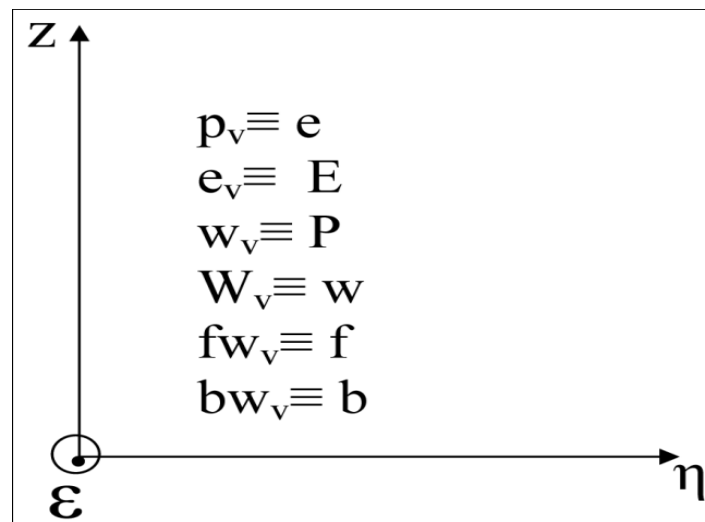
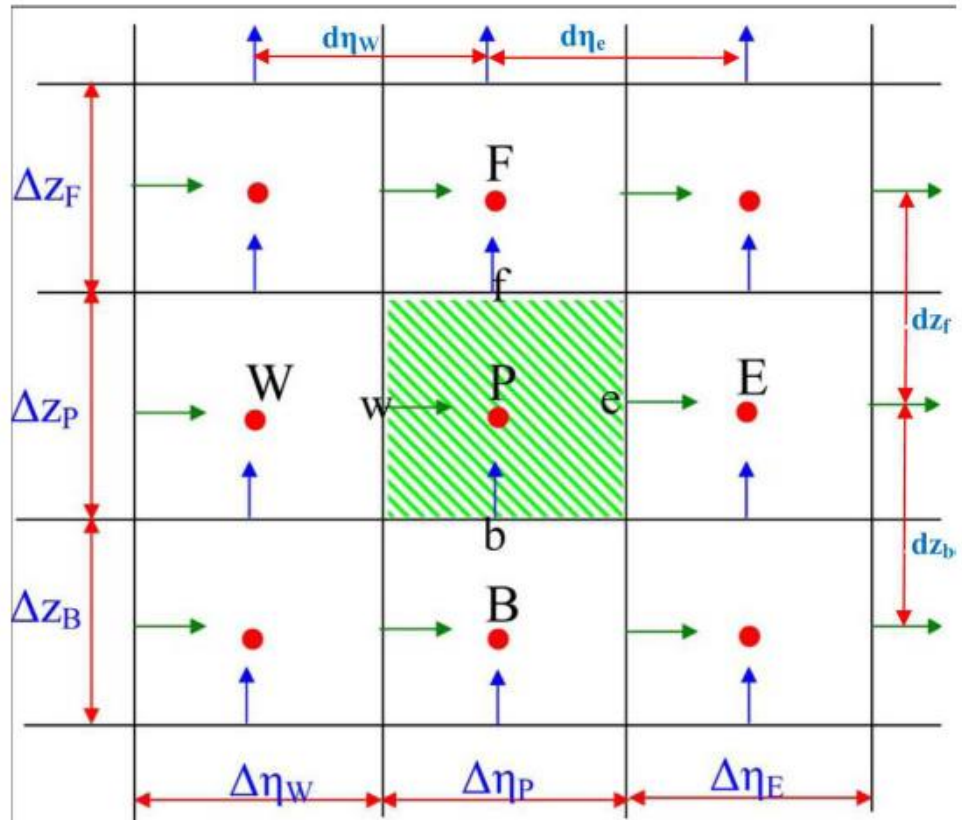


Figure3. 8 : Maillage suivant les coordonnées ( $\eta$ ,  $z$ )

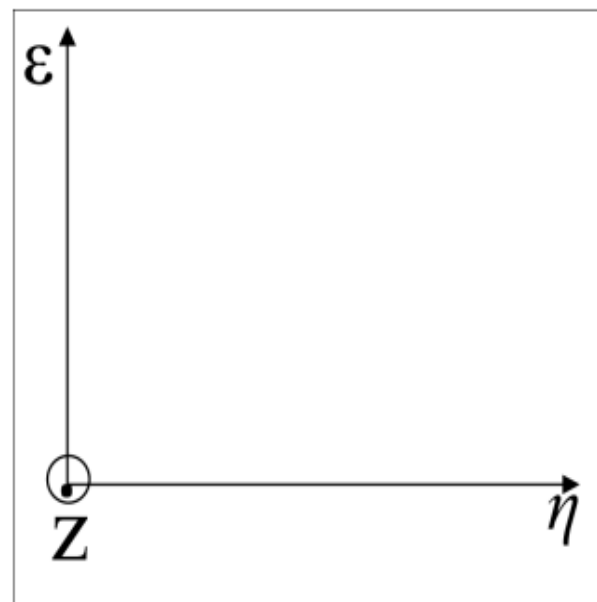
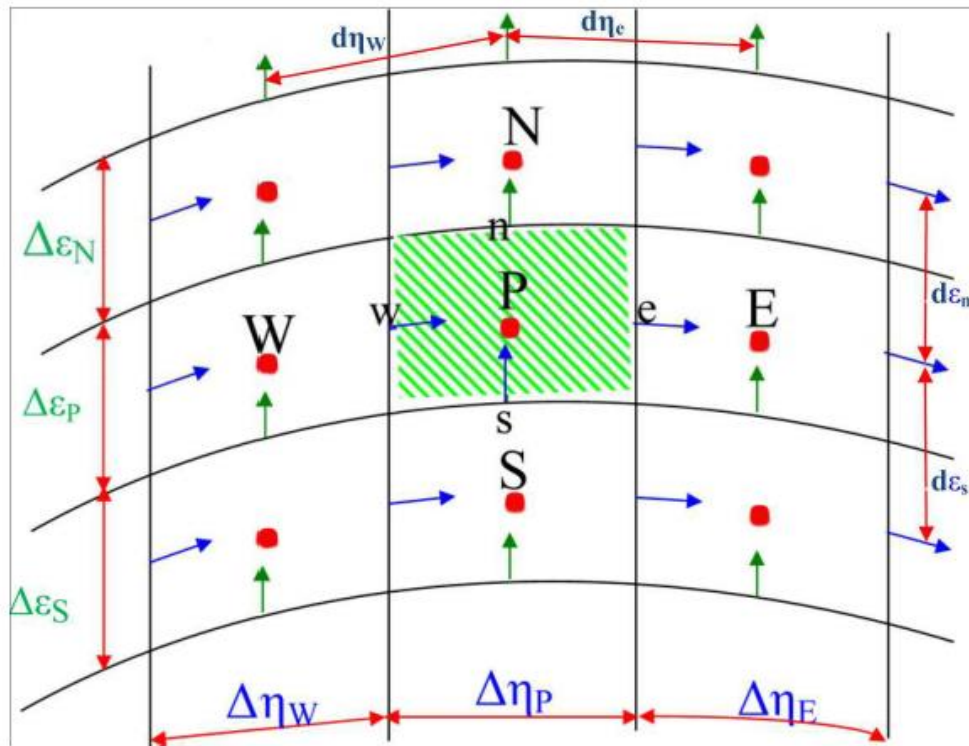


Figure 3.9 : Maillage suivant les coordonnées  $(\eta, z)$

La discrétisation temporelle du terme transitoire suit le schéma d'Euler-Backward. La vitesse est localisée au centre du volume fini décale suivant.

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - 4V_{\eta P_V}^t + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p_V} h_{2p_V} d\varepsilon_p \Delta\eta_e \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle des termes convectifs suit le schéma **d'Adam-Bashforth** leur discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont valeurs exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume fini

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_e \Delta z_p \\ &= [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{n_V}^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon V_\eta]_{s_V}^{t+\Delta t} \Delta\eta_e \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_u}^t + V_{\varepsilon n w_u}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\eta_e \Delta z_p \\ &- \left[ \begin{aligned} &h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= [h_1 V_\eta V_\eta]_{e_V}^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta V_\eta]_{w_V}^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta W_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &- \left[ \begin{aligned} &h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{f_V}^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z V_\eta]_{b_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= 2 \left[ \begin{aligned} &h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{zfe_V}^t + V_{zfw_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ &- h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{zbe_V}^t + V_{zbw_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta B_V}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&- \left[ \begin{aligned} &h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{zfe_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta f w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{zbe_V}^{t-\Delta t} + V_{zbw_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&= 2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon nw_V}^t + V_{\varepsilon se_V}^t + V_{\varepsilon sw_V}^t}{4} \right) V_{\eta P_V}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&- \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&= -2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^t + V_{\varepsilon nw_V}^t + V_{\varepsilon se_V}^t + V_{\varepsilon sw_V}^t}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p \\
&+ \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle du terme de pression est implicite. La position de la pression est exacte (sans approximation).

$$\begin{aligned}
\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{h_1 h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -[P]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= -[P_{e_V}^{t+\Delta t} - P_{w_V}^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p \\
&= [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta \varepsilon_P \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle des quatre premiers termes diffusifs est semi-implicite parce que la discrétisation temporelle des vitesses est implicite alors que celle des viscosités est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation temporelle des autres termes diffusifs est explicite suivant le schéma **d'Adam-Bashforth**. La discrétisation spatiale des termes diffusifs est faite avec le schéma des différences centrées. Les coefficients métriques sont évalués exactement a leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume.

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} \mu_{n_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta N_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \\ -\mu_{s_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta S_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \end{bmatrix} d\eta_e \Delta z_p$$

$$\mu_{n_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_V}^t - \mu_{n_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{s_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{s_V}^t - \mu_{s_V}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ 2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \begin{bmatrix} \mu_{e_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta E_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_E} \\ -\mu_{w_V}^{t+\Delta t} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta W_V}^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_p} \end{bmatrix} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\mu_{e_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_V}^t - \mu_{e_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{w_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{w_V}^t - \mu_{w_V}^{t-\Delta t}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p d\eta_e$$

$$= \frac{\mu}{Re} \begin{bmatrix} h_{1f_V} h_{2f_V} \frac{V_{\eta F_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta P_V}^{t+\Delta t}}{dz_f} \\ -h_{1b_V} h_{2b_V} \frac{V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_V}^{t+\Delta t}}{dz_b} \end{bmatrix} \Delta \varepsilon_p d\eta_e$$



$$\mu_{f_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_V}^t - \mu_{f_V}^{t-\Delta t}$$

$$\mu_{b_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_V}^t - \mu_{b_V}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\ &= \frac{1}{Re h_{1P_V} h_{2P_V}} V_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\mu_{P_V}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_V}^t - \mu_{P_V}^{t-\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{Re} \left[ \mu h_1 \frac{V_z}{\partial \eta} \right]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\ &= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{f_V}^t h_{1f_V} \left( \frac{V_{zfeV}^t - V_{zfwV}^t}{d\eta_e} \right) \\ -\mu_{b_V}^t h_{1b_V} \left( \frac{V_{zbeV}^t - V_{zbwV}^t}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\ &= \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{f_V}^{t-\Delta t} h_{1f_V} \left( \frac{V_{zfeV}^{t-\Delta t} - V_{zfwV}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \right) \\ -\mu_{b_V}^{t-\Delta t} h_{1b_V} \left( \frac{V_{zbeV}^{t-\Delta t} - V_{zbwV}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \end{aligned}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ \mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{l} \mu_{n_V}^t h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t - V_{\varepsilon n w_V}^t}{h_{1neV} - h_{1n w_V}} \right) \\ -\mu_{s_V}^t h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon seV}^t - V_{\varepsilon s w_V}^t}{h_{1seV} - h_{1s w_V}} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$-\frac{1}{Re} \begin{bmatrix} \mu_{n_V}^{t-\Delta t} h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t}}{h_{1ne_V}} - \frac{V_{\varepsilon nw_V}^{t-\Delta t}}{h_{1nw_V}} \right) \\ -\mu_{s_V}^{t-\Delta t} h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t}}{h_{1se_V}} - \frac{V_{\varepsilon sw_V}^{t-\Delta t}}{h_{1sw_V}} \right) \end{bmatrix} d\eta_e \Delta z_p$$

$$\begin{aligned} \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-1}{Re} \left[ \mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p \\ &= \frac{-2}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_V}^t}{h_{2n_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_{s_V}^t}{h_{2s_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \\ &\quad + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\mu_{n_V}^{t-\Delta t}}{h_{2n_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_{s_V}^{t-\Delta t}}{h_{2s_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{V_\eta}{h_2} \right]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= \frac{2\mu_{P_V}^t}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{1}{h_{2n_V}} \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{h_{2s_V}} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$- \frac{\mu_{P_V}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{1}{h_{2n_V}} \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{h_{2s_V}} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{\mu}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \mu_{P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \left[ \frac{V_\varepsilon}{h_1} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2\mu_{pV}^t}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{1eV}} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1wV}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$- \frac{\mu_{pV}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{h_{1eV}} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1wV}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-2\mu}{Re h_1 h_2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^{t+\Delta t} \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} [V_\varepsilon]_{s_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p$$

$$= 2 \left[ \begin{array}{c} \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^t \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon nwV}^t}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\varepsilon seV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \\ - \left[ \begin{array}{c} \frac{-2}{Re} \mu_{pV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1pV}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pV} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \left( \frac{V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \end{array} \right] d\eta_e \Delta z_p$$

$$\int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{Re} \left[ 2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{w_V}^{e_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$= \frac{2}{Re} \left[ \begin{array}{c} 2\mu_{eV}^t \frac{1}{h_{2eV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{eV} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t}{2} \right) \\ - 2\mu_{wV}^t \frac{1}{h_{2wV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wV} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon swV}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

$$- \frac{1}{Re} \left[ \begin{array}{c} 2\mu_{eV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2eV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{eV} \left( \frac{V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - 2\mu_{wV}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2wV}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wV} \left( \frac{V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p$$

La discrétisation temporelle du terme de la poussée thermique est explicite et sa discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées.

$$\begin{aligned}
 & \int_{s_V}^{n_V} \int_{w_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{GrT}{Re^2} \frac{\sinh(\varepsilon) \cos(\eta)}{\sqrt{h_1 h_2}} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\
 &= \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_V} h_{2P_V}} \sinh(\varepsilon_{P_V}) \cos(\eta_{P_V}) T_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 &= 2 \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_V} h_{2P_V}} \sinh(\varepsilon_{P_V}) \cos(\eta_{P_u}) \left( \frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
 &\quad - \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_V} h_{2P_V}} \sinh(\varepsilon_{P_V}) \cos(\eta_{P_V}) \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) d\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p
 \end{aligned}$$

Le résultat de la discrétisation spatiotemporelle est mis sous la forme standard:

$$A_{P_V} V_{\eta P_V}^{t+\Delta} = A_{N_V} V_{\eta N_V}^{t+\Delta} + A_{S_V} V_{\eta S_V}^{t+\Delta} + A_{E_V} V_{\eta E_V}^{t+\Delta} + A_{W_V} V_{\eta W_V}^{t+\Delta} + A_{F_V} V_{\eta F_V}^{t+\Delta} + A_{B_V} V_{\eta B_V}^{t+\Delta} + S_V + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \quad (3.7)$$

Ou

$$A_{P_V} V_{\eta P_V}^{t+\Delta} = A_{N_V} V_{\eta N_V}^{t+\Delta} + A_{S_V} V_{\eta S_V}^{t+\Delta} + A_{E_V} V_{\eta E_V}^{t+\Delta} + A_{W_V} V_{\eta W_V}^{t+\Delta} + A_{F_V} V_{\eta F_V}^{t+\Delta} + A_{B_V} V_{\eta B_V}^{t+\Delta} + S_V \quad (3.8)$$

$$A_{N_V} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{n_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} d\eta_e \Delta Z_p, \quad A_{S_V} = \frac{1}{Re} \frac{\mu_{s_V}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} d\eta_e \Delta Z_p$$

$$A_{E_V} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{e_V}^{t+\Delta t}}{\Delta\eta_E} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p, \quad A_{W_V} = \frac{2}{Re} \frac{\mu_{w_V}^{t-\Delta t}}{d\eta_p} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p$$

$$A_{F_V} = \frac{1}{Re} h_{1f_V} h_{2f_V} \frac{\mu_{f_V}^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p d\eta_e, \quad A_{B_V} = \frac{1}{Re} h_{1b_V} h_{2b_V} \frac{\mu_{b_V}^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p d\eta_e$$

$$A_{P_V} = \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_V} h_{2P_V} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p + \frac{1}{Re} \frac{\mu_{P_V}^{t+\Delta t}}{h_{1P_V} h_{2P_V}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p$$

$$+ A_{N_V} + A_{S_V} + A_{E_V} + A_{W_V} + A_{F_V} + A_{B_V}$$

$$S = S_V + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_V} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p$$

$$S_V = \frac{4V_{\eta P_V}^t - V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_V} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[ h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^t + V_{\varepsilon n w_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \\
& + \left[ h_{2n_V} \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta N_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - h_{2s_V} \left( \frac{V_{\varepsilon s e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \\
& -2 \left[ h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta w_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta w_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + \left[ h_{1e_V} \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta E_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - h_{1w_V} \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& -2 \left[ h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{z f e_V}^t + V_{z f w_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) - h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{z b e_V}^t + V_{z b w_V}^t}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta B_V}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
& + \left[ h_{1f_V} h_{2f_V} \left( \frac{V_{z f e_V}^{t-\Delta t} + V_{z f w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta F_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b_V} h_{2b_V} \left( \frac{V_{z b e_V}^{t-\Delta t} + V_{z b w_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left( \frac{V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_V}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
& -2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^t + V_{\varepsilon n w_V}^t + V_{\varepsilon s e_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{4} \right) V_{\eta P_V}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& + \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_V}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& +2 \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^t + V_{\varepsilon n w_V}^t + V_{\varepsilon s e_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{4} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^t + V_{\varepsilon n w_V}^t + V_{\varepsilon s e_V}^t + V_{\varepsilon s w_V}^t}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& - \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{4} \right) \left( \frac{V_{\varepsilon n e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_V}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{f_V}^t h_{1f_V} \left( \frac{V_{z f e_V}^t - V_{z f w_V}^t}{d\eta_e} \right) - \mu_{b_V}^t h_{1b_V} \left( \frac{V_{z b e_V}^t - V_{z b w_V}^t}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{Re} \left[ \mu_{fv}^{t-\Delta t} h_{1fv} \left( \frac{V_{zfev}^{t-\Delta t} - V_{zfwv}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \right) - \mu_{bv}^{t-\Delta t} h_{1bv} \left( \frac{V_{zbev}^{t-\Delta t} - V_{zbwv}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \\
& + \frac{2}{Re} \left[ \mu_{nv}^t h_{2nv} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^t}{h_{1nev}} \frac{V_{\varepsilon nwv}^t}{h_{1nwv}} \right) - \mu_{sv}^t h_{2sv} \left( \frac{V_{\varepsilon sev}^t}{h_{1sev}} \frac{V_{\varepsilon swv}^t}{h_{1swv}} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{Re} \left[ \mu_{nv}^{t-\Delta t} h_{2nv} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t}}{h_{1nev}} \frac{V_{\varepsilon nwv}^{t-\Delta t}}{h_{1nwv}} \right) - \mu_{sv}^{t-\Delta t} h_{2sv} \left( \frac{V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{h_{1sev}} \frac{V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t}}{h_{1swv}} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{-2}{Re} \left[ \frac{\mu_{nv}^t}{h_{2nv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{nv} \frac{(V_{\eta nv}^t + V_{\eta pv}^t)}{2} - \frac{\mu_{sv}^t}{h_{2sv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{sv} \frac{(V_{\eta pv}^t + V_{\eta sv}^t)}{2} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{Re} \left[ \frac{\mu_{nv}^t}{h_{2nv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{nv} \frac{(V_{\eta nv}^{t-\Delta t} + V_{\eta pv}^{t-\Delta t})}{2} - \frac{\mu_{sv}^{t-\Delta t}}{h_{2sv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{sv} \frac{(V_{\eta pv}^{t-\Delta t} + V_{\eta sv}^{t-\Delta t})}{2} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{2}{Re} \mu_{pv}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{2nv}} \left( \frac{V_{\eta nv}^t + V_{\eta pv}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2sv}} \left( \frac{V_{\eta pv}^t + V_{\eta sv}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& \quad - \frac{1}{Re} \mu_{pv}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{2nv}} \left( \frac{V_{\eta nv}^{t-\Delta t} + V_{\eta pv}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2sv}} \left( \frac{V_{\eta pv}^{t-\Delta t} + V_{\eta sv}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{2}{Re} \mu_{pv}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{1ev}} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^t + V_{\varepsilon sev}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1wv}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwev}^t + V_{\varepsilon swv}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& - \frac{2}{Re} \mu_{pv}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{pv} \left[ \frac{1}{h_{1ev}} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1wv}} \left( \frac{V_{\varepsilon nwev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& + 2 \frac{-2}{Re} \mu_{pv}^t \frac{1}{h_{1pv}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pv} \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^t + V_{\varepsilon sev}^t}{2} \right) - \frac{(V_{\varepsilon seev}^t + V_{\varepsilon swv}^t)}{2} \right] \Delta \eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{-2}{Re} \mu_{pv}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1pv}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{pv} \left[ \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{(V_{\varepsilon seev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t})}{2} \right] \Delta \eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{2}{Re} \left[ 2 \mu_{ev}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2ev}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{ev} \left( \frac{V_{\varepsilon nev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sev}^{t-\Delta t}}{2} \right) - 2 \mu_{wv}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2wv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wv} \frac{(V_{\varepsilon nwev}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swv}^{t-\Delta t})}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{Re} \left[ 2\mu_{ev}^t \frac{1}{h_{2ev}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{ev} \left( \frac{(V_{\varepsilon neV}^t + V_{\varepsilon seV}^t)}{2} \right) - 2\mu_{wv}^t \frac{1}{h_{2wv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wv} \left( \frac{(V_{\varepsilon nwV}^t + V_{\varepsilon swV}^t)}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& - \frac{1}{Re} \left[ 2\mu_{ev}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2ev}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{ev} \left( \frac{(V_{\varepsilon neV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon seV}^{t-\Delta t})}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 2\mu_{wv}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2wv}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{wv} \left( \frac{(V_{\varepsilon nwV}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon swV}^{t-\Delta t})}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \\
& + 2 \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1Pv} h_{2Pv}} \sinh(\varepsilon_{Pv}) \cos(\eta_{Pv}) \left( \frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
& - \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1Pv} h_{2Pv}} \sinh(\varepsilon_{Pv}) \cos(\eta_{Pv}) \left( \frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

La discrétisation temporelle de la viscosité est explicite selon le schéma **d'Adam-Bashforth**. Concernant la discrétisation spatiale de la viscosité au centre et aux interfaces du volume décale, elle est faite avec certaines approximations qui assurent la continuité et l'évaluation correcte des contraintes visqueuses aux endroits indiqués. Ces approximations sont mieux présentées avec une notation indicielle des viscosités qui sont stockées dans les centres des volumes finis typiques (non décales). Dans ce qui suit, la notation  $(i, j, k)$  fait référence à un point centre dans un volume fini typique ; avec le premier, le deuxième et le troisième indice liés aux positions radiale, axiale et angulaire, respectivement. Au centre et aux faces du volume fini décale (suivant  $\eta$ ), les viscosités explicites sont :

$$\mu_{Pv}^t = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta\eta_p}{\mu^{t(i,j,k)}}}$$

$$\mu_{Pv}^{t-\Delta t} = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta\eta_p}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}}$$

$$\mu_{ev}^t = \mu^t(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{ev}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{wv}^t = \mu^t(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{wv}^{t-\Delta t} = \mu^{t-\Delta t}(i, j, k + 1) \text{ (sans approximation spatiale)}$$

$$\mu_{nV}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{nV}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{sV}^t = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{sV}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu^{t-\Delta t(i+1,j,k+1)}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{fV}^t = \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t(i,j+1,k)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k)}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t(i,j+1,k+1)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{fV}^{t-\Delta t} = \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t-\Delta t(i,j+1,k)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta Z_N}{\mu^{t-\Delta t(i,j+1,k+1)}} + \frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}}}$$

$$\mu_{bV}^t = \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t(i,j-1,k)}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t(i,j-1,k+1)}}}$$

$$\mu_{bV}^{t-\Delta t} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t-\Delta t(i,j-1,k)}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta Z_P}{\mu^{t-\Delta t(i,j,k+1)}} + \frac{\Delta Z_B}{\mu^{t-\Delta t(i,j-1,k+1)}}}$$

### 3.4. Convergence :

A partir des conditions initiales, la marche dans le temps est continue, avec des pas de temps  $1 \times 10^{-3}$  jusqu'à l'atteinte du régime permanent. En ce régime, les champs dynamique et thermique sont invariants dans le temps. Dans tous les cas on a obtenu une très bonne satisfaction du bilan massique global (l'égalité des débits entrant et sortant). La valeur du débit entrant est :

$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{Z_e}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.8909 \quad (3.9)$$

Et celle du débit sortant est :



$$\int_{\varepsilon=0.5}^{\varepsilon=1} \int_0^{2\pi} V_{z_s}^* h_1^* h_2^* d\varepsilon d\eta = 3.8509 \quad (3.10)$$

Ce pendant, la satisfaction du bilan thermique global n'est obtenu qu'avec une certaine précision. Ce bilan précise par l'équation (2.31) est discute dans le deuxième chapitre ou il a été mentionne que pour tous les cas considères, les termes  $q_2, q_3, q_4$  et  $q_5$  sont négligeables. Ce qui a été démontré par les calculs. Donc, la satisfaction du bilan thermique global est vérifiée par l'égalité des termes  $q_1$  (constant) et  $q_6$ . Dans tous les cas la valeur de  $q_1$  est 0.7652. La valeur de  $q_1$  varie suivant les cas, comme il est précise dans le **tableau 3.1**. Dans ce tableau, on rapporte que la valeur absolue de la différence relative entre  $q_1$  et  $q_6$  ne dépassent pas 1.8%, et donc on conclue que la satisfaction du bilan thermique global est obtenue avec une bonne précision.

	Re=100	Re=200	Re=300
$q_1$	0.76519	0.38259	0.25506
$q_6$	0.75041	0.37991	0.24588
Erreur = $\left  \frac{q_1 - q_6}{q_1} \right $ (%)	1.93%	0.7%	3.59%

**Tableaux 3.1.**  $q_1$  et  $q_6$  avec Le pourcentage d'erreur dans les trois cas.

**Chapitre IV**

# Résultats Et Discussions

### 4.1. Introduction :

Dans ce chapitre on a présenté en détail les résultats numériques obtenus à partir de programme généré dans logiciel Fortran pour les trois cas de la convection forcée. Avec des propriétés thermophysiques variables. Et aussi on donne des commentaires sur les figures représentent la variation de la vitesse axial et la température et on terminera notre discussion par le nombre de Nusselt axial.

### 4.2. Pour le premier cas : $Re = 100$

#### 4.2.1. l'écoulement axial :

La **Figure 4.1.** présente la variation radial et angulaire de la vitesse axial dans les quatre positions axial ( $Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$ ). à partir de l'entrée du cylindre  $Z^* = 0$  jusqu'à  $Z^* = 22.5$  l'écoulement se développe uniformément dans la direction axiale et aussi on a des variations suivant les autres directions radial et azimuthal. Des couches limite se forment sur la paroi intérieure de cylindre extérieur et la paroi extérieure de cylindre intérieur, l'épaisseur de cette couche limite augmente axialement. Lorsque on arrive a  $Z^* = 50.5$  jusqu'à La sortie l'écoulement secondaire disparaît après nous obtient la longueur d'entrée hydrodynamique et la direction d'écoulement devient totalement hydro-dynamiquement développé axialement. Dans cette intervalle  $Z^* = 22.5$  jusqu'à  $Z^* = 100$  l'écoulement bidimensionnel et la vitesse axiale dépende seulement aux deux coordonné polaire. La vitesse axiale augmente radialement et atteint une valeur maximale à la moitié de l'entrefer entre la paroi de cylindre intérieur et le cylindre extérieur après de dépassé la moitié de l'entrefer l on a une diminution de vitesse a travers la paroi de cylindre extérieur. Suivant la direction azimuthal la vitesse augmente dans le sens antihoraire et arrivé a une valeur maximal a le point  $\eta = \frac{\pi}{2}$  (ça valeur est 1.89 à  $\varepsilon = 0.775$ ) après ce point la vitesse décroît jusqu'à  $\eta = \pi$  tous ça et pour le demi-cylindre supérieur et par symétrie on a la même variation dans le demi-cylindre inferieur par rapport a l'axes horizontale.

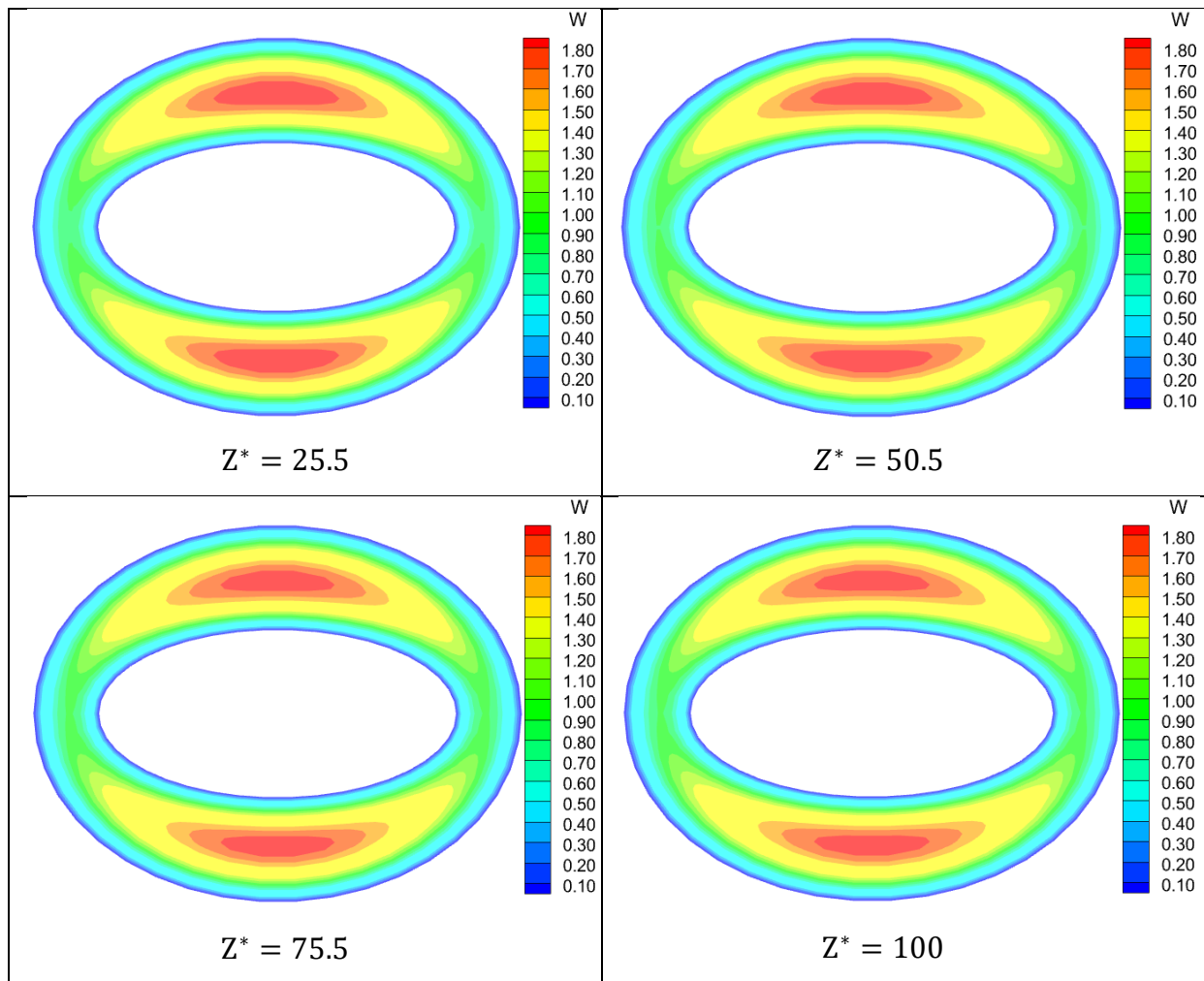


Figure. 4.1. Le champ numérique de la vitesse axiale dans différent valeur de  $Z^*$  et pour  $(Re=100)$

4.2.2. Le champ thermique :

D’après le résultat en remarquons que le champ thermique se développe suivant la direction axial au long de cylindre. La **Figure 4.2.** Présent la variation de champ thermique dans le cas de  $Re=100$  pour quatre points axial choisi comme suit ( $z^* = 25.5, z^* = 50.5, z^* = 75.5, z^* = 100$ ).a partir de la figure on prend une observation que la température est relativement élevé dans la paroi de cylindre intérieur par ce que en a un chauffage pariétal au niveau de la paroi de cylindre intérieur. Par rapport à les axes elliptiques le champ thermique est symétrique. Suivant la direction angulaire la température décroît à partir de l'axe horizontal elliptique vers l'axe vertical. Dans la direction radiale la température diminue à partir de la paroi de cylindre intérieur vers la paroi de cylindre extérieure. Finalement pour le sens axial le champ thermique augment axialement à compter de la entrée de cylindre jusqu’à la sortie de canal car on a un ajout de chaleur le long de cylindre intérieure.

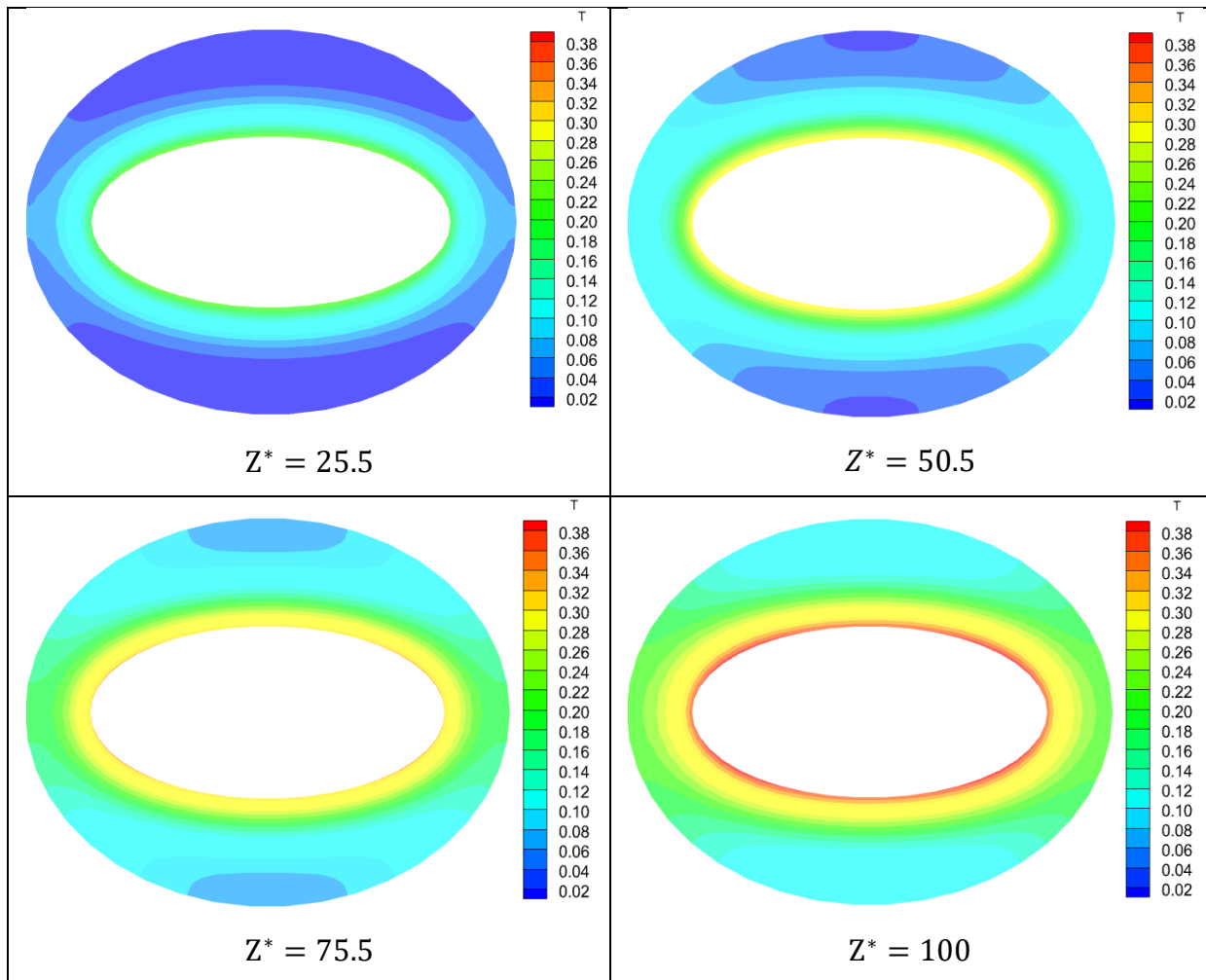
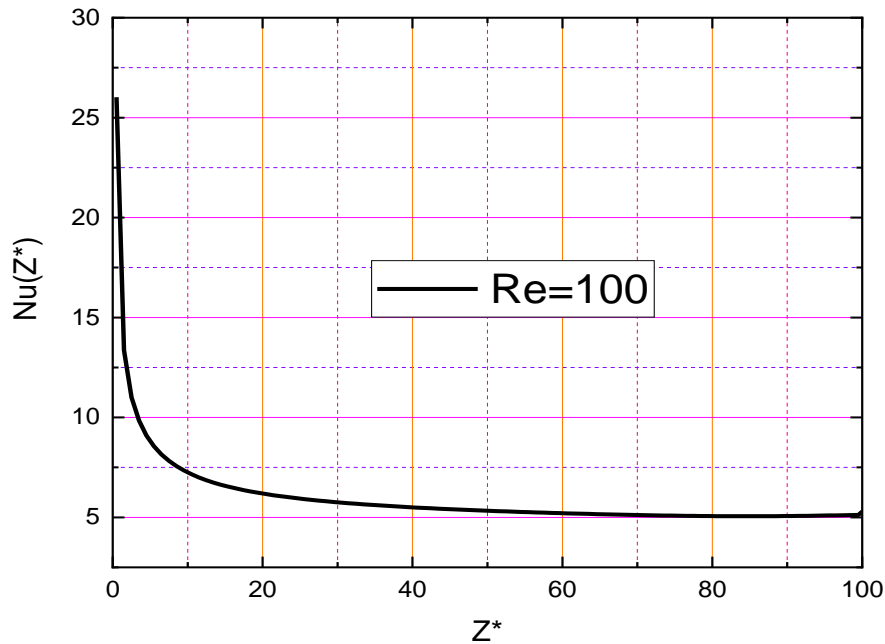


Figure .4.2.Le champ numérique de la température ( $Re = 100$ ) à différents valeur de  $Z^*$



**Figure.4.3.La variation de nombre de Nusselt axial par rapport à Z\* (Re = 100)**

La **Figure 4.3.** Présent la variation de nombre de Nusselt axial, pour le cas de Re=100 en peut diviser la courbe en trois partie, La première partie ( $Z^* = 0, Z^* = 10$ ) la valeur de nombre de nusselt diminue rapidement d'une valeur initial à l'environ de  $Nu= 26.02$  jusqu'à  $Nu= 7,15899$  dans le point  $Z^* = 10.5$ . Dans la deuxième partie pour l'intervalle ( $Z^* = 10.5, Z^* = 70.5$ ) la valeur de nombre de nusselt continue sa diminution lentement et obtenu une valeur de  $Nu= 5,20394$  dans le point  $Z^* = 70.5$ . Finalement dans la troisième partie après de dépassé le point  $Z^* = 70$  et jusqu'à  $Z^* = 100$  Le nombre de Nusselt reste stable jusqu'à la sortie de canal dans une valeur minimal approximé a  $Nu= 5,05825$ .

### 4 .3. Pour le deuxième cas : Re =200

#### 4 .3.1.l'écoulement axial :

La **Figure 4.4.** Présent la variation radial et angulaire de la vitesse axial dans les quatre positions axiaux ( $Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$ ).Après avoir les figure elle est clair que on a une symétrie horizontal et vertical de la variation de l'écoulement axiale. Pour l'intervalle ( $Z^* = 0$  jusqu'à  $Z^* = 44.5$ ) la vitesse commence sa variation suivant les trois directions elliptiques (axial, radial, azimutal) a partir de l'entrée du canal. Pour la direction axial la vitesse maximal égal a ( $1.89$  à ( $\epsilon=0.775, \eta=\frac{\pi}{2}, Z = 44.5$ )) après ce point les variations axial de la vitesse sont négligeable jusqu'à la sortie de cylindre. Concernons la direction radial la vitesse augment et obtient une valeur maximal dans la

moitié de l'entrefer et après en commence sa diminution vers la paroi intérieure de cylindre extérieure. Pour la direction azimuthal on prend une observation que la vitesse croit à partir de point  $\eta=0$  et arrive a une valeur maximal dans  $\eta=\frac{\pi}{2}$  après de dépassé ce point on a une diminution de vitesse jusqu'à  $\eta=\pi$ .

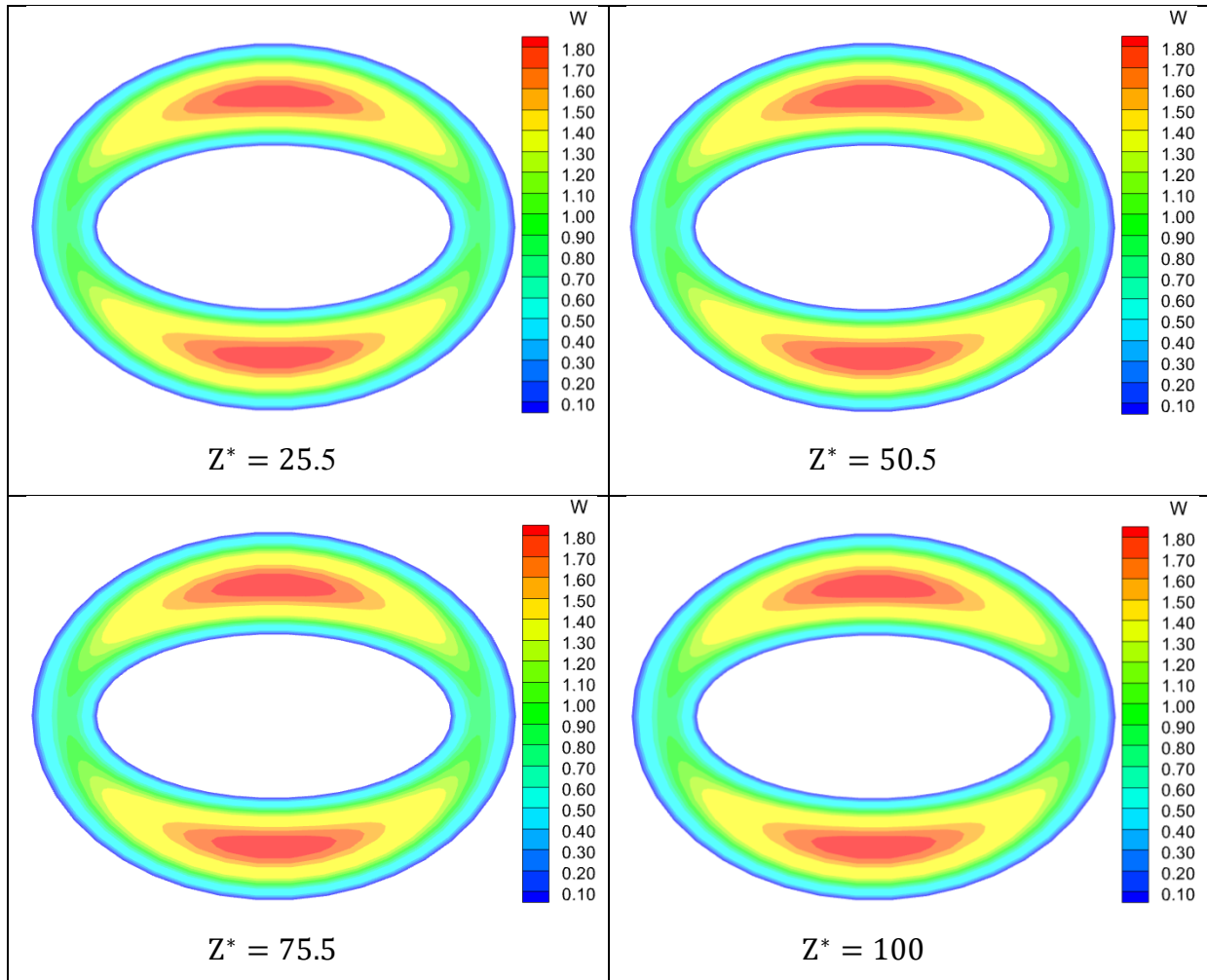


Figure .4.4. Le champ numérique de la vitesse axiale ( $Re = 200$ ) à différents valeur de

#### 4.3.2. Le champ thermique :

D'après le résultat en remarquons que le champ thermique se développe axialement au long du conduit. La **Figure 4.5**. Présente la variation de champ thermique dans le cas de  $Re=200$  pour quatre points axial choisi comme suit ( $z^* = 25.5$ ,  $z^* = 45.5$ ,  $z^*= 75.5$ ,  $z^* = 100$ ). A partir du Figure on a observé que la température augment radialement à partir de cylindre intérieur (qui chaud) vers le cylindre extérieur (adiabatique). Les variations azimuthales sont presque qualitativement identiques au cas de  $Re=100$ . Concernant les

variations axial la température augment a partir de l'entrée de conduit jusqu'à la sortie de conduit la valeur maximal  $T_{\max}=0.291$  a la surface du cylindre interne ( $Z=100$ ).

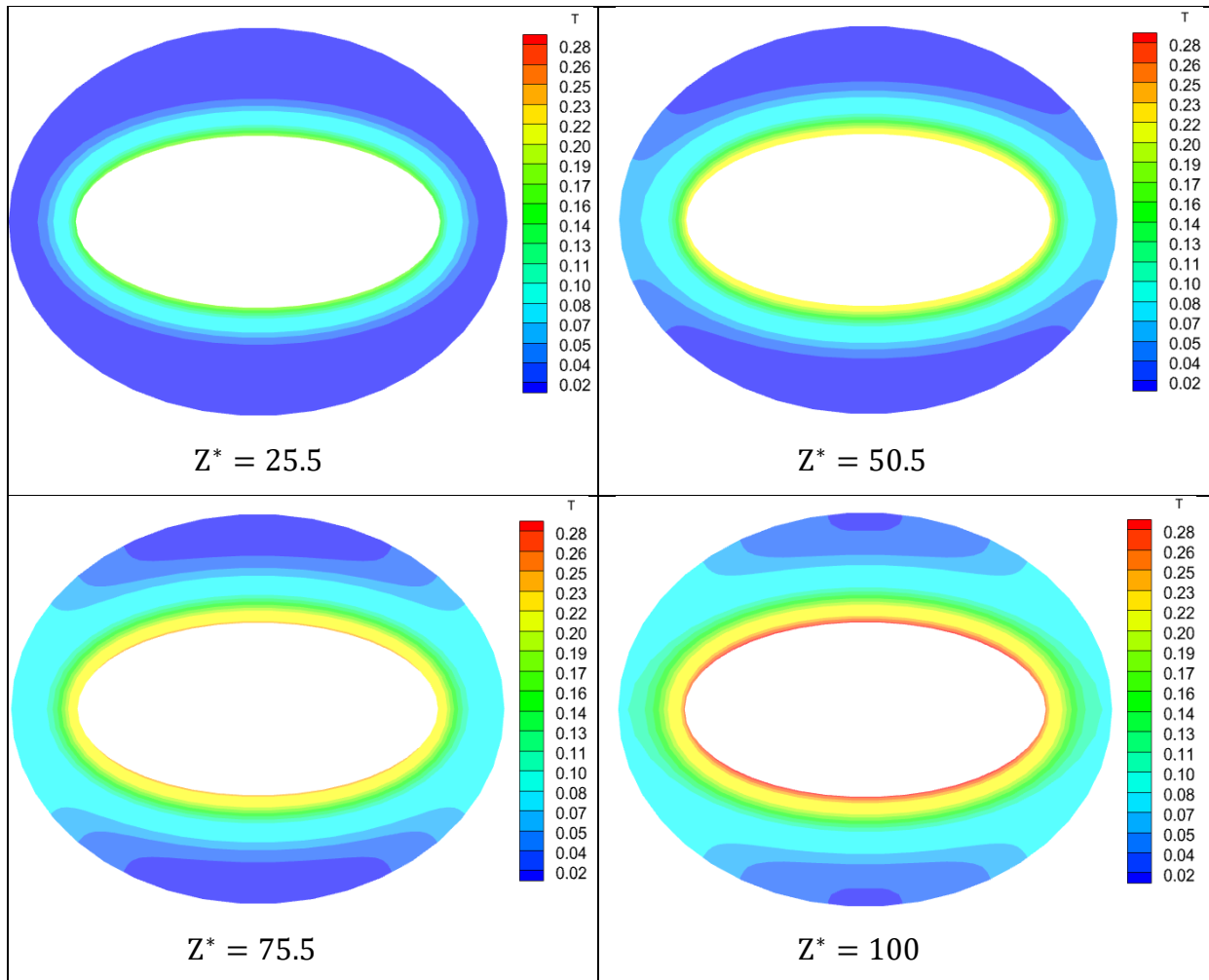
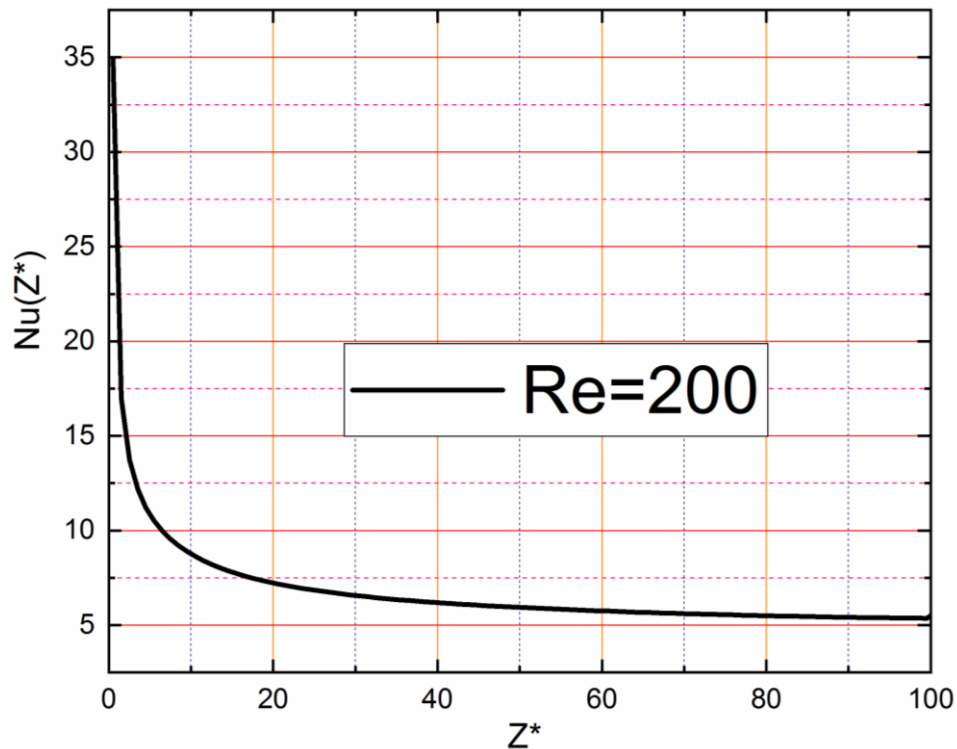


Figure .4.5. Le champ numérique de la température ( $Re = 200$ ) a différents valeur de  $Z^*$





**Figure.4.6. la variation de nombre de Nusselt axial par rapport à ,  $Z^*$  Pour  $Re=200$**

La **Figure 4.3.** Présente la variation de nombre de Nusselt axial par rapport à  $Z^*$  pour le cas de  $Re=200$ . A partir de l'entrée jusqu'à  $Z^* = 30.5$  on a un grand transfert entre la paroi de cylindre intérieur et le fluide et sa valeur  $Nu=6,45572(Z^* = 30.5)$ . Après  $Z^* = 30.5$  jusqu'à la sortie du conduit, le nombre de Nusselt diminue l'égerment jusqu'à la sortie de conduit où sa valeur a la sortie ( $Z^* = 100$ )  $Nu=5.37007$ .

### 4.3. Pour le dernier cas : $Re =300$ :

#### 4.3.1.l'écoulement axial :

La **Figure 4.4.** Présente la variation radiale et angulaire de la vitesse axial dans les quatre positions axiaux ( $Z^* = 25.5, Z^* = 50.5, Z^* = 75.5, Z^* = 100$ ).Après avoir les figure nous avons remarqué que on a une symétrie horizontal et vertical de la variation de l'écoulement axiale. Pour l'intervalle ( $Z^* = 0$  jusqu'à  $Z^* = 50.5$ ) la vitesse commence sa variation suivant les trois directions elliptiques (axial, radial, azimutal) à partir de l'entrée du canal. Pour la direction axial la vitesse maximal égal a ( $1.89$  à ( $\epsilon=0.775, \eta=\frac{\pi}{2}, Z = 50.5$ )) après ce point les variations axial de la vitesse sont négligeable jusqu'à la sortie de cylindre. Concernons la direction radial la vitesse augment et obtient une valeur maximal dans la moitié de l'entrefier et après en commence sa diminution vers la paroi intérieure de cylindre

extérieure. Pour la direction azimutal on a trouvé que la vitesse augment a partir de point  $\eta=0$  et arrive a une valeur maximal dans  $\eta=\frac{\pi}{2}$  après de dépassé ce point on a une diminution de vitesse jusqu'à  $\eta=\pi$ .

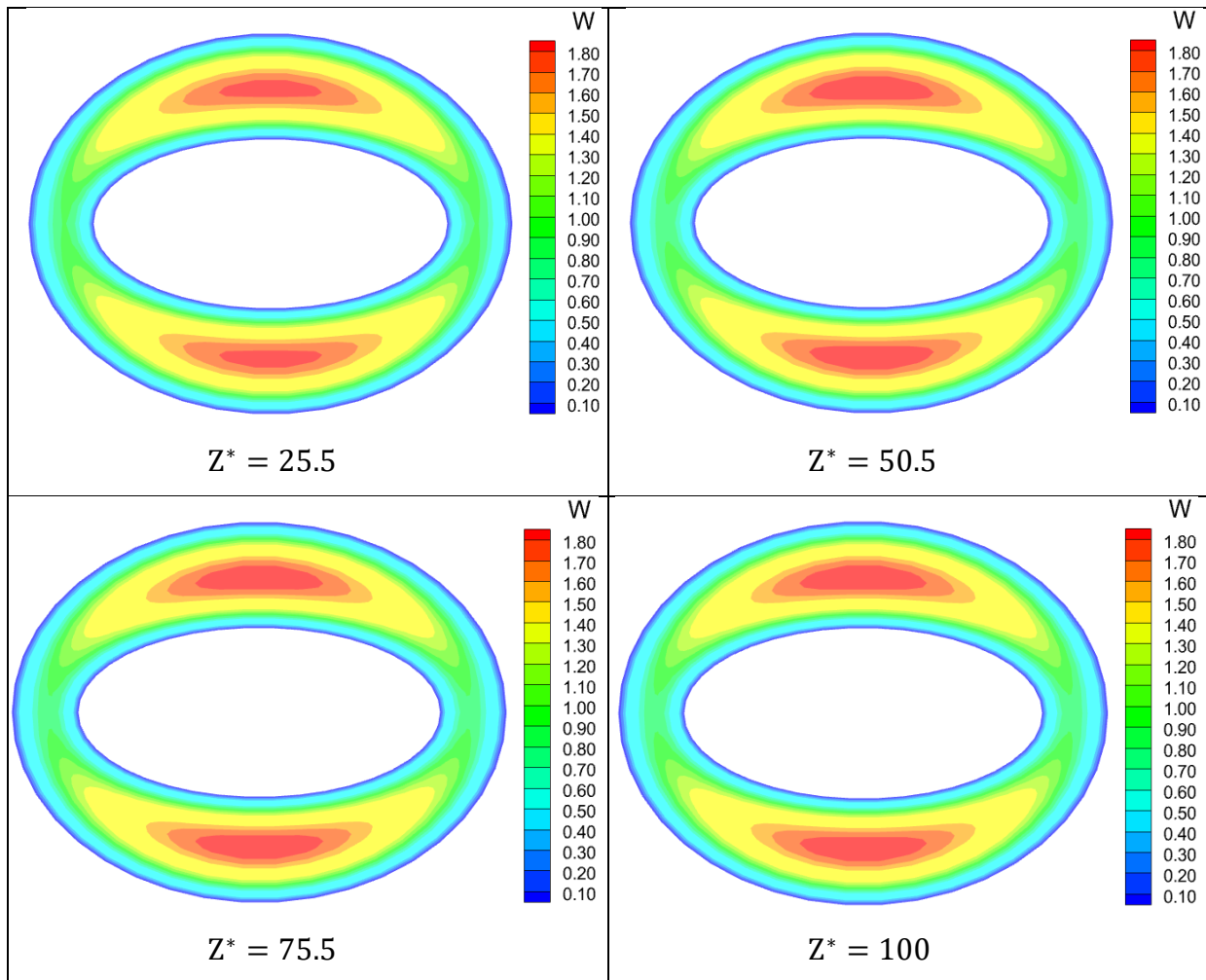


Figure.4.7. Le champ numérique de la vitesse axiale ( $Re = 300$ ) a différent valeur de  $Z^*$

#### 4.3.2. Le champ thermique :

D'après le résultat en remarquons que le champ thermique se développe axialement au long du conduit. La **Figure .4.8.** présente la variation de champ thermique dans le cas de  $Re=300$  pour quatre points axial choisi comme suit ( $z^* = 25.5, z^* = 50.5, z^*= 75.5, z^* = 100$ ).A partir du Figure on a observé que la température augment radialement a partir de cylindre intérieur (qui chaud) vers le cylindre extérieur (adiabatique). Les variations azimutal sont presque qualitativement identique au cas de  $Re=100$ . Concernant les variations axial la

température augment a partir de l'entrée de conduit jusqu'à la sortie de conduit la valeur maximal  $T_{\max}=0.2412$  a la surface du cylindre interne ( $Z=100$ ).

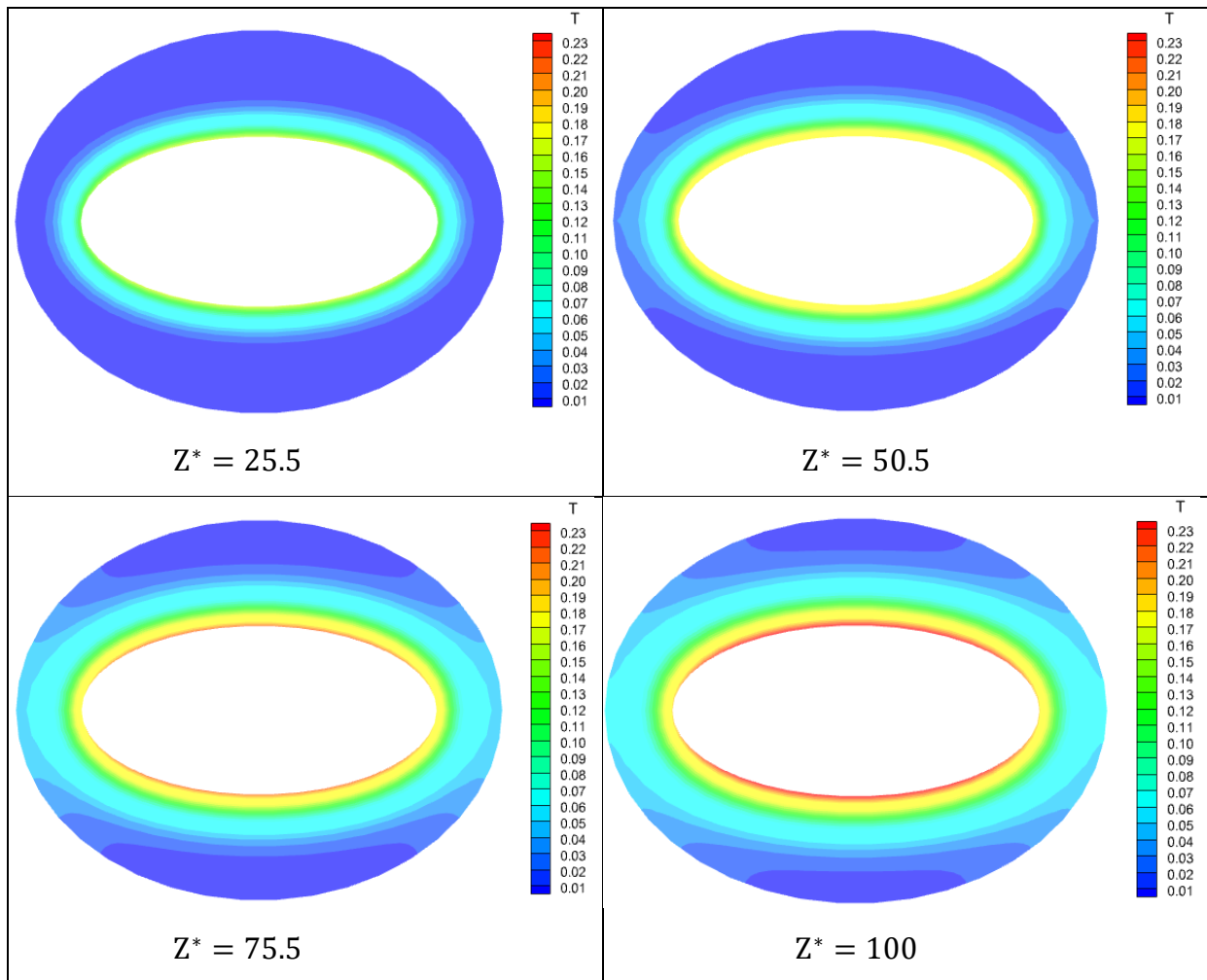
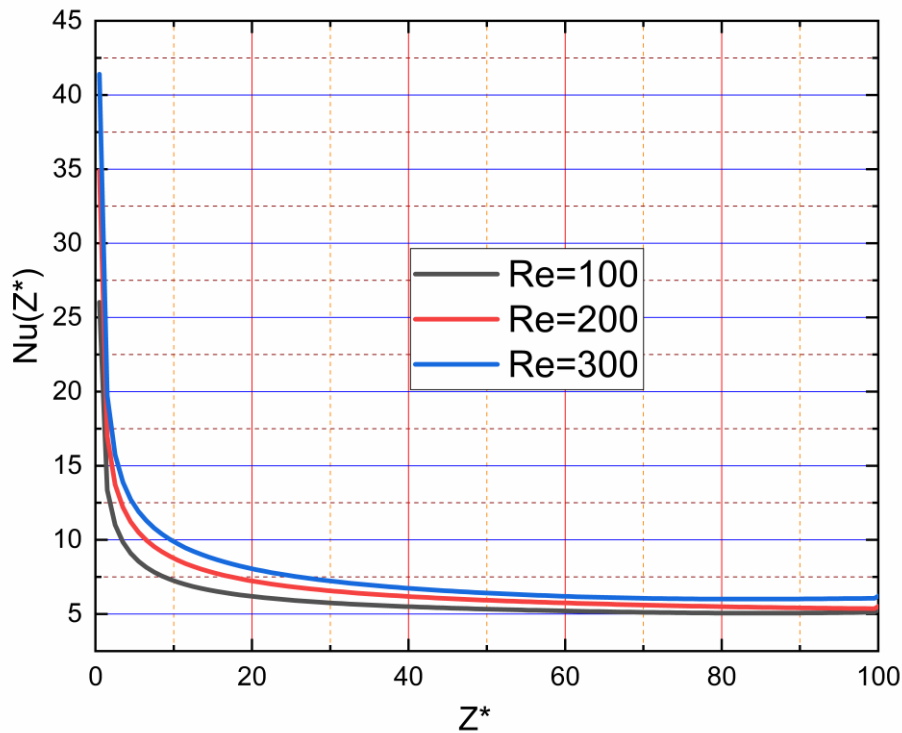


Figure.4.8. Le champ numérique de la température ( $Re = 300$ ) pour Différent valeur de  $Z^*$



**Figure.4.9.** Les nombres de Nusselt axiaux  $Nu (Z^*)$  pour différents valeur de nombre de Reynolds.

Le **Figure.4.8.** Représente Les variations des nombres de Nusselt axiaux  $Nu (Z^*)$  en trois cas ( $Re = 100 , Re = 200 , Re = 300$ ) .On peut diviser les diagrammes en quatre parties. Dans la première partie  $Z^*=0$  jusqu`a environ de  $Z^*=10$  en remarque que les trois diagrammes ( $Nu(Z^*)$ ) diminues identiquement et rapidement .Mais après  $Z^*=10$  jusqu`a  $Z^*=40$  il y a une décélération dans la vitesse de diminution, dans la dernière partie de  $Z^*=40$  jusqu`à la sortie de canal les trois graphes stabiliser dans un certain valeur pour chaque graphe ( $Re=100,Nu=5,08933$  ) ( $Re=200,Nu=5,36683$  ) ( $Re=300,Nu=6,04825$  ) .

	$W_{max}$	$T_{max}$	$Nu_m$	$T_{ms}$
Re=100	1.8935	0.2911	6.0153	0.1987
Re=200	1.8935	0.2911	6.8776	0.0993
Re=300	1.8935	0.2412	7.6256	0.0662

**Tableau 4.1.**Les valeurs de différent variable pour les trois cas de calcul

## Chapitre V

# Conclusion Générale

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de variation de nombre de Reynolds au bien le changement de régime d'écoulement sur l'échange de chaleur. Dans ce cadre, nous avons étudié numériquement la convection forcée entre deux cylindres elliptiques avec des propriétés thermo physiques variables. Le cylindre intérieur est statique et chauffe par un flux de chaleur constant. Le cylindre extérieur est statique et adiabatique. Le modèle mathématique de ce problème est constitué d'un système d'équations qui régit par l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites. On a fait la discrétisation pour les équations en utilisant une approche numérique, à base de la méthode des volumes finis. Pour faire les calculs un code Fortran a été écrit, ce code est généré en langage de Fortran.

Grâce au code FORTRAN et logiciel TECPLOT 360 Aussi L'ORIGINE, et après avoir fait la simulation nous obtenons des résultats pour les trois cas ( $Re=100$   $Re=200$   $Re=300$ ). Illustré en détail avec discussions et interprétations. Une discussion de champ dynamique et de champ thermique a été effectuée pour les trois cas et finalement nous avons fait une comparaison entre les trois cas étudiés et surtout la comparaison des trois nombres de Nusselt.

On a conclu que le changement de régime d'écoulement avec l'augmentation de la valeur de nombre de Reynolds a un effet significatif sur le coefficient d'échange de chaleur et pour la clarification on a trouvé que  $Re=300$  donne le meilleur échange de chaleur.

Notre perspective d'étude est de faire la même étude mais on ajoute l'effet de la convection mixte, et l'effet de l'inclinaison du cylindre.

# Recherche Bibliographie

- [1] **IDRISSI, Ahmed, CHEDDADI, Abdelkhalek, et OUZZANI, Mohammed T.** Heat transfer in an annular space fitted with heating isothermal blocks: Numerical bifurcation for low blocks height. Case studies in thermal engineering, 2016, vol. 7, p. 1-7.
- [2] **NOBARI, M. R. H., SHINIYAN, B., et MIRZAEI, M .**Mixed convection in a vertical helical annular pipe. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014, vol. 73, p. 468-482..
- [3] **ISLAM, Nazrul, GAITONDE, U. N., et SHARMA, G.K .**Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli. International journal of heat and mass transfer, 2001, vol. 44, no 11, p. 2107-2120.
- [4] **ZERARI K , AFRID M, GROULX D.** Forced and mixed convection in the annulus between two horizontal confocal elliptical cylinders. International journal of thermal sciences, 2013, 74: 126-144.
- [5] **Lin Riyi,, Wang Xiaoqian, Xu Weidong, Jia Xinfeng, Jia Zhiying .**Experimental and numerical study on forced convection heat transport in eccentric annular channels. International Journal of Thermal Sciences, 2019, vol. 136, p. 60-69.
- [6] **Othmane OULAID, Brahim BENHAMOU , Nicolas GALANIS.** Nombre De Nusselt, Nu. Effet De L'inclinaison Sur Les Transfert Couples De Chaleur et de masse dans un canal. VIIème Colloque Interuniversitaire Franco-Québécois sur la Thermique des Systèmes 18-20 mai 2009, Lille
- [7] **J.R.Maughan ET F.P.INCROPERA.** Experiments on mixed convection heat transfer for airflow in a horizontal and inclined channel. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1987, vol. 30, no 7, p. 1307-1318.
- [8] **TANDON, T. N., VARMA, H. K., et GUPTA, C. P.** Heat transfer during forced convection condensation inside horizontal tube. International Journal of réfrigération, 1995, vol. 18, no 3, p. 210-214.

- [9] **HUNT, M. L. et TIEN, C. L.** Effects of thermal dispersion on forced convection in fibrous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1988, vol. 31, no 2, p. 301-309.
- [10] **François Debray Jean PierreFranc ThierryMai Sylvain Reynaud.** Mesure des coefficients de transfert thermique par convection forcée en mini canaux. *Mécanique & industries*, 2001, vol. 2, no 5, p. 443-454.
- [11] **JACQUES CHARRAUDEAU** .L'influence de gradients de propriété physique En convection forcé application au cas de tube Laboratoire de Dynamique des Fluides, Faculté. Des Sciences,40, avenue du Recteur Pineau, 86Poitiers, France
- [12] **WANG, C.-C. et CHEN, C.-K.** Forced convection in a wavy-wall channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, vol. 45, no 12, p. 2587-2595.
- [13] **AVCI, Mette et AYDIN, Orhan.** Laminar forced convection slip-flow in a micro-annulus between two concentric cylinders. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, vol. 51, no 13-14, p. 3460-3467.
- [14] **MOHAMMED, Hussein A.** Laminar mixed convection heat transfer in a vertical circular tube under buoyancy-assisted and opposed flows». *Energy conversion and management*, 2008, vol. 49, no 8, p. 2006-2015.
- [15] **JHA, Basant K., ONI, Michael O., et AINA, Babatunde.** Steady fully developed mixed convection flow in a vertical micro-concentric-annulus with heat generating/absorbing fluid: an exact solution. *Ain Shams Engineering Journal*, 2018, vol. 9, no 4, p. 1289-1301.
- [16] **Terhmina ET Mojtabi** Écoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.31, pp.583-590, (1988).



- [17] **Zhiying Jia , Xinwei Wang , Liqiang Zhang , Zhengda Yang , Riyi Lin ,Jiaojiao Liu** .Experimental and simulation study of forced convection in vertical eccentric annular space. International Journal of Thermal Sciences, 2021, vol. 161, p. 106735.
- [18] **Keyong Wang, Qijia Wang, Peichao Li** .Forced convection in a fully-filled bidisperse porous annular duct subject to asymmetric heat fluxes. Thermal Science and Engineering Progress, 2022, vol. 32, p. 101328.
- [19] **C. Nouar**.Numerical solution for laminar mixed convection in a horizontal annular duct: temperature-dependent viscosity effect. Int. J. For Numerical Methods in Fluids, Vol. 29, pp.849-864, (1999).

# Recherche Bibliographie

- [1] **IDRISSI, Ahmed, CHEDDADI, Abdelkhalek, et OUZZANI, Mohammed T.** Heat transfer in an annular space fitted with heating isothermal blocks: Numerical bifurcation for low blocks height. Case studies in thermal engineering, 2016, vol. 7, p. 1-7.
- [2] **NOBARI, M. R. H., SHINIYAN, B., et MIRZAEI, M .**Mixed convection in a vertical helical annular pipe. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014, vol. 73, p. 468-482..
- [3] **ISLAM, Nazrul, GAITONDE, U. N., et SHARMA, G.K .**Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli. International journal of heat and mass transfer, 2001, vol. 44, no 11, p. 2107-2120.
- [4] **ZERARI K , AFRID M, GROULX D.** Forced and mixed convection in the annulus between two horizontal confocal elliptical cylinders. International journal of thermal sciences, 2013, 74: 126-144.
- [5] **Lin Riyi,, Wang Xiaoqian, Xu Weidong, Jia Xinfeng, Jia Zhiying .**Experimental and numerical study on forced convection heat transport in eccentric annular channels. International Journal of Thermal Sciences, 2019, vol. 136, p. 60-69.
- [6] **Othmane OULAID, Brahim BENHAMOU , Nicolas GALANIS.** Nombre De Nusselt, Nu. Effet De L'inclinaison Sur Les Transfert Couples De Chaleur et de masse dans un canal. VIIème Colloque Interuniversitaire Franco-Québécois sur la Thermique des Systèmes 18-20 mai 2009, Lille
- [7] **J.R.Maughan ET F.P.INCROPERA.** Experiments on mixed convection heat transfer for airflow in a horizontal and inclined channel. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1987, vol. 30, no 7, p. 1307-1318.
- [8] **TANDON, T. N., VARMA, H. K., et GUPTA, C. P.** Heat transfer during forced convection condensation inside horizontal tube. International Journal of réfrigération, 1995, vol. 18, no 3, p. 210-214.

- [9] **HUNT, M. L. et TIEN, C. L.** Effects of thermal dispersion on forced convection in fibrous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1988, vol. 31, no 2, p. 301-309.
- [10] **François Debray Jean Pierre Franc Thierry Mai Sylvain Reynaud.** Mesure des coefficients de transfert thermique par convection forcée en mini canaux. *Mécanique & industries*, 2001, vol. 2, no 5, p. 443-454.
- [11] **JACQUES CHARRAUDEAU.** L'influence de gradients de propriété physique En convection forcé application au cas de tube Laboratoire de Dynamique des Fluides, Faculté. Des Sciences, 40, avenue du Recteur Pineau, 86Poitiers, France
- [12] **WANG, C.-C. et CHEN, C.-K.** Forced convection in a wavy-wall channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, vol. 45, no 12, p. 2587-2595.
- [13] **AVCI, Mette et AYDIN, Orhan.** Laminar forced convection slip-flow in a micro-annulus between two concentric cylinders. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, vol. 51, no 13-14, p. 3460-3467.
- [14] **MOHAMMED, Hussein A.** Laminar mixed convection heat transfer in a vertical circular tube under buoyancy-assisted and opposed flows». *Energy conversion and management*, 2008, vol. 49, no 8, p. 2006-2015.
- [15] **JHA, Basant K., ONI, Michael O., et AINA, Babatunde.** Steady fully developed mixed convection flow in a vertical micro-concentric-annulus with heat generating/absorbing fluid: an exact solution. *Ain Shams Engineering Journal*, 2018, vol. 9, no 4, p. 1289-1301.
- [16] **Terhmina ET Mojtabi** Écoulements de convection forcée en régimes dynamique et thermique non établis dans un espace annulaire, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.31, pp.583-590, (1988).

- [17] **Zhiying Jia , Xinwei Wang , Liqiang Zhang , Zhengda Yang , Riyi Lin ,Jiaojiao Liu** .Experimental and simulation study of forced convection in vertical eccentric annular space. International Journal of Thermal Sciences, 2021, vol. 161, p. 106735.
- [18] **Keyong Wang, Qijia Wang, Peichao Li** .Forced convection in a fully-filled bidisperse porous annular duct subject to asymmetric heat fluxes. Thermal Science and Engineering Progress, 2022, vol. 32, p. 101328.
- [19] **C. Nouar**.Numerical solution for laminar mixed convection in a horizontal annular duct: temperature-dependent viscosity effect. Int. J. For Numerical Methods in Fluids, Vol. 29, pp.849-864, (1999).