

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique et d'Electromécanique



N°Ref:.....

Projet de fin d'étude préparé en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

En Génie Mécanique

Spécialité : ÉNERGÉTIQUE

**Effet d'un champ magnétique sur la convection
naturelle à double diffusion dans une enceinte
annulaire remplie d'un nanofluide**

Réalisé par :

- MEZMAZ Zineb
- FRAHTA Romaissa

Soutenu devant le jury :

M. SAOULI Salah	Prof.	Président
M. DEBBAH Djoubeir	M.A.B	Examineur
M. BERRAHIL Farid	M.C.A	Encadreur

Année universitaire : 2021/2022

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes chères parents qui ont été toujours à mes cotés et m'ont toujours soutenue tous au long ces longues années d'étudier .

A mes chères sœurs et frères .

A ma famille .

A ma binôme Romaiassa ferahta

A mon encadreur Dr.Farid Berrahil pour m'avoir suivi avec patience et intérêt . Ses conseils précieux et ses encouragements m'ont été d'une aide très précieuse dans la réalisation de ce projet.

A mes chères amis qui m'accompagnent les bonnes moments durant 5 années d'études.

Zineb

Je dédie ce travail :

A ma mère qui a toujours veillé sur moi.

A mon père qui m'a soutenu tout au long de mes études.

A tous mes frères et sœurs.

A toute ma famille.

A mes chers et fidèles amie«Zineb ,Dounya , chahra ,Rahma ,Amanie » et tous les collègues qui nous partageons les meilleurs Moments.

A Mon encadreur Dr. F. BERRAHIL qui m' apporté soutien et courage ,orientations pratiques ainsi conseils durant toutes mes années d'études .

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce modeste travail.

Romaissa

REMERCIEMENTS

De prime abord, louange à Allah de m'avoir donné la force, le courage et la patience de mener à bien ce modeste travail.

Mes profondes gratitudes et mes remerciements les plus chaleureux vont particulièrement à notre encadreur Dr. Berrahil Farid, d'avoir suivi et dirigé ce travail.

Mes remerciements vont également au Pr. Saouli Salah et M. Debbah Djoubair pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions .

Et enfin , nous tenons à remercier tous les enseingents de la spécialité Génie mécanique- Energétique.

Résumé

Ce travail présente une étude numérique de la convection naturelle à double diffusion d'une enceinte cylindrique remplie d'un nanofluide (Al_2O_3 /eau) et soumise à des gradients radiaux de température et de concentration avec la présence d'un champ magnétique externe (radial et axial). Ces gradients engendrent des forces thermique et solutale qui sont en opposition dans ce travail étude. La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre le système d'équations gouvernant l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD). Le couplage vitesse-pression est traité à l'aide de l'algorithme SIMPLER. Les effets des nombres de Rayleigh Ra , de Hartmann Ha , et de fraction volumique des nanoparticules φ sur l'écoulement et sur les transferts thermiques et de masse sont considérés.

Les résultats de la présente étude montrent qu'en absence du champ magnétique et pour des nombres de Rayleigh Ra élevés, le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} augmente jusqu'à une valeur maximale et après diminue avec l'augmentation de la fraction volumique φ . Par contre pour des valeurs faibles du nombre de Rayleigh Ra le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} augmente d'une façon similaire à la fraction volumique φ . Concernant le nombre de Sherwood moyen \overline{Sh} se comporte inversement avec la variation de φ .

En présence du champ magnétique les nombres de Nusselt \overline{Nu} et de Sherwood \overline{Sh} moyens diminuent avec l'augmentation de nombre de Hartmann Ha .

Deux orientations du champ magnétique ont été considérées dans le but d'avoir le meilleur contrôle de l'écoulement. La stabilisation la plus forte de l'écoulement a été trouvée lorsque le champ magnétique est orienté axialement.

Mots Clés : Convection naturelle ; Champ magnétique ; Enceinte cylindrique ; Nanofluide ; thermosoulital.

Abstract

This work presents a numerical study of the natural double-diffusion convection of a cylindrical enclosure filled with a nanofluid (Al_2O_3 /water) and subjected to radial temperature and concentration gradients with the presence of an external magnetic field (radial and axial). These gradients generate thermal and solutal forces, which are in opposition in this study. The finite volume method is used to solve the system of equations governing the magnetohydrodynamic (MHD) flow. The velocity-pressure coupling is treated using the SIMPLER algorithm. The effects of Rayleigh number Ra , Hartmann number Ha , and nanoparticle volume fraction ϕ on the flow and on heat and mass transfer are considered.

The results of the present study show that in the absence of the magnetic field and for high Rayleigh numbers Ra , the average Nusselt number \overline{Nu} increases up to a maximum value and afterwards decreases with the increase of the volume fraction ϕ . On the other hand, for low values of the Rayleigh number Ra , the average Nusselt number \overline{Nu} increases similarly to the volume fraction ϕ . Concerning the average Sherwood number \overline{Sh} behaves inversely with the variation of ϕ .

In the presence of the magnetic field, the average Nusselt number \overline{Nu} and Sherwood number \overline{Sh} decrease with the increase of Hartmann number Ha .

Two orientations of the magnetic field were considered in order to have the best control of the flow. The strongest flow stabilisation was found when the magnetic field was oriented axially.

Keywords : Natural convection; Magnetic field; Cylindrical enclosure; Nanofluid; Thermosolutal.

ملخص:

يقدم هذا العمل دراسة عددية للحمل الحراري الطبيعي مع انتشار مزدوج لحاوية أسطوانية مملوءة بسائل نانوي (Al_2O_3 /ماء) وتعرض لتدرجات نصف قطرية لدرجة الحرارة والتركيز مع وجود مجال مغناطيسي خارجي (نصف قطري ومحوري). تولد هذه التدرجات قوى حرارية وقوى ذائبة تتعارض في عمل الدراسة هذا. تُستخدم طريقة الحجم المنتهية لحل نظام المعادلات التي تحكم التدفق المغناطيسي الهيدروديناميك (MHD). تتم معالجة اقتران السرعة والضغط باستخدام خوارزمية SIMPLER. يؤخذ في الاعتبار تأثير أعداد رايلي Ra و هارتمان Ha والجزء الحجمي للجسيمات النانوية على التدفق والحرارة وانتقال الكتلة.

أظهرت نتائج الدراسة الحالية أنه في حالة عدم وجود المجال المغناطيسي ولأعداد رايلي العالية Ra، فإن متوسط عدد نسلت (نو) يزيد إلى أقصى قيمة ثم يتناقص مع زيادة حجم الكسر ϕ . من ناحية أخرى، بالنسبة للقيم المنخفضة لرقم رايلي Ra، فإن متوسط عدد نيوسلت (\overline{Nu}) يزيد بطريقة مماثلة لكسر الحجم ϕ . فيما يتعلق بمتوسط عدد شيرودود \overline{Sh} يتصرف عكسياً مع تغير ϕ .

في وجود المجال المغناطيسي، ينخفض متوسط عدد نيوسلت (\overline{Nu}) و عدد شيرودود \overline{Sh} مع زيادة عدد هارتمان Ha.

تم النظر في اتجاهين للمجال المغناطيسي من أجل الحصول على أفضل تحكم في التدفق. تم العثور على أقوى استقرار للتدفق عندما يكون المجال المغناطيسي موجهاً محورياً.

كلمات البحث:

الحمل الحراري الطبيعي، الحقل المغناطيسي، حاوية أسطوانية، مائع نانوي، الانتشار المزدوج.

Tables des matières

Nomenclature	ix
Liste des figures	xii
Liste des tableaux	xiv
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I :	
Recherche bibliographique.....	2
CHAPITRE II :	
Géométrie et modèle mathématique.....	16
II.1 Introduction	16
II.2 Géométrie du problème	16
II.3 Hypothèses de recherche	17
II.4 Modélisation mathématique	18
II.4.1 Equation de continuité	18
II.4.2 Equation de quantité de mouvement suivant r	18
II.4.3 Equation de quantité de mouvement suivant z.....	19
II.4.4 Equation de transfert de chaleur	19
II.4.5 Equation de transfert de matière	19
CHAPITRE III :	
Modélisation numérique	25
III.1 Introduction	25
III.2 Equation générale de transport	25
III.3 Maillage.....	27
III.4 Discrétisation des équations mathématiques.....	28
III.4.1 Equation de continuité	31
III.4.2 Equation de quantité de mouvement suivant r	31
III.4.3 Equation de quantité de mouvement suivant z.....	33
III.4.4 Equation d'énergie	34

III.4.5 Equation de transfert de matière	36
III.5 Méthode de résolution	37
III.5.1 Equation de pression	37
III.5.2 Technique de balayage et l'algorithme de Thomas.....	40
III.5.3 Algorithme de calcul SIMPLER	43
III.5.4 Critère de convergence	44
CHAPITRE IV :	
Résultats et discussion.....	45
IV.1 Introduction	45
IV.2 Effets du maillage.....	45
IV.3 Validation du code	47
IV.4 Résultats et discussion.....	49
IV.4.1 Ecoulement sans champ magnétique	49
IV.4.1.1 Effet de Ra, φ (N=1).....	50
IV.4.1.2 Effet de rapport de forces N, Ra=10 ⁵	53
IV.4.2 Ecoulement avec champ magnétique.....	57
IV.4.2.1 Champ magnétique axial	59
IV.4.2.2 Champ magnétique radial	60
CONCLUSION GENERALE.....	61
Références.....	62

Nomenclature

Lettres latins

A	Coefficient dans le système d'équations algébriques discrétisées Rapport d'aspect
$A(P)$	Fonction d'un schéma numérique en fonction du nombre de Péclet
\mathbf{B}	Vecteur du champ magnétique, T
B_0	Intensité du champ magnétique, T
c_p	Chaleur spécifique, $J. kg^{-1}. K^{-1}$
f	Force de Lorentz, $N. m^{-3}$
F	Force de Lorentz adimensionnelle
g	Accélération de la pesanteur, $m. s^{-2}$
H	Hauteur de la cavité, m
c	Concentration, $kg. m^{-3}$
C	Concentration adimensionnelle
h	Coefficient du transfert de chaleur, $W. m^{-2}. K^{-1}$
Ha	Nombre de Hartmann
\mathbf{j}	Vecteur de densité du courant électrique, $A. m^{-2}$
k	Conductivité thermique, $W. m^{-1}. K^{-1}$
N	Rapport de forces de volume
Nu	Nombre de Nusselt local
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen
Sh	Nombre de sharwood local
\overline{Sh}	Nombre de sharwood moyen
p	Pression dimensionnelle, $N. m^{-2}$
P	Pression adimensionnelle
Pe	Nombre de Péclet
Pr	Nombre de Prandtl
r, z	Coordonnées dimensionnelles
R, Z	Coordonnées adimensionnelles
Ra_T	Nombre de Rayleigh thermique

Ra_s	Nombre de Rayleigh solutal
Re_m	Nombre de Reynolds magnétique
t	Temps dimensionnel, s
T	Température dimensionnelle, K
u, w	Vitesses dimensionnelles suivant les directions r et z , $m \cdot s^{-1}$
U, W	Vitesses adimensionnelles
V	Vecteur de vitesse $m \cdot s^{-1}$

Lettres grecs

α	Diffusivité thermique, $m^2 \cdot s^{-1}$
β_t	Coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
β_s	Coefficient d'expansion massique, $kg^{-1} \cdot m^3$
σ	Conductivité électrique, $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$
τ	Temps adimensionnel
ψ	Fonction de courant adimensionnelle
θ	Température adimensionnelle
μ	Viscosité dynamique $Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique, $m^2 s^{-1}$
λ	Rapport de rayons
ρ	Masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$
ϕ	Variable générale
φ	Fraction volumique
Φ	Potentiel électrique, V
$\Delta\tau$	Pas du temps adimensionnel

Indices et exposants

c	Froid
EM	Électromagnétique
h	Chaud
max	Maximum
min	Minimum
n	Nombre d'itération
P	Point au centre du volume de contrôle considéré
n, s, e, w	Faces du volume de contrôle nord, sud, est, ouest, respectivement
N, S, E, W	Noeuds des volumes de contrôle adjacents nord, sud, est, ouest,

	respectivement
<i>nf</i>	Nanofluide
<i>f</i>	Fluide de base
<i>t</i>	Thermique
<i>s</i>	Solutal
<i>u</i>	Maillage décalé suivant la direction <i>r</i>
<i>w</i>	Maillage décalé suivant la direction <i>z</i>
0	Valeur de référence

Abréviations

<i>MHD</i>	Magnétohydrodynamique
<i>SIMPLER</i>	Semi Implicit Pressure Linked Equation Revised

Liste des figures

Figure (I .1): Configuration et système de coordonnées	4
Figure (I.2) : Schéma du problème étudié	5
Figure (I .3) : Schéma de la configuration étudiée et les conditions aux limites imposées.	6
Figure (I .4) : Configuration et système de coordonnées	6
Figure (I .5) : Configuration physique et système de coordonnées	7
Figure (I .6) : Configuration physique et système de coordonnées	8
Figure (I .7) : Configuration et système de coordonnées	9
Figure (I .8): Domaine et conditions aux limites de l'étude	10
Figure(I .9) : Géométrie de l'enceinte avec sources verticales discrètes, coordonnées et conditions aux limites.....	11
Figure (I .10) : Géométrie du problème	12
Figure(I .11) : Schéma du modèle physique et la distribution du flux sur la surface inférieure.	12
Figure (I .12) : Modèle physique	13
Figure(I .13) : Configuration étudiée	14
Figure (I .14) : Géométrie étudiée.....	15
Figure (I .15) : Schéma du modèle physique	16
Figure (II.1) : Géométrie et conditions aux limites du problème	17
Figure (III.1): Volume de contrôle typique dans le plan ($r - z$)	27
Figure (III.2): Volume de contrôle décalé	28
Figure (IV.1) : Comparaison des lignes de courants et isotherms pour $Pr = 0.054$, $A = 1$ et $\lambda = 2$ à (a) $Ra = 10^4$, $Ha = 100$ (champ magnétique radial) et (b) $Ra = 10^6$, $Ha = 100$ (champ magnétique axial)	48

Figures (IV.2) Comparaison des lignes de courants ,isothermes et isoconcentrations pour $Ha=0$ et pour différents nombres de Ra :

Fluide pur $\varphi = 0$ (lignes continue) et nanofluide $\varphi = 0.09$ (lignes discontinue).....53

Figures (IV.3) : Comparaison des lignes de courants ,isothermes et isoconcentrations pour $Ha=0$ et pour différents nombres de rapport N :

Fluide pur $\varphi = 0$ (lignes continue) et nanofluide $\varphi = 0.09$ (lignes discontinue).....55

Figure (IV.4) : Effet de rapport N et de φ sur le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} et Sherwood moyen \overline{Sh}56

Figures (IV.5) : Lignes de courants ,isothermes et isoconcentrations pour de $Ha=0$ et $N=2$, $\varphi=0.05$, $Ra=10^6$ 57

Figures (IV.6) : Lignes de courants, isothermes et iso-concentrations pour $Ra=10^6$, $\varphi=0.05$ et $N=2$ et pour différents nombres de Ha (champ magnétique radial).58

Figures (IV.7) : Lignes de courants, isothermes et iso-concentrations pour $Ra=10^6$, $\varphi=0.05$ et $N=2$ et pour différents nombres de Ha (champ magnétique axial).59

Figure (IV.8) : Effet du nombre de Ha sur les nombres de Nusselt moyen \overline{Nu} et de Sherwood moyen \overline{Sh} pour $Ra=10^5$ et $N=1$ 60

Liste des tableaux

Tableau (III.1): Définition des variables ϕ , Γ et S_ϕ dans l'équation de transport	26
Tableau (IV.1) : Comparaison des caractéristiques de l'écoulement pour différentes grilles de maillage	46
Tableau (IV. 2): Comparaison de \overline{Nu}_1 avec différents Ra et φ en $Ha = 30$	49
Tableau (IV.3): Comparaison entre les deux de méthodes numériques $A=2$, $Pr=1$, $Le= 2$ $Ra_t=Ra=10^5$	49
Tableau (IV.4) : Caractéristiques de l'écoulement pour différentes paramètres de Ra et φ	51
Tableau (IV.5): Caractéristiques de l'écoulement du champ magnétique radial pour différents paramètres de Ha, pour $N=2$, $\varphi= 0.05$ et $Ra=10^6$	57
Tableau (IV.6): Caractéristiques de l'écoulement du champ magnétique axial pour différents paramètres de Ha ,pour $N=2$, $\varphi = 0.05$ et $Ra=10^6$	58
Tableau (IV.7): Fonctions de courants maximales et minimales pour différents nombres de Ha	59

Chapitre I :

Recherche Bibliographique

L'étude de l'écoulement de la convection thermosolutale a fait l'objet de plusieurs travaux. Cependant, dans la majorité des cas, ces travaux se sont intéressés à la convection des fluides purs et des nanofluides.

Lee et Hyun (1990) [2] ont étudié la convection double-diffusive dans une cavité rectangulaire avec des gradients horizontaux de température et de concentration opposés. Les solutions numériques sont données pour des pour des nombres de Ra_t et Ra_s relativement élevés. Les champs de vitesse, de température sont présentés pour des grands nombres de Lewis. Ils ont décrit les évolutions des champs dans le temps. Des régimes distincts en régime permanent sont identifiés quand le rapport de flottabilité varie largement. Ils ont examiné les structures des couches limites thermiques, solutales et dynamiques près des parois. La structure multicouche de l'écoulement pour un rapport de flottabilité modéré est obtenue. Le champ thermique en S et la distribution de concentration en escalier sont examinés. Les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens sont calculés pour des valeurs variables du rapport de flottabilité. Leurs résultats sont qualitativement en accord avec les résultats expérimentaux antérieurs.

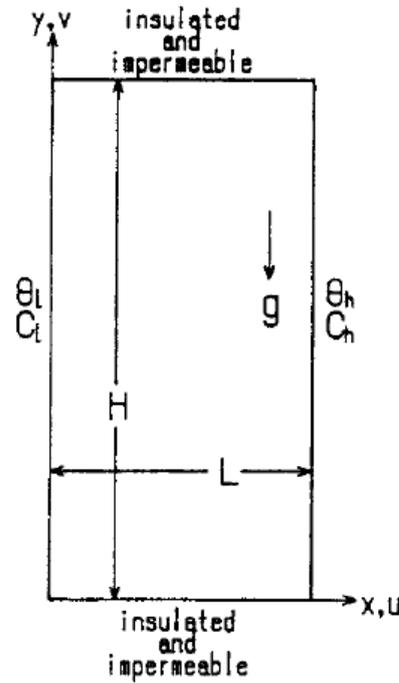


Figure (I.1): Configuration et système de coordonnées.[2]

Bennacer et al. (2001) [3] ont étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle double diffusive dans une enceinte horizontale. L'enceinte est chauffée et refroidie le long des parois verticales et un gradient solutal est imposé verticalement. L'objectif de ce travail est d'identifier le régime d'écoulement pour les écoulements à dominance thermique et solutale. Ils ont constaté que l'écoulement devient instable (oscillatoire) pour une gamme bien déterminée de rapports de flottabilité. La multiplicité des solutions dépend fortement des conditions initiales imposées. De plus, les résultats révèlent que la convection thermique peut être supprimée pour un fluide fortement stratifié. En raison du grand nombre de paramètres, les résultats sont rapportés pour un rapport d'aspect de deux, un nombre de Prandtl de 7,0 (eau) et un nombre de Lewis de 100 (solution aqueuse). Le nombre de Rayleigh varie entre 7×10^3 et 7×10^5 .

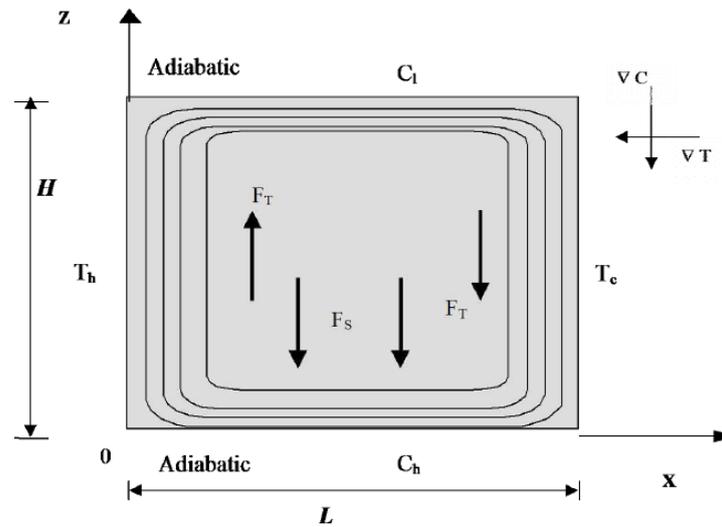


Figure (I.2) : Schéma du problème étudié.[3]

Bourich et al. (2004) [4] ont rapporté les résultats numériques de la convection naturelle bidimensionnelle à double diffusion dans une cavité poreuse carrée partiellement chauffée par le bas tandis que sa surface supérieure est refroidie à une température constante. Les parois verticales de la matrice poreuse sont soumises à un gradient de concentration horizontal. Les paramètres gouvernant le problème sont le nombre de Rayleigh thermique ($Ra=100$ et 200), le nombre de Lewis ($Le=0.1, 1$ et 10), le rapport de flottabilité ($-10 \leq N \leq 10$) et la position relative de l'élément chauffant par rapport à l'axe vertical de la cavité ($\delta=0$ et $0,5$). L'effet des paramètres déterminants sur les caractéristiques des fluides est analysé. La multiplicité des solutions est explorée et l'existence d'un écoulement bicellulaire asymétrique est prouvée lorsque l'élément chauffé est déplacé vers une frontière verticale ($\delta = 0.5$). Les forces solutales de flottabilité induites par le gradient de concentration horizontal conduisent à l'élimination de la multiplicité des solutions obtenues en convection thermique pure lorsque N atteint une valeur seuil qui dépend de Le et Ra .

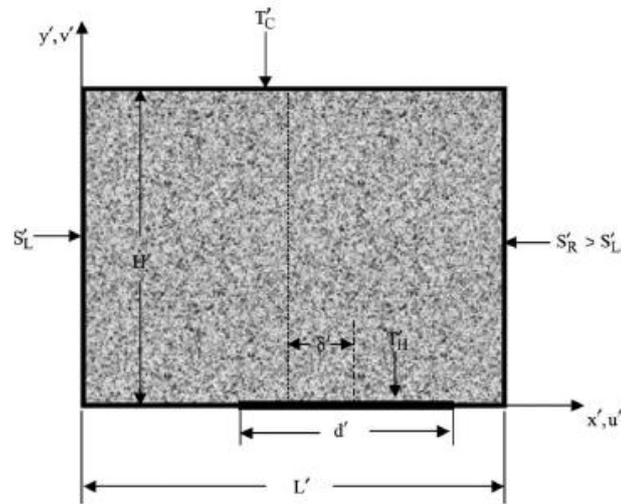


Figure (I.3) : Schéma de la configuration étudiée et les conditions aux limites imposées.[4]

Sankar et al. (2006) [5] ont mené une étude numérique de la convection naturelle d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0,054$) sous l'influence d'un champ magnétique axial ou radial dans un anneau cylindrique vertical. Les cylindres intérieur et extérieur sont maintenus à des températures uniformes et les parois horizontales supérieure et inférieure sont isolées thermiquement. La méthode des différences finies est utilisée pour résoudre la formulation de la fonction de courant et la vorticité du problème. Des résultats numériques détaillés des champs de température et de vitesse ont été présentés pour $1 \leq \lambda \leq 10$, $0,5 \leq A \leq 2$, $10^3 \leq Ra \leq 10^6$ et $0 \leq Ha_r, Ha_x \leq 10^2$. Les résultats de calcul révèlent que dans les cavités peu profondes, l'écoulement et le transfert de chaleur sont supprimés avec efficacité par un champ magnétique axial, alors que dans les cavités étalées, un champ magnétique radial est plus efficace. On constate également que les oscillations de l'écoulement peuvent être supprimées efficacement en imposant un champ magnétique externe. Le nombre moyen de Nusselt augmente avec le rapport des rayons mais diminue avec le nombre de Hartmann. De plus, les résultats numériques actuels sont en bon accord avec les solutions de référence disponibles dans la littérature.

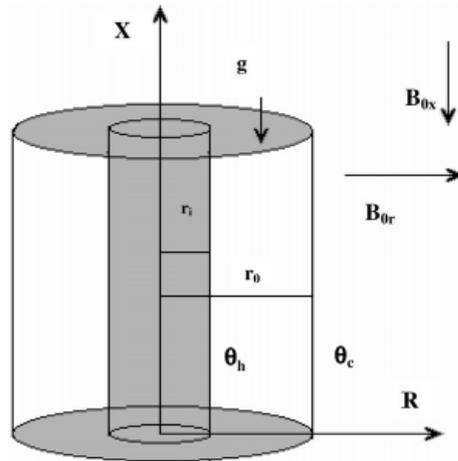


Figure (I.4) : Configuration et système de coordonnées.[5]

Sankar et Venkatachalappa (2008) [6] ont été menée une étude numérique sur l'influence d'un champ magnétique axial ou radial sur la convection naturelle à double diffusion dans une cavité annulaire cylindrique verticale. Les conditions aux limites au niveau des parois latérales sont imposées de telle manière que les effets de flottabilité thermique et solutal s'opposent, ce qui entraîne une configuration d'écoulement à gradient opposé. Les parois supérieure et inférieure sont isolées et imperméables. Les taux de transfert de chaleur et de masse totaux à travers la cavité sont calculés en évaluant les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood. L'objectif principal de cette étude numérique est de comprendre l'effet du champ magnétique sur la convection à double diffusion dans la cavité annulaire. En conséquence, des régimes d'écoulement différents en régime permanent sont obtenus pour une large gamme de paramètres physiques du problème.

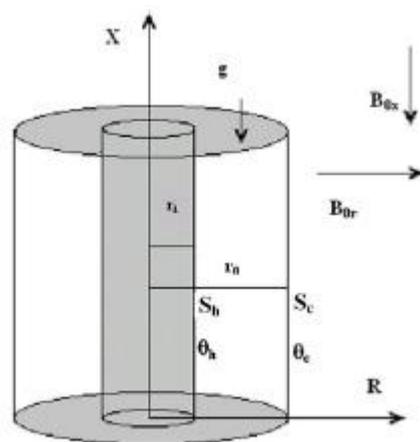


Figure (I.5) : Configuration physique et système de coordonnées.[6]

Venkatachalappa et al. (2011) [7] ont étudié l'influence d'un champ magnétique axial ou radial sur la convection naturelle à double diffusion dans une cavité annulaire cylindrique verticale. Les effets de flottabilité thermique et solutale sont en coopération, soit en opposition. Les valeurs moyennes de Nusselt et de Sherwood sont utilisées pour calculer les taux de transfert de chaleur et de masse totaux à travers la cavité. L'objectif principal de ce travail numérique est de comprendre comment un champ magnétique affecte la convection à double diffusion dans une cavité annulaire. Le champ magnétique ne réduit la convection à double diffusion que pour les faibles rapports de flottabilité d'une part. Le champ magnétique, d'autre part, est utile pour réduire l'écoulement de la convection thermique avec des rapports de flottabilité plus importants. De plus, lorsque le champ magnétique est appliqué perpendiculairement à l'écoulement principal, il est efficace.

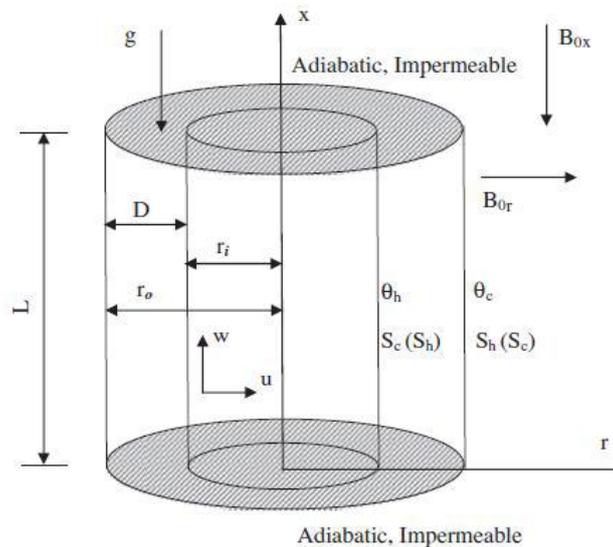


Figure (I.6) : Configuration physique et système de coordonnées.[7]

Sankar et al. (2012) [8] ont été examinée la convection thermosolutale dans un anneau vertical poreux soumis à des flux de chaleur et de masse provenant partiellement de la paroi interne, la paroi externe était maintenue à une température et une concentration constantes. L'effet des paramètres sur les transferts de chaleur et de masse, tels que les nombres thermiques de Rayleigh, Darcy et Lewis, ainsi que les rapports de flottabilité et de rayon a été étudié. Les résultats numériques révèlent que la structure de l'écoulement et les taux de transfert de chaleur et de masse sont fortement influencés par la position de la source de chaleur. Les nombres thermiques de Rayleigh, Darcy et Lewis, ainsi que l'emplacement de la source, ont un impact consistant sur le

rapport de flottabilité. De plus, lorsque le rapport de rayon augmente, les nombres de Nusselt et Sherwood moyens, ainsi que les nombres de Darcy et de Rayleigh, augmentent aussi.

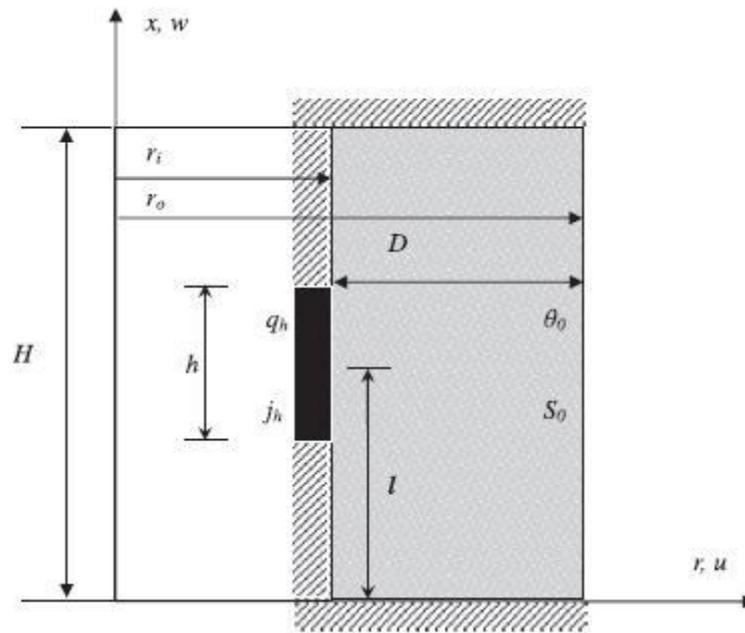


Figure (I.7) : Configuration et système de coordonnées.[9]

Arani et al. (2014) [9] ont étudié les propriétés de transfert de chaleur et de masse de la convection naturelle d'un nanofluide dans une enceinte carrée avec une conductivité thermique et une viscosité variables. Les parois horizontales supérieure et inférieure sont isolées, tandis les parois verticales sont maintenues à des températures et de concentrations différentes. La recherche a été effectuée pour des nombres de Rayleigh de 10^4 à 10^6 et des rapports de flottabilité de -5 à 5. L'ajout de nanoparticules augmente le nombre de Nusselt moyen et diminue le nombre de Sherwood moyen. De plus, lorsque la valeur absolue du rapport de flottabilité ou du nombre de Rayleigh augmente, les nombres de Nusselt et de Sherwood augmentent aussi.

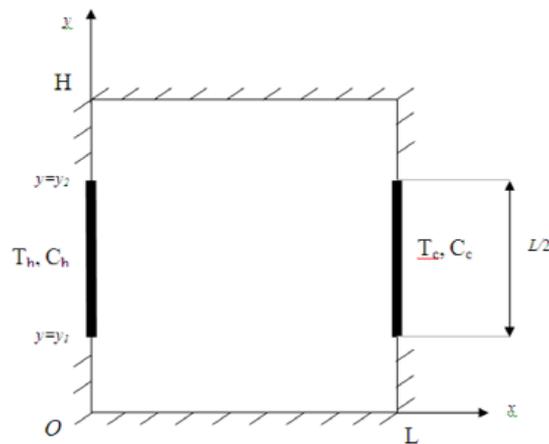


Figure (I.8) : *Domaine et conditions aux limites de l'étude.*[9]

L'étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte rectangulaire a été réalisée par Oueslati et al. (2014) [10]. Les effets des principaux paramètres (nombre de Rayleigh, rapport de flottabilité, longueur de la source, nombre de Lewis et l'emplacement de la source sur les taux de transfert de chaleur et de masse sont examinées. Les résultats montrent que les taux de transfert de chaleur et de masse sont considérablement améliorés lorsque le nombre de Rayleigh et le rapport de flottabilité augmentent. L'augmentation du nombre de Lewis accrois la force de flottabilité solutale au détriment de la force thermique pour des nombres de Rayleigh $Ra = 10^4$, 10^5 , et pour un rapport de flottabilité $N = -8$.

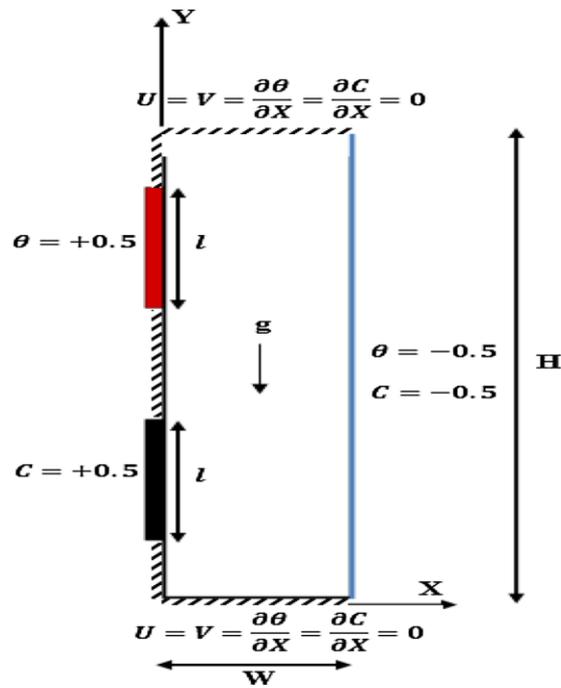


Figure (I.9) : Géométrie de l'enceinte avec sources verticales discrètes, coordonnées et conditions aux limites.[10]

Battira et Bessaïh (2015) [11] ont examinée l'effet de la direction d'un champ magnétique externe appliqué sur la convection naturelle du nanofluide dans une enceinte cylindrique vertical en présence de deux champs magnétiques externes dans la direction radiale ou axiale. L'étude est menée pour deux valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra = 10^3$ et 10^4), la fraction volumique des nanoparticules ($0 \leq \phi \leq 1$), le nombre de Hartmann ($0 \leq Ha \leq 80$) et la direction du champ magnétique (B_r et B_z). Les performances de transfert de chaleur dans les nanofluides sont améliorées avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules. Les résultats montrent qu'à mesure que la fraction volumique de nanoparticules augmente, le nombre de Nusselt moyenne diminue en présence du champ magnétique, et cette diminution est plus prononcée lorsque ce champ magnétique est appliqué dans la direction axiale.

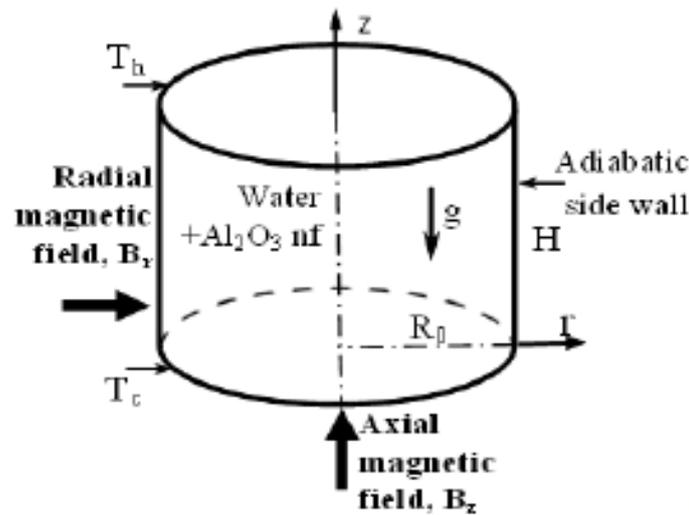


Figure (I.10) : Géométrie du problème.[11]

Matin et Vaziri (2016) [12] ont présenté une simulation numérique de la convection naturelle dans une enceinte cylindrique verticale remplie d'un nanofluide Al_2O_3 . La configuration est soumise à un flux de chaleur par le bas. La paroi inférieure du récipient est divisée en six bandes toroïdales, dont chacune reçoit un pourcentage différent de la chaleur totale, c'est-à-dire que le flux donné à chaque bande varie. La paroi supérieure est considérée comme adiabatique tandis que la paroi latérale est maintenue à une température constante. L'effet du nombre de Rayleigh ($10^4 \leq Ra \leq 10^6$) de la fraction des nanoparticules (0,08) et du rapport d'aspect ($A=0,5, 1$ et $1,5$) sur les isothermes et le nombre de Nusselt ainsi que la distribution des flux de chaleur ont été étudiés.

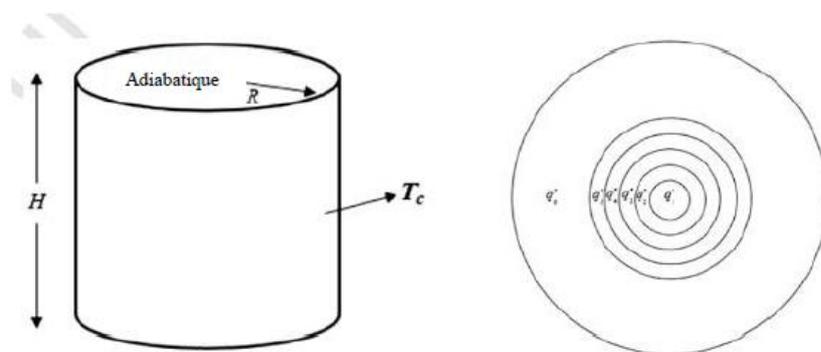


Figure (I.11) : Schéma du modèle physique et la distribution du flux sur la surface inférieure.[12]

Une étude numérique de la convection à double diffusion dans la région annulaire de deux cylindres verticaux concentriques a été présentée par Medebber et Retiel (2017) [13]. La paroi verticale extérieure est maintenue à une température et une concentration uniformes inférieures, tandis que la paroi verticale intérieure est maintenue à une température et une concentration uniformes plus élevées. L'approche des volumes finis est utilisée pour résoudre les équations. Les résultats sont obtenus pour les nombres de Prandtl $Pr=7$ et de Lewis $Le=100$, le nombre de Rayleigh $10^3 \leq Ra_t \leq 10^6$ et le rapport d'aspect dans la gamme $0.0 \leq A \leq 1.0$. Ces paramètres ont un effet très important sur les champs de vitesse, de température et de concentration, ainsi sur les taux de transfert de chaleur et de matière.

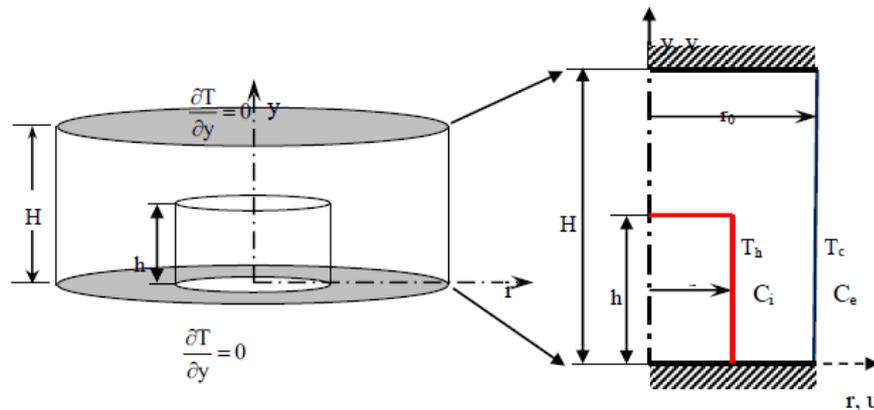


Figure (I.12) : Modèle physique.[13]

Pushpa et al. (2017) [14] ont étudié l'effet numérique d'un déflecteur circulaire mince sur la convection dans un récipient annulaire vertical. Les parois des cylindres intérieure et extérieure et le déflecteur sont maintenus à températures et concentrations différentes, tandis que les parois supérieure et inférieure sont maintenues adiabatiques et imperméables. Les simulations numériques sont effectuées pour illustrer les effets de la taille et de la position du déflecteur sur la convection thermosolutale. Il a été observé que la taille et l'emplacement du déflecteur ont un rôle très important pour contrôler l'écoulement convectif thermosolutal et les caractéristiques de transfert de chaleur et de masse. Ils ont constaté que le taux de transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh thermique. De plus, la taille du déflecteur et sa position ont une influence énorme sur les taux de transfert de chaleur et de masse.

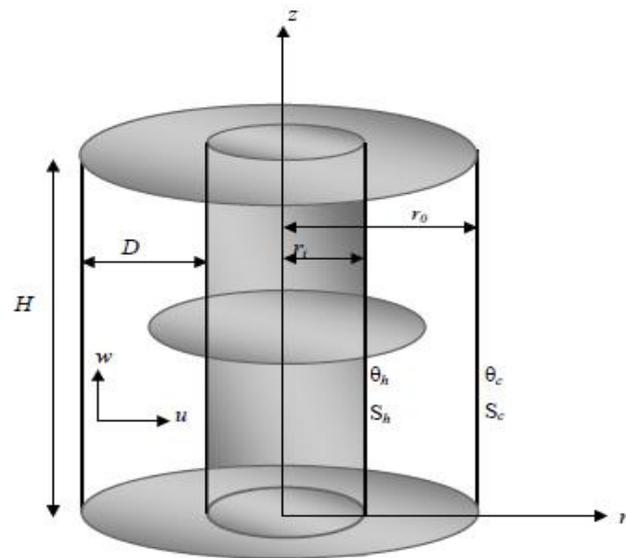


Figure (I.13) : Configuration étudiée.[14]

Dans un autre travail, Medebber et Retiel (2017) [15] ont étudié la convection bidimensionnelle dans une cavité cylindrique verticale annulaire. L'analyse numérique a été effectuée pour une large gamme de Rapport de flottabilité ($N = 0,8$ et $1,3$). Leurs résultats sont présentés pour différents paramètres. Ces paramètres ont une influence énorme sur le champ de l'écoulement et les champs thermique et de concentration.

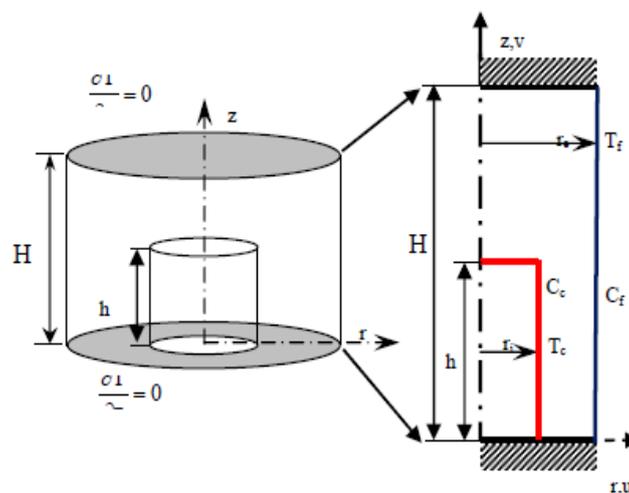


Figure (I.14) : Géométrie étudiée.[15]

Le phénomène de la convection magnétohydrodynamique à double diffusion dans un espace annulaire poreux à l'intérieur de deux cylindres concentriques saturés par un nanofluide ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{eau}$) a été étudié par Sammouda et Gueraoui (2021) [16]. leurs résultats indiquent que l'intensité de la circulation de l'écoulement de nanofluide augmente avec l'accroissement du nombre de Rayleigh Ra_t , du rapport de la flottabilité N et du nombre de Darcy Da , tandis qu'elle diminue avec l'augmentation du nombre de Hartmann et de la fraction volumique des nanoparticules solides. Le taux de transfert thermique à la paroi active augmente avec l'augmentation de la fraction volumique des nanoparticules, tandis que le taux de transfert de masse diminue. Pour de faibles valeurs du nombre de Darcy Da , l'effet de la fraction volumique des nanoparticules sur le taux de transfert de masse est négligeable. Les taux de transfert de chaleur et de masse à la paroi active sont améliorés pour des valeurs positives du rapport de flottabilité N que pour des valeurs négatives. Le magnétisme engendre une diminution des taux de transfert de chaleur et de masse et ceci montre que le champ magnétique a un effet stabilisateur sur l'écoulement du nanofluide.

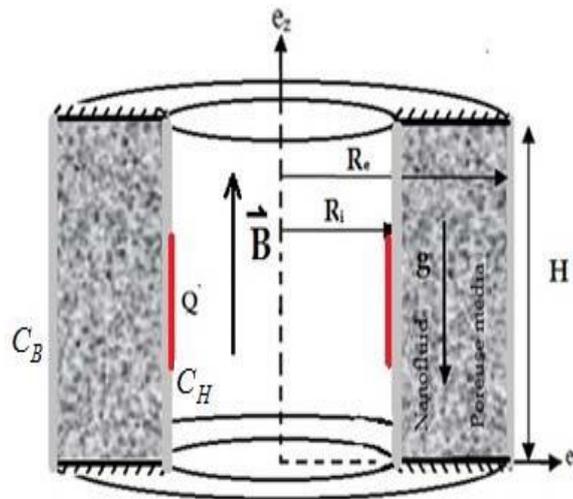


Figure (I.15) : Schéma du modèle physique.[16]

Chapitre II

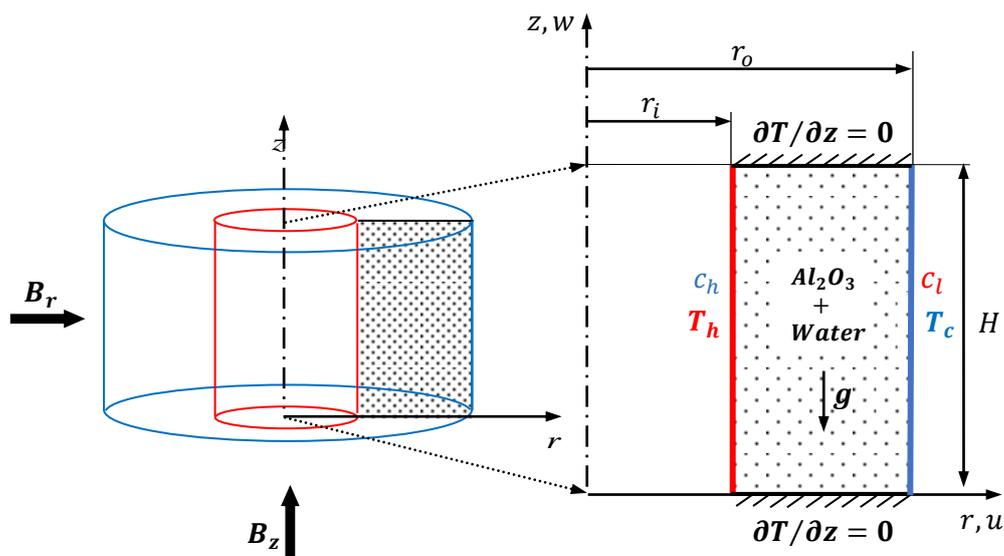
Géométrie et modèle mathématique

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons la configuration étudiée et les équations régissant le problème physique à savoir l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et les équations de transfert de chaleur et de masse. Ces équations sont obtenues en appliquant les lois de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et de transfert de matière.

II.2 Géométrie du problème :

La figure (II.1) montre la configuration étudiée remplie d'un nanofluide. Il s'agit d'un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux verticaux de hauteur H et de rayons r_i et r_o du cylindre intérieur et extérieur, respectivement. Les parois verticales sont chauffées de manière différentielle où la paroi interne est maintenue à $(T_h$ et $C_h)$ et la paroi externe est froide (T_c et C_l) tandis que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. L'enceinte annulaire est exposée à un champ magnétique externe et constant dans les deux directions r et z , sachant que toutes les parois sont isolées électriquement.



Figure(II.1) : Géométrie et conditions aux limites du problème.

II.3. Hypothèses simplificatrices :

Pour avoir une formulation simple du modèle mathématique, nous considérons les hypothèses suivantes :

- Le nanofluide ($\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{eau}$) est supposé homogène, newtonien et incompressible [17].
- Le fluide de base (eau) et les nanoparticules sphériques sont en équilibre thermique.
- Le rayonnement est négligé.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- L'effet Joule est négligé [18].
- Le champ magnétique induit est négligeable parce que le nombre de Reynolds magnétique $Re_m < 1$.
- L'écoulement est considéré comme laminaire et axisymétrique.
- Les propriétés thermo-physiques du nanofluide sont supposées constantes, et sont évaluées à la température et la concentration de référence par :

$$\rho_{nf} = (1 - \varphi)\rho_f + \varphi\rho_p \quad (\text{II.1})$$

$$(\rho\beta_t)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho\beta_t)_f + \varphi(\rho\beta_t)_p \quad (\text{II.2})$$

$$(\rho\beta_s)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho\beta_s)_f + \varphi(\rho\beta_s)_p \quad (\text{II.3})$$

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_p \quad (\text{II.4})$$

$$\alpha_{nf} = k_{nf}/(\rho c_p)_{nf} \quad (\text{II.5})$$

- La conductivité électrique effective est exprimée comme suit [19]:

$$\sigma_{nf}/\sigma_f = 1 + \frac{3(\sigma_p/\sigma_f - 1)\varphi}{(\sigma_p/\sigma_f + 2) - (\sigma_p/\sigma_f - 1)\varphi} \quad (\text{II.6})$$

- La masse volumique du nanofluide est constante sauf pour le terme de force de flottabilité où elle varie linéairement avec la température T et la concentration c par l'approximation de Boussinesq :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_t(T - T_0) - \beta_s(c - c_0)) \quad (\text{II.7})$$

II.4 Modélisation mathématique :

Avant d'entamer la modélisation mathématique de notre problème nous allons définir la magnétohydrodynamique (MHD).

La magnétohydrodynamique est une discipline qui couvre l'interaction du champ magnétique \mathbf{B} avec l'écoulement.

Dans notre cas, le champ magnétique induit \mathbf{b} est négligé de telle façon qu'il y a une égalité entre le champ magnétique total ($\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$) et le champ appliqué \mathbf{B}_0 .

L'application du champ magnétique à un nanofluide conducteur d'électricité en mouvement crée un courant électrique induit \mathbf{j} qui va réagir avec le champ magnétique pour produire une force de volume \mathbf{f}_{EM} qui agit dans le sens inverse du mouvement du nanofluide.

Dans le cas de l'application du champ magnétique sur l'écoulement, l'équation du courant électrique \mathbf{j} est obtenue par l'application de la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma_{nf}[-\nabla\Phi + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{II. 8})$$

où : σ_{nf} est la conductivité électrique du nanofluide.

Φ est le potentiel électrique.

La densité de courant électrique \mathbf{j} est une grandeur conservative ce qui permet d'écrire :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{II. 9})$$

La force de Lorentz \mathbf{f}_{EM} est déduite de l'équation suivante:

$$\mathbf{f}_{EM} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{II. 10})$$

Par ailleurs, les frontières sont électriquement isolantes, le potentiel électrique φ est donc constant, ce qui permet finalement d'écrire les expressions de \mathbf{j} et \mathbf{f}_{EM} par :

$$\mathbf{j} = \sigma_{nf}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{II. 11})$$

$$\mathbf{f}_{EM} = \sigma_{nf}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} \quad (\text{II. 12})$$

Les équations dimensionnelles régissant l'écoulement du nanofluide, le transfert de chaleur et de matière sont définies comme suit :

II.4.1 Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.13})$$

II.4.2 Equation de quantité de mouvement suivant r :

$$\begin{aligned} \rho_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial z}(wu) \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_{nf} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu_{nf} \frac{u}{r^2} \right) + f_{EMz} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

II.4.3 Equation de quantité de mouvement suivant z :

$$\begin{aligned}
\rho_{nf} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruw) + \frac{\partial}{\partial z} (w^2) \right) \\
= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_{nf} r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{nf} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\
+ g \left[\rho_{nf} \beta_{t_{nf}} (T - T_c) - \rho_{nf} \beta_{s_{nf}} (c - c_c) \right] + f_{EMz}
\end{aligned} \tag{II.15}$$

II.4.4 Equation de transfert de chaleur :

$$(\rho c_p)_{nf} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruT) + \frac{\partial}{\partial z} (wT) \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{nf} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{nf} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) \tag{II.16}$$

II.4.5 Equation de transfert de matière :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruc) + \frac{\partial}{\partial z} (wc) = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \tag{II.17}$$

Avec : f_{EMr} et f_{EMz} représentent les forces de Lorenz dimensionnelles suivant les directions radiale et axiale, respectivement,

où: \mathbf{B} et \mathbf{V} sont le champ magnétique et le vecteur de vitesse :

- Pour un champ magnétique radial : $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r$

$$\begin{cases} f_{EMr} = 0 \\ f_{EMz} = -\sigma_{nf} (B_0^2) w \end{cases} \tag{II.18}$$

- Pour un champ magnétique axial : $\mathbf{B} = \mathbf{B}_z$

$$\begin{cases} f_{EMr} = -\sigma_{nf} (B_0^2) u \\ f_{EMz} = 0 \end{cases} \tag{II.19}$$

Les conditions initiales et aux limites appropriées s'écrivent comme suit :

$$\text{à } t = 0 ; \quad u = w = T = c = 0 \tag{II.20}$$

$\forall t ;$

$$\text{à } r = r_i \quad \rightarrow \quad u = w = 0 \quad , \quad T = T_h \quad , \quad c = c_h \tag{II.21}$$

$$\text{à } r = r_o \quad \rightarrow \quad u = w = 0 \quad , \quad T = T_c \quad , \quad c = c_c$$

$$\text{à } z = 0 \rightarrow u = w = 0, \quad \partial T / \partial z = 0, \quad \partial c / \partial z = 0$$

$$\text{à } z = H \rightarrow u = w = 0, \quad \partial T / \partial z = 0, \quad \partial c / \partial z = 0$$

Les équations gouvernantes avec les conditions aux limites appropriées sont adimensionnalisées en utilisant les grandeurs de références suivantes :

$$\begin{aligned} \tau = t \frac{\alpha_f}{H^2}, \quad (R, Z) = (r, z) \frac{1}{H}, \quad (U, W) = (u, w) \frac{H}{\alpha_f}, \quad P = \frac{pH^2}{\rho_{nf} \alpha_f^2}, \\ \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad C = \frac{c - c_c}{c_h - c_c} \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

En introduisant ces grandeurs, Notre système d'équations devient :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU^2) + \frac{\partial}{\partial Z} (WU) \right) \\ = - \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\text{Pr}}{(1 - \varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial Z} \right) - \mu \frac{U}{R^2} \right) + F_{EMr} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RUW) + \frac{\partial}{\partial Z} (W^2) \right) \\ = - \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\text{Pr}}{(1 - \varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu R \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\mu \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \right) \\ + Ra \cdot \text{Pr} \left((1 - \varphi) + \varphi \frac{\beta_{tp}}{\beta_{tf}} \right) (\theta - NC) + F_{EMz} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU\theta) + \frac{\partial}{\partial Z} (W\theta) \right) = \frac{1}{(1 - \varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(kR \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) \right) \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RUC) + \frac{\partial}{\partial Z} (WC) = \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right) \right) \quad (\text{II.27})$$

F_{EMr} , F_{EMz} sont respectivement les composantes de la force de Lorentz adimensionnelles suivant r et z qui s'expriment comme suit :

- **Pour un champ magnétique radial : $B = B_r$**

$$\begin{cases} F_{EMr} = -Pr \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \right) U \\ F_{EMz} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

- **Pour un champ magnétique axial : $B = B_z$**

$$\begin{cases} F_{EMr} = 0 \\ F_{EMz} = -Pr \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) \left(\frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \right) W \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

Avec :

$$\mu = \frac{\mu_{nf}}{\mu_f}; k = \frac{k_{nf}}{k_f} \quad (\text{II.30})$$

Où : μ et k sont les rapports de viscosité dynamique et de conductivité thermique du nanofluide par rapport au fluide de base, respectivement.

Le modèle utilisé pour définir ces rapports est celui de Corcione [20] pour des nanoparticules de taille $d_p = 33$ nm:

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} = 1 / \left(1 - 34.87 \left(\frac{d_p}{d_f} \right)^{-0.3} \varphi^{1.03} \right) \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = 1 + 4.4 Re_B^{0.4} Pr^{0.66} \left(\frac{T}{T_{fr}} \right)^{10} \left(\frac{k_p}{k_f} \right)^{0.03} \varphi^{0.66} \quad (\text{II.32})$$

Où :

Re_B est le nombre de Reynolds du mouvement brownien qui est défini comme suit :

$$Re_B = \frac{\rho_f u_B d_p}{\mu_f} \quad (\text{II.33})$$

et u_B est la vitesse brownienne de la nanoparticule qui est exprimée comme suit:

$$u_B = \frac{2k_b T}{\pi \mu_f d_p^2} \quad (\text{II.34})$$

Où :

$k_b = 1.380648 \times 10^{-23} \text{ (J/K)}$ est la constante de Boltzmann.

$l_f = 0.17 \text{ nm}$ est le libre parcours moyen des particules fluides.

d_f est le diamètre moléculaire de l'eau donné par :

$$d_f = \frac{6M}{N\pi\rho_f} \quad (\text{II.35})$$

Où :

M est le poids moléculaire du fluide de base, N est le nombre d'Avogadro et ρ_f est la masse du fluide de base à la température standard (310 K).

En conséquence, et en se basant sur l'eau comme fluide de base, la valeur de d_f est obtenue :

$$d_f = \left(\frac{6 \times 0.01801528}{6.022 \times 10^{23} \times \pi \times 998.26} \right)^{1/3} = 3.85 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{II.36})$$

Les conditions initiales et aux limites adimensionnelles sont :

$$\text{à } \tau = 0 ; \quad U = W = \theta = C = 0 \quad (\text{II.20})$$

$\forall \tau > 0 :$

$$\text{à } R = 1/A(\lambda - 1) \rightarrow U = W = 0, \quad \theta = 1, \quad C = 1$$

$$\text{à } R = \lambda/A(\lambda - 1) \rightarrow U = W = 0, \quad \theta = 0, \quad C = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$\text{à } Z = 0 \rightarrow U = W = 0, \quad \partial\theta/\partial Z = 0, \quad \partial C/\partial Z = 0$$

$$\text{à } Z = 1 \rightarrow U = W = 0, \quad \partial\theta/\partial Z = 0, \quad \partial C/\partial Z = 0$$

Les paramètres adimensionnels qui caractérisent l'écoulement sont :

Nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g\beta_{\tau_f}\Delta TH^3}{\alpha_f \nu_f}$$

Nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f}$$

Nombre de Lewis :

$$Le = \frac{\alpha_f}{D}$$

Nombre de Hartmann :

$$Ha = B_0 H \sqrt{\frac{\sigma_f}{\mu_f}}$$

Rapport de forces de volumes :

$$N = \frac{(\beta_s)_{nf} \Delta c}{(\beta_t)_{nf} \Delta T}$$

Rapport d'aspect :

$$A = \frac{H}{(r_o - r_i)}$$

Rapport des rayons :

$$\lambda = \frac{r_o}{r_i}$$

Où : $\Delta T = T_h - T_c$ et $\Delta c = c_h - c_c$

Pour évaluer les taux de transferts de chaleur et de matière totaux à travers l'enceinte, les nombres de Nusselt local, comme suit:

$$Nu = h \frac{H}{k_f} = \frac{-k_{nf} \frac{\partial T}{\partial r} H}{(T_h - T_c) k_f} \quad (II.38)$$

$$Sh = h_m \frac{H}{D_f} = \frac{-D_f \frac{\partial c}{\partial r} H}{(C_h - C_c) D_f}$$

Ensuite, les nombres de Nusselt et Sherwood local peut être écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$Nu = - \left(\frac{k_{nf}}{k_f} \right) \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad (II.39)$$

$$Sh = - \frac{\partial C}{\partial Z}$$

Les nombres moyennes de Nusselt et sherwood sont définis comme suit :

$$\overline{Nu}_i = \int_0^1 \left[- \left(\frac{k_{nf}}{k_f} \right) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right]_{R=\frac{1}{A(\lambda-1)}} dZ \quad (II.40)$$

$$\overline{Sh}_i = \int_0^1 \left[-\frac{\partial C}{\partial R} \right]_{R=\frac{1}{A(\lambda-1)}} dZ \quad (\text{II.41})$$

(sur cylindre intérieur)

$$\overline{Nu}_o = \int_0^1 \left[-\left(\frac{k_{nf}}{k_f} \right) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right]_{R=\frac{\lambda}{A(\lambda-1)}} dZ \quad (\text{II.42})$$

$$\overline{Sh}_o = \int_0^1 \left[-\frac{\partial C}{\partial Z} \right]_{R=\frac{\lambda}{A(\lambda-1)}} dZ$$

(sur cylindre extérieur)

Par conséquent, le bilan thermique et de transfert de matière du fluide pur dans l'enceinte peut être donné comme suit [19]:

$$\frac{\overline{Nu}_i}{\overline{Nu}_o} = \frac{\overline{Sh}_i}{\overline{Sh}_o} = \lambda \quad (\text{II.43})$$

La fonction de courant adimensionnelle ψ est définie dans le plan méridien comme suit:

$$U = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad , \quad W = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (\text{II.44})$$

Chapitre III

Modélisation numérique

III.1 Introduction :

Les équations régissant le phénomène physique sont des équations différentielles aux dérivées partielles, elliptiques, et non linéaires. La difficulté de les résoudre analytiquement nécessite l'utilisation des méthodes numériques. Il existe plusieurs méthodes numériques dont on peut citer :

- La méthode des différences finies
- La méthode des éléments finis
- La méthode des volumes finis

pour obtenir un système d'équation algébrique.

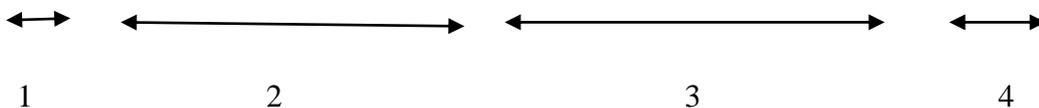
La résolution numérique de notre problème physique est basée sur la méthode des volumes finis, telle qu'elle est décrite par Patankar [21]. Cette méthode consiste à :

- 1) Discrétisation du domaine (subdivision du domaine en volume élémentaires).
- 2) Intégration des équations sur chaque volume de contrôle.
- 3) Traitement des conditions aux limites.
- 4) Résolution du système d'équations algébriques résultants.

III.2 Equation générale de transport :

L'équation générale de transport pour un problème axisymétrique peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU\phi) + \frac{\partial}{\partial Z} (W\phi) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) + S_\phi \quad (\text{III. 1})$$



- 1 : représente le terme transitoire.
 2 : représente le terme de transport par convection.
 3 : représente le terme de transport par diffusion.
 4 : représente le terme de source.

La variable dépendante ϕ , le coefficient de diffusion Γ et le terme source sont déterminées pour chaque équation du système et sont rapportés dans le tableau(III.1):

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant r	U	$\frac{\text{Pr}}{(1 - \phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}}$	$-\frac{\partial P}{\partial R} + F_{EMr}$
Quantité de mouvement suivant z	W	$\frac{\text{Pr}}{(1 - \phi) + \phi \frac{\rho_p}{\rho_f}}$	$-\frac{\partial P}{\partial Z} + Ra_T \text{Pr} \left((1 - \phi) + \phi \frac{\beta_{Tp}}{\beta_{Tf}} \right) (\theta - NC) + F_{EMz}$
Transfert de chaleur	θ	$\frac{1}{(1 - \phi) + \phi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}}$	0
Transfert de matière	C	$\frac{1}{\text{Le}}$	0

Tableau(III.1): Définition des variables ϕ , Γ et S_ϕ dans l'équation de transport.

II.3 Maillage :

Les équations différentielles qui régissent notre problème sont écrites dans chaque partie du champ physique. Et pour projeter ces équations dans le plan méridien ($r - z$) de ce champ, elles sont divisées en deux directions, horizontale et verticale, pour obtenir un nombre spécifié de volumes premiers ou "volumes de contrôle". Le point e, w, n et s correspondent aux faces de contrôle du volume. P désigne le centre du volume de contrôle étudié, tandis que E, W, N et S désignent les centres des volumes de contrôle adjacents situés à l'est, à l'ouest, au nord et au sud de P.

Pour exprimer les bilans des grandeurs scalaires, on utilise un volume de contrôle typique et pour l'expression des grandeurs vectorielles, on utilise un volume de contrôle décalé.

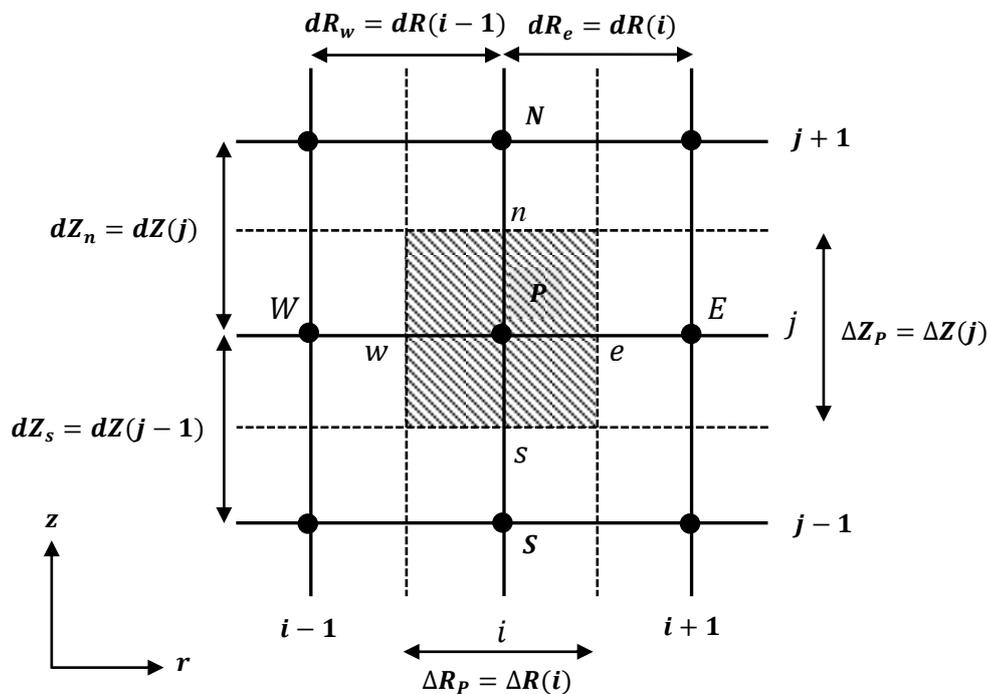


Figure (III.1): Volume de contrôle typique dans le plan ($r - z$).

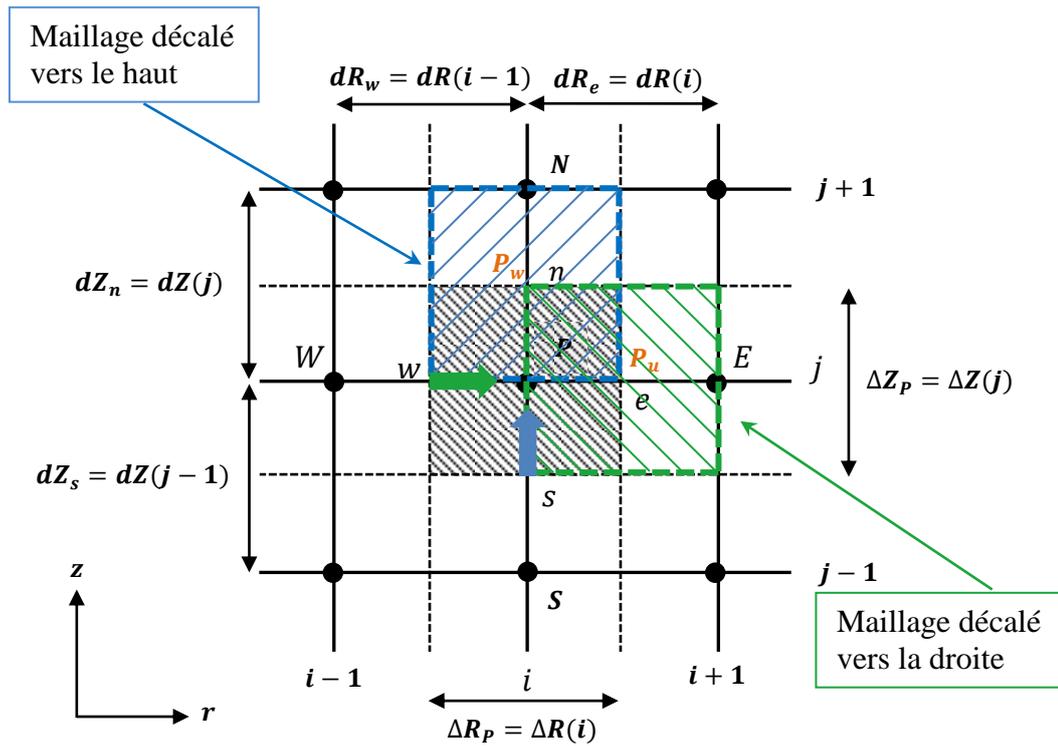


Figure (III.2): Volume de contrôle décalé.

III.4 Discrétisation des équations mathématiques :

L'intégration de l'équation (III.1) sur le volume de contrôle typique de la variable ϕ

L'expression du volume de contrôle est :

$$\begin{aligned}
 dV &= R dR dZ \\
 \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial t} R dR dZ dt &+ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU\phi) R dR dZ \\
 &+ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (V\phi) R dR dZ dt \\
 &= \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) R dR dZ dt \\
 &+ \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) R dR dZ dt + \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_s^n \int_w^e S_{\phi} R dR dZ dt
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

Le terme transitoire : la divisée par Δt , nous donne :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta \tau} R dR dZ = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta \tau} R_P \Delta R_P \Delta Z_P \quad (\text{III.3})$$

Le terme convectif :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R U \phi) R dR dZ = \int_s^n [R U \phi]_w^e dR = [(R U \phi)_e - (R U \phi)_w] \Delta Z_P \quad (\text{III.4})$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} (W \phi) R dR dZ = \int_w^e [W \phi]_s^n R dR = [(W \phi)_n - (W \phi)_s] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.5})$$

Le terme diffusif :

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_w^e \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) R dR dZ &= \int_s^n \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \right]_w^e dR \\ &= \left[\left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e - \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z_P \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) R dR dZ = \int_w^e \left[\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right]_s^n R dR = \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_s \right] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.7})$$

Le terme source :

$$\int_s^n \int_w^e S_\phi R dR dZ = \bar{S}_\phi R_P \Delta R_P \Delta Z_P \quad (\text{III.8})$$

L'équation (III.2) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\phi - \phi^0}{\Delta \tau} R_P \Delta R_P \Delta Z_P + [(R U \phi)_e - (R U \phi)_w] \Delta Z_P + [(W \phi)_n - (W \phi)_s] R_P \Delta R_P \\ = \left[\left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_e - \left(R \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z_P + \left[\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_s \right] R_P \Delta R_P \\ + \bar{S}_\phi R_P \Delta R_P \Delta Z_P \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

On obtient la forme algébrique finale suivante :

$$A_P \phi_P^{\tau+\Delta\tau} = A_E \phi_E^{\tau+\Delta\tau} + A_W \phi_W^{\tau+\Delta\tau} + A_N \phi_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S \phi_S^{\tau+\Delta\tau} + S \quad (\text{III.10})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_P^0 \quad (\text{III.12})$$

$$b = \left(\overline{S_\phi} + \frac{\phi^0}{\Delta\tau} \right) R_P \Delta R_P \Delta Z_P \quad (\text{III.13})$$

Où :

$$F_e = U_e R_e \Delta Z_P$$

$$F_w = U_w R_w \Delta Z_P \quad (\text{III.14})$$

$$F_n = V_n R_P \Delta R_P$$

$$F_s = V_s R_P \Delta R_P$$

Et

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{dR_e} R_e \Delta Z_P$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{dR_w} R_w \Delta Z_P$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{dR_n} R_P \Delta R_P \quad (\text{III.15})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{dR_s} R_P \Delta R_P$$

$$P_e = F_e/D_e, \quad P_w = F_w/D_w, \quad P_n = F_n/D_n, \quad P_s = F_s/D_s \quad (\text{III.16})$$

Les coefficients A_E , A_W , A_N , A_S et A_P correspondent respectivement aux nœuds est, ouest, nord, sud et centre du volume.

Dans le volume de contrôle, b : est un terme source supposé constant.

Sur les faces est, ouest, nord et sud, F_e, F_w, F_n, F_s et D_e, D_w, D_n, D_s sont respectivement les termes convectifs et diffusifs.

Un nombre de Péclet est un nombre sans dimension. Il est défini comme le rapport entre le taux de retard d'une grandeur physique par écoulement et le taux de diffusion (matière ou chaleur) de la même grandeur entraînée par un gradient approprié. Les nombres de Péclet P_e, P_w, P_n, P_s s'identifient les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différents côtés du volume de contrôle. Lorsque vous arriverez à ce point, vous devrez exprimer les termes de flux et de diffusion de chaleur dans les interfaces de contrôle de volume. Pour résoudre ce problème,

nous utilisons des parcelles d'estimation numérique (variations focalisées, exponentielle, loi de puissance, hybride, etc.). La façon dont les termes grosseur et prévalence sont pris varie dans ces chiffres.

III.4.1 Equation de continuité :

$$\int_w^e \int_s^n \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) + \frac{\partial W}{\partial Z} \right] R dR dZ = 0 \quad (\text{III.17})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU) R dR dZ = [(RU)_e - (RU)_w] \Delta Z_P \quad (\text{III.18})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial W}{\partial Z} R dR dZ = [W_n - W_s] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.19})$$

On obtient l'équation de continuité discrétisée comme suit:

$$[(RU)_e - (RU)_w] \Delta Z + [W_n - W_s] R_P \Delta R_P = 0 \quad (\text{III.20})$$

III.4.2 Equation de quantité de mouvement suivant r :

Tous les termes de l'équation de la quantité de mouvement suivant r sont multipliés par $R dR dZ$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle décalé (vers la droite).

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU^2) R dR dZ = [(RU^2)_{e_u} - (RU^2)_{w_u}] \Delta Z_P \quad (\text{III.21})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{\partial}{\partial Z} (WU) R dR dZ = [(WU)_{n_u} - (WU)_{s_u}] R_e dR_e \quad (\text{III.22})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -\frac{\partial P}{\partial R} R dR dZ = [P_P - P_E] R_e \Delta Z_P \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_P}{\rho_f}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R\mu \frac{\partial U}{\partial R} \right) R dR dZ \\ = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_P}{\rho_f}} \left[\left(R\mu \frac{\partial U}{\partial R} \right)_{e_u} - \left(R\mu \frac{\partial U}{\partial R} \right)_{w_u} \right] \Delta Z_P \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_P}{\rho_f}} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) R dR dZ \\ = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_P}{\rho_f}} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right)_{n_u} - \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right)_{s_u} \right] R_{P_u} \Delta R_{P_u} \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$\int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -\frac{Pr\mu}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \frac{U}{R^2} R dR dZ = -\frac{Pr\mu}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \frac{U_{P_u}}{R_e} dR_e \Delta Z_P \quad (\text{III.26})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_u} \int_{s_u}^{n_u} -Pr \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} U R dR dZ \\ = -Pr \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} U_{P_u} R_e dR_e \Delta Z_P \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S_U \quad (\text{III.28})$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{1}{2} [U_P + U_E] R_E \Delta Z_P \\ F_w &= \frac{1}{2} [U_W + U_P] R_P \Delta Z_P \\ F_n &= \frac{1}{2} [W_P + W_E] R_e dR_e \\ F_s &= \frac{1}{2} [W_S + W_{ES}] R_e dR_e \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Et

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_E \mu_E \frac{\Delta Z_P}{\Delta R_E} \\ D_w &= \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_P \mu_P \frac{\Delta Z_P}{\Delta R_P} \\ D_n &= \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_{P_u} \frac{\Delta R_{P_u}}{dZ_{su}} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_{P_u} \frac{\Delta R_{P_u}}{dZ_{nu}} \\ A_P D_s &= \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_{P_u} \frac{\Delta R_{P_u}}{dZ_{su}} = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{R_e dR_e \Delta Z_P}{\Delta \tau} \\ &\quad + Pr \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_e dR_e \Delta Z_P + \frac{Pr\mu}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \frac{dR_e}{R_e} \Delta Z_P \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

$$S_U = (P_P - P_E) R_e \Delta Z_P \quad (\text{III.32})$$

III.4.3 Equation de quantité de mouvement suivant z :

Opar $R dR dZ$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle décalé (vers haut).

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RUW) R dR dZ = [(RUW)_{e_w} - (RUW)_{w_w}] dZ_n \quad (\text{III.33})$$

$$\int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \frac{\partial}{\partial Z} (W^2) R dR dZ = [(W^2)_{n_w} - (W^2)_{s_w}] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.34})$$

$$\int_{w_v}^{e_v} \int_{s_v}^{n_v} -\frac{\partial P}{\partial Z} R dR dZ = [P_P - P_N] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.35})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \mu \frac{\partial W}{\partial R} \right) R dR dZ \\ = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_s}{\rho_f}} \left[\left(R \mu \frac{\partial W}{\partial R} \right)_{e_w} - \left(R \mu \frac{\partial W}{\partial R} \right)_{w_w} \right] dZ_n \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_w}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\mu \frac{\partial W}{\partial Z} \right) R dR dZ \\ = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_s}{\rho_f}} \left[\left(\mu \frac{\partial W}{\partial Z} \right)_{n_w} - \left(\mu \frac{\partial W}{\partial Z} \right)_{s_w} \right] R_P \Delta R_P \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

$$\begin{aligned} \int_{w_u}^{e_w} \int_{s_w}^{n_w} -Pr \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} W R dR dZ \\ = -Pr \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} W_{P_w} \Delta R_P R_P dZ_n \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Les résultats intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de des discrétisation algébrique :

$$A_P W_{P_w} = A_E W_{E_w} + A_W W_{W_w} + A_N W_{N_w} + A_S W_{S_w} + S_w \quad (\text{III.39})$$

où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Où :

$$F_e = \frac{1}{2} [U_P + U_N] R_{e_w} dZ_n$$

$$F_w = \frac{1}{2} [U_W + U_{N_W}] R_{w_w} dZ_n \quad (\text{III.41})$$

$$F_n = \frac{1}{2} [W_P + W_n] R_P \Delta R_P$$

$$F_s = \frac{1}{2} [W_S + W_P] R_P \Delta R_P$$

et

$$D_e = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_e \mu_e \frac{dZ_n}{dR_e}$$

$$D_w = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_w \mu_w \frac{dZ_n}{dR_w} \quad (\text{III.42})$$

$$D_n = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_P \mu_N \frac{\Delta R_P}{\Delta Z_N}$$

$$D_s = \frac{Pr}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_P \mu_P \frac{\Delta R_P}{\Delta Z_P}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + Pr \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \frac{Ha^2}{(1-\varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f}} R_p dR_p \Delta Z_n + \frac{R_P \Delta R_P dZ_n}{\Delta \tau} \quad (\text{III.43})$$

$$S_W = (P_P - P_N) R_P \Delta R_P + \frac{g(\beta_{T_f}) \cdot \Delta T \cdot H}{\alpha_f \vartheta_f} \cdot Pr \left[(1-\varphi) + \varphi \frac{\beta_{T_P}}{\beta_{T_f}} \right] (\theta - N.C) \quad (\text{III.44})$$

III.4.4 Equation d'énergie :

Tous les termes de l'équation de l'énergie sont multipliés par $RdRdZ$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle typique.

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RU\theta) R dR dZ = [(RU\theta)_e - (RU\theta)_w] \Delta Z_P \quad (\text{III.45})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial Z} (W\theta) R dR dZ = [(W\theta)_n - (W\theta)_s] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.46})$$

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_P}{(\rho c_p)_f}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(k \cdot R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) R dR dZ \\ = \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_P}{(\rho c_p)_f}} \left[\left(kR \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_e - \left(kR \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z_P \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}} \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) R dR dZ$$

$$= \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}} \left[\left(k \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_n - \left(k \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_s \right] R_P \Delta R_P$$
(III.48)

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P \theta_P = A_E \theta_E + A_W \theta_W + A_N \theta_N + A_S \theta_S + S_\theta$$
(III.49)

où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ A_N &= D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S &= D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0) \end{aligned}$$
(III.50)

Où :

$$\begin{aligned} F_e &= R_e U_e \Delta Z_P \\ F_w &= R_w U_w \Delta Z_P \\ F_n &= R_P W_n \Delta R_P \\ F_s &= R_P W_s \Delta R_P \end{aligned}$$
(III.51)

Et :

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}} k_e R_e \frac{\Delta Z_P}{dR_e} \\ D_w &= \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}} k_w R_w \frac{\Delta Z_P}{dR_w} \\ D_n &= \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}} k_n R_P \frac{\Delta R_P}{dZ_n} \\ D_s &= \frac{1}{(1-\varphi) + \varphi \frac{(\rho c_p)_p}{(\rho c_p)_f}} k_s R_P \frac{\Delta R_P}{dZ_s} \end{aligned}$$
(III.52)

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{R_P \Delta R_P \Delta Z_P}{\Delta \tau}$$
(III.53)

III.4.5 Equation de la matière :

Tous les termes de l'équation de matière sont multipliés par $RdRdZ$ et double intégrés entre les limites du volume de contrôle typique.

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RUC) R dR dZ = [(RUC)_e - (RUC)_w] \Delta Z_P \quad (\text{III.54})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial Z} (WC) R dR dZ = [(WC)_n - (WC)_s] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.55})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{le} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right) R dR dZ = \frac{1}{le} \left[\left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right)_e - \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right)_w \right] \Delta Z_P \quad (\text{III.56})$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{1}{le} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right) R dR dZ = \frac{1}{le} \left[\left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right)_n - \left(\frac{\partial C}{\partial Z} \right)_s \right] R_P \Delta R_P \quad (\text{III.57})$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique :

$$A_P C_P = A_E C_E + A_W C_W + A_N C_N + A_S C_S + S_C \quad (\text{III.58})$$

Où les coefficients et le terme source de l'équation algébrique sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} A_E &= D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W &= D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

Ou :

$$F_e = R_e U_e \Delta Z_P$$

$$F_w = R_w U_w \Delta Z_P$$

$$F_n = R_P W_n \Delta R_P$$

$$F_s = R_P W_s \Delta R_P$$

Et

$$D_e = \frac{1}{le} R_e \frac{\Delta Z_P}{dR_e}$$

$$D_w = \frac{1}{le} R_w \frac{\Delta Z_P}{dR_w} \quad (\text{III.61})$$

$$D_n = \frac{1}{le} R_P \frac{\Delta R_P}{dZ_n}$$

$$D_s = \frac{1}{le} R_P \frac{\Delta R_P}{dZ_s}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{R_P \Delta R_P \Delta Z_P}{\Delta \tau} \quad (\text{III.62})$$

III.5 Méthode de résolution :

III.5.1 Equation de pression :

Pour résoudre le système d'équations de discrétisation de U_{P_u} et W_{P_w} , il est nécessaire de connaître la pression qui apparait dans les termes sources de ces équations. Donc, il nous faut une équation de discrétisation de la pression à chaque point intérieur du maillage typique. L'obtention d'une telle équation est possible avec l'utilisation des équations de discrétisation des vitesses et de continuité.

L'équation de discrétisation (III.28) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E) R_e \Delta Z_P \quad (\text{III.63})$$

Avec :

$$S_U = b_U + (P_P - P_E) R_e \Delta Z_P \quad (\text{III.64})$$

On remarque que la position P_u du maillage décalé est confondue avec la position e du maillage typique. Donc, l'équation de discrétisation de U_{P_u} ($U_{P_u} = U_e$) devient :

$$A_P U_e = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E) R_e \Delta Z_P \quad (\text{III.65})$$

Cette équation est réécrite comme suit :

$$U_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U + (P_P - P_E) R_e \Delta Z_P] / A_P \quad (\text{III.66})$$

$$U_e = \hat{U}_e + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.67})$$

Avec:

$$\hat{U}_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U] / A_P \quad (\text{III.68})$$

Cette variable est appelée la pseudo-vitesse suivant la direction R

$$d_e = R_e \Delta Z_P / A_P \quad (\text{III.69})$$

Au point w , on peut obtenir une équation similaire:

$$U_w = \hat{U}_w + d_w (P_W - P_P) \quad (\text{III.70})$$

Ou les pseudo-vitesses sont données par les expressions suivantes :

$$\hat{U}_e = [A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + b_U] / A_P \quad (\text{III.71})$$

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de W_{P_w} :

$$A_P W_{P_w} = A_E W_{E_w} + A_W W_{W_w} + A_N W_{N_w} + A_S W_{S_w} + b_w + (P_P - P_N) R_P \Delta R_P \quad (\text{III.72})$$

Avec :

$$S_w = b_w + (P_P - P_N)R_P\Delta R_P \quad (\text{III.73})$$

Aussi, on remarque que la position P_v du maillage décalé vers le haut est confondue avec la position n du maillage typique. Donc, l'équation de discrétisation de W_{P_w} ($W_{P_w} = W_n$) devient :

$$A_P W_n = A_E W_{E_w} + A_W W_{W_w} + A_N W_{N_w} + A_S W_{S_w} + b_w + (P_P - P_N)R_P\Delta R_P \quad (\text{III.74})$$

Cette équation est réécrite comme suit:

$$W_n = [A_E W_{E_w} + A_W W_{W_w} + A_N W_{N_w} + A_S W_{S_w} + b_w + (P_P - P_N)R_P\Delta R_P] / A_P \quad (\text{III.75})$$

$$W_n = \widehat{W}_n + d_n(P_P - P_N) \quad (\text{III.76})$$

Avec :

$$\widehat{W}_n = [A_E W_{E_w} + A_W W_{W_w} + A_N W_{N_w} + A_S W_{S_w} + b_w] / A_P \quad (\text{III.77})$$

$$d_n = R_P\Delta R_P / A_P \quad (\text{III.78})$$

Au point s, on peut obtenir une équation similaire:

$$W_s = \widehat{W}_s + s(P_P - P_S) \quad (\text{III.79})$$

Maintenant, nous allons remplacer les quarts équations :

$$\begin{aligned} U_e &= \widehat{U}_e + d_e(P_P - P_E) \\ U_w &= \widehat{U}_w + d_w(P_W - P_P) \\ W_n &= \widehat{W}_n + d_n(P_P - P_N) \\ W_s &= \widehat{W}_s + d_s(P_S - P_P) \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

dans l'équation de discrétisation de continuité :

$$(U_e R_e - U_w R_w)\Delta Z_P + (W_n - W_s)R_P\Delta R_P = 0 \quad (\text{III.81})$$

et on obtient alors l'équation de discrétisation de pression sous la forme :

$$A_P P_P = A_E P_E + A_W P + A_N P_N + A_S P_S + S_P \quad (\text{III.82})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_E &= d_e R_e \Delta Z_P \\ A_W &= d_w R_w \Delta Z_P \\ A_N &= d_n R_P \Delta R_P \\ A_S &= d_s R_P \Delta R_P \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (\text{III.84})$$

$$S_P = [(\widehat{U}_w R_w - \widehat{U}_e R_e)\Delta Z_P + (\widehat{W}_s - \widehat{W}_n)R_P\Delta R_P] \quad (\text{III.85})$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues sont fortement dépendantes. Ce couplage nécessite une solution simultanée et itérative de ces équations. La solution commence par des estimations qui doivent être corrigées.

On définit les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections :

$$\begin{aligned} U &= U^* + U' \\ W &= W^* + W' \\ P &= P^* + P' \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

Où :

U^*, W^*, P^* sont les estimations et U', W', P' sont les corrections.

Si on utilise ces définitions dans les équations de discrétisation des vitesses, on obtient les équations de discrétisation des estimations :

$$\begin{aligned} A_P U_{P_u}^* &= A_E U_{E_u}^* + A_W U_{W_u}^* + A_N U_{N_u}^* + A_S U_{S_u}^* + b_U + (P_P^* - P_E^*) R_e \Delta Z_P \\ A_P W_{P_w}^* &= A_E W_{E_w}^* + A_W W_{W_w}^* + A_N W_{N_w}^* + A_S W_{S_w}^* + b_w + (P_P^* - P_N^*) R_P \Delta R_P \end{aligned} \quad (\text{III.87})$$

Ces équations montrent qu'avec une estimation de la pression on ne peut obtenir qu'une estimation des vitesses.

Les équations de discrétisation des corrections sont :

$$\begin{aligned} A_P U_{P_u}' &= A_E U_{E_u}' + A_W U_{W_u}' + A_N U_{N_u}' + A_S U_{S_u}' + (P_P' - P_E') R_e \Delta Z_P \\ A_P W_{P_w}' &= A_E W_{E_w}' + A_W W_{W_w}' + A_N W_{N_w}' + A_S W_{S_w}' + (P_P' - P_N') R_P \Delta R_P \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

Comme approximation, on peut éliminer les corrections des vitesses aux points voisins et on redéfinit les corrections des vitesses seulement en fonction de la correction de la pression :

$$\begin{aligned} U_{P_u}' &= d_e (P_P' - P_E') \\ W_{P_w}' &= d_n (P_P' - P_N') \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

Donc le champ de vitesses s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} U_e &= U_e^* + d_e (P_P' - P_E') \\ U_w &= U_w^* + d_w (P_P' - P_P') \\ W_n &= W_n^* + d_n (P_P' - P_N') \\ W_s &= W_s^* + d_s (P_P' - P_P') \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Pour la détermination de la correction de pression, on utilise les définitions (III.89) dans l'équation de discrétisation de continuité (III.82) et on obtient :

$$\begin{aligned} [U_e^* + d_e (P_P' - P_E')] R_e \Delta Z_P - [U_w^* + d_w (P_P' - P_P')] R_w \Delta Z_P \\ + [W_n^* + d_n (P_P' - P_N')] R_P \Delta R_P - [W_s^* + d_s (P_P' - P_P')] R_P \Delta R_P = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de correction de pression :

$$A_P P_P' = A_E P_E' + A_W P_W' + A_N P_N' + A_S P_S' + S_{P'} \quad (\text{III.92})$$

Avec :

Les coefficients $A_E, A_W, A_N, A_S, A_F, A_B$ et A_P sont les mêmes que ceux de l'équation de pression.(III.82)

Et :

$$S_{P'} = [U_w^* R_w - U_e^* R_e] \Delta Z_P + [W_s^* - W_n^*] R_P \Delta R_P = 0 \quad (\text{III.93})$$

III.5.2 Technique de balayage et l'algorithme de Thomas :

La résolution directe du système d'équations algébriques est compliquée, pour cela, on utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution semi-itérative. Elle consiste à déterminer les valeurs de la variable \emptyset sur chaque ligne du domaine d'étude indépendamment des autres lignes, donc le système se transforme d'un système d'équations algébriques multidimensionnelles en un système unidimensionnel, en ajoutant à la source de la dimension choisie des termes des autres dimensions. Le système d'équations obtenu est représenté par une matrice tri-diagonale et peut être résolu par l'algorithme de Thomas.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_P \emptyset_P = A_E \emptyset_E + A_W \emptyset_W + A_N \emptyset_N + A_S \emptyset_S + S \quad (\text{III.94})$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme suivante:

$$[A] \cdot [\emptyset] = [S_\emptyset] \quad (\text{III.95})$$

$[A]$: est une matrice de $(IL - 2) \times (JL - 2)$ éléments.

$[\emptyset]$: vecteur des inconnues

$$i = 2 ; IL - 1 \text{ et } j = 2 ; JL - 1$$

Pour déterminer les valeurs de \emptyset sur une colonne « i » on suppose que les valeurs de cette dernière sont connues sur les colonnes « i » et « $i + 1$ ». L'équation algébrique (III.94) écrite pour chaque nœud de la colonne « i » est alors réduite à une équation qui contient seulement trois inconnues ($\emptyset_P, \emptyset_N, \emptyset_S$).

Dans sa forme générale indicielle, l'équation discrétisée s'écrit comme suit :

$$A_P(i, j) \emptyset_{i, j} = A_E(i, j) \emptyset_{i+1, j} + A_W(i, j) \emptyset_{i-1, j} + A_N(i, j) \emptyset_{i, j+1} + A_S(i, j) \emptyset_{i, j-1} + S(i, j) \quad (\text{III.96})$$

Pour le nœud (i, j) du maillage, l'équation (III.96) peut être écrite sous la forme d'une équation unidimensionnelle :

$$a_j \emptyset_j = b_j \emptyset_{j+1} + c_j \emptyset_{j-1} + d_j \quad (\text{III.97})$$

où :

$$\left. \begin{aligned} a_j &= A_P(i, j) \\ b_j &= A_N(i, j) \\ c_j &= A_S(i, j) \\ d_j &= A_E(i, j)\phi_{i+1, j} + A_W(i, j)\phi_{i-1, j} + S(i, j) \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.98)}$$

Donc, on obtient l'équation sous la forme suivante :

$$-c_j\phi_{j-1} + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad \text{(III.99)}$$

Avec : $c_1 = 0$ et $b_{JL} = 0$

Pour tous les nœuds ($j = 2, JL - 1$) de la colonne i , l'équation donne un système de la forme :

$$\begin{aligned} -c_2\phi_1 + a_2\phi_2 - b_2\phi_3 &= d_2 \\ \dots\dots\dots \\ -c_j\phi_{j-1} + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} &= d_j \\ \dots\dots\dots \\ -c_{JL}\phi_{JL-1} + a_{JL}\phi_{JL} - b_{JL}\phi_{JL+1} &= d_{JL} \end{aligned} \quad \text{(III.100)}$$

Les valeurs de ϕ_1 et ϕ_{JL} sont connues (conditions aux limites).

La matrice associée au système est tri-diagonale. On utilise l'algorithme TDMA (Algorithme de Thomas pour résolution en réarrangeant toutes les équations du système (III.100) sous la forme suivante:

$$\phi_j = \frac{c_j}{a_j}\phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j}\phi_{j+1} + \frac{d_j}{a_j} \quad \text{(III.101)}$$

On obtient :

$$\phi_2 = \frac{c_2}{a_2}\phi_1 + \frac{b_2}{a_2}\phi_3 + \frac{d_2}{a_2} \quad (\text{III.102})$$

$$\phi_3 = \frac{c_3}{a_3}\phi_2 + \frac{b_3}{a_3}\phi_4 + \frac{d_3}{a_3} \quad (\text{III.103})$$

$$\phi_{jL} = \frac{c_{jL}}{a_{jL}}\phi_{jL-1} + \frac{b_{jL}}{a_{jL}}\phi_{jL+1} + \frac{d_{jL}}{a_{jL}} \quad (\text{III.104})$$

Et puisque ϕ_1 est connue, on élimine ϕ_2 de (III.102) et ϕ_3 de (III.103) et ainsi de suite; on obtient une relation de récurrence pour ϕ_j telle que :

$$\phi_j = P_j\phi_{j+1} + Q_j \quad (\text{III.105})$$

Détermination de P_j et Q_j , Pour le nœud $(i, j-1)$, on a :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1} \quad (\text{III.106})$$

En remplaçant (III.105) dans (III.99), on trouve :

$$-c_j(P_{j-1}\phi_j + Q_{j-1}) + a_j\phi_j - b_j\phi_{j+1} = d_j \quad (\text{III.107})$$

on a:

$$(a_j - c_j P_{j-1})\phi_j = d_j + c_j Q_{j-1} + b_j\phi_{j+1} \quad (\text{III.108})$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}}\phi_{j+1} + \frac{d_j - c_j Q_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.109})$$

De (III.105) et (III.109), on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.110})$$

$$Q_j = \frac{d_j - c_j Q_{j-1}}{a_j - c_j P_{j-1}} \quad (\text{III.111})$$

Remarquons que pour $j = 1$ on a : $c_j = 0$; l'équation (III.109) pour $j = 1$ se réduit à :

$$c = \frac{b_1}{a_1}\phi_2 + \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.112})$$

Ce qui correspond à la forme de l'équation (III.101)

on a :

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1}, Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{III.113})$$

Aussi, pour $j = jL$ On a : $b_{jL} = 0$, donc $P_{jL} = 0$

Et de l'équation (III.106) on a :

$$P_{jL} = Q_{jL} \quad (\text{III.114})$$

Algorithme de THOMAS se résume comme suit :

- Triangler la matrice (la matrice tri-diagonal devient bi-diagonale)
1. Calculer les quantités P_1 et Q_1 de (III.101) par $P_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$.
 2. Calculer à partir de (III.110) et (III.111) les coefficients P_j et Q_j pour $j = 1, 2, \dots \dots JL$.
 - Résoudre le système à matrice bi-diagonale :
 3. On pose : $\phi_{JL} = Q_{JL}$
 4. On utilise l'équation (III.105) pour $j = JL - 1$, $j = JL - 2$, 1 pour obtenir les valeurs ϕ_{JL-1} , ϕ_{JL-2} , ϕ_2 , ϕ_1 .

III.5.3 Algorithme de calcul SIMPLER :

La solution séquentielle de l'ensemble des systèmes d'équations de discrétisation des vitesses, de la pression, de la température et du potentiel électrique, est assurée par l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Equation-Revised). Les étapes de cet algorithme sont :

- On commence par une initialisation du champ des vitesses.
- Avec le champ de vitesse initial, on calcule les pseudo-vitesses : \hat{U} et \hat{W} .
- Avec les pseudo-vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la pression et obtenir une estimation de cette dernière : P^*
- L'estimation de la pression est utilisée dans les équations de discrétisation des vitesses. Alors, les systèmes d'équations de discrétisation des vitesses sont résolus (par la méthode itérative de balayage) et on obtient les estimations des vitesses : U^* et W^* .
- Avec les estimations des vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la correction de pression et obtenir une estimation de cette dernière : P' .
- Avec la correction de la pression, on calcule les corrections des vitesses et on corrige le champ de vitesse.
- On résout le système d'équations de discrétisation de la vitesse azimutale (par la méthode itérative de balayage) et on obtient sa distribution.
- On résout le système d'équations de discrétisation de la température (par la méthode itérative de balayage) et on obtient le champ de température
- On résout le système d'équations de discrétisation du potentiel électrique (par la méthode itérative de balayage) et on obtient le champ du potentiel électrique.

- On vérifie la convergence des calculs : si le régime stationnaire est atteint on arrête le calcul, sinon on augmente le temps d'un pas et avec le champ de vitesse corrigé comme une nouvelle initialisation, on retourne à l'étape 2.

III.5.3 Critère de convergence :

La convergence est atteinte lorsque le bilan de conservation de masse et d'énergie est satisfait, en vérifiant qu'entre deux itérations consécutives, l'évolution des valeurs des variables de l'écoulement (U, W, Θ) soit négligeable.

$$(\varnothing^{n+1} - \varnothing^n) / \varnothing^n \leq \varepsilon = 10^{-4} \quad (\text{III.114})$$

Où : \varnothing est la variable dépendante qui représente U ou W .

n est le nombre d'itération.

Chapitre IV :

Résultats et discussion

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons nos résultats en deux parties : la première concerne l'écoulement sans champ magnétique et la deuxième avec champ magnétique. Les résultats sont présentés pour une valeur fixe du nombre de Lewis $Le = 10$ et un nombre de Prandtl $Pr = 6.2$. En plus, les rapports d'aspect et de rayons sont fixés à $A = 1$ et $\lambda = 2$.

IV.2. Effet du maillage :

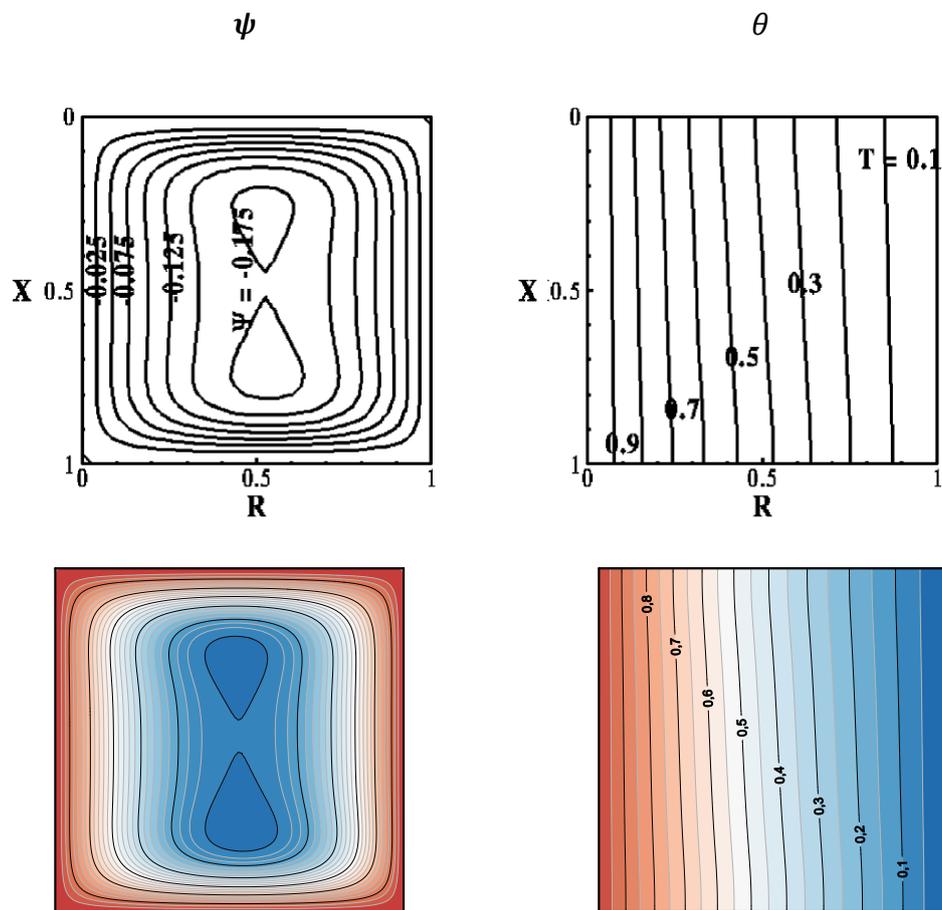
La précision des résultats numériques dépend fortement du maillage choisi. Afin de démontrer l'influence du maillage sur nos résultats, il est nécessaire de s'assurer que la qualité du maillage requise permet d'avoir une solution précise dans un temps de calcul réduit. Pour ce faire, plusieurs grilles sont considérées à savoir 62×62 , 102×102 , 122×122 , 162×162 et 202×202). Plusieurs tests sont réalisés pour les paramètres suivants : $Ra=10^5$, $Ha = 25 (B_r)$, $Pr = 6.2$, $Le = 10$ et $\varphi = 0.05$. Le tableau (IV.1) compare les caractéristiques de l'écoulement pour différentes grilles et montre que le maillage 102×102 donne également le meilleur compromis coût/précision.

Grille	\bar{Nu}	\bar{Sh}	$ \psi_{nf} _{max}$	U_{max}	W_{max}
62×62	4.864	10.618	10.544	26.578	45.216
102×102	4.8292	10.550	10.542	26.587	45.205
122×122	4.8217	10.540	10.543	26.582	45.253
162×162	4.813	10.530	10.547	26.578	45.218
202×202	4.808	10.525	10.549	26.577	45.233

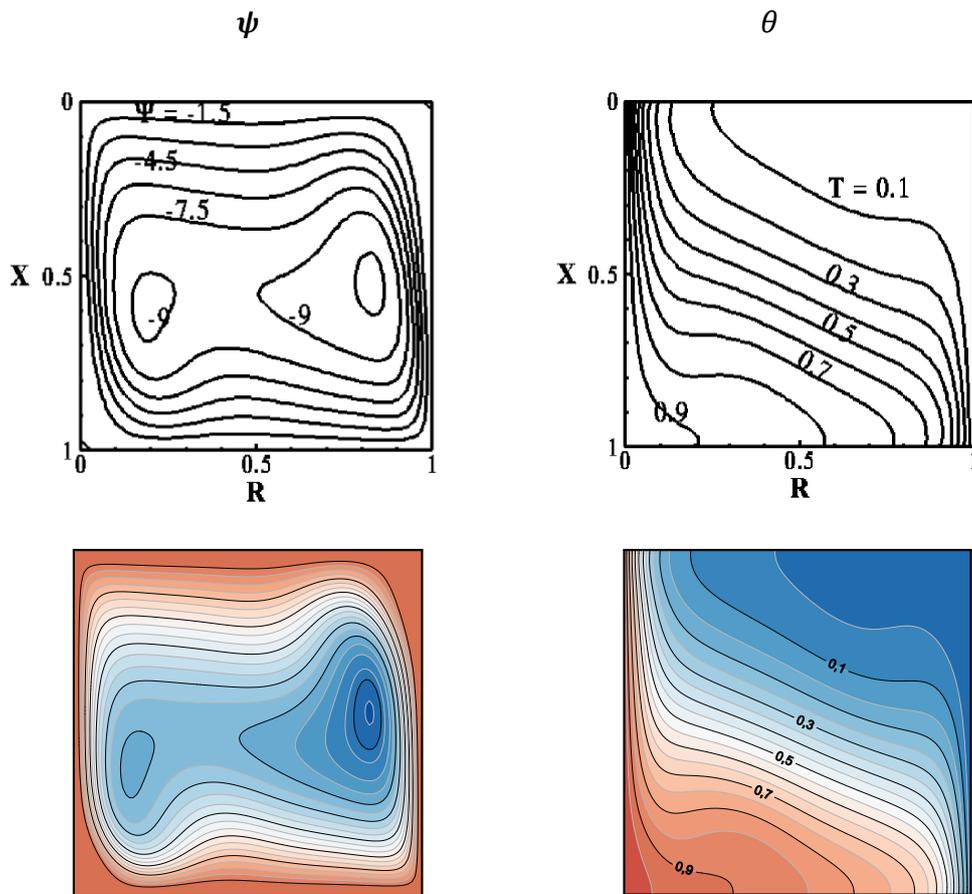
Tableau (IV.1) : Comparaison des caractéristiques de l'écoulement pour différentes grilles de maillage.

IV.3. Validation du code

Avant d'aborder nos calculs numériques, la première étape consiste en priorité à valider notre code de calcul développé en comparant nos résultats avec ceux disponibles dans la littérature. A cet effet, nous avons utilisé les mêmes paramètres de contrôle de ces travaux. La première validation a été faite avec les résultats numériques obtenus par Sankar [21]. La convection naturelle en présence d'un champ magnétique est considéré pour un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0.054$) et pour $A = 1$ et $\lambda = 2$. Deux cas correspondant à $Ra = 10^4$ et $Ha = 40$ (champ magnétique radial) et $Ra = 10^6$ et $Ha = 100$ (champ magnétique axial) sont comparés. Les résultats obtenus à la figure (IV.1) sont en bon accord avec les résultats de Sankar [21]. Ceci permet d'affirmer que notre code de calcul est validé.



(a)



(b)

Figure (IV.1) : Comparaison des lignes de courants et isothermes pour $Pr = 0.054$, $A = 1$ et $\lambda = 2$: (a) $Ra = 10^4$, $Ha = 100$ (champ magnétique radial) et (b) $Ra = 10^6$, $Ha = 100$ (champ magnétique axial).

La deuxième confrontation a été réalisée avec les résultats numériques pour le cas de la convection naturelle MHD d'un nanofluide (CuO+eau) dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Les modèles de Brinkman et Maxwell sont utilisés respectivement pour déterminer la viscosité dynamique et la conductivité thermique du nanofluide. Le tableau (IV.1) montre une comparaison quantitative des résultats du présent code avec ceux obtenus par Ghasemi et al. [17]. avec une erreur de l'ordre de moins 0.02% .

	\overline{Nu}			
	$\varphi = 0$	$\varphi = 0.02$	$\varphi = 0.04$	$\varphi = 0.06$
$Ra = 10^3$				
Ghasemi et al.[26]	1.002	1.060	1.121	1.184
Nos résultats	1.002	1.060	1.120	1.183
$Ra = 10^4$				
Ghasemi et al.[26]	1.183	1.212	1.249	1.291
Nos résultats	1.182	1.212	1.248	1.290
$Ra = 10^5$				
Ghasemi et al.[26]	3.150	3.138	3.124	3.108
Nos résultats	3.149	3.137	3.123	3.107
$Ra = 10^6$				
Ghasemi et al.[26]	7.907	7.979	8.042	8.098
Nos résultats	7.907	7.978	8.042	8.097
$Ra = 10^7$				
Ghasemi et al.[26]	16.929	17.197	17.449	17.688
Nos résultats	16.926	17.194	17.447	17.687

Tableau (IV. 2): Comparaison du nombre de \overline{Nu}_i à $Ha = 30$ avec différents Ra et φ .

Une dernière validation numérique a été faite avec le travail d’Alexandru et al. [23]. Ce travail concerne la convection à double diffusion dans un cavité rectangulaire pour $A = 1$, $Pr = 1$, $Le = 2$, $Ra = 10^5$ et $N = 1$. D’après le tableau (IV.3) qui montre le nombre de Nusselt pour différentes méthodes, les résultats reportés montrent un très bon accord.

	Méthode pseudo-spectrale (40×40)	Méthode des éléments finis (26×26)	Nos résultats (102×102)
\overline{Nu}	3,01	3,09	3,01
\overline{Sh}	3,82	3,85	3,82

Tableau (IV.3) : Comparaison des résultats numériques avec la référence [22] pour $Ra=10^5$,

$A=2, Pr=1, Le= 2$ et $N=1$.

IV.4. Résultats et discussion :

IV.4.1. Ecoulement sans champ magnétique :

a) Effet du nombre de Ra :

Dans cette partie, nous allons présenter l'effet du nombre de Rayleigh Ra sur les lignes de courant, les isothermes et les iso-concentrations en absence du champ magnétique pour l'eau pure ($\varphi = 0$) et un nanofluide ($\varphi = 0.09$).

La figure (IV.2) qui illustre le champ d'écoulement pour l'eau pure ($\varphi = 0$), on constate que pour $Ra=10^3$, l'écoulement est monocellulaire et circule dans le sens horaire dominé par la force de flottabilité thermique. La convection dans ce cas est faible. L'augmentation du nombre de Rayleigh à $Ra=10^6$, engendre une déformation remarquable des lignes de courant dû à la convection accentuée.

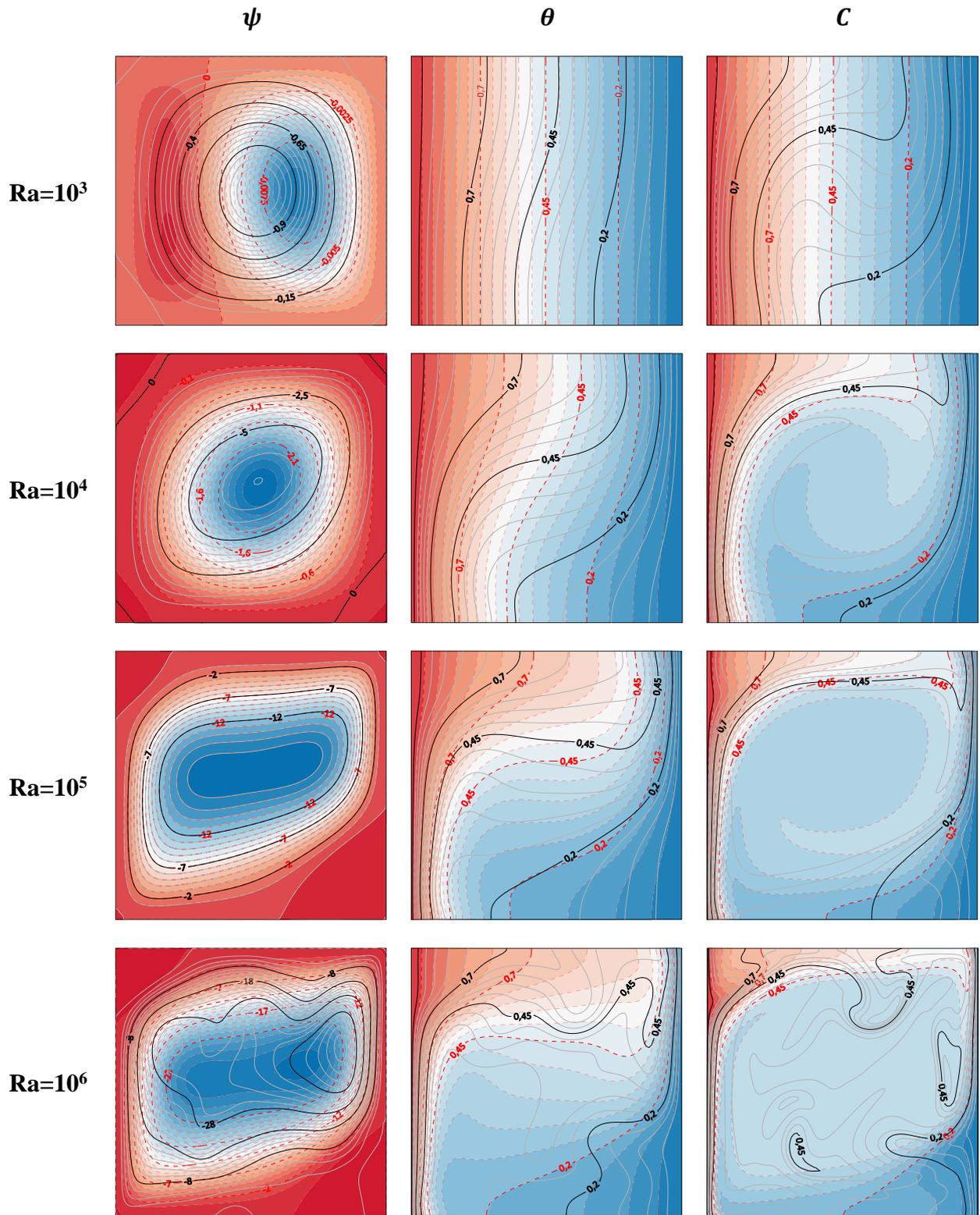
L'addition des nanoparticules ($\varphi = 0.09$) génère un régime bicellulaire de faible intensité par rapport au fluide pure pour des nombres de Ra faibles. Cela est dû à la compétition entre les deux forces de flottabilités thermique et solutale qui sont égales. Concernant le champ thermique, nous remarquons le redressement des isothermes avec l'addition des nanoparticules par rapport au fluide pur où il y a une légère déformation. La diffusion dans ce cas devient le mode dominant.

Pour le champ de concentration, une distorsion des lignes est observée indiquant que le transfert de matière est affecté énormément par l'écoulement malgré le faible régime de convection qui règne dans l'enceinte. L'addition des nanoparticules Al_2O_3 mène à un régime purement diffusifs. Ceci est remarqué à travers l'alignement parallèle des lignes de concentration.

Pour $Ra=10^4$, la convection devient relativement importante et la structure de l'écoulement est composée d'une cellule principale et d'autres secondaires. Ce résultat est dû principalement à la dominance de force de flottabilité thermique par rapport à la force solutale. Ceci est observé par le sens horaire de la cellule principale et le sens antihoraire des autres cellules. L'affaiblissement de l'écoulement du nanofluide est remarqué par rapport au fluide pur ce qui diminue la convection et par conséquent le champ thermique et de concentration deviennent moins déformés.

Ra	φ	\overline{Nu}	\overline{Sh}	$ \psi_{nf} _{max}$	$ \psi_{nf} _{min}$	U_{max}	W_{max}
10^3	0	1,498	2,765	1.12103	3.989E-03	2.303	2.766
	0.09	1,954	1,447	9.504E-03	1.571E-03	1.871E-02	2.482E-02
10^4	0	2,792	6,142	7.007	2.896E-02	15.293	21.645
	0.09	2,176	3,679	2.5919	4.750E-03	5.398	6.404
10^5	0	5,401	11,912	16.904	0.707	48.354	91.115
	0.09	4,340	7,746	11.503	9.914E-02	25.111	38.183
10^6	0	9,227	18,836	-47.052	4.726	143.767	282.698
	0.09	8,408	15,139	-26.545	0.791	82.398	155.133

Tableau (IV.4) : Caractéristiques de l'écoulement pour différentes paramètres.



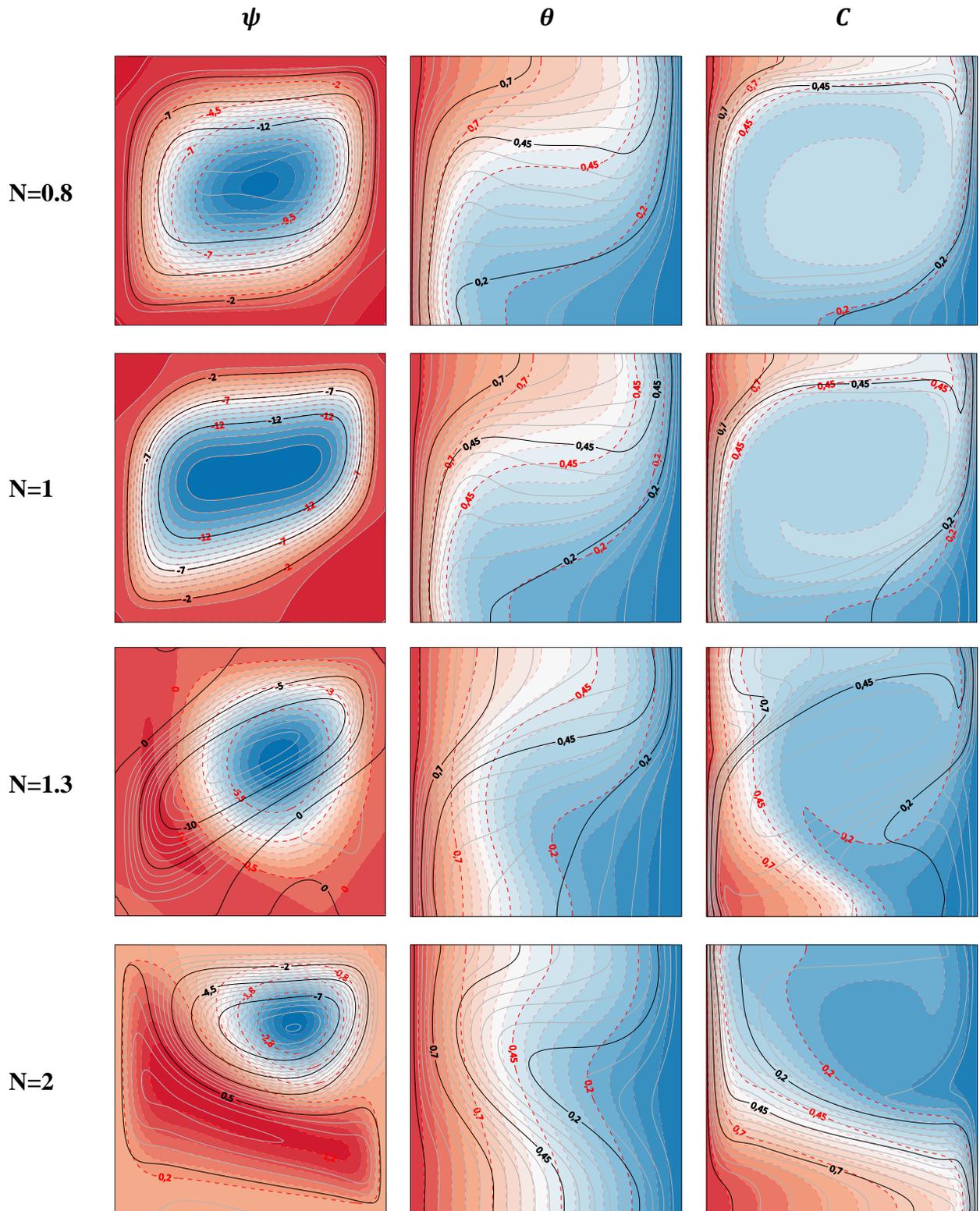
Figures (IV.2) : Comparaison des lignes de courants, isothermes et iso-concentrations pour différents nombres de Ra :

Fluide pur $\phi = 0$ (lignes continues) et nanofluide $\phi = 0.09$ (lignes discontinues).

b) Effet de rapport de forces N :

La figure (IV.3) illustre les lignes de courants pour $Ra=10^5$. Dans le cas où le rapport N est inférieur ou égale à l'unité, à côté de la grande cellule, deux petites cellules au coin supérieur gauche et au coin inférieur droit apparaissent et tournent dans le sens antihoraire. Ces deux cellules sont générées par la poussée solutale. Dans ce cas, la convection est dominée par la poussée thermique parce que la valeur de la diffusivité thermique plus grande par rapport à la diffusivité solutale. Pour $N=1,3$ on constate que l'écoulement est multicellulaire, la cellule principale circule dans le sens horaire et les autres cellules plus en plus deviennent grand et tournent dans le sens antihoraire, la convection reste dominé par la force thermique. En augmentant le rapport N ($N=2$), on constate que l'intensité de la cellule positive diminue en faveur des cellules négatives, ce qui a fait l'apparition d'une grande cellule dans le sens antihoraire et deux autres moins importantes en haut et en bas de la cavité dans le sens horaire preuve de la dominance de la poussée solutale.

La figure (IV.3) représente également les champs de températures et de concentration. Ils montrent que pour un rapport de N inférieur ou égale à l'unité, le transfert de chaleur et de masse se fait par convection où les isothermes et les iso-concentrations présentent une déformation des lignes remarquable. Tandis que pour un rapport N supérieur à l'unité ($N=1.3$ et 2), la convection de chaleur devient de plus en plus faible ce qui influe sur les isothermes et les iso-concentrations qui deviennent parallèles avec une inclinaison au centre de la cavité.



Figures (IV.3) : Comparaison des lignes de courants, isothermes et iso-concentrations pour différents rapports N :

Fluide pur $\varphi = 0$ (lignes continues) et nanofluide $\varphi = 0.09$ (lignes discontinues).

La figure (IV.4) montre la variation du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction de la fraction volumique des nanoparticules φ pour différents nombres de Ra et N. En général lorsque le rapport N augmente le nombre de Nusselt \overline{Nu} diminue à cause de l'élévation de la force de flotabilité solutale qui entre en compétition avec la force de flotabilité thermique qui l'oppose.

Pour $N=0.8$, nous remarquons pour $Ra=10^3$, l'augmentation de la fraction volumique φ augmente le taux de transfert de chaleur, vu que le régime dominant dans ce cas est la conduction. Ce résultat est dû principalement à l'augmentation de la conductivité thermique effective. Pour les autres nombres de Ra, le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} passe par deux intervalles où l'effet de la conductivité thermique effective est dominant par rapport à la viscosité où l'effet inverse. Lorsque $Ra=10^4$, le premier intervalle se trouve jusqu'à $\varphi = 0.01$, on remarque une augmentation de \overline{Nu} et après cette valeur une diminution est constatée jusqu'à une valeur minimale à $\varphi = 0.09$. Dans ce cas, l'effet de la viscosité effective est dominant. En augmentant Ra à 10^5 et 10^6 , le même raisonnement du cas précédent s'applique mais à $\varphi = 0.03$ et 0.05 respectivement.

En général, le taux de transfert de matière est relié à l'intensité de l'écoulement. En premier lieu, le nombre de \overline{Sh} augmente d'une façon similaire avec le nombre de Ra. Par contre \overline{Sh} augmente au détriment de la fraction volumique. Ce résultat est relié à la diminution de l'intensité de l'écoulement avec la présence des nanoparticules générée et par conséquent ceci engendre une diminution du transfert de matière.

Pour des valeurs élevées de Ra, l'égalité des forces solutale et thermique provoque des instationnarités de l'écoulement dans le cas $N=1$ et l'estimation de \overline{Sh} se fait à travers une moyenne temporelle.

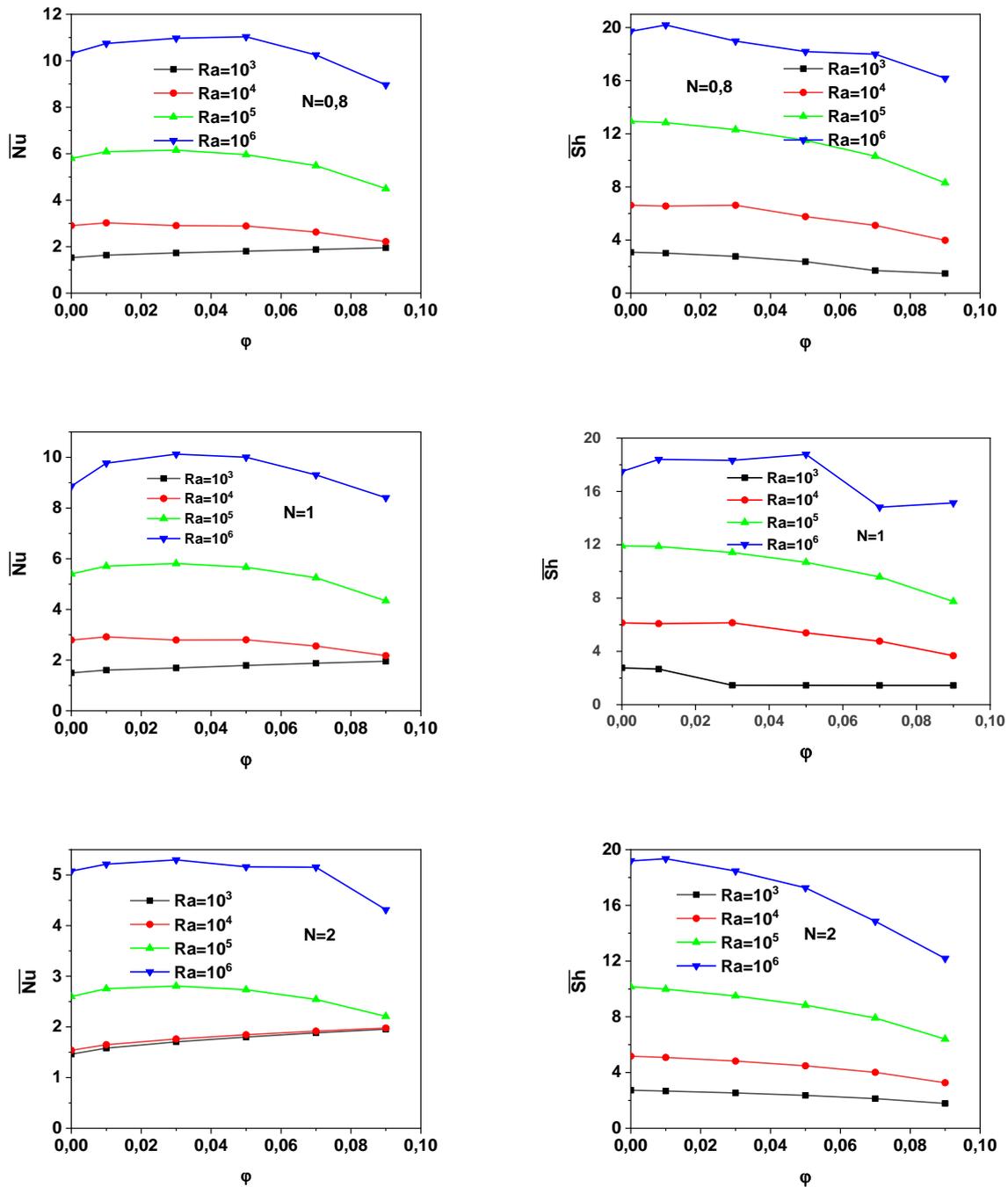


Figure (IV.4) : Effet de rapport N et de ϕ sur les nombres de Nusselt moyen \overline{Nu} et de Sherwood moyen \overline{Sh} .

IV.4.2. Ecoulement avec champ magnétique :

L'application du champ magnétique se manifeste généralement par l'affaiblissement de l'écoulement où de la structure devient organisé. Ce résultat est dû à la naissance de la force de Lorentz qui contrarie l'écoulement. A propos du champ thermique, le régime diffusive devient le

mode dominant fur à mesure à l'augmentation de l'intensité du champ magnétique (Ha). En conséquence, les isothermes deviennent parallèles. Pour $Ra=10^6$, la décélération des vitesses de l'écoulement est constatée d'après le tableau (IV.7) qui montre les fonctions de courant maximale et minimale.

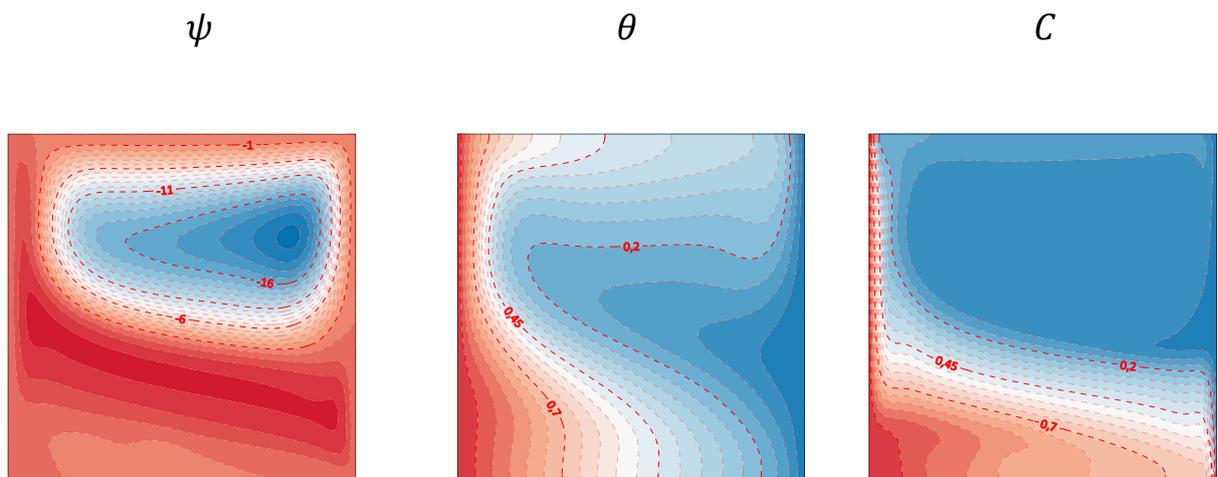
En deuxième lieu, le champ d'écoulement est peu modifié par l'application du champ magnétique indiquant que la convection reste dominante malgré l'intensité du champ magnétique. La structure de l'écoulement est composée de deux cellules principales contrarotatives sachant que la cellule principale en haut de l'enceinte est due à la force de flottabilité thermique. Concernant la l'autre cellule principale est le résultat de l'effet de la force de flottabilité solutale. Les isothermes et les lignes des iso-concentrations sont légèrement déformées (fig. IV.6) et l'effet de la convection reste important malgré l'application du champ magnétique.

	Ha	φ	\overline{Nu}	\overline{Sh}	U_{max}	W_{max}	$ \psi_{nf} _{max}$	$ \psi_{nf} _{min}$
N=2	0	0.05	5.161	17.260	75.214	118.703	20.327	3.355
	50	0.05	4.222	15.519	50.9718	71.345	12.703	2.876
	100	0.05	3.061	13.041	33.2902	45.574	5.779	2.468

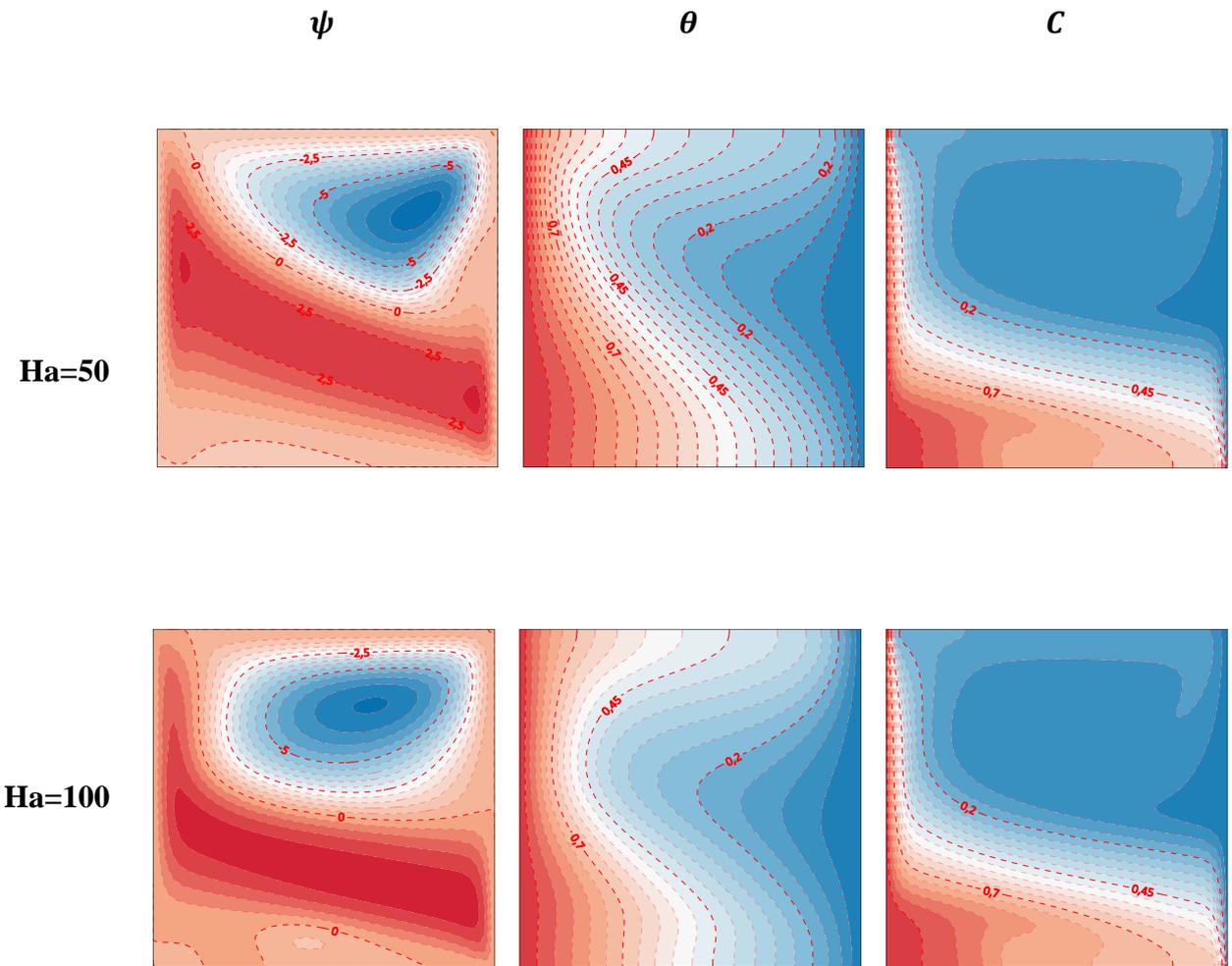
Tableau (IV.5) : Caractéristiques de l'écoulement pour différents paramètres de Ha pour $Ra=10^6$, $\varphi=0.05$ et $N=2$ (champ magnétique radial).

	Ha	φ	\overline{Nu}	\overline{Sh}	U_{max}	W_{max}	$ \psi_{nf} _{max}$	$ \psi_{nf} _{min}$
N=2	50	0.05	3.015	17.063	31.901	73.791	7.324	3.093
	100	0.05	2.295	16.0185	16.974	68.600	2.130	2.295

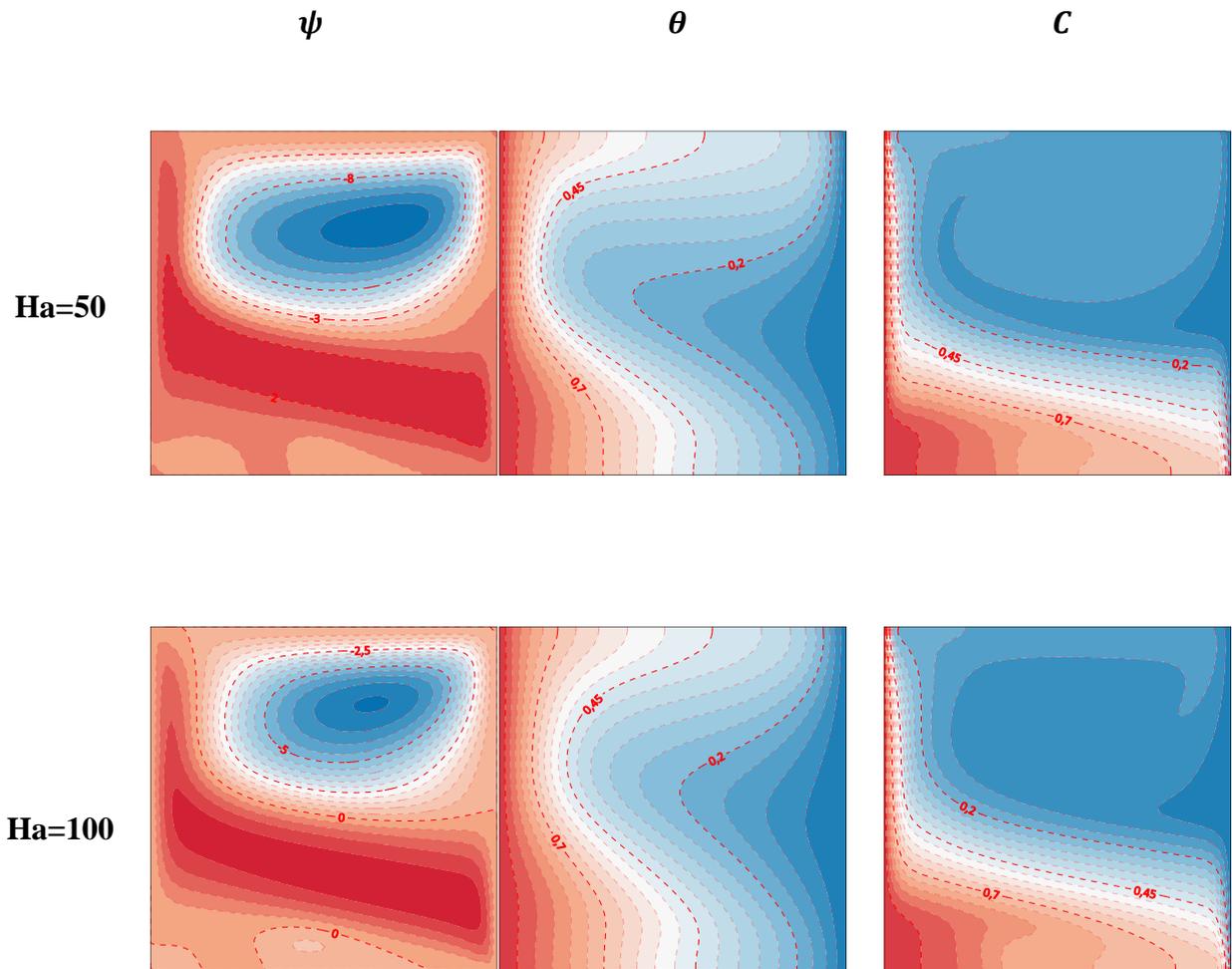
Tableau (IV.6) : Caractéristiques de l'écoulement pour différents paramètres de Ha pour $Ra=10^6$, $\varphi=0.05$ et $N=2$ (champ magnétique axial).



Figures (IV.5) : Lignes de courants, isothermes et iso-concentrations pour de $Ra=10^6$, $Ha=0$, $\varphi=0.05$ et $N=2$.



Figures (IV.6) : Lignes de courants, isothermes et iso-concentrations pour $Ra=10^6$, $\varphi= 0.05$ et $N=2$ et pour différents nombres de Ha (champ magnétique radial).



Figures (IV.7) : Lignes de courants, isothermes et iso-concentrations pour $Ra=10^6$, $\varphi=0.05$ et $N=2$ et pour différents nombres de Ha (champ magnétique axial).

	Ha=0	Ha=25	Ha=50	Ha=75	Ha=100
$ \psi_{max} $ (radial)	11.503	8.488	4.408	2.640	1.480
$ \psi_{max} $ (axial)	11.503	9.328	3.557	1.881	1.080

Tableau (IV.7) : Fonctions de courants maximales et minimales pour différents nombres de Ha .

La figure (IV.8) présente les variations de Nusselt \overline{Nu} et de Sherwood \overline{Sh} en fonction du nombre de Hartmann pour $Ra=10^6$. On remarque d'après cette figure que \overline{Nu} et \overline{Sh} sont des fonctions décroissantes de nombre de Hartmann Ha indiquant que l'application du champ magnétique est un moyen efficace pour réduire les taux de transfert de chaleur et de matière. De plus, il est clair que le champ magnétique radiale est moins efficace que le champ magnétique axial.

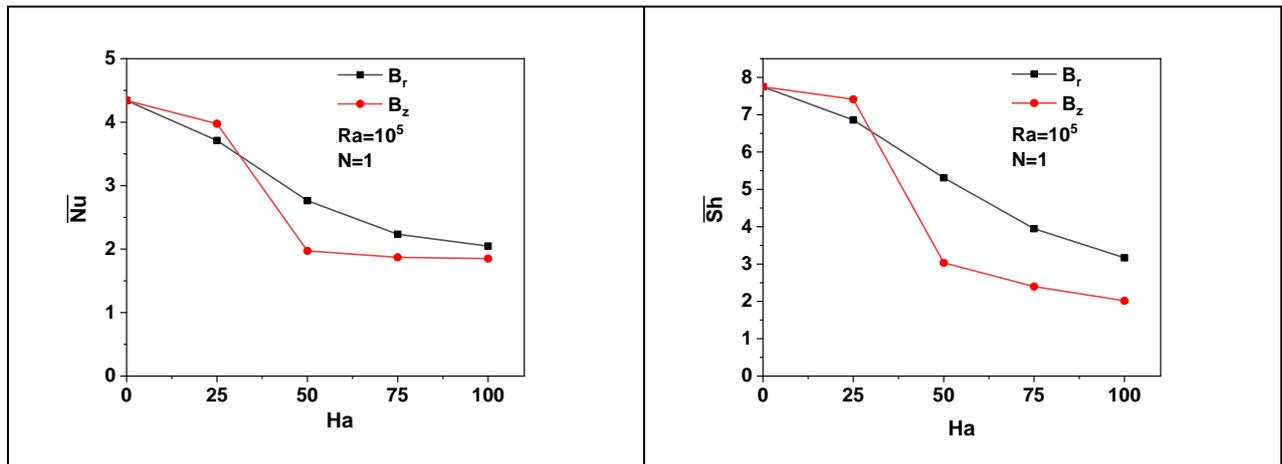


Figure (IV.8) : Effet du nombre de Ha sur les nombres de Nusselt moyen \overline{Nu} et de Sherwood moyen \overline{Sh} pour $Ra=10^5$ et $N=1$.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'étude numérique de la convection à double diffusion d'un nanofluide ($\text{Al}_2\text{O}_3/\text{eau}$) contenu entre deux cylindres coaxiaux verticaux avec la présence d'un champ magnétique externe. Les équations gouvernantes de notre problème et ses conditions aux limites sont résolues par la méthode des volumes finis.

Les résultats sont divisés en deux parties :

En absence du champ magnétique et pour des nombres de Rayleigh Ra élevés, le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} augmente jusqu'à une valeur maximale et après diminue avec l'augmentation de la fraction volumique φ . Par contre pour des valeurs faibles du nombre de Rayleigh Ra , le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} augmente d'une façon similaire à φ . En ce qui concerne le nombre de Sherwood moyen \overline{Sh} se comporte inversement avec φ .

Trois régimes d'écoulement existent, pour un rapport de N inférieur à l'unité un régime convectif est engendré sous l'effet de la force thermique. Pour N égale à l'unité une compétition entre les deux est remarquée. De plus pour un rapport de N supérieur à l'unité, le régime d'écoulement est sous l'effet de la poussée solutale.

En présence du champ magnétique axial ou radial, les nombres de Nusselt \overline{Nu} et de Sherwood \overline{Sh} moyens diminuent avec l'augmentation du nombre de Hartmann. L'application de champ magnétique est un moyen réduit de transfert de chaleur et de matière.

De plus le champ magnétique axial est plus efficace que le magnétique radial.

Références

- [1] S.U.S. Choi, Enhancing Thermal Conductivity of Fluids with Nanoparticles, ASME Fluids Engineering Division 231, pp. 99-105, 1995
- [2] Lee, J. W. and J. M. Hyun (1990). "Double-diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal temperature and concentration gradients." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33(8): 1619-1632.
- [3] Bennacer, R., A. A. Mohamad, et al. (2001). "Transient natural convection in an enclosure with horizontal temperature and vertical solutal gradients." *International Journal of Thermal Sciences* 40(10): 899-910.
- [4] Bourich, M., M. Hasnaoui, et al. (2004). "Double-diffusive natural convection in a porous enclosure partially heated from below and differentially salted." *International Journal of Heat and fluid flow* 25(6): 1034-104.
- [5] Sankar, M., M. Venkatachalappa, et al. (2006). "Effect of magnetic field on natural convection in a vertical cylindrical annulus." *International Journal of Engineering Science* 44(20): 1556-1570.
- [6] Sankar, M. and M. Venkatachalappa (2008). "Numerical Study of Double-Diffusive Magnetoconvection in a Cylindrical Annulus." *International Journal of Fluid Mechanics Research* 35(1).
- [7] Venkatachalappa, M., Y. Do, et al. (2011). "Effect of magnetic field on the heat and mass transfer in a vertical annulus." *International Journal of Engineering Science* 49(3): 262-278.
- [8] Sankar, M., B. Kim, et al. (2012). "Thermosolutal convection from a discrete heat and solute source in a vertical porous annulus." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55(15-16): 4116-4128.
- [9] Arani, A., E. Kakoli, et al. (2014). "Double-diffusive natural convection of Al₂O₃-water nanofluid in an enclosure with partially active side walls using variable properties." *Journal of Mechanical Science and Technology* 28(11): 4681-4691.
- [10] Oueslati, F., B. Ben-Beya, et al. (2014). "Numerical investigation of thermosolutal natural convection in a rectangular enclosure of an aspect ratio four with heat and solute sources." *Heat and Mass Transfer* 50(5): 721-736.
- [11] Battira, M. and R. Bessaïh (2015). "Radial and axial magnetic fields effects on natural convection in a nanofluid-filled vertical cylinder." *Journal of Applied Fluid Mechanics* 9(1): 407-418.
- [12] Matin, M. H. and S. Vaziri (2016). "Natural convection of a nanofluid inside a vertical circular enclosure exposed to a non-uniform heat flux." *International Communications in Heat and Mass Transfer* 76: 337-347.

- [13] Medebber, M. A. and N. Retiel (2017). Numerical study of double diffusive convection within the annular region of two concentric vertical cylinders. Defect and Diffusion Forum, Trans Tech Publ.
- [14] Pushpa, B., B. Prasanna, et al. (2017). Numerical study of double-diffusive convection in a vertical annular enclosure with a baffle. Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing.
- [15] MEDEBBER, M. A., N. RETIEL, et al. "Étude numérique du couplage de la convection libre avec le transfert de masse dans une cavité cylindrique verticale annulaire."
- [16] Sammouda, M. and K. Gueraoui (2021). "MHD Double Diffusive Convection of Al₂O₃-Water Nanofluid in A Porous Medium Filled an Annular Space Inside Two Vertical Concentric Cylinders with Discrete Heat Flux." Journal of Applied Fluid Mechanics 14(5): 1459-1468.
- [17] Ghasemi, B., S. Aminossadati, et al. (2011). "Magnetic field effect on natural convection in a nanofluid-filled square enclosure." International Journal of Thermal Sciences 50(9): 1748-1756.
- [18] (Maxwell 1873; Maxwell 1904). Gelfgat, A. Y. and P. Bar-Yoseph (2001). "The effect of an external magnetic field on oscillatory instability of convective flows in a rectangular cavity." Physics of Fluids 13(8): 2269-2278.
- [19] Choukairy, K., R. Bennacer, et al. (2006). "Transient behavior inside a vertical cylindrical enclosure heated from the side walls." Numerical Heat Transfer, Part A: Applications 50(8): 773-785.
- [20] CORCIONE, Massimo, HABIB, Emanuele, et QUINTINO, Alessandro. A two-phase numerical study of buoyancy-driven convection of alumina–water nanofluids in differentially-heated horizontal annuli. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, vol. 65, p. 327- 338.
- [21] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, New York, 1980.
- [22] MOREGA, A. M. and T. NISHIMURA (1996). "Double diffusive convection by a chebyshev." Technol Rep Yamaguchi Univ 5(5): 259-276.