الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf : …………

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquées

Sur la théorie de convexité et ses applications

Préparé par : Wissame Barouri
Nidal Khelouf

Soutenue devant le jury :

Sihem Bourourou	MCB	C. U. Abd elhafid Boussouf, Mila	Président
Moufida Amiour	MCB	C. U. Abd elhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Loubna Benaouicha	MAA	C. U. Abd elhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2021/2022

Remerciement

Nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donné, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin de bonnes personnes et nous a confiés à de bonnes mains.

Nous tenons d'abord à exprimer nos plus vifs remerciements à AMIOUR Moufida qui a supervisé avec enthousiasme ce travail dans toutes ses étapes et a collaboré de manière importante à la réalisation.

Nous adressons aussi nos remerciements aux membres du jury qui ont avoir bien voulu juger ce travail.

Nos remerciements vont aussi à toutes nos familles, nos parents, nos sœurs, nos frères et nos amis pour ses encouragements.

Nous témoignons toute notre gratitude à tous les membres du département de Mathématiques et spécialement aux enseignants qui ont contribué à notre formation et qui nous ont permise de travailler dans de bonnes conditions.

Merci infiniment à tous.

Dédicace

C'est avec une pensée pleine de reconnaissance inspirée par la générosité et la gentillesse

que nous dédions ce travail à :

Nos parents.

Nos frères.

Nos sœurs.

Nos amies.

Notre encadreur : AMIOUR Moufida.

A tous ceux qui nous ont aidés et conseiller.

Nidal, Wissame.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

L'analyse convexe est la branche des mathématiques qui étudie les ensembles et les fonctions convexes. Plusieurs auteurs ont étudié l'analyse convexe, a la fin des années 1800 et le début des années 1900 la notion d'ensemble convexe a été fortement étudiée par Minkowski, cette notion a gagné en importance par le développement de l'analyse fonctionnelle. En 1934, W. Fenchel publiera un livre consacré sur les ensembles convexes puis vers 1950, il écrivit un livre sur les ensembles et les fonctions convexes dans lequel il posa les bases de l'analyse convexe dans $\mathbb{R}^n$. Les fonctions convexes ont été étudié par R. T. Rockafellar, W. Fenchel et J. J. Moreau d'une façon approfondie. En particulier R. T. Rockafellar a permis une avancée énorme dans le domaine durant les années 1970 en étendant l'analyse convexe à des espaces vectoriels généraux que dans ses divers papiers, c'est plus ou moins à cette période que l'analyse convexe a reçu plus de considérations des mathématiciens car les champs d'applications étaient divers (la théorie des jeux, optimisation, théorèmes du point fixe, ...).

Cette mémoire est constituée en trois chapitres.
Le premier chapitre est consacré à quelques notions de base (espaces topologiques, espaces métriques, espace de Hilbert, espace de Banach) et quelques définitions et résultats auxiliaire qui seront utilisés plus tard.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des ensembles convexes et leur propriétés topologiques, nous présentons des théorèmes importants de géométrie convexe (Carathéodory, Séparation des convexes) et quelques applications (théorèmes du point fixe de Brouwer, Schouder et Stampacchia).
Le troisième chapitre est dédié à l'étude des fonctions convexes. Nous présentons les propriétés de la continuité, semi-continuité et la dérivabilité et à la fin une application a l'optimisation convexe.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base, certaines propriétés et résultats généraux dans différents espaces qui seront utilisés tout au long de ce mémoire. Voir [1, 3, 12, 14, 16, 17, 19].

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble non vide quelconque. Une distance sur E est une fonction $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les propriétés suivantes*

1) $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2) $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$,
3) $\forall x, y, z \in E,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 1.1.2 *Un espace métrique (E, d) est un couple constitué par un ensemble non vide E et une distance d sur E.*

Exemple 1.1.1 • *L'ensemble des réel muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.*
• *Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ deux éléments de E chacun des expressions suivantes définit une distance sur E.*
(i) $d_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
(ii) $d_p(x, y) = (\sum\limits_{i=1}^{n} (|x_i - y_i|)^p)^{\frac{1}{p}}$, $(p \geq 2)$.
(iii) $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.
• *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f, g \in E$*

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|.$$

est une distance sur E.

• *Soit* $E\neq\emptyset$ *un ensemble quelconque. Soit l'application définie de* $E\times E$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & si\ x\neq y\\ 0 & si\ x=y\end{cases}$$

δ *est une distance sur* E *(distance discrète).*

1.1.1 Boules, Sphères

Soit (E,d) un espace métrique, Soit $x_0\in E$ et soit $r>0$.

Définition 1.1.3 *On appelle boule ouvert (resp boule fermé) de centre* x_0 *et de rayon* r *les sous-ensemble*

$$B(x_0,r)=\{x\in E,\ d(x_0,x)<r\}.$$

resp.

$$B^{'}(x_0,r)=\{x\in E,\ d(x_0,x)\leq r\}.$$

On appelle sphère de centre x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$S(x_0,r)=\{x\in E,\ d(x_0,x)=r\}.$$

Exemple 1.1.2 *Soit* $E=\mathbb{R}$, *muni de la distance usuelle* $d(s,t)=|s-t|$. *On a*

• $B(x_0,r)=]x_0-r,\ x_0+r[$.

• $B(x_0,r)=[x_0-r,\ x_0+r]$.

• $S(x_0,r)=\{x_0-r,\ x_0+r\}$.

Définition 1.1.4 ***(Espace topologique).***

On appelle topologie sur un ensemble E *une famille* τ *de partie de* $(E\subset\mathcal{P}(E))$ *vérifiant les propriétés suivants*

1) $\emptyset,\ E\in\tau$,

2) $\forall(U_i)_{i\in I}\subset\tau,\ \bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\tau$,

3) $\forall(U_i)_{1\leq i\leq n}\subset\tau,\ \bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\in\tau$.

Les éléments de τ *sont appelle ouverts de la topologie.*

Le couple (E,τ) *est appelé espace topologique.*

1.1.2 Topologie des espaces métriques

Soit $O \subset E$ tel que (E,d) un espace métrique.

Définition 1.1.5 *On dit que O est un ouvert dans E si*

$$\forall x \in O,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset O.$$

Proposition 1.1.1 *Toute boule ouverte est un ouvert.*

Preuve.
Soit $B(x,r)$ est un ensemble ouvert dans E. Soit $y \in B(x,r)$, on a $d(x,y) < r$, et on pose

$$r' = \frac{r - d(x,y)}{2}.$$

Alors $B(y,r^{'})$ est inclus dans $B(x,r)$, en effet pour $z \in B(y,r^{'})$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + \frac{r - d(x,y)}{2} \leq \frac{r - d(x,y)}{2} \leq r.$$

■

Définition 1.1.6 ***(Fermé).***
Un ensemble $F \subset E$ sera dit fermé dans E si et seulement si son complémentaire (C_E^F) est un ouvert, i. e.

$$F\ fermé\ \Leftrightarrow C_E^F \in \mathcal{T}.$$

Proposition 1.1.2 *La famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés vérifie*
F1) Toute intersection de fermés est un fermé,
F2) Une réunion finie de fermés est un fermé,
F3) $\emptyset$ et E sont des fermés.

Proposition 1.1.3 *Dans un espace métrique (E,d), toute boule fermée est un fermé.*

Preuve.
Soit $B^{'}(x_0,r)$ une boule fermée de (E,d). Il s'agit de montrer que $C_E^{B^{'}(x_0,r)}$ est un ouvert. Soit $x \notin B_f(x_0,r)$. On a $d(x_0,x) > r$ et on pose $\rho = \frac{d(x_0,x)-r}{2}$. Alors la boule $B(x,\rho)$ est incluse dans $C_X B_f(x_0,r)$. En effet pour $y \in B(x,\rho)$ on a $d(x_0,x) - d(x_0,y) \leq d(x,y) < \rho = \frac{d(x,x_0)-r}{2}$ d'où $d(x_0,x) - \frac{d(x_0,x)+r_0}{2} < d(x_0,y)$ i. e. $d(x_0,y) > r$. ■

1.1.3 Voisinages

Définition 1.1.7 *Soit (E, τ) un espace topologique et soit $x \in E$. On appelle voisinage de x dans E, toute partie de E contenant un ouvert contenant x. On note $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x*

$$V(x) = \{V \in \mathcal{P}(E), \exists O \in \tau, x \in O \subset V\}.$$

Proposition 1.1.4 *Si (E, d) est un espace métrique et $x \in E$, on a*

$$V(x) = \{V \in \mathcal{P}(E), \exists r > 0, B(x, r) \subset V\}.$$

Preuve.
Si V est un voisinage de $x \in E$, il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$.
Par définition des ouverts des espaces métriques, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$. Dans le sens inverse si $B(x, r) \subset V$, alors on prend $O = B(x, r)$.
■

1.1.4 Suites

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d).

Définition 1.1.8 *On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

On note $x_n \longrightarrow x$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$).

Proposition 1.1.5 ***(L'unicité de la limite).***
Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans un espace métrique (E, d) alors la limite est unique.

Preuve.
Si on a x_1, x_2 dans E tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x_1) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N'_\varepsilon,\ d(x_n, x_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour $n \geq \sup\{N_\varepsilon,\ N'_\varepsilon\}$, on a

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_n, x_1) + d(x_n, x_2) \leq \varepsilon,$$

et donc

$$d(x_1, x_2) \leq \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

D'où $d(x_1, x_2) = 0$ ce qui donne $x_1 = x_2$. ■

Proposition 1.1.6 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d) alors on a*
1) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = x$.
2) *A fermé si et seulement si A contient les limites de touts ses points convergent i. e.*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x \Rightarrow x \in A.$$

1.1.5 Continuité

Définition 1.1.9 *Soit (E, d), $(E^{'}, d^{'})$ deux espaces métriques et soit $a \in E$ on dit que une application $f : E \longrightarrow E^{'}$ est continue au point a si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ d(x, a) < \delta \Rightarrow d^{'}(f(a), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.10 *On dit que $f : E \longrightarrow E^{'}$ est continue sur (E, d) si elle est continue en tout point de E.*

Définition 1.1.11 *Une application $f : E \longrightarrow E^{'}$ est dite uniformément continue sur E si elle vérifier*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in E,\ d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d^{'}(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.12 *On dit que $f : E \longrightarrow E^{'}$ est Lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur E (k-Lipschitzienne) si*

$$\forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Proposition 1.1.7 *f Lipschitzienne $\Longrightarrow$ f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue .*

Définition 1.1.13 *On dit qu'une application $f : E \longrightarrow E$ est contractante si et seulement si*

$$\exists \alpha \in [0, 1[,\ \forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Définition 1.1.14 ***(Point fixe).***
Pour une application f d'un ensemble E dans lui-même, un élément x de E est un point fixe de f si $f(x) = x$.

1.1.6 Adhérence et intérieur

Soit (E, τ) un espace topologique.

Définition 1.1.15 *Soit A une partie de E et soit x un élément de E. On dit que*
1) x est l'adhérent à A si tout voisinage V de x dans E contient un point de A.
2) x est un point d'accumulation de A si tout voisinage V de x dans E contient un point de A différent de x.
3) x est un point isolé de A si il existe un voisinage V de x tel que $V \bigcap A = \{x\}$.

Exemple 1.1.3 • *Dans $\mathbb{R}$ on considère l'ensemble $A = \{\frac{1}{n+1}; n \in N\}$. Le point $\frac{1}{2}$ est un point isolé de A, il est adhérent à A mais n'est pas point d'accumulation. Le point 0 n'appartient pas à A mais il est adhérent à A. C'est un point d'accumulation de A.*

Définition 1.1.16 *Pour une partie A de E on appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A.*

Proposition 1.1.8 *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de E est le plus petit fermé de E contenant A.*

Définition 1.1.17 ***(Partie relativement compacte).***
On dit qu'un partie A d'un espace topologique (E, τ) est relativement compacte si son adhérence est compacte.

Définition 1.1.18 *Soit A une partie de E. On dit qu'un point x de A est intérieur à A si A est un voisinage de x dans E, $A \in V(x)$.*

Définition 1.1.19 *On appelle intérieur d'une partie A de E, et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.*

Proposition 1.1.9 *L'intérieur d'une partie A de E est le plus grand ouvert contenu dans A.*

1.2 Espaces métriques complets

Définition 1.2.1 ***(Suite de Cauchy).***
On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique (E, d) est de Cauchy si elle vérifier

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.2.1 *Dans un espace métrique* (E, d) *on a*
1) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3) *Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente converge.*

Définition 1.2.2 *Un espace métrique* (E, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E.

Exemple 1.2.1 • $(\mathbb{R}, |.|), (\mathbb{R}^n, d_2)$ *sont complets.*
• $(\mathbb{Q}, |.|)$ *n'est pas complet.*

Proposition 1.2.2 *1) Dans un espace métrique* (E, d) *toute partie complète est fermée.*
2) Dans un espace métrique complet (E, d) *les partie fermées sont les parties complètes.*

1.3 Espaces compacts

1.3.1 Les espaces topologiques compacts

Définition 1.3.1 ***(Recouvrement).***
Une famille d'ensembles $(U_i)_{i\in I}$ *est une recouvrement de* E *si*

$$E = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Définition 1.3.2 ***(Borel-Lebesgue).***
On dit qu'un espace topologique (E, τ) *est compact s'il est séparé et si de toute recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini, i. e.*

$$(E = \bigcup_{i\in I} U_i) \Rightarrow (\exists J \subset I,\ J\ fini,\ E = \bigcup_{i\in J} U_i).$$

.

Exemple 1.3.1 • $\mathbb{R}$ *usuel n'est pas compact car* $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}]n,n+2[}$, *alors* $]n, n+2[: n \in \mathbb{N}$ *est un recouvrement ouvert de* $\mathbb{R}$, *mais ne contient pas de recouvrement fini.*
• *Dans un espace topologique séparé toute partie fini est compacte.*

Proposition 1.3.1 *1) Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.*
2) Si (E, τ) *un espace topologique compact et* F *est fermé de* E *alors* F *est compact.*

Corollaire 1.3.1 *Dans un espace topologique compact, les parties compactes sont les parties fermées.*

1.3.2 Partie compact dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.3.1 ***(Heine-Borel-Lebesgue).***
Tout intervalle fermée bornée de $\mathbb{R}, [a, b], a, b \in \mathbb{R}$, est compact.

Corollaire 1.3.2 *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Proposition 1.3.2 *Pour une partie K d'un espace métrique (E, d), les deux assertions suivantes sont équivalentes*
1) *K compacte.*
2) *De Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de K, on peut extraire une sous suite convergente dans K.*

1.4 Espaces vectoriels normés

1.4.1 Normes

Définition 1.4.1 *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application, le plus souvent notée $\|.\|$*

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

ayant les trois propriétés suivantes

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité).
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Exemple 1.4.1 • *La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.*
• *$E = \mathbb{R}^n$, les applications $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E.*
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.2 *Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|.\|)$ où E est un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou C et $\|.\|$ est une norme sur E.*

Proposition 1.4.1 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé alors la quantité $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E.*

Proposition 1.4.2 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ alors on a*

$$\forall x, y \in E,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Preuve.
On a $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ et $\|x\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$ donc $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. D'ou le résultat. ■

1.4.2 Distance associée à une norme

Définition 1.4.3 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. On associe à la norme $\|.\|$, une distance d sur E définie par*

$$\forall x, y \in E,\ d(x,y) = \|x-y\|.$$

Remarque 1.4.1 *Tout espace normé E est un espace métrique sa distance associée à la norme de E.*

Définition 1.4.4 *Deux normes $\|x\|_1, \|x\|_2$ sur un même espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que*

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2.$$

Exemple 1.4.2 • *Les normes$\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalente sur $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.4.5 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

1.5 Espaces de Hilbert

Soit E un espace vectoriel sur le corp $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$).
Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une application.

Définition 1.5.1 *On dit que φ est une forme hermitienne definie positive sur E si*
1) $\forall x, x', y \in E,\ \varphi(x+x', y) = \varphi(x,y) + \varphi(x', y)$.
2) $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$.
3) $\forall x, y \in E,\ \varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$.
4) $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$.
5) $\varphi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Propriété 1.5.1 *Si φ une forme hermitienne définie positive sur E, alors*
1) $\varphi(x, y+y') = \varphi(x,y) + \varphi(x,y')\ \forall x, x', y, y' \in E$.
2) $\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\varphi(x,y)\ \forall x, x' \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque 1.5.1 *Une forme hermitienne définie positive est appelée produit scalaire.*

Inégalité de Cauchy Scwartz
Soit φ une forme hermitienne définie positive sur un espace vectoriel E alors

$$\forall x, y \in E\ |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y).$$

Proposition 1.5.1 *Soit φ une forme hermitienne définie positive sur l'espace vectoriel E. Alors l'application $\|.\| : x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ définie une norme sur E. L'espace E muni de cette norme est appelé espace préhilbertien.*

Preuve.
Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$
1)$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{\varphi(x,x)} = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\varphi(x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2\varphi(x,x)} = |\lambda|\sqrt{\varphi(x,x)} = |\lambda|\|x\|.$
3) $\|x+y\| = \sqrt{\varphi(x+y, x+y)} = \sqrt{\varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2Re\varphi(x,y)}.$
On a $\forall x, y \in E,\ Re\varphi(x,y) \leq |Re\varphi(x,y)| \leq |\varphi(x,y)|.$
Donc

$$\varphi(x,x)+2Re\varphi(x,y)+\varphi(y,y) \leq \varphi(x,x)+\sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}+\varphi(y,y) \leq (\sqrt{\varphi(x,x)}+\sqrt{\varphi(y,y)})^2.$$

D'où $\|x-y\| \leq \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2} = \|x\| + \|y\|.$ ∎

Notation
Une forme hermitienne définie positive est généralement noté par
$\langle .,. \rangle,\ \ \varphi(x,y) = \langle x, y \rangle.$

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Définition 1.5.2 *On appelle espace de Hilbert tout espace préhibertien complet.*

Remarque 1.5.2 *Un espace de Hilbert est un espace de Banach.*

1.5.1 Le dual d'un espace de Hilbert

Théorème 1.5.1 ***(Représentation de Riesz).***
Représentation de Riesz-Fréchet Eant donné $\varphi \in H'$. il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \varphi, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus on a $|f| = \|\varphi\|_{H'}$.

CHAPITRE 2

LES ENSEMBLES CONVEXES

Dans ce chapitre, Nous présentons quelques notions de base concernant les ensembles convexes et ses propriétés topologiques. Nous étudions aussi quelques exemples d'applications du théorème de projection en analyse (théorème du point fixe de Brouwer, Schauder et Stampacchia). Nous basons sur les références suivantes [2-11, 13, 16, 18, 20, 21].

2.1 Définitions et premières propriétés

Soit E un espace vectoriel réel. Un sous ensemble $A \subset E$ soit un sous espace si seulement si
1) $A \neq \emptyset$ $(0 \in A)$.
2) $\forall x, y \in A,\ \forall \in \mathbb{R},\ \ \alpha x \in A$ et $x + y \in A$.
On note $V(E)$, l'ensemble de tous les sous espaces vectoriels de E.

Définition 2.1.1 *Soit x et y deux points de E. La droite passant par x et y est l'ensemble*

$$(x, y) = \{tx + (1 - t)y,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.1 Sous ensembles affines

Définition 2.1.2 *Un ensemble A de E est affine si*

$$\forall x, y \in A, \forall t \in \mathbb{R},\ tx + (1 - t)y \in A.$$

Autrement dit, Un ensemble affine contient toujours les droites passants par deux de ses points x et y.
On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble de tous les sous ensembles affines de E.

Théorème 2.1.1 *Soit $A \in \mathcal{A}(E)$. Alors A est sous espace vectoriel si seulement si $0 \in A$.*

Preuve.
Il est évident que si $A \in V(E)$ alors $0 \in A$.
Réciproquement si $A \in \mathcal{A}(E)$ et $0 \in A$.
$\forall x \in A,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha x = \alpha x + (1-\alpha)y \in A$. Pour $y = 0 \in A$ on a $\alpha x \in A$.
$\forall x, y \in A$, on a $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{x+y}{2} \in A$. D'après ce qui précède $2(\frac{x+y}{2}) \in A$ d'où $x + y \in A$. ■

Théorème 2.1.2 *Soit $A \in \mathcal{A}(E)$ et $x_0 \in E$. Alors $A + \{x_0\} \in \mathcal{A}(E)$.*

2.1.2 Sous ensembles convexes

Définition 2.1.3 *Un sous ensemble A de E est convexe si*

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1] \ \ tx + (1-t)y \in A.$$

Autrement dit, un sous ensemble convexe joignant toujours le segment $[x, y]$ reliant deux de ses points x et y.

Exemple 2.1.1 • *Un sous ensemble affine et un ensemble convexe, en particulier un point, une droite, un hyperplan (sous ensemble de E d'équation $l(x) = a,\ \ l$ est une forme linéaire et $a \in \mathbb{R}$).*
• *Un ensemble affine de E contenant plus d'un point n'est pas convexe.*

2.1.3 Opérations conservant la convexité

Proposition 2.1.1 *1) Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de convexes de E. Alors $\cap_{i\in I} C_i$ est encore convexe.*
2) Pour $a \in E$ le translaté

$$a + C = \{a + x,\ x \in C\}.$$

est convexe.
3) Le produit cartésien de deux convexes (C_1, C_2) de E est convexe dans $E \times E$.
4) La somme $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 /\ x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ est convexe.
5) L'union de sous ensembles convexes n'est pas toujours convexe mais l'union croissante de sous ensembles convexes est convexe.

Proposition 2.1.2 *Si C_1, C_2 sont des convexes alors on a*
1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$.
2) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C$.

Preuve.
1) L'égalité $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$ est évidente.
2) L'inclusion $(\lambda + \mu)C \subset \lambda C + \mu C$ est facile. On montrer que $\lambda C + \mu C \subset (\lambda + \mu)C$. Le cas où $\lambda = \mu = 0$ est trivial. On peut supposer que l'un des coefficients n'est pas nul, $x_1, x_2 \in C$ alors

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_2).$$

D'après la convexité de C on a $(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_2) \in C$. ■

2.1.4 Simplexe

Définition 2.1.4 *On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ un ensemble*

$$\Delta_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^n. \ / \ \alpha_i \geq 0, \ i = 1, ..., n, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}.$$

2.1.5 Combinaison convexe

Définition 2.1.5 *On appelle combinaison convexe de n points $\{x_i\}_{i=1,...,n}$, tout point y s'écrivant*

$$y = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, \qquad avec \quad t \in \Delta_n.$$

Théorème 2.1.3 *Un sous ensemble C de E est convexe si et seulement si toute combinaison convexe de C reste dans C.*

Preuve.
$\Longrightarrow$) On suppose que C est convexe est on montre que toute combinaison convexe de C reste dans C, i. e. on montre que

$$\{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in C / x_i \in C, t_i > 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}.$$

Par récurrence pour $n = 1$, $x_1 \in C$, $t_1 = 1$ on a $\sum_{i=1}^{1} t_i x_i = x_1 \in C$.
On suppose que $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in C$ et on montre que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \in C$.
Comme $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ donc l'une de $t_i \neq 1$ alors on suppose que $t_1 \neq 1$ on obtient
$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1 - t_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1 - t_1)} t_i x_i.$

Alors $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1-t_1)} t_i x_i \in C$ car $x_i \in C$ et $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1-t_1)} t_i = 1$ d'après l'hypothèse de récurrence. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1-t_1) \sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1-t_1)} t_i x_i \in C$.
Donc tout combinaison convexe de C reste de C.
$\Longleftarrow$) Supposons que toute combinaison convexe de C reste dans C et on montre que C est convexe.
Soit $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$ alors $tx + (1-t)y \in C$ car t et $(1-t) \in \mathbb{R}_+$ et $t + 1 - t = 1$ donc C est convexe. ■

Définition 2.1.6 ***(Face).***
Soit C un ensemble convexe. Une partie convexe F de C est appelée face (ou partie extrémale) de C si

$$\forall (x,y) \in C \times C,\ \exists t \in [0,1]\ tx + (1-t)y \in F \Longrightarrow [x,y] \subset F.$$

On appelle point extrémal une face réduite un seul point.
$\bar{x} \in C$ est un point extrémal de C s'il n'est pas possible d'avoir $\bar{x} = ty + (1-t)z$ avec y et z de C et $t \in]0,1[$. On note $Ext(C)$ cette ensemble.

2.2 Enveloppe affine et enveloppe convexe

Définition 2.2.1 *Soit A une partie de E. On appelle enveloppe affine de A, notée $aff(A)$ l'intersection de tous les espaces affines contenant A.*
Autrement dit, c'est le plus petit ensemble affine contenant A.

Définition 2.2.2 *Soit $A \subset E$.*
L'enveloppe convexe de A, noté $conv(A)$ et l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A.
$conv(A)$ est un ensemble convexe et c'est le plus petit convexe contenant A.

Proposition 2.2.1 *Soit A une partie de E. Alors $conv(A)$ est égale à l'ensemble des combinaisons convexes d'élément de A, c'est à dire*

$$conv(A) = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ / \ n \geq 1,\ t_i \geq 0,\ x_i \in A,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}.$$

Preuve.
Soit C l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A. Alors C est convexe et contient A donc $conv(A) \subset C$.
Réciproquement, comme $conv(A)$ est convexe et contient A il contient toutes les combinaison convexe d'éléments de A. ■

Théorème 2.2.1 ***(Carthéodory).***
Soit A une partie d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors tout élément de $conv(A)$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de $(n+1)$ points de A.

Lemme 2.2.1 ***(Carthéodory).***
Dans un espace vectoriel de dimension n, toute combinaison convexe de m points, $m > n+1$, se ramène à une combinaison convexe de n+1 points au plus.

2.3 Propriétés topologiques des convexes

2.3.1 Ouverture et fermeture des convexes

Théorème 2.3.1 *Supposons que E est muni d'une norme d'espace vectoriel et donc la topologie associée. Soit C un ensemble convexe. Alors l'intérieur $\mathring{C}$ et son adhérence $\overline{C}$ sont aussi convexes.*

Preuve.
Si x et y appartiennent à $\overline{C}$ donc il existe des suites (x_n) et (y_n) des éléments de C convergeant respectivement vers x et y, et pour tout $t \in [0,1]$, $tx_n+(1-t)y_n$ appartient à C et converge vers $tx+(1-t)y$ qui appartient à $\overline{C}$, d'où la convexité de $\overline{C}$.
Si x et y appartiennent à $\mathring{C}$, il existe des boules $B(x,r), B(y,r)$ inclues dans C. Pour tout $t \in [0,1]$, on montre que la boule $B(tx+(1-t)y, t\rho)$ est inclue dans C, ce qui prouve que $tx+(1-t)y$ appartient à $\mathring{C}$ qui est donc convexe.
■

2.3.2 Enveloppe convexe fermé

Définition 2.3.1 *Soit A un sous ensemble quelconque de l'espace vectoriel normé E. On appelle enveloppe convexe fermée de A et on note $\overline{conv}(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes fermés contenant A. Donc c'est le plus petit convexe fermée contenant A.*

Proposition 2.3.1 *L'enveloppe convexe fermée de A égale à l'adhérence de son enveloppe convexe ordinaire c'est à dire $\overline{conv}(A) = \overline{conv(A)}$.*

2.4 Opérations sur les ensembles convexes

2.4.1 Projection sur un convexe fermé

Théorème 2.4.1 *Soit x un élément d'un espace de Hilbert H et C un sous-ensemble convexe fermé de H. Il existe un unique point $y \in C$ tel que*

$$\|y - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|, \tag{2.1}$$

cet élément y est caractérisé par l'inéquation variationnelle

$$\forall z \in C \qquad \langle x - y, z - y \rangle \leq 0. \tag{2.2}$$

L'élément y est appelé projection de x sur C et sera noté $P_C(x)$.

Preuve.

Pour commencer, on va montrer que (2.1) et (2.2) sont équivalents. En supposant d'abord (2.1) et en considérant un quelconque $z \in C$ fixé, les éléments de la forme $z_t = (1-t)y + tz$, $t \in]0,1[$ appartiennent aussi à C. Donc

$$0 \geq \frac{(\|y - x\|^2 - \|z_t - x\|^2)}{t} = -t\|z - y\|^2 + 2\langle x - y, z - y \rangle$$

en ayant développé le carré $\|z_t - x\|^2$ par rapport à t. En faisant tendre t vers 0, on obtient(2.2). Réciproquement, si (2.2) est vrai, alors, pour tout $z \in C$,

$$0 \geq \langle y - x, y - z \rangle = \|y - x\|^2 + \langle y - x, x - z \rangle$$

d'où

$$\|y - x\|^2 \leq \langle y - x, z - x \rangle \leq \|y - x\| \|z - x\|$$

par l'inégalité de Cauchy Schwartz, et finalement

$$\|y - x\| \leq \|z - x\|$$

en simplifiant par $\|y - x\|$ (à noter que cette inégalité est trivialement vérifiée si $\|y - x\| = 0$) on obtient donc (2.1).

Considérons maintenant le problème d'existence de y. Soit $\beta = \inf_{z \in C} \|x - z\|$. Soit $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante, c'est-à-dire une suite telle que $\|z_k - x\|^2 < \beta^2 + \frac{1}{k}$. Pour deux valeurs l et m de k, on utilise l'égalité de parallélogramme

$$\begin{aligned} \|z_l - z_m\|^2 &= \|(z_l - x) - (z_m - x)\|^2 \\ &= 2\|z_l - x\|^2 + 2\|z_m - x\|^2 - \|(z_l - x) + (z_m - x)\|^2 \\ &= 2\|z_l - x\|^2 + 2\|z_m - x\|^2 - 4\|x - \frac{z_l + z_m}{2}\|^2. \end{aligned}$$

Comme C est convexe, $\dfrac{z_l - z_m}{2}$ appartient à C et le dernier terme est inférieur à $-4\beta^2$ par définition de β. On déduit donc que

$$\|z_l - z_m\|^2 \leq 2(\beta^2 + \frac{1}{l}) + 2(\beta^2 + \frac{1}{m}) - 4\beta^2 = 2(\frac{1}{l} + \frac{1}{m}).$$

La suite (z_k) est donc une suite de Cauchy et par conséquent elle converge. Soit y sa limite qui appartient à C puisque C est fermé. Donc $\|y - x\| \geq \beta$ mais par passage à la limite sur la suite (z_k) on a aussi $\|y - x\| \leq \beta$ et par conséquent y réalise la distance minimale β de x à C.
Il reste enfin à montrer l'unicité d'un tel y. Supposons qu'il existe deux points y et y' vérifiant(2.1) et donc aussi (2.2) dont on a montré que c'est une condition équivalente. On utilise cette inéquation variationnelle pour y en faisant $z = y$, mais aussi pour y' en faisant $z = y'$, et on additionne les deux inégalités ainsi obtenues. On obtient $\|y - y'\|^2 \leq 0$, Ce qui montre l'égalité de y et y'. ■

2.4.2 Propriétés de la projection

Théorème 2.4.2 *La projection P_C est un opérateur Lipschitzien de constante 1 et monotone, c'est-à-dire que*

$$\|P_C(x') - P_C(x)\| \leq \|x' - x\|, \tag{2.3}$$

$$\langle P_C(x') - P_C(x), x' - x\rangle \geq 0. \tag{2.4}$$

Preuve.
Utilisons la caractérisation (2.2) de la projection pour $y = P_C(x)$ *et* $z = P_C(x')$

$$\langle P_C(x') - P_C(x), x - P_C(x)\rangle \leq 0.$$

Puis additionnons cette inéquation avec celle analogue qui est obtenue en inversant le rôle de x et x'. On obtient après quelques manipulations

$$\langle P_C(x') - P_C(x), x' - x\rangle \geq \|P_C(x') - P_C(x)\|^2. \tag{2.5}$$

Cette inéquation montre d'une part que P_C est bien monotone, et d'autre part, après application de l'inégalité de Schwartz et simplication par $\|P_C(x') - P_C(x)\|$ (si cette quantité est nulle le résultat est trivial), que (2.3) est aussi vérifiée. ■

2.4.3 Séparation des convexes

Un outil essentiel en analyse convexe est le théorème de Hahn Banach sur la séparation des ensembles. Étant donné un espace de Hilbert H. On appelle forme linéaire sur E tout application linéaire continue de E sur $\mathbb{R}$.
On note $E' = L(E, \mathbb{R})$ est le dual algébrique de E. Soit H un espace de Hilbert.

Définition 2.4.1 ***(Hyperplan).***
Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$K = \{x \in H,\ f(x) = \alpha\}$$

où $f \in E'$ est une forme linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que K est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Théorème 2.4.3 ***(Séparation d'un convexe et un point).***
Soit C un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert H et $x \notin C$. Alors il existe $r \in E$ tel que

$$\sup_{z \in C} \langle r, z\rangle < \langle r, x\rangle. \tag{2.5}$$

Preuve.
Soit y la projection de x sur C. Bien entendu, il suffit de prendre $r = x - y$ qui est non nul si $x \neq C$, et de vérifier avec ce r l'inégalité. L'inéquation variationnelle (2.2) s'écrit encore (avec $y = x - r$)

$$z \in C, \langle r, z - x + r\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle r, z\rangle \leq \langle r, x\rangle - \|r\|^2.$$

Le résultat annoncé en découle immédiatement étant donné que $r \neq 0$. ■

Définition 2.4.2 *Soient C_1 et C_2 deux convexes disjoints non vide d'un espace normé E.*
On dit que K l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est séparer C_1 et C_2 au sens large si

$$\forall x \in C_1, \forall y \in C_2 : f(x) \leq \alpha \leq f(y).$$

On dit que H l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est séparer C_1 et C_2 au sens strict si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in C_1, \forall y \in C_2 : f(x) \leq \alpha - \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon \leq f(y).$$

Théorème 2.4.4 ***(Séparation de deux convexes).***
Soit H un espace de Hilbert et C_1 et C_2 deux convexes non vides disjoints de H l'un étant fermé et l'autre étant compact. Alors, on peut sépare strictement C_1et C_2.

Preuve.
On a C_1 et C_2 sont disjoints, alors considérons

$$C_1 - C_2 = \{x_1 - x_2 / x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}.$$

Alors $C_1 - C_2$ est convexe (somme deux convexes), fermé (somme d'un fermé et d'un compact), et ne contient pas 0 (l'origine). D'après le théorème de séparation d'un convexe et un point pour ce sous ensemble et ce point, il existe $r \in H$ tel que

$$\langle r, 0\rangle = 0 > \sup_{(x_1,x_2)\in C_1\times C_2} \langle r, x_1 - x_2\rangle.$$

On en déduit

$$\inf_{x_2\in C_2} \langle r, x_2\rangle > \sup_{x_1\in C_1} \langle r, x_1\rangle.$$

$\blacksquare$

Lemme 2.4.1 *soit $C \subset E$, un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin C$. Alors $\exists f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in C$. En particulier l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$.*

Théorème 2.4.5 ***(Théorème de Hahn-Banach première forme géométrique).***
Soient A et B deux convexes disjoints non vide d'un espace normé E. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé $[f = \alpha]$ qui séparé A et B au sens large.

Preuve.
On pose $C = A - B$ de sorte que C est convexe. Alors d'après le lemme précédent $\exists f \in E'$ tel que $f(z) < 0, \forall z \in A - B$, c'est-à-dire $f(x) \leq f(y)$ $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. On fixe α tel que

$$\sup_{x\in A} f(z) \leq \alpha \leq \inf_{y\in B} f(y)$$

et donc l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ qui séparé A et B au sens large. $\blacksquare$

Théorème 2.4.6 ***(Théorème de Hahn-Banach deuxième forme géométrique).***
Soient A et B deux convexes disjoints non vide d'un espace normé E. On suppose que A est ouvert et B compact. Alors il existe un hyperplan fermé $[f = \alpha]$ qui séparé A et B au sens strict.

Preuve.
On pose

$$A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon) = \bigcup_{x\in A} (x + B(0,\varepsilon)) = \bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon),$$
$$B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon) = \bigcup_{x\in B} (x + B(0,\varepsilon)) = \bigcup_{x\in B} B(x,\varepsilon).$$

De sort que A_ε et B_ε sont deux ensemble convexes ouverts, non vide disjoints. Alors d'après théorème de Hahn-Banach première forme géométrique, il existe un hyperplan fermé $[f = \alpha]$ qui séparé A_ε et B_ε au sens large. On a donc

$$f(x) \leq \alpha, \forall x \in A_\varepsilon \quad \text{et} \quad f(y) \geq \alpha, \forall y \in B_\varepsilon$$

i. e.

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \quad \forall x \in A, \forall z \in B(0,1).$$

$$f(y + \varepsilon z) \geq \alpha \quad \forall y \in B, \forall z \in B(0,1).$$

Alors

$$f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha \leq f(y) + \varepsilon f(z) \quad \forall z \in B(0,1).$$

Donc

$$f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon f(z) \quad \forall - z \in B(0,1).$$

$$f(x) + \varepsilon \sup_{\|z\| \leq 1} f(z) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon \sup_{\|z\| \leq 1} f(z)$$

$$f(x) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon \|f\|.$$

Alors on déduire que

$$\begin{cases} f(x) \leq \alpha - \varepsilon' & \forall x \in A, \\ f(y) \geq \alpha - \varepsilon' & \forall y \in B. \end{cases}$$

Alors l'hyperplan fermé $[f = \alpha]$ séparé A et B au sans strict. ∎

2.5 Cône convexe

2.5.1 Premières définitions

Définition 2.5.1 *Un sous ensemble C est un cône si*

$$\forall x \in C, \forall \alpha \geq 0, \alpha x \in C.$$

Définition 2.5.2 *L'enveloppe cônique d'un sous ensemble $A \subset E$ quelconque que l'on note $cone(A)$ est le plus petit cône convexe (au sens de l'inclusion) qui contient A.*

Définition 2.5.3 *On appelle combinaison cônique de E tout élément $x \in E$ tel que*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \ \text{ ou } m \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_i \geq 0, \ x_i \in E.$$

Proposition 2.5.1 *1) Un sous ensemble est un cône convexe si et seulement s'il contient toute les combinaisons conique de ses éléments.*
2) Si A est une partie de E, alors

$$c\hat{o}ne(A) = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \ \ / \ \ m \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_i \geq 0, \ x_i \in A\}.$$

Définition 2.5.4 *L'enveloppe cônique fermée d'un sous-ensemble $A \subset E$ quelconque qu'on note $\overline{cone}(A)$ est le plus petit cône convexe fermé (au sens de l'inclusion) qui contient A.*

2.6 Applications

Dimension 3, Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarqua, En mélangeant son café au lait, que le point central de la surface du liquide, au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillère, restait immobile. Il examina le problème de cette façon : à tout moment, il y a un point de la surface qui n'a pas changé de place. En dimension 2, il formula ce résultat autrement : je prends une feuille horizontale, une autre feuille identique que je froisse et que je replace en l'applatissant sur l'autre. Un point de la feuille froissée est á la même place que sur l'autre feuille. En dimension n, il obtient le résultat suivant

Théorème 2.6.1 ***(Point fixe de Brouwer).***
Soit C un sous-ensemble compact, convexe et non-vide de $\mathbb{R}^n$ et supposons que f soit une fonction continue de C dans C. Alors f admet un point fixe. En particulier, si $B_n^{'}$ désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, alors toute application continue $f : B_n^{'} \to B_n^{'}$ admet (au moins) un point fixe.

Pour la démonstration directe de ce théorème Voir [8]

Théorème 2.6.2 ***(Point fixe de Shauder (1930)).***
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie non vide de E, compact et convexe. Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T a un point fixe.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$ et $C \subset \cup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$. D'après la compacité de C il existe $\{x_1, ..., x_n\} \subset C$ telle que $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Soit $\{\phi\}_{i=1}^{n}$ une partition continue et positive de l'unité de C tel que $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$, $\forall x \in C$ et

$$\sup(\phi_i) \subset B(x_i, \varepsilon) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

On considère l'application $T_\varepsilon : C \to C$ définie par

$$T_\varepsilon = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i \ \forall \ x \in C.$$

D'après la continuité des fonctions ϕ_i, T et la convexité de C, T_ε est continue et $T_\varepsilon(C) \subset C$. $T_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i \ \forall x \in C$ donc $T_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x)) = 1$ (car $T(x) \in C$ et $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in C$), et comme C convexe alors $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i \in C \ \forall x_i \in C$ (C contient tout les combinaison convexes de ses éléments). De plus
$T_\varepsilon : C \to C_\varepsilon = conv\{x_1, ..., x_n\} \subset C$ car $T_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i, \forall x \in \{x_1, ..., x_n\}$ $x \in C$, alors $T_\varepsilon(\phi) \subset conv\{x_1, ..., x_n\} \subset C$.
Maintenant, Soit $x \in C$, alors $T(x) \in C$ et donc

$$\begin{aligned}
|T(x) - T_\varepsilon(x)| &= |\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))T(x)| \\
&\leq |\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))(x_i - T(x))| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))|x_i - T(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci entraine que

$$\sup\{|T(x) - T_\varepsilon(x)| : \ x \in C\} \leq \varepsilon.$$

Introduisons l'application continue

$$T|_{C_\varepsilon} : C_\varepsilon \to C_\varepsilon.$$

Soit F_ε un espace vectoriel engendré par $\{x_1, ..., x_n\}$, alors $dimF_\varepsilon = n$ et comme $C_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ est un ensemble convexe fermé et borné, alors d'après le théorème de Brouwer, il existe $x_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $T_\varepsilon(x_{\varepsilon_n}) = x_\varepsilon$. Posons $\{\varepsilon_n = 1/n\}_{n \in N}$. Puisque $x_{\varepsilon_n} = T_\varepsilon(x_{\varepsilon_n})$. D'après la compacité de C, on en déduit que
$\{x_{\varepsilon_n} : n \in N\} \subset C$.
Il existe un sous suite $\{x_{\varepsilon_{n,m}} : m \in N\}$ convergente vers $x^* \in C$. Montrons que $x^* = T(x^*)$.
Il est clair que $T(x_{\varepsilon_{n,m}}) \to T(x^*)(car\ T\ continue)$. On a

$$\begin{aligned}
T(x_{\varepsilon_{n,m}}) &= T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - x_{\varepsilon_{n,m}} + x_{\varepsilon_{n,m}} \\
&= T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}) + T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - x^*\| &= \|T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}) + T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}) - x^*\| \\
&\leq \|T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}})\| + \|x_{\varepsilon_{n,m}} - x^*\| \\
&\leq \varepsilon_{n,m} + \|x_{\varepsilon_{n,m}} - x^*\|.
\end{aligned}$$

Un passage à la limite on trouve $\|T(x^*) - x^*\| \leq 0$ car

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{n,m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varepsilon_{n,m}} = x^*.$$

Donc $T(x^*) = x^*$. ■

Théorème 2.6.3 ***(Point fixe de Banach-méthode des approximations successives de Picard).***
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application tel que

$$d(f(v_1), f(v_2)) \leq Kd(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in E \text{ avec } K<1.$$

Alors f admet un point fixe unique, $v = f(v)$.

Théorème 2.6.4 ***(Stampacchia).***
Soit H un espace de Hilbert, C un convexe fermé non vide. Soit $a : H\times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive, i. e.

$$\exists\alpha > 0, \exists K > 0, \forall u, v \in H, \quad |a(u, v)| \leq K\|u\|\|v\|, \quad a(u, v) \geq \alpha\|u\|^2.$$

Alors pour tout $\varphi \in H^{'}$, il existe $u \in C$ tel que

$$\forall v \in C, a(u, v - u) \geq \langle\varphi, v - u\rangle_{H',H}.$$

Preuve.
D'après le théorème de représentation de Riesz- Fréchet, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\langle\varphi, v\rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

D'autre part, pour tout $u \in H$ fixé, l'application $v \to a(u, v)$ est une forme linéaire continue sur H, et grace au théorème de représentation de Riesz-Fréchet il existe un élément de H noté Au, tel que $a(u, v) = (Au, v)$ $\forall v \in H$. Il est claire que A est un opérateur linéaire de H dans H tel que

$$\langle Au, u\rangle \geq \alpha\|u\|^2$$

et

$$\|Au\|^2 = \langle Au, u\rangle = a(u, Au) \leq K\|u\| \, \|Au\| \leq K\|Au\| \, \|u\|.$$

Donc $\|Au\| \leq \sqrt{K}\|u\|$.
Soit $u \in C$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall v \in C, a(u, v - u) \geq \varphi(v - u) &\iff \forall v \in C, \langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle \\
&\iff \forall v \in C, \forall\rho > 0, \langle\rho f - \rho Au, v - u\rangle \leq 0 \\
&\iff \forall v \in C, \forall\rho > 0, \langle(\rho f - \rho Au + u) - u, v - u\rangle \leq 0 \\
&\iff u = P_C(\rho f - \rho Au + u).
\end{aligned}$$

Où P_C est l'opérateur de projection sur C. On s'est donc ramené à une équation de point fixe. Pour $v \in C$, on pose Alors

$$S_v = P_C(\rho f - \rho A u + v).$$

Adaptons ρ pour que S_v soit contractante. Soient $v_1, v_2 \in C$.

$$\begin{aligned}
\|Sv_1 - Sv_2\|^2 &= \|P_C(v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2))\|^2. \\
&\leq \|v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2)\|^2. \\
&= \|v_1 - v_2\| - 2\rho\langle v_1 - v_2, Av_1 - Av_2\rangle + \rho^2\|Av_1 - Av_2\|^2. \\
&\leq \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\alpha\rho + \rho^2 C).
\end{aligned}$$

Pour $0 < \rho < \frac{2\alpha}{K}$, on a $1 - 2\alpha\rho + \rho^2 K < 1$ donc S est contractante.
C est fermé dans un complet donc complet. Par théorème du point fixe de Banach-méthode des approximations successives de Picard, On a donc un unique point fixe $u \in C$ de S qui est bien le u recherché. ■

CHAPITRE 3

LES FONCTIONS CONVEXES

Dans ce chapitre, nous présentons des notions de base, quelques propriétés des fonctions convexes et une application à l'optimisation convexe. Nous basons sur les références suivantes [1, 2, 5, 7-11, 13, 20, 21].

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 ***(Fonction convexe et fonction concave).***
Soit C un convexe non vide d'un espace vectoriel réel E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$. On dite que f convexe sur C si

$$\forall x, y \in C, \forall t \in]0,1[, f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dite que f concave si $(-f)$est convexe.

Définition 3.1.2 ***(Épigraphe).***
L'épigraphe de f est la partie de l'espace produit $E \times \mathbb{R}$ qui est au-dessus de son graphe i. e.

$$Ep(f) = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha\}.$$

Théorème 3.1.1 *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors f est convexe si et seulement si $Ep(f)$ est convexe.*

Preuve.
$\Rightarrow$) Soit $(x, \alpha), (y, \beta) \in Ep(f)$ et $t \in]0, 1[$ donc il vient que

$$t(x, \alpha) + (1-t)(y, \beta) = (tx + (1-t)y, t\alpha + (1-t)\beta),$$

et comme f convexe il vient que

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &\leq tf(x)+(1-t)f(y) \\ &\leq t\alpha+(1-t)\beta. \end{aligned}$$

Donc $t(x,\alpha)+(1-t)(y,\beta) \in Ep(f)$.
$\Leftarrow$) Soient $x, y \in E$ et $t \in]0;1[$ on a$(x, f(x)), (y, f(y)) \in Ep(f)$ car $f(x) \leq f(x)$ et $f(y) \leq f(y)$, et comme $Ep(f)$ est convexe il vient que

$$t(x,f(x))+(1-t)(y,f(y)) \in Ep(f).$$

Tant que $t(x,f(x))+(1-t)(y,f(y)) = (tx+(1-t)y, tf(x)+(1-t)f(y))$, donc $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$. D'où la convexité de f. ■

Exemple 3.1.1 • *les fonctions f, g définis de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = |x|$ sont convexes.*
• *les fonctions affines (les fonctions affines sont des fonctions qui associées a $x \longmapsto ax+b$) sont à la fois convexes est concaves.*

Théorème 3.1.2 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ et $t_1, t_2, ..., t_n \in]0,1[$ tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ alors*

$$f(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i).$$

Preuve.
On montre par récurrence.
Pour $n = 2$, l'inégalité est vrai (c'est la définition de la convexité).
Supposons que l'inégalité de Jensen est vrai pour n et on montre qu'elle vrai pour $n+1$.
Soient $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in I$ et $t_1, t_2, ..., t_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$.
- Si $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 0$, c'est que $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$ et $t_{n+1} = 1$, et on a bien l'inégalité voulue.
- Sinon on pose $S = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$. On peut écrire
$\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i x_i = S\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i}{S} + t_{n+1}x_{n+1}$ et S et t_{n+1} sont positifs, de somme 1.

Donc par définition de la convexité $f(\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i x_i) \leq S \times f(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i}{S}) + t_{n+1} f(x_{n+1})$.
Or, si on pose pour chaque $i \in [1,n], t_i' = \dfrac{t_i}{S}$, les t_i' sont positifs et de somme

1, donc par hypothèse de récurrence $f(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{t_i}{S}x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{t_i}{S}f(x_i)$.
D'où finalement

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i) &\leq S\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{S}f(x_i) + t_{n+1}f(x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i). \end{aligned}$$

D'où ce qu'il fallait démontrer. ■

3.2 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 3.2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors f est convexe si la fonction*

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

est croissante sur $I\backslash\{x_0\}$. En particulier, on a l'inégalité

$$a<b<c \longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Lemme 3.2.1 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point de I.*

Théorème 3.2.2 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est convexe sur I si et seulement si $f^{'}$ est croissante sur I.*

Preuve.
$\Longrightarrow$) Supposons que f est convexe et fixant $a<b$ avec $a, b \in I$. Par le théorème précédent on a pour tout $a<x<b$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Par la définition de la dérivée on a

$$f^{'}(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

De la même façon on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f^{'}(b).$$

Donc $f^{'}(a) \leq f^{'}(b)$.
$\Longleftarrow$) Supposons que $f^{'}$ est croissante sur I et fixons $x_1 < x_2$avec $x_1, x_2 \in I$ et $t \in]0, 1[$.
Alors $x_1 < x_t < x_1$ pour $x_t = tx_1 + (1-t)x_2$.
Par le théorème d'accroissement finis $\exists\ c_1, c_2$ tels que $x_1 < c_1 < x_t < c_2 < x_2$ et

$$f(x_t) - f(x_1) = f^{'}(c_1)(x_t - x_1) = f^{'}(c_1)(1-t)(x_2 - x_1),$$
$$f(x_t) - f(x_2) = f^{'}(c_2)(x_t - x_2) = f^{'}(c_2)t(x_1 - x_2).$$

Alors on peut écrire

$$tf(x_t) - tf(x_1) = f^{'}(c_1)t(1-t)(x_2 - x_1),$$

$$(1-t)f(x_t) - (1-t)f(x_2) = f^{'}(c_2)t(1-t)(x_2 - x_1).$$

Car $f^{'}(c_1) \leq f^{'}(c_2)$ en ajoutons ces inégalités on obtient

$$f(x_t) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

d'où la convexité de f. ■

Théorème 3.2.3 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors f est convexe sur I si et seulement si $f^{''}(x) \geq 0\ \forall x \in I$.*

Preuve.
On a f convexe sur I si et seulement si $f^{'}$ croissante sur I i. e. $f^{''}(x) \geq 0\ \forall x \in I$. ■

3.3 Opérations préservant la convexité des fonctions

Proposition 3.3.1 *Soit $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convexes pour tout $i \in J$. Alors*
1) Le supermum $\sup_{i\in J} f_i(x)$ est convexe.
2) La somme $\sum_{i\in J} f_i(x)$ est convexe.
3) La multiplication par un scalaire positif est convexe.

3.4 Fonction à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$

Définition 3.4.1 ***(Domaine effectif).***
Soit E un espace vectoriel topologique réel et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de f qu'on note $D(f)$ l'ensemble

$$D(f) = \{x \in E, f(x) < +\infty\}.$$

Définition 3.4.2 *Soit* $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f *est convexe si et seulement si* $\forall x, y \in E$ $\forall t \in [0,1]$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(x) < \alpha$ *et* $f(y) < \beta$ *nous avons*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t\alpha + (1-t)\beta.$$

Remarque 3.4.1 *On peut définir la convexité de* f *par*

$$\forall x, y \in E, \ \forall t \in [0,1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

à condition que le second membre soit bien définit.

Proposition 3.4.1 *Le domaine effectif d'une fonction convexe est convexe.*

Preuve.
Soient $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, $x, y \in D(f)$ et $t \in [0,1]$.

$$x \in D(f) \Longleftrightarrow f(x) < +\infty \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \ f(x) < \alpha.$$
$$y \in D(f) \Longleftrightarrow f(y) < +\infty \Longrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}, \ f(y) < \beta.$$

Car f est convexe on a $f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y) < t\alpha+(1-t)\beta < +\infty$.
D'où la convexité de $D(f)$. ■

Définition 3.4.3 *On dit que la fonction* f *est propre si* $f : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ *et* $f \not\equiv +\infty$.

Définition 3.4.4 *Soit* A *un sous ensemble non vide de* E *la fonction indicatrice de* A *est définie par*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in A \\ +\infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 3.4.1 χ_A *est convexe si et seulement si* A *est convexe.*

Preuve.
$\chi_A : E \longrightarrow]-\infty, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$.
$\Longrightarrow$) Supposons que χ_A est convexe i. e. $\forall x, y \in E$ $\forall t \in [0,1]$ $\chi_A(tx + (1-t)y \leq t\chi_A(x) + (1-t)\chi_A(y))$. Le second membre sera bien définit car $\chi_A(x) \neq -\infty$ $\forall x \in E$.
$\Longleftarrow$) Supposons que A est convexe, soient $x, y \in E$ et $t \in [0,1]$.
On a si $x \in A$ et $y \in A$, $\chi_A(x) = \chi_A(y) = 0$ donc $t\chi_A(x) + (1-t)\chi_A(y) = 0$ et $tx + (1-t)y \in A$ (car A est convexe) i. e. $\chi_A(tx + (1-t)y) = 0$.
Si $x \notin A$ on a $\chi_A(x) = +\infty$ donc $t\chi_A(x) + (1-t)\chi_A(y) = +\infty$ d'ou $\chi_A(tx + (1-t)y) \leq t\chi_A(x) + (1-t)\chi_A(y) = +\infty$. ■

3.5 Fonction conjuguée

Définition 3.5.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction. Sa conjuguée est définie par*

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x\rangle - f(x)\}.$$

L'application $f \longmapsto f^*$ est appelée transformation de Lengendre-Fenchel. La fonction f^* est applée conjuguée, transformée de Fenchel ou transformée de Lengendre-Fenchel de f.

Proposition 3.5.1 *Pour toute fonction f, f^*est convexe, fermée.*

Proposition 3.5.2 *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y\rangle.$$

3.6 Fonctions semi-continue inférieurement

Définition 3.6.1 *Une fonction f est dite semi-continue inférieurement (s. c. i.) en un point x si l'on a*

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y),$$

i. e. pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

$$f(x) \leq \lim_{k \to +\infty} \inf f(x_k).$$

Proposition 3.6.1 *une fonction f est semi-continue inférieurement si son épigraphe est un ensemble fermé.*

Preuve.
Prenons une suite $(x_k, \alpha_k) \subset Ep(f)$ converge vers (x, α) puisque $f(x_k) \leq \alpha_k$ et que $f(x) \leq \lim_{k \to +\infty} \inf(x_k) \leq \lim_{k \to +\infty} \alpha_k = \alpha$ du fait que f est s. c. i on déduit que $(x, \alpha) \in Ep(f)$, donc $Ep(f)$ est fermé. ■

3.7 Différentiabilité des fonctions convexes

Définition 3.7.1 ***(Dérivée directionnelle).***
Soit E un espace vectoriel et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$.
On appelle dérivée directionnelle au point x_0 dans la direction $v \in E$ la limite quand elle existe notée $f^{'}(x_0, v)$ définit par

$$f^{'}(x_0, v) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(x_0) + \varepsilon v) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

Définition 3.7.2 *Soit E un espace vectoriel normé et $E^{'}$ son dual. $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R}$.*
On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux s'il existe $x^{'} \in E^{'}$ tel que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t} = \langle x^{'}, x \rangle \ \forall x \in E.$$

$x^{'}$ est défini d'une façon unique est appelé la différentiabilité au sens de Gâteaux a f au point x_0(gradient de f au point x_0) et noté $\nabla f(x_0)$.

Définition 3.7.3 *Une fonction $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est dite Fréchet différentiable si et seulement si $\exists \ x^{'} \in E^{'}$ tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x^{'}, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

$x^{'}$ est défini d'une façon unique par la relation précédente est appelé la différentielle de f au sens de Fréchet au point x_0 et noté $df(x_0)$ ou $f^{'}(x_0)$.

Remarque 3.7.1 *Si f est Fréchet différentiable alors f est Gateaux différentiable le contraire est faux.*

3.8 Sous-différentiabilité

Définition 3.8.1 *Soit E un espace vectoriel normé et $E^{'}$ son dual. Soient $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x_0 \in E$ tel que $f(x_0)$ finie ($f(x_0) \in \mathbb{R}$).*
Un point $x^{'} \in E^{'}$ est dit sous-gradient à f au point x_0 si seulement si

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x^{'}, x - x_0 \rangle.$$

L'ensemble de tous les points sous-gradients à f au point x_0 est appelé le sous différentiel de f au point x_0 est noté $\partial f(x_0)$ c. a. d.

$$\partial f(x_0) = \{x^{'} \in E^{'} / f(x) \geq f(x_0) + \langle x^{'}, x - x_0 \rangle \ \forall x \in E\}.$$

On dit que f est sous-différentiable au point x si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

3.9 Applications

3.9.1 Optimisation convexe

On se donne f une fonction objectif, et soit l'ensemble des contraintes $g_1, \cdots, g_k$ des fonctions propres convexes sur $\mathbb{R}^n$ et $h_1, \cdots, h_l$ des fonction affines sur $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème suivant

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \textit{minimiser} \ f(x) & \\ \textit{sous contraintes} & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \leq k \\ & h_j = 0, \quad \forall j \leq l \end{array}$$

On dit que (P) est un problème d'optimisation convexe. Dans la suite on appellera C la domaine de f et on supposera que le domaine des fonctions f_i contient C. Ce n'est pas vraiment une restriction, on peut toujours se ramener à cette situation en posant

$$f = +\infty$$

en dehors de $\bigcap D(f_i)$. Comme les fonctions g_i sont convexes et les fonctions h_i sont affines l'ensemble des x vérifiant les contraintes

$$g_i(x) \leq 0, \quad i \leq k \quad et\; h_i(x) = 0, \quad i \leq l \tag{3.1}$$

est convexe. On appelle valeur du problème la quantité

$$\alpha = \inf\{f(x); x\; vérifie\; (3.1)\}$$

et on dit que x est une solution de (P) si x vérifie les contraintes (3.1) et

$$f(x) = \alpha.$$

Le but de cette application est de trouver des solutions du problème (P). Faisons d'abord quelques remarques sur la minimisation sans contraintes d'une fonction convexe.
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe. Alors f atteint son minimum en x si et seulement si $0 \in \partial f(x)$ En effet, par définition du sous-gradient $0 \in \partial f(x)$ si et seulement si

$$f(x') \geq f(x),\; \forall x' \in \mathbb{R}^n.$$

Remarquons aussi que f minorée si et seulement si $0 \in D(f^*)$. Enfin f atteint son minimum si et seulement si $\partial f^*(0) \neq \emptyset$, ce qui est le cas en particulier si 0 est dans l'intérieur relatif du domaine de f^*.
Par exemple $f : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Elle est minorée mais n'atteint pas son minimum. Sa transformée de Legendre est donnée par

$$f^* : y \longmapsto \begin{cases} y\; ln(y) - y & y \geq 0 \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

En particulier 0 est au bord du domaine de f^* et la dérivée à droite de f^* en 0 vaut $-\infty$ ce qui montre que le sous-gradient de f^* en 0 est vide.

Définition 3.9.1 *Le Lagrangien associé au problème (P) est la fonction*

$$L : (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \longmapsto \begin{cases} f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i(x), & si\; \lambda_i \geq 0 \\ -\infty & sinon. \end{cases}$$

Remarquons que la fonction L est convexe en x et concave en (λ, μ).

Définition 3.9.2 *Supposons que la valeur du problème (P) n'est pas $-\infty$. On dit que $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ est un vecteur de Karush-Kuhn-Tucker (noté KKT dans la suite)*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \{L(x, \lambda, \mu)\} = \inf\{f(x); x \ \ v\acute{e}rifi\acute{e} \ \ (3.1)\}.$$

Ceci implique en particulier que les λ_i sont positifs.

Remarque 3.9.1 *Soit (λ, μ) tel que les λ_i soient positifs. Si x vérifie les contraintes (3.1) alors*

$$L(x, \lambda, \mu) \leq f(x)$$

Par conséquent (λ, μ) est vecteur KKT si et seulement si

$$L(x, \lambda, \mu) \geq \{f(x'), x' \text{ v\'{e}}rifi\text{\'{e}}\ (3.1)\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Il suffit même de vérifier cette inégalité pour les x du domaine C de f puisque $L(x, \lambda, \mu) = +\infty$ en dehors.

Proposition 3.9.1 *Soient $(x_,\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, x est solution de (P) et (λ, μ) est un vecteur KKT si et seulement si x vérifie les contrainte (3.1) et les conditions*

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \quad \forall i \leq k$$
$$0 \in \partial(f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i).$$

Preuve.
Si x est solution de (P) et (λ, μ) un vecteur KKT alors

$$L(x, \lambda, \mu) \geq \alpha = f(x).$$

Mais x vérifie aussi les contrainte (3.1). On obtient donc

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) \geq 0$$
$$\lambda_i g_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

ce qui implique

$$\lambda_i f_i(x) = 0, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

De plus x minimise la fonction

$$f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i$$

qui est convexe. On a donc

$$0 \in \partial(f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i)(x).$$

La réciproque se fait du manière similaire. ■
Donc pour chaque contrainte en inégalité, soit x sature la contrainte, soit le multiplicateur correspondant est nul. La deuxième condition se simplifie en

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i(x) = 0.$$

Lorsque les fonctions $f, g_1, ..., g_k$ sont dérivable en x. Lorsque les fonctions ne sont pas dérivables, on a quand même dans la plupart des cas

$$\partial(f + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i + \sum_{i=1}^{l} \mu_i h_i)(x) = \partial f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \partial g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \partial h_i(x).$$

Définition 3.9.3 *Soit C un convexe, on appelle intérieur relatif de C noté $ri(C)$, l'intérieur de C vu comme sous ensemble de $aff(C)$, c'est à dire l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe un ouvert U tel que*

$$x \in U \text{ et } U \cap aff(C) \subset C.$$

Théorème 3.9.1 *On suppose que la valeur du problème (P) n'est pas $-\infty$ et que la condition suivante, dite condition de Slater, est vérifiée il existe x dans l'intérieur relatif de C vérifiant les contraintes (3.1) et vérifiant de plus*

$$g_i(x) < 0.$$

pour tout i tel que la fonction g_i ne soit pas affine sur C. Alors le problème (P) admet un vecteur KKT.

La démonstraion repose sur le lemme de séparation suivant

Lemme 3.9.1 *Soit K un ensemble convexe quelconque et soit C un cône convexe engendré par un nombre fini de vecteurs. Si C ne rencontre pas l'intérieur relatif de K on peut séparer K de C au sens suivant il existe $y \in C^*$*

$$\langle y, x \rangle \leq 0, \quad \forall x \in K.$$

et tel que l'inégalité précédente soit stricte pour au moins un élément de K.

Preuve. (Théorème 3.9.1)
On commence par prouver le théorème quand il n'y a pas de contraintes en égalité. On considère donc le problème

$$(P_0) \quad \begin{array}{l} \textit{minimiser } f(x) \\ \textit{sous contraintes} \quad g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \leq k. \end{array}$$

On suppose que $g_1, ..., g_r$ sont convexes et non-affines, et que $g_{r+1}, ..., g_k$ sont affines. Soit K l'ensemble des $(t, y) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{aligned} &f(x) - \alpha < t \\ &g_i(x) < y_i, \ \ 1 \leq i \leq r \\ &g_i(x) = y_i, \ \ r+1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

L'ensemble K n'est pas vide, puisque pour tout x dans C et pour tout $\epsilon > 0$, le vecteur (t, y) donné par

$$\begin{aligned} &t = f(x) - \alpha + \epsilon \\ &y_i = g_i(x) + \epsilon, \ \ 1 \leq i \leq r \\ &y_i = g_i(x), \qquad r+1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

appartient à K. En utilisant la convexité des g_i pour $i \leq r$ et le caractère affine des g_i pour $i \geq r+1$ on montre facilement que K est convexe. De plus par définition de α le convexe K n'intersecte pas

$$C = (\mathbb{R}_-)^{k+1} = pos(-e_1, ..., -e_{k+1})$$

où les e_i sont les vecteurs de la base canonique. Comme $C^* = C$ le lemme précédent montre qu'il existe $(\tau, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ à coordonnées positives et vérifiant

$$\tau t + \langle y, \lambda \rangle \geq 0, \tag{3.2}$$

pour tout $(t, y) \in K$, et avec une inégalité stricte pour au moins un élément de K. D'après ce qui précède cette inégalité implique

$$\tau(f(x) - \alpha + \epsilon) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(g_i(x) + \epsilon) + \sum_{i=r+1}^{k} h_i(x) \geq 0,$$

pour tout $x \in C$ et pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient

$$\tau f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) \geq \tau\alpha.$$

pour $x \in C$. Si $\tau > 0$ on en déduit que $\frac{1}{\tau}\lambda$ est un vecteur KKT pour le problème (P_0). Supposons $\tau = 0$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \neq 0$. On obtient

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) \geq 0$$

pour tout $x \in C$. Or, d'après l'hypothèse, il existe x satisfaisant $g_i(x) \leq 0$ pour tout $i \leq k$, avec inégalité stricte si $i \leq r$. Comme les $(\lambda_i)_{i\leq k}$ sont tous négatifs et que l'un au moins des $(\lambda_i)_{i\leq r}$ est strictement négatif, on en déduit

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) < 0.$$

On obtient donc une contradiction. Supposons maintenant $(\tau, \lambda_1, ..., \lambda_r) = 0$. L'inégalité (3.2) se ramène alors à

$$\sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i g_i(x) \geq 0, \tag{3.3}$$

pour tout $x \in C$ avec inégalité stricte pour au moins un x de C. La fonction $g = \sum_{i\geq r+1} \lambda_i g_i$ est affine et positive sur C. On sait aussi par hypothèse qu'il existe x dans l'intérieur de C tel $g(x) \leq 0$. Ceci implique facilement que g est constante égale à 0 sur C. On a donc toujours égalité dans (3.3) ce qui donne encore une contradiction. Par conséquent on a bien $\tau > 0$, ce qui termine la preuve dans le cas où il n'y que des contraintes en inégalités. Dans le cas où il y a des contraintes en égalité on se ramène au cas précédent en considérant le problème

$$(P_1) \quad \begin{array}{cc} \textit{minimiser} & f(x) \\ \textit{sous les contraintes} & g_i(x) \leq 0, \ \ \forall i \leq k \\ & h_i(x) \leq 0, \quad \forall i \leq l \\ & -h_i(x) \leq 0, \quad \forall i \leq l, \end{array}$$

qui reste un problème convexe puisque les fonctions h_i sont supposées affines. La démonstration qui précède s'applique et on trouve un vecteur KKT $(\lambda_1, ..., \lambda_k, \mu_1, ..., \mu_l, \mu_1^{'}, ..., \mu_l^{'})$ pour (P_1). Il est ensuite facile de vérifier que $(\lambda_1, ..., \lambda_k, \mu_1 - \mu_1^{'}, ..., \mu_l - \mu_l^{'})$ est un vecteur KKT pour (P). ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Baptiste, H. Urruty, Optimisation et Analyse Convexe, EDP Sciences, 2009.

[2] V. Barbu, T. P. Recupanu, Convexity and Optimisation in B anach spaces, Springer Monographs in Mthematics, Springer Netherlands, 2012.

[3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Dunod, 1999.

[4] J. Charles, M. Mberkta, H. Queffélec, Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs, Dunod, 2010.

[5] G. Cohen, Convexité et optimisation, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et INRIA, 2006.

[6] S. Djebali, A. Ouahab, Analyse Multivoque et Inclusion différentielle.

[7] C. Dutang, Analyse convexe et Application, cours L3 Mathématiques, Le Mans université, 2016-2017.

[8] F. Djerradi, Sur la théorie de convexité et ses applications, Université Ahmed Draia d'Adrar, 2017-2018.

[9] I. Ekeland, R. Témam, Convexe Analysis Variational Problems. Classics in Applied Mathematics, 28. Society to industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

[10] A. Ganas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New-York, 2003.

[11] J. Lechec, Analyse Convexe Approfondie , Université Paris Dauphine, 2014.

[12] D. Li, Cours d'analyse Fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses, 2013.

[13] B. M. Mordukhovich, N. M. Mam, An Easy Path to Convex Analysis and Applications. Synth Lectures Mathematics Stat(2013)6 : 1-218.

[14] F. Nier, D. Inftimie, Introduction à la topologie, Université de Renne 1.

[15] T. Pierron, Théorème de Stampacchia, 2014.

[16] B. Rémy, Analyse Fonctionnelle, centre de Mathématiques Laurant Schwartz de l'Ecole polytechnique, 2018.

[17] A. Saadi, Introduction à la toplogie, Université Mohamed Boudiaf-Msila.

[18] D. R. Smart, Fixed point theorems, Cambridge University Press, Cambridge, (1980).

[19] Y. Sonntag, Topologie et analyse Fonctionnelle, Ellipses,1997.

[20] S. Szarek, Analyse convexe(Cours M1) Sorbonne Université, 2017-2018.

[21] R. Texier-Picard, convexité et applications, Notes de cours preparation l'agrégation, ENS Rennes.

[22] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications. Vol. I, Fixed Point Theorems , Springer. Verlag, NewYork,1986.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la théorie de convexité et certains de leurs application. On s'intéresse à étudier l'analyse convexe et appliquer ces résultats à certains problèmes d'optimisation convexe et aux théorèmes du point fixe de Brouwer, Schauder et Stampacchia.

Mots clés: ensemble convexe, fonction convexe, point fixe, optimisation convexe.

Abstact

This thesis is devoted to the study of the convexity theory and some of their applications. We are interested to studying convex analysis and applying these results to certain problems of convex optimisation and to the fixed point theorems of Brouwer, Schauder and Stampacchia.

Key words: convex set, convex function, fixed point, convex optimisation.

ملخص

هذه المذكرة مخصصة لدراسة نظرية التحدب و بعض تطبيقاتها. نحن مهتمون بدراسة التحليل المحدب و تطبيق هذه النتائج على مشاكل التحسين المحدب و على نظريات النقطة الثابتة لبراور و شودار و ستامباشيا.

الكلمات المفتاحية: مجموعة محدبة, دالة محدبة, نقطة ثابتة, تحسين محدب.