الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Variations sur les systèmes d'équations aux différences autonomes

Préparé par : Niâma Mokrani

Soutenue devant le jury

Smail Kaouache	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Yacine Halim	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Abdelghafour Bazeniar	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire : 2021/2022

Remerciements

Mes remerciements vont premièrement à Allah le tout puissant pour la volonté, la santé et le courage qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Mes premières remerciements vont certainement à **Dr. Halim Yacine** Pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils durant toute la période du travail accordées et vraiment je suis très honorée qu'il était mon encadreur.

Nous remercions également les membres de jury **Dr. Smail Kaouache** pour avoir accepté de présider et **Dr. Abdelghafour Bazeniar** pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Et je n'oublie pas de remercier chaleureusement tous les membres de département de mathématiques. Merci beaucoup pour tous vos efforts.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, un chaleureux merci a tous les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail, et en particulier mes parents Pour leur soutien infini.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة معادلة فروق وجملة معادلات فروق غير خطية أين نقوم بعرض الحلول بصيغتها الصريحة للجملة ودراسة تقارب الحلول بالنسبة للمعادلة.

في الفصل الأول قدمنا بعض التعاريف و النظريات الرئيسية المتعلقة بنظرية معادلات الفروق بالإضافة إلى دارسة مفصلة لمتتالية الأعداد المتوازنة .

الفصل الثاني تمحور حول دراسة وحل جملة معدلات فروق من الرتب العليا، حيث تم إعطاء صيغة الحلول بدلالة الأعداد المتوازنة.

الفصل الثالث والأخير خصص لدراسة تقارب الحلول لمعادلة فروق من الرتبة الثانية، أين قمنا بدراسة تقارب الحلول ووجود الحلول الدورية.

الكلمات الأساسية: جمل معادلات الفروق، صيغة الحلول، الاستقرار، الدورية، متتالية الأعداد المتوازنة.

Abstract

The main objective of this work is to study a system of non linear difference equations and a difference equation where we present the explicit form of the solution to the system and study the convergence of solutions to equation.

In the first chapter, we give the definitions of differences equations theory, moreover we study the Balancing sequence.

In the second chapter, we give the explicit forme of the solution of a high-order non linear difference equation in terms of Balancing sequences.

In the last chapter, we study the convergence of the solution of a second-order differences equations.

Keywords : Systems of difference equations, form of solutions, stability, periodicity, Balancing sequence.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude d'une équation aux différences et un système d'équations aux différence non-linéaires où nous présentons la forme explicite de la solution du système et étudions la convergence des solutions pour l'équation.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions et théorèmes principaux pour la théorie d'équation aux différences, en plus nous présentons la suite de Balancing.

Le deuxième chapitre consiste à la forme des solution d'un système d'équations aux différence d'ordre supérieur, ou la solution est donné en fonction des nombres de Balancing.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la convergence des solution d'une équations aux différences d'ordre deux.

Mots-clés : Système d'équations aux différences, forme des solutions, stabilité, périodicité, suite de Balancing.

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de trouver la forme de la solution d'un système d'équations aux différences et l'étude de convergence des solutions d'une equation aux différences non linéaire.

Les équations aux différences (ou suites récurrentes comme certains l'appellent) c'est la base de l'analyse appliquée qui a émergé il y a plus de trois siècles. Le plus célèbre exemple de cette équation est la suite de Fibonacci, qui modélise le ≪problème des lapins≫, qui est apparu dans le livre " Liber Abaci " de Leonardo Fibonacci en 1202 [9]. La théorie des équations aux différences est progressé grâce aux plusieurs mathématiciens tel, De Moivre, Lagrange, Poincaré et autres.

La théorie des équations aux différences continue d'attiré toujours l'attention des chercheurs dans diverses branches de la science, et alors sont devenues un outil de valeur et ont beaucoup d'importance dans plusieurs domaines et disciplines scientifiques et ceci par leurs nombreuses applications dans les sciences appliquées telles que l'économie ([8]), la biologie([2]), la théorie des probabilités, l'écologie et la médecine,...etc.

En plus de l'introduction, le mémoire est structuré en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons des définitions et résultats généraux sur les équations et les systèmes d'équations aux différences, la deuxième partie de ce chapitre est dédiée à l'étude de la suite de Balancing.

Dans le deuxième chapitre, nous divisons notre travail en trois parties, nous nous intéressons dans la première partie à la forme générale de la solution du système d'équations aux différences d'ordre un suivante

$$x_{n+1} = \frac{1}{6 - y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6 - x_n}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

avec les valeurs initiales $x_0, y_0 \in \mathbb{R} - \{6\}$. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous exprimons la forme générale de la solution du système d'équations aux différences d'ordre supérieur suivante

$$x_{n+1} = \frac{1}{6 - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6 - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

avec les valeurs initiales $x_{-k}, .., x_0, y_{-k}, .., y_0 \in \mathbb{R} - \{6\}$, et la solution est donnée en fonction des nombres de Balancing, nous étudions également la stabilité asymptotique globale des points d'équilibres de ce système. Dans la dernière partie nous présentons des exemples numériques.

Dans le dernier chapitre, motivé par [18], nous étudions l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n}, \; x_{-1}, \; x_0 > 0, \; n = 0, 1, 2 \ldots$$

On preuve les résultats concernant la convergence des solutions et la périodicité. Enfin, on donne des exemples pour illustrer les résultats obtenus.

Chapitre 1

Quelques préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques préliminaires qui nous seront utiles pour la suite de notre mémoire. Dans la première partie, on présente quelques définitions et résultats généraux équations et les systèmes d'équations aux différences.
La dernière partie regroupe des définitions et quelques propriétés de la suite de Balancing.

1.1 Équations aux différences

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I^{k+1} \to I$ une fonction bien définie.

Définition 1.1.1 *Une équation aux différences d'ordre* $(k+1)$ *est une équation de la forme*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \cdots, \; k \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

avec les valeurs initiales $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k} \in I$.

Définition 1.1.2 *Une équation aux différences de la forme*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = g(n), \tag{1.2}$$

avec $p_0(n) = 1, \quad p_1(n), p_2(n), \ldots, g(n)$ *sont des fonctions définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}$, *s'appelle* ***équation aux différences linéaire*** *d'ordre k dés que* $p_k(n) \neq 0$.

Remarque 1.1.1 *En générale on associe k conditions initiales avec l'équation* (1.2)

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k, \tag{1.3}$$

avec c_i, $i = 1, \ldots, k$ *sont des constantes réelles ou complexes.*

Définition 1.1.3 *L'équation aux différences* (1.2) *avec* $g(n) = 0, \forall n \geq n_0$ *est dite équation aux différences linéaire* ***homogène*** *et elle s'écrit comme suit*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0. \tag{1.4}$$

Définition 1.1.4 *Une suite* $\{u_n\}_{n\geq n_0}$ *est dite* ***solution*** *de l'équation* (1.1) *avec les conditions initiales* (1.3) *si elle satisfait la relation* (1.1).

Corollaire 1.1.1 *Soit*

$$(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}, \tag{1.5}$$

un ensemble fondamentale de solutions de l'équation (1.4). *Alors la solution générale de* (1.4) *est donné par*

$$x_n = \sum_{i=0}^{k} a_i x_n^i,$$

avec a_i *sont des constants arbitraires.*

Définition 1.1.5 *Si les* $p_i(n)$ *sont des constants réels ou complexes, l'équation* (1.2) *est dite équations aux différences linéaire à coefficients constants et elle prend la forme*

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n = 0. \tag{1.6}$$

1.1.1 Résolution de l'équation aux différences linéaire à coefficient constante

Proposition 1.1.1 *L'équation (1.6) a des solutions de la forme*

$$x(n) = \lambda^n,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et vérifie

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0. \tag{1.7}$$

Définition 1.1.6 *Le polynôme*

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i},$$

*s'appelle **le polynôme caractéristique** associé à l'équation (1.6).*

Corollaire 1.1.2 *La solution générale de l'équation (1.6) s'écrit*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, \; c_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Où

- *Le paramètre $s \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique (1.7).*
- *Le paramètre λ_i désigne une racine de l'équation caractéristique (1.7).*
- *Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i.*

- *Les coefficients $c_{i,j}$ sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.*

Définition 1.1.7 (Point d'équilibre) *Un point $\bar{x} \in I$ est dit point d'équilibre pour l'équation* (1.1) *si*

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}),$$

autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \quad \forall n \geq -k.$$

1.1.2 A propos de la stabilité

Le concept de stabilité comme celui de périodicité est au cœur de notre étude.

Dans ce paragraphe nous allons présenter les points essentielles de cette donnée qui vont nous servir dans la suite.

Définition 1.1.8 *Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (1.1).

1. *$\bar{x}$ est dit* **localement stable** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \delta,$$

   alors

$$\mid x_n - \bar{x} \mid < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

2. *$\bar{x}$ est dit* **localement asymptotiquement stable** *si*

   •*$\bar{x}$ est localement stable,*

   •$\exists \gamma > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \gamma$, *alors*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

3. *$\bar{x}$ est dit* **globalement attractif** *si*

$$\forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I, \lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

4. *$\bar{x}$ est dit* **globalement asymptotiquement stable** *si*

   •*$\bar{x}$ est localement stable,*

   •*$\bar{x}$ est globalement attractif.*

5. *Le point $\bar{x}$ est dit* **instable** *s'il est non localement stable.*

Définition 1.1.9 *On appelle* **équation aux différences linéaire associée** *à l'équation* (1.1) *l'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k}, \tag{1.8}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}), i = 0, \cdots, k.$$

Et

$$\begin{aligned} f : \quad & I^{k+1} && \longrightarrow I \\ & (u_0, \ldots, u_k) && \longmapsto f(u_{0nnn}, \ldots, u_k). \end{aligned}$$

Théorème 1.1.1 (Stabilité par linéarisation)[15]

1. *Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ de l'équation* (1.1) *est asymptotiquement stable.*

2. *Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ de l'équation* (1.1) *est instable.*

Théorème 1.1.2 (Théorème de Clark) [15] *Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation* (1.1) *est*

$$| p_0 | + | p_1 | + \cdots + | p_k |< 1.$$

Théorème 1.1.3 (Théorème de Rouché) [11] *Soient ψ, ϕ deux fonctions holomorphes dans un ouvert Ω du plan complexe $\mathbb{C}$, et soit K un compact à bord contenu dans Ω. Si on a*

$$\left|\phi(z)\right| < \left|\psi(z)\right|, \ \forall\, z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de $\psi + \phi$ dans K est égal au nombre de zéros de ψ dans K, où ∂K est le bord de K.

1.1.3 Systèmes d'équations aux différences

Soient $f^{(i)}$, pour $i = 1, 2, \ldots, p$, des fonctions continûment différentiables

$$f^{(i)} : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1} \to I_i^{k+1},$$

où I_i sont des intervalles réels.

Considérons le système d'équations aux différences

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1}^{(1)} & = & f_1\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right), \\ x_{n+1}^{(2)} & = & f_2\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right), \\ & \vdots & \\ x_{n+1}^{(q)} & = & f_q\left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right), \end{array}\right. \tag{1.9}$$

où $n, k, p, q \in \mathbb{N}_0$, $p \leq q$ et $\left(u_{-k}^{(i)}, u_{-k+1}^{(i)}, \ldots, u_0^{(i)}\right) \in I_i^p$.

Définissons la fonction

$$F : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1} \longrightarrow I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1} \tag{1.10}$$

par

$$F(W) = \Big(f_0^{(1)}(W), f_1^{(1)}(W), \ldots, f_k^{(1)}(W), f_0^{(2)}(W), f_1^{(2)}(W), \ldots,$$

$$f_k^{(2)}(W), \ldots, f_0^{(p)}(W), f_1^{(p)}(W), \ldots, f_k^{(p)}(W)\Big),$$

avec

$$W = \left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_k^{(2)}, \dots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \dots, u_k^{(p)}\right)^t,$$

$$f_0^{(i)}(W) = f^{(i)}(W), \quad f_1^{(i)}(W) = u_0^{(i)}, \quad \dots, f_k^{(i)}(W) = u_{k-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Posons,

$$W_n = \left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}\right)^T.$$

Ainsi, le système (1.9) est équivalent au système

$$W_{n+1} = F(W_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1.11}$$

c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{lcl}
x_{n+1}^{(1)} & = & f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots\dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}\right), \\
x_n^{(1)} & = & x_n^{(1)}, \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(1)} & = & x_{n-k+1}^{(1)}, \\
x_{n+1}^{(2)} & = & f^{(2)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots\dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}\right), \\
x_n^{(2)} & = & x_n^{(2)} \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(2)} & = & x_{n-k+1}^{(2)}, \\
 & \vdots & \\
x_{n+1}^{(p)} & = & f^{(p)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \dots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \dots, x_{n-k}^{(2)}, \dots\dots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \dots, x_{n-k}^{(p)}\right), \\
x_n^{(p)} & = & x_n^{(p)}, \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(p)} & = & x_{n-k+1}^{(p)},
\end{array}\right. .$$

Définition 1.1.10 (Point d'équilibre)

1. *Un point* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(p)}})$ *est dit point d'équilibre pour le système* (1.9) *si*

$$\begin{cases} \overline{x^{(1)}} & = f^{(1)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\ \overline{x^{(2)}} & = f^{(2)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\ & \vdots \\ \overline{x^{(p)}} & = f^{(p)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right). \end{cases}$$

2. *Un point*

$$\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1},$$

est un point d'équilibre du système (1.11) *si*

$$\overline{W} = F(\overline{W}).$$

Définition 1.1.11 (Périodicité) *Une solution* $\left\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}\right\}_{n \geq -k}$ *du système* (1.9) *est dite* **éventuellement périodique** *de période* $s \in \mathbb{N}_0$ *si*

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+s}^{(i)} = x_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Si $N = -k$*, on dit que la solution est* **périodique** *de période s.*

Définition 1.1.12 *Soient* $\overline{W}$ *un point d'équilibre du système* (1.11) *et* $\| \,.\, \|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$.

1. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit stable (ou localement stable) si pour chaque* $\epsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\| W_0 - \overline{W} \| < \delta$ *implique* $\| W_n - \overline{W} \| < \epsilon$ *pour* $n \geq 0$.

2. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable et s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que* $\| W_0 - \overline{W} \| < \gamma$ *implique*

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \overline{W}.$$

3. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attraction l'ensemble* $G \subseteq I_1^{(k+1)} \times I_2^{(k+1)} \times \ldots \times I_p^{(k+1)}$*), si pour chaque* W_0

(respectivement, pour chaque $W_0 \in G$),

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \overline{W}.$$

4. *Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) si il est localement stable, et si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$),*

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \overline{W}.$$

5. *Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Remarque 1.1.4
Il est clair que $\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_p$ *est un point d'équilibre du système* (1.9) *si et seulement si* $\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \ldots \times I_p^{k+1}$ *est un point d'équilibre du système* (1.11).

Définition 1.1.13 *On appelle* **système linéaire associée** *au système* (1.11) *autour du point d'équilibre*

$$\overline{W} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right)$$

le système

$$W_{n+1} = JW_n,\ n = 0, 1, \ldots$$

où J est la matrice Jacobienne de la fonction F au point d'équilibre $\overline{W}$, donnée par

$$J = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}}
\end{pmatrix}.$$

Théorème 1.1.5 (Stabilité par linéarisation) [15]

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne J sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (1.11) est localement asymptotiquement stable.*

2. *Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne J a un module strictement supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (1.11) est instable.*

1.2 Les nombres de Balancing

Cette deuxième partie regroupe des définitions et quelques propriétés et applications de la suite de Balancing (ou la suite d'équilibrage).

1.2.1 Introduction

Le concept de nombres de Balancing (Balancing number en anglais) ou les nombre d'équilibrage apparaissent pour la premier fois par Behera et Panda [3] en 1998. Il consiste à trouvé le nombre naturel n pour certain nombre naturel r, tel que

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+r). \tag{1.12}$$

Si la paire $(n, r) \in \mathbb{Z}^+$ est une solution de l'équation (1.12), alors n est appelé le nombre d'équilibrage et r appelé le balancer associé à n, ce qui est définie sous le relation $r = \frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+1}}{2}$, par exemple $6, 35$ *et* 204 sont des nombres Balancing dont les balancer sont respectivement $2, 14$ *et* 84. Il est également prouvé, et nous expliquons l'exemple dans le dessin correspondant. La suite de Balancing a été étudiée en profondeur et généralisée de nombreuses façons Dans [17].

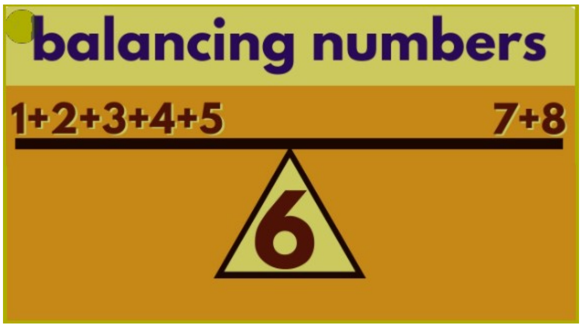

FIGURE 1.1 – Le nomber de Balancing pour $n = 6$, et $r = 2$.

Les nombres Balancing et comment les trouver a été utilisé comme méthode pour enseigner aux enfants à partir de l'âge de cinq ans et les encourager à apprendre des combinaisons, des modèles de soustraction et des compétences pour voir comment équilibrer les équations. Ainsi que la multiplication, la division et l'équilibrage des équations chimiques. C'est un excellent moyen de commencer votre voyage d'apprentissage de l'algèbre à travers des jeux d'algèbre qui rendent l'apprentissage amusant Et ce n'est pas menacé.

Pour normaliser la notation au même titre que les Fibonacci, nous renommons les

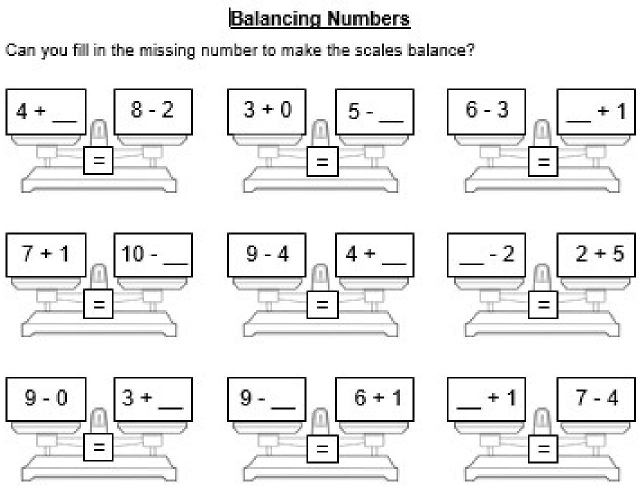

FIGURE 1.2 – Feuille de travail sur les nombres de Balancing

nombres Balancing en fixant $B_0 = 0$, $B_1 = 1$ et $B_2 = 6$, etc.

1.2.2 La formule de Binet de la suite de Balancing

Définition 1.2.1 *[3] La suite de Balancing est la suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$B_{n+2} = 6B_{n+1} - B_n, \quad B_0 = 0, \; B_1 = 1. \tag{1.13}$$

Soit la suite de Balancing

$$B_{n+2} - 6B_{n+1} + B_n = 0, \quad \textit{avec } B_0 = 0 \textit{ et } B_1 = 1. \tag{1.14}$$

L'équation caractéristique de (1.14)est

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

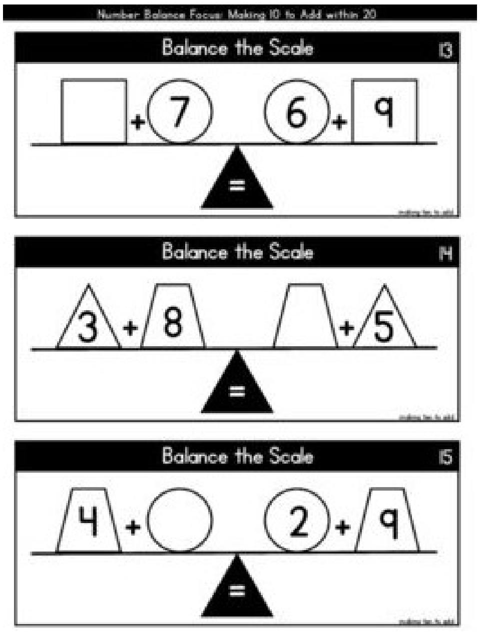

FIGURE 1.3 – Feuille de travail sur les nombres de Balancing

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

La solution générale de l'équation (1.14) s'écrit

$$B_n = c_1\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n, \tag{1.15}$$

utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad c_2 = \frac{-\sqrt{2}}{8},$$

d'ou

$$B_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n + \frac{-\sqrt{2}}{8}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n. \tag{1.16}$$

Définition 1.2.2 *La formule (1.16) est dite La formule de Binet de la suite de Balancing. Autrement dit :*

$$B_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

avec

$$\alpha = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \beta = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Remarque 1.2.1 *les nombers α et β vérifiant les égalité suivants*

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 6, \\ \alpha - \beta &= 4\sqrt{2}, \\ \alpha\beta &= 1, \\ 1/\alpha &= \beta. \end{aligned}$$

1.2.3 Propriétés des nombres de Balancing

Proposition 1.2.1 *Soit $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Blancing. Donc on a les identités suivants :*

i) ***L'identité de Cassini :*** *Pour $n > 0$, on a*

$$B_{n-1}B_{n+1} - B_n^2 = -1. \tag{1.18}$$

ii) ***L'identité d'Ocagne :*** *Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a*

$$B_{n+r}B_{n+1} - B_{n+r+1}B_n = B_r. \tag{1.19}$$

iii) ***L'identité de Johnson :*** *Pour* $k, l, m, netr \in \mathbb{N}$, *tels que* $k + l = m + n$,

$$B_k B_l - B_m B_n = B_{k-r} B_{l-r} - B_{m-r} B_{n-r}. \tag{1.20}$$

iv) ***L'identité de Catalan :*** *Pour* $n, r \in \mathbb{N}$, *on a*

$$B_n^2 - B_{n+r} B_{n-r} = B_r^2. \tag{1.21}$$

Preuve.

i) L'identité de Cassini : Pour tout $n \geq 1$, posons $w_n = B_{n-1}B_{n+1} - B_n^2$.

Tout d'abord

$$w_1 = B_0 B_2 - B_1^2 = -1.$$

Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= B_n B_{n+2} - B_{n+1}^2, \\ &= B_n(-6B_{n+1} + B_n) - B_{n+1}(-6B_n + B_{n-1}), \\ &= B_n^2 - B_{n+1}B_{n-1}, \\ &= w_n. \end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de premier terme $w_1 = -1$ et de raison 1. Il en découle $w_n = -1(1)^{n-1} = -1$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire

$$B_{n-1}B_{n+1} - B_n^2 = -1.$$

ii) L'identité d'Ocagne : Pour tout $n \geq 0$, posons $w_n = B_{n+r}B_{n+1} - B_{n+r+1}B_n$.

Tout d'abord

$$w_0 = B_r B_1 - B_{r+1} B_0 = B_r.$$

Pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= B_{n+r+1}B_{n+2} - B_{n+r+2}B_{n+1}, \\
&= B_{n+r+1}(6B_{n+1} - B_n) - (6B_{n+r+1} - B_{n+r})B_{n+1}, \\
&= -B_{n+r+1}B_n + B_{n+r}B_{n+1}, \\
&= w_n.
\end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de premier terme $w_0 = B_r$ et de raison 1. Il en découle $w_n = B_r(1)^n = B_r$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire

$$B_{n+r}B_{n+1} - B_{n+r+1}B_n = B_r.$$

iii) L'identité de Johnson : Pour k, l, m, n *et* $r \in \mathbb{N}$, tels que $k + l = m + n$.

De (1.17), on a

$$\begin{aligned}
B_kB_l - B_mB_n &= \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^l - \beta^l}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right), \\
&= \frac{\alpha^{k+l} - \alpha^k\beta^l - \alpha^l\beta^k + \beta^{k+l} - \alpha^{m+n} + \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m - \beta^{m+n}}{(\alpha - \beta)^2}, \\
&= \frac{-\alpha^k\beta^l - \alpha^l\beta^k + \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m}{(\alpha - \beta)^2}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
(1)^r\left(B_{k-r}B_{l-r} - B_{m-r}B_{n-r}\right) &= (1)^r\left(\frac{\alpha^{k-r} - \beta^{k-r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{l-r} - \beta^{l-r}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right), \\
&= \frac{(\alpha\beta)^r}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^{k+l-2r} - \alpha^{k-r}\beta^{l-r} - \alpha^{l-r}\beta^{k-r} + \beta^{k+l-2r} - \alpha^{m+n-2r} \\
&+ \alpha^{m-r}\beta^{n-r} + \alpha^{n-r}\beta^{m-r} - \beta^{m+n-2r}), \\
&= \frac{-\alpha^k\beta^l - \alpha^l\beta^k + \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m}{(\alpha - \beta)^2}, \\
&= B_kB_l - B_mB_n.
\end{aligned}$$

Donc

$$B_kB_l - B_mB_n = (1)^r(B_{k-r}B_{l-r} - B_{m-r}B_{n-r}) = B_{k-r}B_{l-r} - B_{m-r}B_{n-r}.$$

iv) L'identité de Catalan :

Pour $n, r \in \mathbb{N}$. De (1.17), on a

$$\begin{aligned}
B_n^2 - B_{n+r}B_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right), \\
&= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r} - \alpha^{n-r}\beta^{n+r} + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2}\right), \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta) - \alpha^{2n} + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r} - \beta^{2n}\right), \\
&= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\left(-2(\alpha\beta)^n + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r}\right), \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\left(-2 + \alpha^r\beta^{-r} + \alpha^{-r}\beta^r\right), \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\left(-2 + \frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r}\right), \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}\left(-2 + \frac{(\alpha^r - \beta^r)^2}{(\alpha\beta)^r}\right), \\
&= (\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{(\alpha - \beta)}\right)^2, \\
&= B_r^2.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.2.1 *Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Balancing et B_n le n-ème nombre de Balancing . Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{2n+1}}{B_{2n}} = \alpha,$$

avec $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$.

Preuve. De (1.17), on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{B_{2n+1}}{B_{2n}} &= \frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha^{2n}-\beta^{2n}},\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}(\alpha-\beta(\frac{\beta}{\alpha})^{2n}}{\alpha^{2n}(1-(\frac{\beta}{\alpha})^{2n}},\\
&= \alpha \quad \left(Car \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2n} = 0\right).
\end{aligned}$$

■

Chapitre 2

La solution d'un système d'équations aux différences d'ordre supérieurs en terme des nombres de Balancing

On rappelle que les résultats de ce chapitre ont fait par nous.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la forme générale de la solution du système d'équations aux différences non linéaires d'ordre supérieur suivant

$$x_{n+1} = \frac{1}{6 - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6 - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

avec les valeurs initiales $x_{-k}, \ldots, x_0, y_{-k}, \ldots, y_0 \in \mathbb{R} - \{6\}$, et la solution est donnée en fonction des nombres de Balancing.

Pour trouver la forme de solution du système (2.1), nous considérons le système d'équations aux différences d'ordre un suivant

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6 - y_n^{(j)}}, \quad y_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6 - x_n^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

avec les valeurs initiales $x_0^{(j)}, y_0^{(j)} \in \mathbb{R} - \{6\}$,

2.2 Forme de solution du système du premier ordre

Nous rappelons que B_n est le n-ème nombre de Balancing, qui vérifie la relation de récurrence

$$B_{n+2} = 6B_{n+1} - B_n, \quad B_0 = 0, B_1 = 1.$$

2.2.1 Forme de solution

Pour trouver la forme de solution du système (2.2) nous aurons besoin de trois lemmes suivants.

Lemme 2.2.1 *On considère l'équation aux différences linéaire*

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

avec les valeurs initiales y_0 et $y_1 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de l'équation (2.3) sont écrits sous la forme

$$y_n = -y_0 B_{n-1} + y_1 B_n.$$

Preuve. L'équation caractéristique de l'équation (2.3) est donnée par

$$\varphi^2 - 6\varphi + 1 = 0. \tag{2.4}$$

Qui a deux racines réels α, β où $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$.
Donc la solution générale de (2.3) est donnée par

$$y_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n. \tag{2.5}$$

Pour trouver c_1 et c_2, on utilise les conditions initiales y_0 et y_1, c'est-à-dire

$$c_1 + c_2 = y_0 \quad \text{et} \quad c_1 r_1 + c_2 r_2 = y_1.$$

On va écrire le système sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer on obtient,

$$c_1 = \frac{y_0\beta - y_1}{\beta - \alpha}, \quad c_2 = \frac{y_1 - y_0\alpha}{\beta - \alpha}.$$

On remplace c_1 et c_2 dans (2.5) on obtient :

$$y_n = y_0 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{-(\alpha - \beta)} + y_1 \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Alors

$$y_n = -y_0 B_{n-1} + y_1 B_n. \tag{2.6}$$

■

Lemme 2.2.2 *On considère l'équation aux différences linéaires suivant*

$$S_{n+2} + 6S_{n+1} + S_n = 0. \tag{2.7}$$

Avec les valeurs initiales S_0 et $S_1 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de l'équation (2.7) *écrits sous* *la forme.*

$$S_n = (-1)^n (S_0 B_{n-1} + S_1 B_n).$$

Preuve.

L'équation caractéristique de l'équation (2.7) est

$$\varphi^2 + 6\varphi + 1 = 0.$$

Qui est à deux racines réels r_1, r_2 où

$$r_1 = -\alpha, \quad r_2 = -\beta,$$

tel que α, β sont les racines de l'équation (2.4). Donc la solution générale de (2.7) est donnée par

$$S_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \tag{2.8}$$

Pour trouver c_1 et c_2, on utilise les conditions initiales S_0 et S_1, c'est-à-dire

$$c_1 + c_2 = S_0, \quad c_1 r_1 + c_2 r_2 = S_1.$$

On va écrire le système sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer on obtient

$$c_1 = \frac{S_0 r_2 - S_1}{r_2 - r_1}, \quad c_2 = \frac{S_1 - S_0 r_1}{r_2 - r_1}.$$

On remplace c_1 et c_2 dans (2.8) on obtient :

$$S_n = S_0 \frac{(-\alpha)^{n-1} - (-\beta)^{n-1}}{-((-\alpha) - (-\beta))} + S_1 \frac{(-\alpha)^n - (-\beta)^n}{(-\alpha) - (-\beta)}.$$

Alors

$$S_n = (-1)^n (S_0 B_{n-1} + S_1 B_n). \tag{2.9}$$

■

Lemme 2.2.3 *On considère le système d'équations aux différences linéaires, suivant*

$$t_{n+2} = 6p_{n+1} - t_n, \quad p_{n+2} = 6t_{n+1} - p_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.10}$$

Avec les valeurs initiales t_0, t_1, p_0 et $p_1 \in \mathbb{R}$. Alors touts les solutions de ce système sont écrit sous la forme.

$$\begin{cases} t_{2n} = -p_0 B_{2n-1} + t_1 B_{2n}, \quad t_{2n+1} = -t_0 B_{2n} + p_1 B_{2n+1}, \\ p_{2n} = -t_0 B_{2n-1} + p_1 B_{2n}, \quad p_{2n+1} = -p_0 B_{2n} + t_1 B_{2n+1}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Preuve. Du système (2.10), on obtient le système suivant

$$t_{n+2} + p_{n+2} = 6p_{n+1} - t_n + 6t_{n+1} - p_n, \tag{2.12}$$

$$t_{n+2} - p_{n+2} = 6p_{n+1} - t_n - 6t_{n+1} + p_n. \tag{2.13}$$

Alors

$$t_{n+2} + p_{n+2} = 6(p_{n+1} + t_{n+1}) - (t_n + p_n), \quad t_{n+2} - p_{n+2} = -6(t_{n+1} - p_{n+1}) - (t_{n+} - p_n). \tag{2.14}$$

En posant les changements des variable suivantes :

$$R_n = t_n + p_n, \quad S_n = t_n - p_n. \tag{2.15}$$

En effet, le système (2.14) devient

$$R_{n+2} = 6R_{n+1} - R_n, \quad S_{n+2} = -6S_{n+1} - S_n. \tag{2.16}$$

Ainsi, au lieu de système (2.14), on étudiera le système (2.16)

$$R_{n+2} = 6R_{n+1} - R_n, \tag{2.17}$$

$$S_{n+2} = -6S_{n+1} - S_n. \tag{2.18}$$

Il est évident que l'équation (2.3) et (2.17) sont les mêmes. Donc d'après Lemme (2.2.1) on a

$$R_n = -R_0 B_{n-1} + R_1 B_n.$$

De même l'équation (2.7) et l'équation (2.18) sont les mêmes. Donc d'après le Lemme (2.2.2) on a

$$S_n = (-1)^n (S_0 B_{n-1} + S_1 B_n). \tag{2.19}$$

Alors

$$S_{2n} = S_0 B_{n-1} + S_1 B_n, \quad S_{2n+1} = -S_0 B_{n-1} - S_1 B_n. \tag{2.20}$$

Donc la solution du système (2.16) est écrit sous la forme

$$\begin{cases} R_{2n} = -R_0 B_{n-1} + R_1 B_n, & R_{2n+1} = -R_0 B_{n-1} + R_1 B_n, \\ S_{2n} = S_0 B_{n-1} + S_1 B_n, & S_{2n+1} = -S_0 B_{n-1} - S_1 B_n. \end{cases} \tag{2.21}$$

D'après (2.15) on a :

$$t_n = \frac{1}{2}(R_n - S_n), \quad p_n = \frac{1}{2}(R_n + S_n).$$

Donc la solution du système (2.10) est donnée par

$$t_{2n} = \frac{1}{2}(R_{2n} - S_{2n}), \quad t_{2n+1} = \frac{1}{2}(R_{2n+1} - S_{2n+1}),$$
$$p_{2n} = \frac{1}{2}(R_{2n} + S_{2n}), \quad p_{2n+1} = \frac{1}{2}(R_{2n+1} + S_{2n+1}).$$

Alors

$$t_{2n} = \frac{1}{2}\left(B_{2n-1}(-R_0 - S_0) + B_{2n}(R_1 - S_1)\right), \quad t_{2n+1} = \frac{1}{2}\left(B_{2n}(-R_0 + S_0) + B_{2n+1}(R_1 + S_1)\right),$$
$$p_{2n} = \frac{1}{2}\left(B_{2n-1}(-R_0 + S_0) + B_{2n}(R_1 + S_1)\right), \quad p_{2n+1} = \frac{1}{2}\left(B_{2n}(-R_0 - S_0) + B_{2n+1}(R_1 - S_1)\right).$$

Donc

$$\begin{cases} t_{2n} = & -p_0 B_{2n-1} + t_1 B_{2n}, \\ t_{2n+1} = & -t_0 B_{2n} + p_1 B_{2n+1}, \\ p_{2n} = & -t_0 B_{2n-1} + p_1 B_{2n}, \\ p_{2n+1} = & -p_0 B_{2n} + t_1 B_{2n+1}. \end{cases} \tag{2.22}$$

■

Pour trouver la forme des solution du système (2.2) on considère les changements des variable suivants

$$x_n^{(j)} = \frac{W_n}{U_{n+1}}, \quad y_n^{(j)} = \frac{U_n}{W_{n+1}}. \tag{2.23}$$

Donc

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{W_{n+1}}{U_{n+2}}, \quad y_{n+1}^{(j)} = \frac{U_{n+1}}{W_{n+2}}. \tag{2.24}$$

Alors

$$\frac{W_{n+1}}{U_{n+2}} = \frac{1}{6 - \dfrac{U_n}{W_{n+1}}}, \quad \frac{W_{n+1}}{U_{n+2}} = \frac{W_{n+1}}{6W_{n+1} - U_n},$$
$$\frac{U_{n+1}}{W_{n+2}} = \frac{1}{6 - \dfrac{W_n}{U_{n+1}}}, \quad \frac{U_{n+1}}{W_{n+2}} = \frac{U_{n+1}}{6U_{n+1} - W_n}.$$

Donc le système (2.2) devient

$$U_{n+2} = 6W_{n+1} - U_n, \quad W_{n+2} = 6U_{n+1} - W_n. \tag{2.25}$$

Le système (2.25) est sous la forme du système (2.10), donc d'après le Lemme (2.2.3) ses solution est sous la forme (2.11) c'est-à-dire

$$\begin{cases} U_{2n} = & -W_0 B_{2n-1} + U_1 B_{2n}, \\ U_{2n+1} = & -U_0 B_{2n} + W_1 B_{2n+1}, \\ W_{2n} = & -U_0 B_{2n-1} + W_1 B_{2n}, \\ W_{2n+1} = & -W_0 B_{2n} + U_1 B_{2n+1}. \end{cases} \tag{2.26}$$

avec B_n sont les n-éme nombre de Balancing et U_0, U_1, W_0 et W_1 sont des nombre réels.

Alors,

$$\begin{aligned} x_n^{(j)} &= \frac{W_n}{U_{n+1}}, \\ x_{2n+1}^{(j)} &= \frac{W_{2n+1}}{U_{2n+2}}, \\ &= \frac{-W_0 B_{2n} + U_1 B_{2n+1}}{-W_0 B_{2n+1} + U_1 B_{2n+2}}, \\ &= \frac{\frac{-W_0 B_{2n} + U_1 B_{2n+1}}{U_1}}{\frac{-W_0 B_{2n+1} + U_1 B_{2n+2}}{U_1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$x_{2n+1}^{(j)} = \frac{-x_0^{(j)} B_{2n} + B_{2n+1}}{-x_0^{(j)} B_{2n+1} + B_{2n+2}}.$$

Et

$$\begin{aligned} x_{2n}^{(j)} &= \frac{W_{2n}}{U_{2n+1}}, \\ &= \frac{-U_0 B_{2n-1} + W_1 B_{2n}}{-U_0 B_{2n} + W_1 B_{2n+1}}, \\ &= \frac{\frac{-U_0 B_{2n-1} + W_1 B_{2n}}{W_1}}{\frac{-U_0 B_{2n} + W_1 B_{2n+1}}{W_1}}. \end{aligned}$$

Alors

$$x_{2n}^{(j)} = \frac{-y_0^{(j)} B_{2n-1} + B_{2n}}{-y_0^{(j)} B_{2n} + B_{2n+1}}.$$

Par un calcul similaire, on trouve y_n^j. On a

$$\begin{aligned}
y_{2n+1}^{(j)} &= \frac{U_{2n+1}}{W_{2n+2}}, \\
&= \frac{-U_0 B_{2n} + W_1 B_{2n+1}}{-U_0 B_{2n+1} + W_1 B_{2n+2}}, \\
&= \frac{\dfrac{-U_0 B_{2n} + W_1 B_{2n+1}}{W_1}}{\dfrac{-U_0 B_{2n+1} + W_1 B_{2n+2}}{W_1}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$y_{2n+1}^{(j)} = \frac{-y_0^{(j)} B_{2n} + B_{2n+1}}{-y_0^{(j)} B_{2n+1} + B_{2n+2}}.$$

Et

$$\begin{aligned}
y_{2n}^{(j)} &= \frac{U_{2n}}{W_{2n+1}}, \\
&= \frac{-W_0 B_{2n-1} + U_1 B_{2n}}{-W_0 B_{2n} + U_1 B_{2n+1}}, \\
&= \frac{\dfrac{-W_0 B_{2n-1} + U_1 B_{2n}}{U_1}}{\dfrac{-W_0 B_{2n} + U_1 B_{2n+1}}{U_1}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$y_{2n}^{(j)} = \frac{-x_0^{(j)} B_{2n-1} + B_{2n}}{-x_0^{(j)} B_{2n} + B_{2n+1}}.$$

D'après tout ce qui précède, le théorème suivant est vrai.

Théorème 2.2.1 *Soit* $\left\{x_n^{(j)}, y_n^{(j)}\right\}_{n\geq 0}$ *une solution bien définie de* (2.2).
Alors pour $n = 0, 1, \ldots,\ \ j = 0, 1 \ldots, k$

$$\begin{cases} x_{2n+1}^{(j)} = \dfrac{-x_0^{(j)}B_{2n}+B_{2n+1}}{-x_0^{(j)}B_{2n+1}+B_{2n+2}}, \\ x_{2n}^{(j)} = \dfrac{-y_0^{(j)}B_{2n-1}+B_{2n}}{-y_0^{(j)}B_{2n}+B_{2n+1}}, \\ y_{2n+1}^{(j)} = \dfrac{-y_0^{(j)}B_{2n}+B_{2n+1}}{-y_0^{(j)}B_{2n+1}+B_{2n+2}}, \\ y_{2n}^{(j)} = \dfrac{-x_0^{(j)}B_{2n-1}+B_{2n}}{-x_0^{(j)}B_{2n}+B_{2n+1}}. \end{cases} \tag{2.27}$$

2.3 Forme de solution du système d'ordre supérieur

Dans cette partie, nous discutons la forme de solution du système (2.1) qui généralise (2.2). Nous établissons la solution du système (2.1) en utilisant une transformation appropriée réduisant ce système au système d'équations aux différences de premier ordre (2.2).

2.3.1 Analyse du système d'ordre supérieur

Nous analysons la relation de récurrence du système (2.1), nous écrivons sous certains termes

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6-y_{-k}}, \\ x_2 = \frac{1}{6-y_{1-k}}, \\ x_3 = \frac{1}{6-y_{2-k}}, \\ \vdots \\ x_k = \frac{1}{6-y_{-1}}, \\ x_{k+1} = \frac{1}{6-y_0}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{(k+1)n+1} = \frac{1}{6-y_{(k+1)n-k}}, \\ x_{(k+1)n+2} = \frac{1}{6-y_{(k+1)n+1-k}}, \\ x_{(k+1)n+3} = \frac{1}{6-y_{(k+1)n+2-k}}, \\ \vdots \\ x_{(k+1)n+k} = \frac{1}{6-y_{(k+1)n-1}}, \\ x_{(k+1)n+(k+1)} = \frac{1}{6-y_{(k+1)n}}. \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.28}$$

Et

$$\begin{cases} y_1 = & \frac{1}{6-x_{-k}}, \\ y_2 = & \frac{1}{6-x_{1-k}}, \\ y_3 = & \frac{1}{6-x_{2-k}}, \\ \vdots & \\ y_k = & \frac{1}{6-x_{-1}}, \\ y_{k+1} = & \frac{1}{6-x_0}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{(k+1)n+1} = & \frac{1}{6-x_{(k+1)n-k}}, \\ y_{(k+1)n+2} = & \frac{1}{6-x_{(k+1)n+1-k}}, \\ y_{(k+1)n+3} = & \frac{1}{6-x_{(k+1)n+2-k}}, \\ \vdots & \\ y_{(k+1)n+k} = & \frac{1}{6-x_{(k+1)n-1}}, \\ y_{(k+1)n+(k+1)} = & \frac{1}{6-x_{(k+1)n}}. \end{cases} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2.29}$$

De la même manière, il est montré que tout les termes de les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$, écrits sous la forme

$$\begin{cases} x_{(k+1)(n+1)-j} = & \dfrac{1}{6 - y_{(k+1)n-j}}, \\ y_{(k+1)(n+1)-j} = & \dfrac{1}{6 - x_{(k+1)n-j}}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Tell que x_{-j} et y_{-j} sont des condition initiale et $j \in \{0, 1, 2 \ldots, k\}$.

2.3.2 Forme de solution du système

Nous allons maintenant appliquer l'analyse précédente. Soit

$$x_n^{(j)} = x_{(k+1)n-j}, \quad y_n^{(j)} = y_{(k+1)n-j}. \tag{2.31}$$

Le système (2.1) se ramène au système

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6 - y_n^{(j)}}, \quad y_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6 - x_n^{(j)}}.$$

D'après le Théorème (2.2.1), on a

$$\begin{cases} x_{2n+1}^{(j)} = \dfrac{-x_0^{(j)}B_{2n} + B_{2n+1}}{-x_0^{(j)}B_{2n+1} + B_{2n+2}}, \\ x_{2n}^{(j)} = \dfrac{-y_0^{(j)}B_{2n-1} + B_{2n}}{-y_0^{(j)}B_{2n} + B_{2n+1}}, \\ y_{2n+1}^{(j)} = \dfrac{-y_0^{(j)}B_{2n} + B_{2n+1}}{-y_0^{(j)}B_{2n+1} + B_{2n+2}}, \\ y_{2n}^{(j)} = \dfrac{-x_0^{(j)}B_{2n-1} + B_{2n}}{-x_0^{(j)}B_{2n} + B_{2n+1}}. \end{cases}$$

En effet, le système (2.1) devient

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6 - y_{n-k}^{(j)}}, \quad y_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{6 - x_{n-k}^{(j)}}. \tag{2.32}$$

Donc

$$x_{(k+1)(n+1)-j} = \frac{1}{6 - y_{(k+1)n-j}}, \quad y_{(k+1)(n+1)-j} = \frac{1}{6 - x_{(k+1)n-j}}. \tag{2.33}$$

Théorème 2.3.1

La solution bien définie du système (2.1) écrits sous la fourme

$$\begin{cases} x_{(k+1)(2n+1)-j} = \dfrac{-x_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}{-x_{-j}B_{2n+1} + B_{2n+2}}, \\ x_{(k+1)(2n)-j} = \dfrac{-y_{-j}B_{2n-1} + B_{2n}}{-y_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}, \\ y_{(k+1)(2n+1)-j} = \dfrac{-y_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}{-y_{-j}B_{2n+1} + B_{2n+2}}, \\ y_{(k+1)(2n)-j} = \dfrac{-x_{-j}B_{2n-1} + B_{2n}}{-x_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}. \end{cases} \tag{2.34}$$

Où $j \in \{0, 1, 2 \ldots, k\}$.

Preuve.

D'après les changements des variables (2.31) on trouve la forme des solutions du système (2.1).

On a

$$x_n^{(j)} = x_{(k+1)n-j}, \quad j \in \{0, 1, 2 \ldots, k\}.$$

Donc

$$x_{2n+1}^{(j)} = x_{(k+1)(2n+1)-j},$$

et

$$x_0^{(j)} = x_{-j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} x_{2n+1}^{(j)} &= x_{(k+1)(2n+1)-j}, \\ &= \frac{-x_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}{-x_{-j}B_{2n+1} + B_{2n+2}}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} x_{2n}^{(j)} &= x_{(k+1)(2n)-j}, \\ &= \frac{-y_{-j}B_{2n-1} + B_{2n}}{-y_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}. \end{aligned}$$

On a

$$y_n^{(j)} = y_{(k+1)n-j}.$$

Donc

$$y_{2n+1}^{(j)} = y_{(k+1)(2n+1)-j},$$

et

$$y_0^{(j)} = y_{-j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} y_{2n+1}^{(j)} &= y_{(k+1)(2n+1)-j}, \\ &= \frac{-y_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}{-y_{-j}B_{2n+1} + B_{2n+2}}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} y_{2n}^{(j)} &= y_{(k+1)(2n)-j}, \\ &= \frac{-x_{-j}B_{2n-1} + B_{2n}}{-x_{-j}B_{2n} + B_{2n+1}}. \end{aligned}$$

■

2.3.3 Stabilité globale des solutions du système

Dans cette section, nous étudions la stabilité asymptotique globale des solutions réels du système (2.1). Soient f et g deux fonctions continûment différentiables

$$f : I^{k+1} \times J^{k+1} \to I$$

$$g : I^{k+1} \times J^{k+1} \to J$$

où I, J sont des intervalles réels. Considérons le système d'équations aux différences définies par

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) = \dfrac{1}{6 - y_{n-k}}, \\ y_{n+1} = & g(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) = \dfrac{1}{6 - x_{n-k}}. \end{cases} \tag{2.35}$$

Où $n, k \in \mathbb{N}_0$, $(x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0) \in I^{k+1}$ et $(y_{-k}, y_{-k+1}, \ldots, y_0) \in J^{k+1}$.

Lemme 2.3.1 *Le système (2.35) admet deux points d'équilibres réels donnés par :*

$$\overline{M} = (\overline{x}, \overline{y}) = \left(3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right), \quad \overline{M'} = \left(\overline{x'}, \overline{y'}\right) = \left(3 - 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}\right).$$

Preuve. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre donc :

$$\overline{x} = \frac{1}{6 - \overline{y}}, \tag{2.36}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{6 - \overline{x}}, \tag{2.37}$$

on obtient

$$6\overline{x} - \overline{xy} - 1 = 0, \tag{2.38}$$

$$6\overline{y} - \overline{xy} - 1 = 0, \tag{2.39}$$

avec la soustraction (2.36) de (2.37) on obtient :

$$\overline{x} = \overline{y}. \tag{2.40}$$

On remplace (2.40) dans (2.38) on obtient :

$$-\overline{x^2} + 6\overline{x} - 1 = 0.$$

Alors

$$\overline{x} = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \overline{x'} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Donc les points d'équilibres sont

$$\overline{M} = (\overline{x}, \overline{y}) = \left(3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right), \quad \overline{M'} = (\overline{x'}, \overline{y'}) = \left(3 - 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}\right).$$

■

La stabilité locale du point d'équilibre $\overline{M} = (\overline{x}, \overline{y}) = \left(3 - 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$, du système (2.1) est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 *Le point d'équilibre* $\overline{M}$ *est* ***localement asymptotiquement stable.***

Preuve. Définissons la fonction

$$H : I^{k+1} \times J^{k+1} \to I^{k+1} \times J^{k+1}$$

Par

$$H(w) = (f_0(w), f_1(w), \ldots, f_k(w), g_0(w), g_1(w), \ldots, g_k(w))$$

avec

$$w = (u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_k)^T,$$

$$f_0(w) = f(w), f_1(w) = u_0, \ldots, f_k(w) = u_{k-1},$$

$$g_0(w) = g(w), g_1(w) = v_0, \ldots, g_k(w) = v_{k-1}.$$

Posons,

$$w_n = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k})^T.$$

Ainsi, le système (2.35) est équivalent au système

$$w_{n+1} = H(w_n) \quad , n = 0, 1, \dots,$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x_{n+1} = & \dfrac{1}{6 - y_{n-k}}, \\ x_n = & x_n, \\ \vdots & \\ x_{n-k} = & x_{n-k}, \\ y_{n+1} = & \dfrac{1}{6 - x_{n-k}}, \\ y_n = & y_n, \\ \vdots & \\ y_{n-k} = & y_{n-k}. \end{cases}$$

Le système linéaire associé au système (2.1) autour du point d'équilibre $\overline{M} = (\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \dots, \overline{y})$, est donner par

$$w_{n+1} = Aw_n.$$

Avec A est la matrice jacobienne donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 17 - 12\sqrt{2} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 17 - 12\sqrt{2} & \dots & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Le polynôme caractéristique de G est donné par

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det\,(A - \lambda I_{2k+2}) \\ &= (-\lambda)^{2k+2} - \left(17 - 12\sqrt{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Maintenant, considérons les deux fonction définies par

$$\psi(\lambda) = (-\lambda)^{2k+2}, \ \phi(\lambda) = -\left(17 - 12\sqrt{2}\right)^2 \tag{2.42}$$

Alors

$$P_A(\lambda) = \psi(\lambda) + \phi(\lambda).$$

On a

$$\left|-(17 - 12\sqrt{2})^2\right| = 8.67 \times 10^{-4}, \ et \ \left|(-\lambda)^{2k+2}\right| = 1, \ \forall \lambda : |\lambda| = 1.$$

Donc

$$|\phi(\lambda)| < |\psi(\lambda)|, \ \forall \lambda : |\lambda| = 1.$$

Donc, d'après le Théorème de Rouché (1.1.3) ψ et $P = \psi + \phi$ ont le même nombre de zéros dans le disque unité $|\lambda| < 1$, et puisque ψ admet comme racine $|\lambda| = 0$ de multiplicité 2(k+1), alors touts les racines de P sont dans le disque $|\lambda| < 1$.
Ainsi, d'après le Théorème (1.1.5), le point d'équilibre $(\beta, \beta, \ldots, \beta)$ du système (2.1) est localemnet asymptotiquement stable. ■

Théorème 2.3.3 *Le point d'équilibre $\overline{M}$ est**globalement asymptotiquement stable.***

Preuve. Soit $\{x_{(k+1)n-j}, y_{(k+1)n-j}\}_{n\geq 0}$ $j = 0, 1 \ldots, k$, une solution réelle du système (2.1). D'après le Théorème (2.3.2), il suffit de prouver que $\overline{M} = (\overline{x}, \overline{y})$ est globalement attractif, On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{(k+1)(2n)-j} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-y_{-j}B_{2n-1}+B_{2n}}{-y_{-j}B_{2n}+B_{2n+1}}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-y_{-j}\dfrac{B_{2n-1}}{B_{2n}}+1}{-y_{-j}+\dfrac{B_{2n+1}}{B_{2n}}}, \\
&= \frac{-y_{-j}\beta+1}{-y_{-j}+\alpha}, \quad \left(Car \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n+1}}{B_{2n}}\right) = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n-1}}{B_{2n}}\right) = \frac{1}{\alpha} = \beta,\right) \\
&= \frac{-y_{-j}(3-2\sqrt{2})+1}{-y_{-j}+3+2\sqrt{2}}, \\
&= \frac{-3y_{-j}+2\sqrt{2}y_{-j}+1}{-y_{-j}+3+2\sqrt{2}}, \\
&= \frac{\left(-3y_{-j}+2\sqrt{2}y_{-j}+1\right)\left(-y_{-j}+3-2\sqrt{2}\right)}{(y_{-j})^2-6y_{-j}+1}, \\
&= \frac{3\left((y_{-j})^2-6y_{-j}+1\right)-2\sqrt{2}\left((y_{-j})^2-6y_{-j}+1\right)}{(y_{-j})^2-6y_{-j}+1}, \\
&= 3-2\sqrt{2} = \overline{x}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{(k+1)(2n+1)-j} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-x_{-j}B_{2n}+B_{2n+1}}{-x_{-j}B_{2n+1}+B_{2n+2}}, \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-x_{-j}\dfrac{B_{2n}}{B_{2n+1}}+1}{-x_{-j}+\dfrac{B_{2n+2}}{B_{2n+1}}}, \\
&= \frac{-x_{-j}\beta+1}{-x_{-j}+\alpha}, \quad \left(Car \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n+2}}{B_{2n+1}}\right) = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n}}{B_{2n+1}}\right) = \beta,\right) \\
&= 3-2\sqrt{2} = \overline{x}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_{(k+1)n-j} = \overline{x}.$$

Et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_{(k+1)(2n)-j} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-x_{-j}B_{2n-1}+B_{2n}}{-x_{-j}B_{2n}+B_{2n+1}},\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-x_{-j}\dfrac{B_{2n-1}}{B_{2n}}+1}{-x_{-j}+\dfrac{B_{2n+1}}{B_{2n}}},\\
&= \frac{-x_{-j}\beta+1}{-x_{-j}+\alpha}, \quad \left(Car \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n+1}}{B_{2n}}\right)=\alpha, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n-1}}{B_{2n}}\right)=\frac{1}{\alpha}=\beta,\right)\\
&= \frac{-x_{-j}\left(3-2\sqrt{2}\right)+1}{-x_{-j}+3+2\sqrt{2}},\\
&= \frac{-3x_{-j}+2\sqrt{2}x_{-j}+1}{-x_{-j}+3+2\sqrt{2}},\\
&= \frac{\left(-3x_{-j}+2\sqrt{2}x_{-j}+1\right)\left(-x_{-j}+3-2\sqrt{2}\right)}{(x_{-j})^2-6x_{-j}+1},\\
&= \frac{3\left((x_{-j})^2-6x_{-j}+1\right)-2\sqrt{2}\left((x_{-j})^2-6x_{-j}+1\right)}{(x_{-j})^2-6x_{-j}+1},\\
&= 3-2\sqrt{2}=\overline{y}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_{(k+1)(2n+1)-j} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-y_{-j}B_{2n}+B_{2n+1}}{-y_{-j}B_{2n+1}+B_{2n+2}},\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-y_{-j}\dfrac{B_{2n}}{B_{2n+1}}+1}{-y_{-j}+\dfrac{B_{2n+2}}{B_{2n+1}}},\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-y_0^j\beta+1}{-y_0^j+\alpha},\\
&= \frac{-y_{-j}\beta+1}{-y_{-j}+\alpha}, \quad \left(Car \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n+2}}{B_{2n+1}}\right)=\alpha, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B^{2n}}{B_{2n+1}}\right)=\beta,\right)\\
&= 3-2\sqrt{2}=\overline{y}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{(k+1)n-j} = \overline{y}.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_{(k+1)n-j}, y_{(k+1)n-j}\right) = (\overline{x}, \overline{y}).$$

Donc le point d'équilibre $\overline{M}$ est **globalement attractif,** alors il est **globalement asymptotiquement stable.**

■

2.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous considérerons quelques simulations numériques pour vérifier nos résultats théoriques. Ces exemples montrent différents types de comportement des solutions du système (2.1). Tous les graphes de cette section sont dessinés par MATLAB.

Exemple 2.4.1 *Soit $k = 1$ dans le système (2.1), alors on obtient le système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{6 - y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6 - x_{n-1}}. \tag{2.43}$$

Supposons $x_0 = 3, x_{-1} = 5, y_0 = 5$, et $y_{-1} = 3$. Voir la figure 2.1 ci-dessous.

Exemple 2.4.2 *Soit $k = 2$ dans le système (2.1), alors on obtient le système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{6 - y_{n-2}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6 - x_{n-2}}. \tag{2.44}$$

Supposons $x_0 = 0, x_{-1} = 2, x_{-2} = 1/4, y_0 = 1, y_{-1} = -4$ et $y_{-2} = 3$, Voir la figure 2.2 ci-dessous.

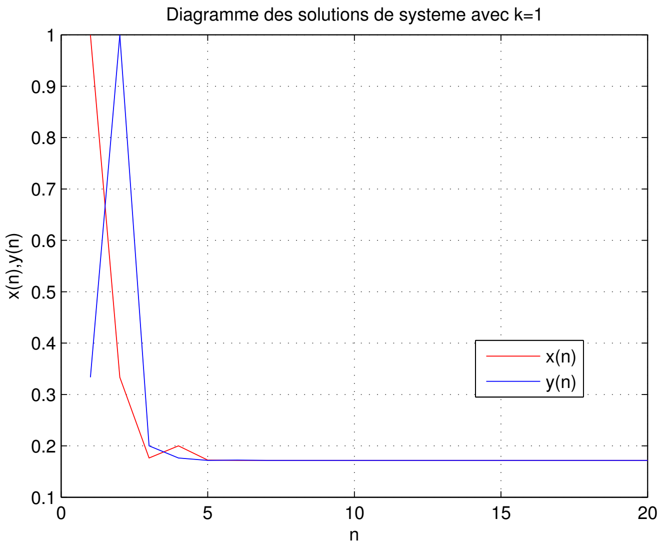

FIGURE 2.1 – Le graphique du système (2.43)

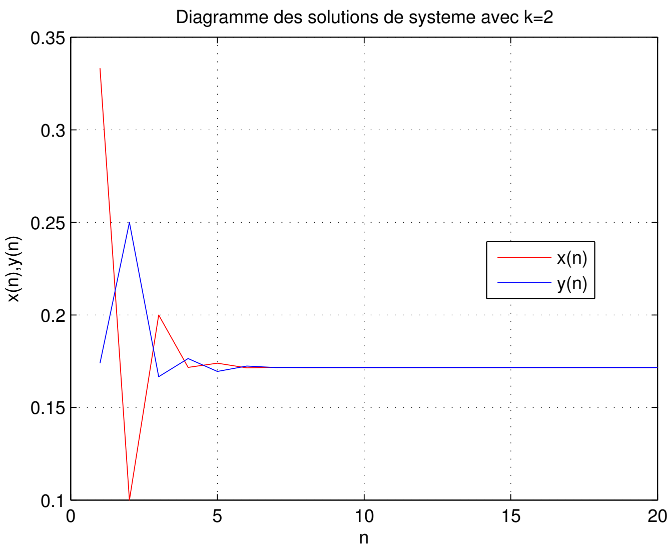

FIGURE 2.2 – Le graphique du système (2.44)

Exemple 2.4.3 *Soit $k = 3$ dans le système (2.1), alors on obtient le système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{6 - y_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6 - x_{n-3}} \tag{2.45}$$

Supposons $x_0 = -4, x_{-1} = 1/2, x_{-2} = 3, x_{-3} = 7, y_0 = -6, y_{-1} = -1/4, y_{-2} = 0, y_{-3} = 3$, Voir *la figure 2.2 ci-dessous.*

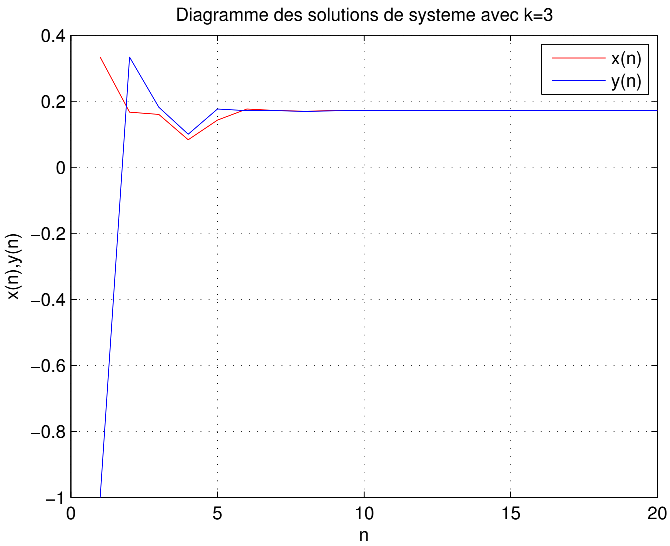

FIGURE 2.3 – Le graphique du système (2.45)

Chapitre 3

La convergence des solutions d'une équation aux différences d'ordre deux

3.1 Introduction

Dans [10] (2000) le problème suivant est posé

Problème ouvert : Existe-t-il une solution de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{\beta x_{n-1}}{\beta + x_n}, \quad x_{-1}, x_0 > 0,\ \beta > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.1}$$

Pour résoudre le problème ouvert précédent, Stevic [19] à étudié l'existence d'une solution positive de l'équation (3.1), dans le cas $\beta = 1$. De plus il a étudié l'équation plus générale

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{g(x_n)}, n = 0, 1, 2 \dots, \tag{3.2}$$

avec :

- $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$,

- $g(0) = 1$,
- $g^{'}(x) > 0, \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}_+$.

Il à prouvé l'existence d'une solution positive de l'équation (3.2) qui converge vers zéro. Dans ce chapitre, nous étudions la convergence des solutions de l'équation

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n}, x_{-1}, x_0 > 0, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

Certaines généralisations de l'équation (3.3), ont été étudiées par Stevic [21] Berg [4], et Berg et Stevic [6] en utilisant des méthodes asymptotiques.

3.2 La convergence des solutions de l'équation (3.3)

Le résultat suivant est le Théorème 1 dans [19].

Théorème 3.2.1 *[19] Considérons l'équation aux différences (3.3).*
Alors les affirmations suivantes sont vraies.

a) *Les suites* $(x_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ *sont décroissantes et il existe* $p, q \geq 0$ *tels que*

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = p, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = q.$$

b) $(q, p, q, p, \ldots)$ *est une solution de l'équation (3.3) de période deux.*

c) $pq = 0$.

d) *S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \geq x_{n+1}$ *pour tout* $n \geq n_0$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

e) *Les formules suivantes*

$$x_{2n} = x_0 \left(1 - x_1 \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i} \right).$$

$$x_{2n+1} = x_{-1} \left(1 - \frac{x_0}{1+x_0} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1+x_i} \right).$$

Sont vérifient.

f) *Si*

$$x_0 + x_0^2 \leq x_{-1},$$

alors

$$x_{2n} \longrightarrow 0 \textit{ et } x_{2n+1} \longrightarrow q \neq 0, \textit{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

g) *Si une solution de l'équation* (3.3) *converge vers zéro, elle doit être décroissante.*

Preuve.

a) :

1. D'après la forme de l'équation (3.3), on a

$$\begin{aligned} x_{2n+1} - x_{2n-1} &= \frac{x_{2n-1}}{1+x_{2n}} - x_{2n-1}, \\ &= \frac{x_{2n-1} - x_{2n-1}(1+x_{2n})}{1+x_{2n}}, \\ &= \frac{x_{2n-1} - (x_{2n-1} + x_{2n}x_{2n-1})}{1+x_{2n}}, \\ &= \frac{-x_{2n}x_{2n-1}}{1+x_{2n}} < 0. \end{aligned}$$

Alors $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Par un calcul similaire, on obtient

$$\begin{aligned} x_{2n} - x_{2n-2} &= \frac{x_{2n-2}}{1 + x_{2n-1}} - x_{2n-2}, \\ &= \frac{x_{2n-2} - x_{2n-2}(1 + x_{2n-1})}{1 + x_{2n-1}}, \\ &= \frac{x_{2n-2} - (x_{2n-2} + x_{2n-1}x_{2n-2})}{1 + x_{2n-1}}, \\ &= \frac{-x_{2n-1}x_{2n-2}}{1 + x_{2n-1}} < 0. \end{aligned}$$

Donc $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. On a la suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0. Donc

$$\exists q > 0, \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = q.$$

De même $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0.

D'où

$$\exists p > 0, \lim_{n\to\infty} x_{2n} = p.$$

b) De (3.3), on a :

Pour $n = 0$

$$x_1 = \frac{x_{-1}}{1 + x_0}.$$

Pour $n = 1$

$$x_2 = \frac{x_0}{1 + x_1}.$$

Pour $n = 2$

$$x_3 = \frac{x_1}{1 + x_2}.$$

$\vdots$

On suppose que $(x_{-1} \neq 0 \ et \ x_0 = 0)$.

Donc

$$x_1 = x_{-1}, \ x_2 = 0, \ x_3 = x_{-1} \ et \ x_4 = 0, \cdots$$

Alors

$$x_{-1} = x_1 = x_3 = x_{2n+1}.$$

Et

$$x_0 = 0 = x_2 = x_{2n}.$$

Ou que $(x_{-1} = 0 \ et \ x_0 \neq 0)$.

Donc

$$x_1 = 0, \ x_2 = x_0, \ x_3 = 0 \ et \ x_4 = x_2 = x_0 \cdots = x_{2n}.$$

Alors les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont l'ordre suivant

$$(x_{-1}, 0, x_1, 0, x_3, \cdots) \ ou \ (0, x_0, 0, x_2, 0, \cdots).$$

Et

$$(x_{-1}, 0, x_{-1}, 0, \cdots) \ ou \ (0, x_0, 0, x_0, 0, \cdots).$$

Par passage à la limite, on obtient

$$(q, 0, q, 0, \cdots) \ ou \ (0, p, 0, p, \cdots).$$

Donc la solution de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est périodique de période deux.

c) On suppose que

$$p = \frac{p}{1+q}, \; et \; q = \frac{q}{1+p}.$$

Alors

$$p(1+q) = \frac{p(1+q)}{1+q},$$

$$p + pq = p.$$

Donc

$$pq = 0.$$

d) Considérons l'équation aux différences (3.3).

Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n \geq x_{n+1}.\forall n \geq n_0$, on a

$$x_{n_0} \geq x_{n_0+1} \geq x_{n_0+2} \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1}.$$

Par passage a limite

Si n paire

$$p \geq q \geq p \geq q \cdots$$

Donc

$$p = q.$$

Si n impair

$$q \geq p \geq q \geq p \cdots$$

Donc

$$p = q.$$

Et d'après (c) an a $pq = 0$ donc $q = 0 = p$. Alors $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

e) 1. On a

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1+x_n},$$

on soustraire x_{n-1} des cotés gauche et droit de l'équation (3.3) on obtient

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{x_{n-1} - x_{n-1} - x_{n-1}x_n}{1+x_n},$$

donc

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{-x_{n-1}x_n}{1+x_n}. \tag{3.4}$$

On a

$$x_n = \frac{x_{n-2}}{1+x_{n-1}},$$

donc

$$x_n + x_n x_{n-1} = x_{n-2}.$$

Alors

$$x_n x_{n-1} = x_{n-2} - x_n.$$

De (3.4), on a

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{1}{1+x_n}(x_n - x_{n-2}).$$

2. On a

$$x_n - x_{n-2} = \frac{1}{1+x_{n-1}}(x_{n-1} - x_{n-3}).$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_{n-1} &= \frac{1}{1+x_n}\left(\frac{1}{1+x_{n-1}}(x_{n-1} - x_{n-3})\right), \\
&= \frac{1}{1+x_n}\frac{1}{1+x_{n-1}}\left(\frac{1}{1+x_{n-2}}(x_{n-2} - x_{n-4})\right), \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{1+x_n}\frac{1}{1+x_{n-1}}\frac{1}{1+x_{n-2}}\cdots\frac{1}{1+x_1}(x_1 - x_{-1}).
\end{aligned}$$

Donc
$$x_{n+1} - x_{n-1} = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i}.$$

On va montrer que, pour tout entier naturel n, la formule suivante

$$x_{n+1} - x_{n-1} = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i}. \tag{3.5}$$

Pour $n = 0$
$$x_1 - x_{-1} = x_1 - x_{-1}.$$

On suppose pour un certain n entier naturel la formule est vrai, et on va montrer qu'elle est vraie pour n+1, c'est-à-dir

$$x_{n+2} - x_n = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i}.$$

On a

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_n &= \frac{1}{1+x_{n+1}}(x_{n+1} - x_{n-1}), \\ &= \frac{1}{1+x_{n+1}}(x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i}, \\ &= (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i}. \end{aligned}$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ la formule (3.5) est vrai.

3. De 2, on a

   Pour $n = 0$
$$x_1 - x_{-1} = x_1 - x_{-1}.$$

Pour $n = 2$

$$x_3 - x_1 = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{1 + x_i}.$$

Pour $n = 4$

$$x_5 - x_3 = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{4} \frac{1}{1 + x_i}.$$

$\vdots$

Pour 2n

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{2n} \frac{1}{1 + x_i}.$$

Par somme tous les cotés à gauche et tous les cotés à droit, on trouve

$$x_{2n+1} - x_{-1} = (x_1 - x_{-1}) \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1 + x_i}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} &= x_{-1} + (x_1 - x_{-1}) \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1 + x_i}, \\
&= x_{-1} + \left(\frac{-x_{-1}x_0}{1 + x_0} \right) \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1 + x_i}, \\
&= x_{-1} \left(1 - \frac{x_0}{1 + x_0} \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1 + x_i} \right).
\end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on trouve x_{2n}.

On a

$$x_n = \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-1}}, \tag{3.6}$$

on soustraire x_{n-2} des cotés gauche et droit de l'équation (3.6) on obtient

$$x_n - x_{n-2} = \frac{x_{n-2} - x_{n-2} - x_{n-2}x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}.$$

Donc

$$x_n - x_{n-2} = \frac{-x_{n-3}x_{n-2}}{1 + x_{n-2}}. \tag{3.7}$$

On a

$$x_{n-1} = \frac{x_{n-3}}{1 + x_{n-2}},$$

donc

$$x_{n-3} = x_{n-1} + x_{n-2}x_{n-1}.$$

Alors

$$x_{n-1}x_{n-2} = x_{n-3} - x_{n-1},$$

d'après (3.7), on obtient

$$x_n - x_{n-2} = \frac{1}{1 + x_{n-1}}(x_{n-1} - x_{n-3}).$$

4. On a

$$x_{n-1} - x_{n-3} = \frac{1}{1 + x_{n-2}}\left(x_{n-2} - x_{n-4}\right),$$

alors

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-2} &= \frac{1}{1 + x_{n-1}}\left(\frac{1}{1 + x_{n-2}}(x_{n-2} - x_{n-4})\right), \\
&= \frac{1}{1 + x_{n-1}}\frac{1}{1 + x_{n-2}}\left(\frac{1}{1 + x_{n-3}}(x_{n-3} - x_{n-5})\right), \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{1 + x_{n-1}}\frac{1}{1 + x_{n-2}}\frac{1}{1 + x_{n-3}}\cdots\frac{1}{1 + x_1}(x_1 - x_{-1}).
\end{aligned}$$

Donc

$$x_n - x_{n-2} = (x_1 - x_{-1})\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1 + x_i}.$$

On va montrer que, pour tout entier naturel n, la formule suivante

$$x_n - x_{n-2} = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+x_i}. \tag{3.8}$$

Pour $n = 1$

$$x_1 - x_{-1} = x_1 - x_{-1}.$$

On suppose pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ la formule est vrai, et on va montrer qu'elle est vraie pour n+1, c'est-à-dir

$$x_{n+1} - x_{n-1} = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i}.$$

On a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_{n-1} &= \frac{1}{1+x_n}(x_n - x_{n-2}), \\ &= \frac{1}{1+x_n}(x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+x_i}, \\ &= (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i}. \end{aligned}$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la formule (3.8) est vrai.

5. De 4, on a

   Pour $n = 2$

$$x_2 - x_0 = (x_1 - x_{-1}) \frac{1}{1+x_1}.$$

   Pour $n = 4$

$$x_4 - x_2 = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{1+x_i}.$$

$\vdots$

Pour 2n

$$x_{2n} - x_{2n-2} = (x_1 - x_{-1}) \prod_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{1+x_i}.$$

Par somme tous les cotés à gauche et tous les cotés à droit, on trouve

$$x_{2n} - x_0 = (x_1 - x_{-1}) \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{2n} - x_0 = (x_1 - x_{-1}) \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= x_0 + x_1 \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i} - x_{-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i}, \\
&= x_0 + (x_1 - x_{-1}) \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i}, \\
&= x_0 + \left(\frac{-x_{-1}x_0}{1+x_0} \right) \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i}, \\
&= x_0 \left(1 - x_1 \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1+x_i} \right).
\end{aligned}$$

f) On suppose que $p = q = 0$. De (e) on a

$$\begin{cases} x_0\left(1 - x_1 \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j-1}\frac{1}{1+x_i}\right) = 0, \\ Et \\ x_{-1}\left(1 - \frac{x_0}{1+x_0}\sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_i}\right) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ Ou \quad \frac{1}{x_1} = \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j-1}\frac{1}{1+x_i}, \\ Et \\ x_{-1} = 0, \\ Ou \quad \frac{1+x_0}{x_0} = \sum_{j=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_i} = 0. \end{cases}$$

Et comme

$$x_0 + x_0^2 \leq x_{-1}.$$

Donc

$$x_0 \leq x_1,$$

alors

$$\frac{1}{x_0} \geq \frac{1}{x_1}.$$

On a

$$\frac{1}{x_1} = \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j-1}\frac{1}{1+x_i},$$

et

$$\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_i} = \frac{1+x_0}{x_0} - 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1+x_0-x_0}{x_0} &= \frac{1}{x_0}, \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_i}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j}\frac{1}{1+x_i} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{2j-1}\frac{1}{1+x_i},$$

$$\frac{1}{x_0} \leq \frac{1}{x_1}.$$

Qui est une contradiction.

Alors

$$p = 0 \quad et \quad q \neq 0.$$

g) De (f) on a

si

$$x_0 + x_0^2 \leq x_{-1},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0 \; et \; \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} \neq 0.$$

Et si

$$x_1 + x_1^2 \leq x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{2n} \neq 0 \; et \; \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0.$$

Alors si

$$x_{n_0+1} + x_{n_0+1}^2 \leq x_{n_0} \Rightarrow (q \neq 0 \; et \; p = 0) \; ou \; (q = 0 \; et \; p \neq 0).$$

Par contre

$$p = q = 0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_{n_0+1} + x_{n_0+1}^2.$$

Donc

$$x_{n_0+2} = \frac{x_{n_0}}{1 + x_{n_0+1}} < x_{n_0+1}.$$

■

3.3 Exemples numériques

Dans cette section, nous considérerons quelques simulations numériques pour vérifier nos résultats théoriques. Ces exemples montrent différents types de comportement de solution du l'équation (3.3) les sous suites $(x_{2n})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$.
Tous les graphes de cette section sont dessinés par MATLAB.

Exemple 3.3.1 *Supposons l'équation* (3.3) *avec les condition initial de* $x_0 = 1$ *et* $x_{-1} = 20$. *(Voir la figure 3.1.)*

Exemple 3.3.2 *Considérons les suites* $(x_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$*, tel que* $x_0, x_{-1} > 0$*, on Supposons* $x_0 = 1$ *et* $x_{-1} = 20$. *(Voir la figure 3.2)*

Exemple 3.3.3 *Considérons les suites* $(x_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$*, tel que* $x_0, x_{-1} > 0$*, on Supposons* $x_0 = 1$ *et* $x_{-1} = 1/4$. *(Voir la figure 3.3.)*

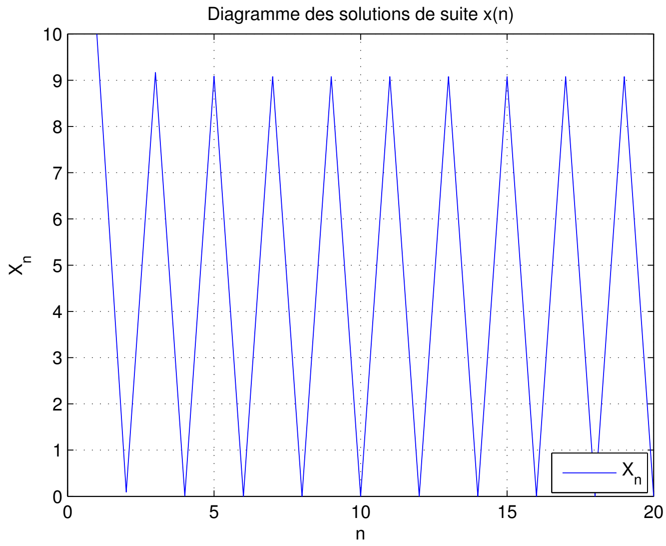

FIGURE 3.1 – Le graphique du l'équation (3.3) avec $x_0 = 1$ *et* $x_{-1} = 20$.

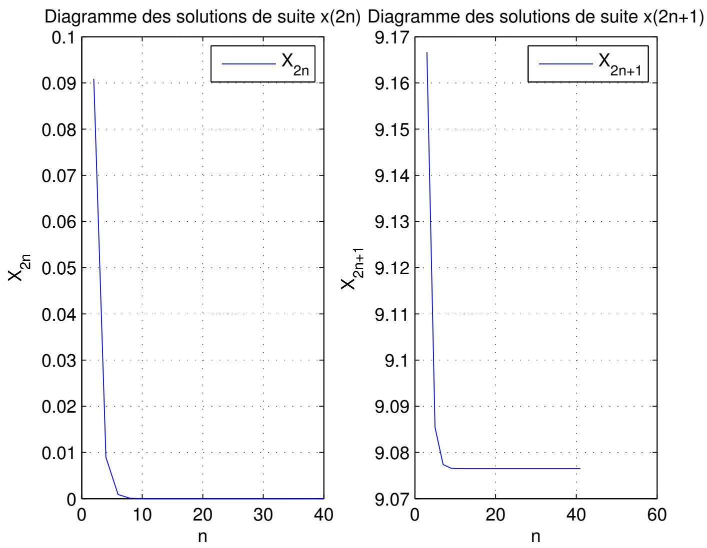

FIGURE 3.2 – Le graphique des suite $(x_{2n})_{n\geq 0}$, *et* $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$. avec $x_0 = 1$ *et* $x_{-1} = 20$.

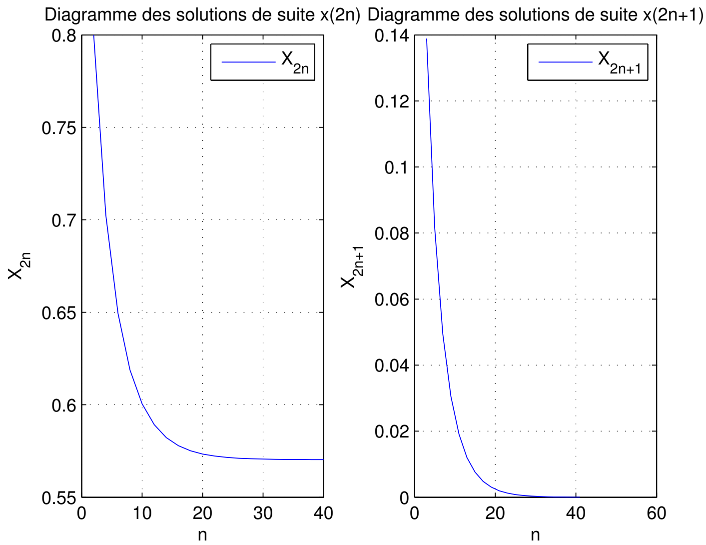

FIGURE 3.3 – Le graphique des suite $(x_{2n})_{n\geq 0}$, *et* $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$. avec $x_0 = 1$ *et* $x_{-1} = 1/4$.

Conclusion et perspectives

Cet mémoire rassemble l'étude d'une equation aux différences et un système d'équations aux différences.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la forme générale de la solution du système de deux equations aux différences d'ordre supérieur

$$x_{n+1} = \frac{1}{6 - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{6 - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

en termes des nombres de Balancing. Comme perspective nous allons essayer de étudier le système

$$x_{n+1} = \frac{1}{A - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{A - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$A \geq 0$, ou la solution est donné en fonction des nombres de Balancing généralisés.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudiée la convergences des solutions de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n}, x_{-1}, x_0 > 0, n = 0, 1, 2 \dots$$

Comme prespective nous allons essayer d'étudier une généralisation deux dimensionnelle, autrement dit le système d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{1 + x_n}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Bibliographie

[1] Y. Akrour, N. Touafek, Y. Halim, *On a system of difference equations of seond order solved in closed form*, Miskolc Mathematical Notes, **20**(2)(2019), 701-717.

[2] L. J. S. Allen, M. J. Strauss, H. G. Tnorvilson, W. N. Lipe, *A preliminary mathematical model of the apple twig borer (Coleoptera :Bostricida) and grapes on the Texas high planes*, Ecological Modelling, **58**(1991), 369-382.

[3] A. Behera, G. K. Panda, *On the square roots of triangular numbers*, Fibonacci Quarterly, **37**(2)(1999),98-105.

[4] L. Berg, *On the asymptotics of nonlinear difference equations*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications, **21**(4)(2002), 1061-1074.

[5] L. Berg , S. Stevic, *On the asymptotics of the difference equation* $y_n(1 + y_{n-1} \dots y_{n-k+1}) = y_{n-k}$, Journal of Difference Equations and Applications, **17**(4)(2011), 577-586.

[6] C. W. Clark, *A delayed recruitement of a population dynamics with an application to baleen whale population*, Journal of Mathematical Biology, **3**(1976), 381-391.

[7] I. Dekkar, *Variations sur les équations aux différences (non) autonomes*, Thèse de Doctorat, Université de Jijel, (2017).

[8] M. F. Elettreby, H. El-Metwally, *On a system of difference equations of an economic model*, Discrete Dynamics in Nature and Society (2013), Article ID 405628.

[9] L. Fibonacci, *Liber Abbaci*, (1202).

[10] C. H. Gibbons, M. R. S. Kulenovi et G. Ladas, *On the recursive sequence* $\frac{\alpha+\beta x_{n-1}}{\gamma+x_n}$, Mathematical Sciences Research Hotline, **4**(2)(2000), 1-11.

[11] I. Gohberg, J. Leiterer, *Holomorphic operator functions of one variable and applications*, Birkhäuser, (2009).

[12] Y. Halim, M. Berkal, A. Khelifa, *On a three-dimensional solvable system of difference equations*, Turkish Journal of Mathematics, **44**(2020), 1263-1288.

[13] Y. Halim, M. Bayram, *On the solutions of a higher-order difference equation in terms of generalized Fibonacci sequences*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **39**(2016), 2974-2982.

[14] A. Khelifa, *Stabilité globale des solutions de quelques modèles d'équations et systèmes d'équations aux différences*, Thèse de Doctorat, Université de Jijel, (2022).

[15] M. R. S. Kulenovic, G. Ladas, *Dynamics of second ordre rational difference equations with open problems and conjectures* , Chapman and Hall, Boca Raton, London, New York,Washington, D.C, (2002).

[16] G. K. Panda, *Some facinating properties of Balancing numbers*, Published in Fibonacci Numbers and Their Applications, **10**(2006).

[17] K. Liptai, F. Luca, A. Pintér, L. Szalay, *Generalized balancing numbers*, Indagationes Mathematicae-New Series, **20**(1)(2009), 87-100.

[18] S. Stevic, A. Ahmed, W. Kosmala, Z. Smarda, *Note on a difference equation and some of its relatives*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **44**(13)(2021), 10053-10061.

[19] S. Stevic, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = x_{n-1}/g(x_n)$, Taiwanese Journal of Mathematics, **3**(2002), 405-414.

[20] Y. Soykan, E. Tasdemir, C. Dikmen, *A study on the sum of the squares of generalized balancing numbers : the sum formula* $\sum_{k=0}^{n} x^k W_{mk+j}^2$, Journal of Innovative Applied Mathematics and Computational Sciences, **1**(2021), 16-30.

[21] S. Stevic, *On positive solutions of a* $(k+1)$ *th order difference equation*, Applied Mathematics Letters, **19**(5)(2006), 427-431.

[22] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas numbers and the golden section : Theory and applications*, Dover Puplication, INC. Mineola, New york, (1989).