الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf : ……..

Centre universitaire

Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Stabilité au sens d'Ulam-Hyers d'une équation différentielle fractionnaire sous certaines conditions

Préparé par :

- **Houria Benharkou**
- **Maram BETIT**

Soutenue devant le jury

Rabah BOUOUDEN	**M.C.A**	**C.U. Abelhafid Boussouf ,Mila**	**Président**
Smail KAOUACHE	**M.C.A**	**C.U. Abelhafid Boussouf,Mila**	**Rapporteur**
Halim YACINE	**M .C.A**	**C.U. Abelhafid Boussouf,Mila**	**Examinateur**

Année Universitaire : 2021/2022

Dédicace

Du profond de mon cœur, je dédie ce travail a tous ceux me sont chers.

A celle qui le paradis sous ses pieds. A celle qui s'est privée et donnée, et attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation.

A ma chère mère

A celui qui fait mon affiliation avec me rend fier. A celui qui changé la nuit en jour pour m'assurer les bonnes conditions.

A mon cher père

A mes chères frères Nizar, Amine, Alaae et ma belle-sœur Mima.

A tous les membres de ma famille, et ma deuxième famille Hamriche.

A tous mes amis et sans ablier mon binome Houria.

Merci !

Maram.B

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mes chers parents à qui je compte tout ce travail est le fruit de leur amour, leurs encourages et sacrifices.

A mes chères sœurs Malek et Dikra.

A mes chers frères Mohamed et Zakariya.

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

A celui que j'aime beaucoup qui m'a soutenue tout au long ce travail Hayat, Sonya, Madjda et Massika.

Sans oublier mon binome Maram pour son soutien moral, sa patience peut au long de ce travail.

Houria.B

Remerciements

Avant tout nous remercions *ALLAH* le tout puissant et miséricordieux qui m'a donné la force, la réussite et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous sommes très sensibles à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur ***Smail KAOUACHE***, maître de conférences au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila. Nous tenons à le remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ce mémoire.

Nous tenons à remercier également, Monsieur ***Rabah BOUOUDEN*** maître de conférence au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila et Monsieur ***Halim YACINE*** maître de conférence au centre universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila pour m'avoir fait l'honneur d'être membres de notre jury.

Nous remercions également l'ensemble du personnel du département de mathématiques et informatique de centre universitaire.

ملخص

خلال هذا العمل المنجز في هذه المذكرة سنقوم بدراسة استقرار معادلة تفاضلية ذات رتبة اشتقاق كسرية بمعنى اولام هايرز و هذا تحت شروط معينة ، و سنقوم بدراسة وجود و وحدانية الحل للمعادلات التفاضلية وكذلك استقرار حلولها وهذا عن طريق تكييف فرضيات وشروط تمكننا من استعمال نظرية النقطة الثابتة في فضاء باناخ. لإعطاء مصداقية للنتائج المتحصل عليها نظريا سنقوم بالاستشهاد بثلاث امثلة توضيحية للتحقق من صحة النتائج النظرية المتحصل عليها .

الكلمات المفتاحية : معادلة تفاضلية ذات رتبة اشتقاق كسرية ، تقلص باناخ ، الاشتقاق بمعنى كابوتو، استقرار اولام هايزر .

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire porte fondamentalement sur l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers d'une équation différentielle fractionnaire sous certaines conditions. Par ailleurs, on va montrer comment adapter les hypothèses et les conditions de contraction de Banach à notre étude afin d'assurer l'existence et l'unicité ainsi que la stabilité de la solution d'une équation fractionnaire. Enfin, trois exemples illustratifs sont fournis pour vérifier la validité et la capacité des schémas de la stabilité études.

Mots-clés: Equation d'ordre fractionnaire, dérivation au sens de Caputo, stabilité d'Ulam-Hyers, contraction de Banach.

Abstract

The work presented in this memory focuses on the study of the stability in the sense of Ulam-Hyers of fractional-order differential equation under certain conditions. Moreover, in order to ensure the existence and uniqueness as well as the stability of the solution of a fractional equation, we will show up to adapt the hypotheses and the condition of contractions of Banach to our study. Finally, three illustrative exemples are provided to verefy the validity and capacity of the stability studied.

Keywords: Fractional-order equation, Caputo derivation, Ulam-Hyers stability, Banach contraction.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

NOTATION

$C([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C^n([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions n fois continuement différentiables.
$\Gamma(.)$	La fonction Gamma.
$B(.,.)$	La fonction Bêta.
$Re(.)$	Partie réelle d'un nombre complexe.
$\mathcal{I}_a^p$	Intégrale fractionnaire d'ordre p.
${}_a^R\mathcal{D}^p$	Dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Riemann-Liouville.
${}_a^C\mathcal{D}^p$	Dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Caputo.
${}_a^G\mathcal{D}^p$	Dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Grünwald-Letnikov.

- ${}_0^R\mathcal{D}^p = {}^R\mathcal{D}^p$, ${}_0^C\mathcal{D}^p = {}^C\mathcal{D}^p$, ${}_0^G\mathcal{D}^p = {}^G\mathcal{D}^p$, $I_0^p = I^p = \mathcal{D}^{-p}$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la littérature, on trouve souvent le concept de la dérivation d'ordre non entier (fractionnaire) qui est la généralisation de la dérivation classique. Le concept d'utilisation la dérivation et l'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann-Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de ces concepts est plus ancienne.

Avec une concentration particulière des physiciens aussi bien que des ingénieurs, des travaux de recherches remarquables ont été consacrés à la théorie de calcul fractionnaire. Ils ont assuré que l'utilisation des opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires est bien souhaitable pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de divers matériaux et procédés. En effet, on a constaté que plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains équations thermiques (diffusion de la chaleur) [1], physiques (électricité) [2] et rhéologiques (viscoélasticité) [3] sont soumis à des équations fractionnaires.

D'autre part, le concept de la stabilité d'une équation fonctionnelle apparaît lors-qu'on remplace cette équation par une inégalité qui agit comme une perturbation de l'équation. Ainsi, la question de la stabilité des équations fonctionnelles est de savoir comment les solutions de l'inégalité diffèrent de celles de l'équation fonctionnelle donnée ? Une attention considérable a été accordée à l'étude de la stabilité d'Ulam-Hyers et d'Ulam-Hyers-Rassias de toutes sortes d'équations fonctionnelles, pour plus de détails sur ces information voir les références [4, 5, 6, 7].

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrive en général dans ce contexte particulier. Il porte fondamentalement sur la stabilité au sens d'Ulam-Hyers d'une équation différentielle fractionnaire sous certaines conditions. Afin de vérifier la validité des méthodes étudiées, nous présentons quelques exemples illustratifs.

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques définitions de base du calcul fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la résolution d'un problème aux limites d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire sous certaines conditions. Nous présentons également quelques exemples illustratifs pour vérifier la validité du schéma de la stabilité étudie.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion.

CHAPITRE 1

CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans cette partie, on va essayer de présenter quelques définitions et quelques résultats classiques de calcul fractionnaire notamment la fonction Gamma, la fonction Bêta, la fonction Mittag-Lefler et la transformée de Laplace.

1.1 Fonctions spéciales et transformée de Laplace

1.1.1 Fonctions spéciales

♦ **Fonction Gamma**

Définition 1.1.1. *[8]*
La fonction Gamma d'Euler est l'une des fonctions spéciales qui définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad Re(z) > 0, \tag{1.1}$$

où $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(0^+) = +\infty$.

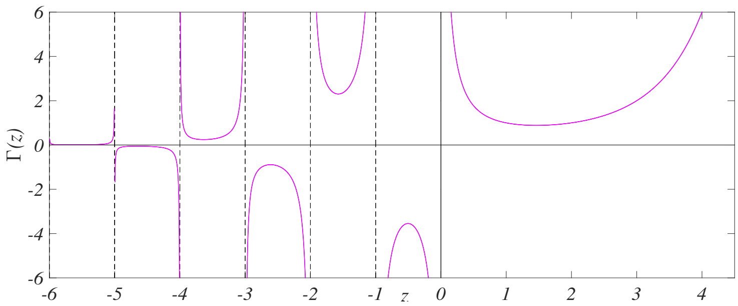

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction Γ.

Exemple 1.1.1.
On a $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. *En effet :*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{2}} e^{-t} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

On pose $u = \sqrt{t}$, *alors* $t = u^2$ *et* $dt = 2udu$, *ainsi :*

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} udu \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(integrale de Gauss), il vient que :*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Lemme 1.1.1.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$, *nous avons :*
1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)!, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec Re(z) > 0, nous avons :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z > 0. \tag{1.2}$$

Cette dernière égalité peut ètre facilement démontrer en utilisant l'intégration par partie, on a donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-t} t^z\right]_0^x + z\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

2. En utilisant (1.2), nous obtenous pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1.\Gamma(1) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2.1.\Gamma(1) = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)(n-3)...2.1.\Gamma(1).$$

Donc :

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{1.3}$$

3. D'aprés (1.2), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) \\
&= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2}) \\
&\vdots \\
&= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{2n-1}{2}\right) \\
&= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)...\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots 3\times 2}{2^n(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n(n-1)(n-2)\cdots 1}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}.
\end{aligned}$$

Ce qui reste vrai quand n=0, donc :

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

♦ **Fonction Bêta**

Dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons des valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.1.2. *[8]*
La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante :

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \tag{1.4}$$

où : $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$.

Proposition 1.1.1.
La fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.5}$$

Démonstration.

Pour $Re(z),\ Re(w) > 0$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}s^{w-1}e^{-(t+s)}dtds.$$

Soit le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = t+s \\ t = xy \end{cases}$$

Alors :
$0 \leq x < +\infty$ car $0 \leq t < +\infty \ \Rightarrow\ 0 \leq s \leq t+s < +\infty$.

$$0 \leq y \leq 1 \ \text{car} \begin{cases} si\ t = 0 \ \Rightarrow\ x = 0\ ou\ y = 0 \\ si\ t = +\infty \ \Rightarrow\ y = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{t+s} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{t} = 1. \end{cases}$$

Et,

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} x & y \\ -x & 1-y \end{vmatrix} = x.$$

Ainsi : $dtds = xdydx$.
Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (xy)^{z-1}(x(1-y))^{w-1}e^{-x}xdydx \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 x^{z+w-1}y^{z-1}(1-y)^{w-1}e^{-x}dydx \\
&= \left(\int_0^{+\infty} x^{z+w-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^1 y^{z-1}(1-y)^{w-1}dy\right) \\
&= \Gamma(z+w)B(z,w).
\end{aligned}$$

Donc :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Remarque 1.1.1.
La fonction Bêta est symétrique, c'est à dire :

$$B(z,w) = B(w,z), \quad \forall\, Re(z),\ Re(w) > 0.$$

Démonstration.

D'aprés la définition de la fonction Bêta, on a :

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt.$$

On pose : $u = 1-t \;\Rightarrow\; t = 1-u \text{ et } dt = -du$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt &= -\int_1^0 (1-u)^{z-1}u^{w-1}du \\
&= \int_0^1 (1-u)^{z-1}u^{w-1}du \\
&= B(w,z).
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.2.
Pour tout $z,\ w \in \mathbb{C}$, *tel que* $Re(z) > 0,\ Re(w) > 0$, *nous avons :*

1. $$B(z,w) = \frac{z+w}{z}B(z+1,w) = \frac{z+w}{w}B(z,w+1). \tag{1.6}$$

2. $B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1)$.

Démonstration.

• En utilisant (1.2) et (1.5), on obtient :

$$\frac{z+w}{z}B(z+1,w) = \frac{z+w}{z}\frac{z\Gamma(z)\Gamma(w)}{(z+w)\Gamma(z+w)} = B(z,w).$$

De la même manière, on trouve :

$$\frac{z+w}{w}B(z,w+1) = B(z,w).$$

• De la propriété (1.6), on a :

$$B(z+1,w) = \frac{z}{z+w}B(z,w). \tag{1.7}$$

Et,

$$B(z,w+1) = \frac{w}{z+w}B(z,w). \tag{1.8}$$

En additionnant (1.7) et (1.8), on trouve :

$$B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1).$$

Lemme 1.1.2. *[8, 9]*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $Re(z) > 0$, nous avons :

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}).$$

Cette formule est appelée formule de duplication de Legendre.

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned} B(z,w) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \\ &= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \end{aligned}$$

Si $z = w$, alors :

$$\begin{aligned} B(z,z) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \\ &= \int_0^1 (t(1-t))^{z-1}dt. \end{aligned}$$

On pose $t = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow x = 2t-1 \; et \; dt = \dfrac{1}{2}dx.$

$$\begin{aligned}
B(z,z) &= \frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{z-1} \left(1 - \frac{x+1}{2}\right)^{z-1} \frac{1}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{z-1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{z-1} dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{z-1}} \frac{1}{2^{z-1}} \int_{-1}^{1} (x+1)^{z-1}(1-x)^{z-1} dx \\
&= \frac{1}{2^{2z-1}} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{z-1} dx \\
&= 2^{1-2z} \left[\int_{-1}^{0} (1-x^2)^{z-1} dx + \int_{0}^{1} (1-x^2)^{z-1} dx \right]. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\int_{-1}^{0} (1-x^2) = \int_{0}^{1} (1-x^2)$. *Alors* :

$$B(z,z) = 2^{1-2z} 2 \int_{0}^{1} (1-x^2)^{z-1} dx.$$

Et on a :

$$B(\frac{1}{2}, z) = \int_{0}^{1} (x^2)^{\frac{-1}{2}} (1-x^2)^{z-1} 2x dx = 2 \int_{0}^{1} (1-x^2)^{z-1} dx.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
B(z,z) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} \\
&= 2^{1-2z} B(\frac{1}{2}, z) \\
&= 2^{1-2z} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2z) &= \frac{\Gamma(z)\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{2^{1-2z}\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

♦ Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est une gńéralisation de la fonction exponentielle, ce qui est donne une grande importance pour le calcul fractionnaire .

Définition 1.1.3.

La fonction Mittag-Leffler á un seul paramètre [10] est définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \qquad (Re(z) > 0,\ \alpha > 0), \tag{1.10}$$

avec : $z \in \mathbb{C}$.

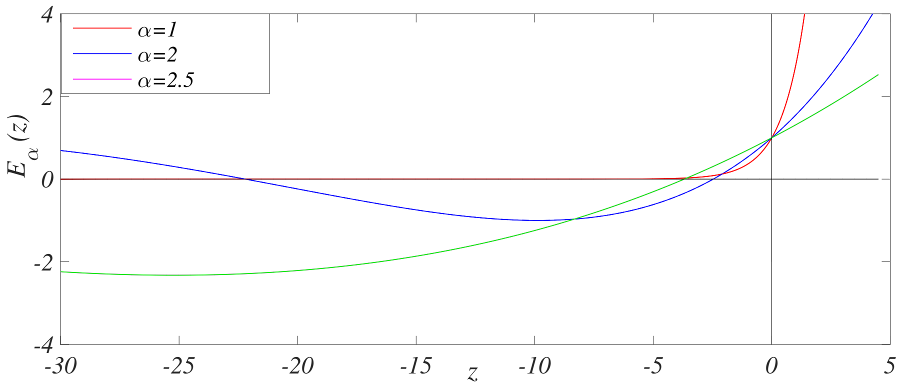

FIGURE 1.2 – Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.

Cette fonction peut être généralisée à deux paramètre [11] :

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)\cdot \tag{1.11}$$

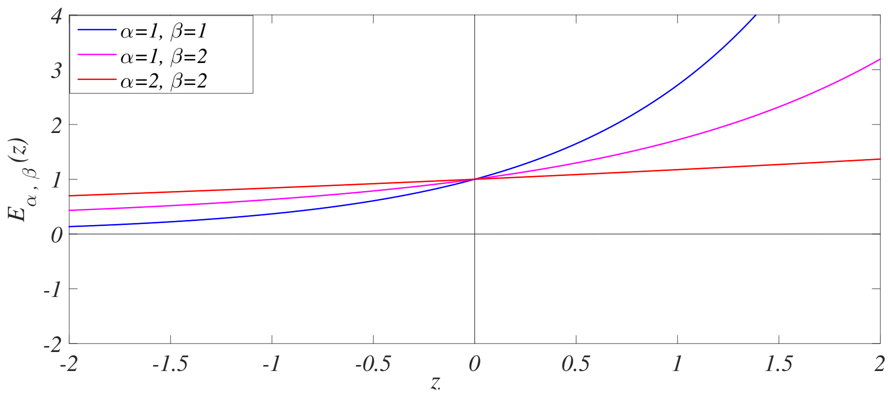

FIGURE 1.3 – Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètre.

Exemple 1.1.2.

Voici les fonctions de Mittag-Leffler pour quelques valeurs spéciales de α et β :

$$E_{1,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

$$E_{1,2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{(k+1)}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}.$$

$$E_{1,m} = \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right].$$

Propriétés 1.1.1.

La dérivée pour $n = 1$ de la fonction Mittag-Leffler á deux paramètre est :

$$\frac{dE_{\alpha,\beta}(z)}{dz} = \frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\beta+\alpha-1}(z) - \frac{\beta-1}{\alpha} E_{\alpha,\beta+\alpha}(z).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{\alpha,\beta}(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(k+1+\frac{\beta-1}{\alpha}-\frac{\beta-1}{\alpha})z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k+\alpha+(\beta-1)-(\beta-1))z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k+\alpha+\beta-1)z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} - \frac{\beta-1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k+\alpha+\beta-1)z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta+1-1)} - \frac{\beta-1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta-1)} - \frac{\beta-1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\
&= \frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\beta+\alpha-1}(z) - \frac{\beta-1}{\alpha} E_{\alpha,\beta+\alpha}(z).
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.2.
La dérivée d'ordre n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres est donnée par :*

$$E^{(n)}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)}.$$

1.1.2 Transformée de Laplace

Dans cette section, nous présentons la définition et quelques propriétés de la transformée de Laplace.

Définition 1.1.4.
Soit f une fonction d'ordre exponentiel α *(c'est á dire il existe deux constantes positives M et T telles que :* $|f(t)| < Me^{(\alpha t)}$ *pour t>T), alors la fonction de la variable complexe définie par :*

$$F(s) = L\{f(t), s\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st) f(t) dt, \ z \in \mathbb{C}, \tag{1.12}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f .
• *L'inverse de la transformée de Laplace est définie par la formule suivante :*

$$f(t) = L^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} e^{st} F(s) ds, \ t \in \mathbb{R}_+, (\gamma = Re(s) > \gamma_0), \tag{1.13}$$

oú γ_0 *est l'indice de convergence de l'intégrale.*

Proposition 1.1.3.
• *La transformée de Laplace et son inverse sont des opérateurs linéaires, c'est à-dire* $\forall \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$ *:*

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t), s\} = \alpha L\{f(t), s\} + \beta L\{g(t), s\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$
$$L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s), t\} = \alpha L^{-1}\{F(s), t\} + \beta L^{-1}\{G(s), t\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

• *Le produit de convolution de deux fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$ *est donnée par :*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau. \tag{1.14}$$

• *La transformée de Laplace de produit de convolution est donnée par :*

$$L\{(f(t) * g(t)), s\} = F(s)G(s). \tag{1.15}$$

• *La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de $f(t)$ est donnée par :*

$$L\{f^{(n)}(t), s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \tag{1.16}$$

Exemple 1.1.3.
Considérons la fonction $g(t) = t^{p-1}$.
La transformée de Laplace de la fonction f est :

$$L\{g(t), s\} = L\{t^{p-1}, s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{p-1} dt.$$

Une intégration par partie p-fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{p-1} dt &= \frac{(p-1)(p-2)...1}{s^{p-1}} \left[\frac{-1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{(p-1)!}{s^{p-1}} \left[\frac{-1}{s} e^{-st}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\Gamma(p)}{s^p}.\end{aligned}$$

Donc :

$$L\{t^{p-1}, s\} = \frac{(p-1)!}{s^p} = \Gamma(p) s^{-p}. \tag{1.17}$$

1.2 Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire

Dans ce mémoire, les symboles d'une dérivée fractionnaire ont été normalisés comme suit :

$${}_a\mathcal{D}_t^p = \begin{cases} \dfrac{d^p}{(dt)^p}, & p > 0 \\ 1, & p = 0 \\ \int\limits_a^t d\tau^{(-p)}, & p < 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

où ${}_a\mathcal{D}_t^p$ désigne l'opérateur de dérivation d'ordre p, a et t sont respectivement des limites inférieure et supérieure de cet opérateur.
Il existe plusieurs définitions pour des intégrales et des dérivées fractionnaires. Malheureusement toutes les définitions considérées, en générale ne sont pas toutes équivalentes. Nous rappelons dans ce travail celles qui sont les plus célèbres a savoir dérivation au sens de Riemann-Liouville, Caputo, et Grünwald-Letnikov[8, 9].

1.2.1 Dérivation et intégration au sens de Riemann-Liouville

a - **Intégrale d'ordre fractionnaire**

• Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a,b]. On considère l'intégrale :

$$\mathcal{I}_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

La primitive seconde de f définit comme suite :

$$\mathcal{I}_a^2 f(x) = \int_a^x \left(\int_a^u f(x)dx \right) du.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$\mathcal{I}_a^2 f(x) = \int_a^u \left(\int_t^x du \right) f(t)dt.$$

$$\mathcal{I}_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t)dt.$$

Le n^{ieme} itéré de l'opérateur $\mathcal{I}$ peut s'écrire :

$$\mathcal{I}_a^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette formulle a un sens même quand n prend une valeur non-entier.
On définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.2.1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre p au sens de Riemenn-Liouville de f l'intégrale suivante :

$$ {}_a^R\mathcal{D}_x^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-s)^{p-1} f(s)ds, \quad (x > a,\ Re(p) > 0). \tag{1.19}$$

Proposition 1.2.1.
Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ et soient $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $Re(p) > 0$ et $Re(q) > 0$, on a alors :
1. ${}_a^R\mathcal{D}^{-p}({}_a^R\mathcal{D}^{-q} f) = {}_a^R\mathcal{D}^{-(p+q)} f.$

2. $\frac{d}{dx}({}_a^R\mathcal{D}_x^p f(x))={}_a^R\mathcal{D}_x^{-(p-1)} f(x)$.

Démonstration.

• On montre la premiére égalité :

$$\begin{aligned}
{}_a^R\mathcal{D}_x^{-p}({}_a^R\mathcal{D}_x^{-q} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-s)^{p-1}({}_a^R\mathcal{D}_s^{-q} f)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^x (x-s)^{p-1}\int_a^s (s-t)^{q-1} f(t)dtds.
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on obtient :

$${}_a^R\mathcal{D}_x^{-p}({}_a^R\mathcal{D}_x^{-q} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{p-1}(s-t)^{q-1}ds\right]dt.$$

En effectuant le changement de variables $s = t + (x-t)y$.

$$\begin{aligned}
{}_a^R\mathcal{D}_x^{-p}({}_a^R\mathcal{D}_x^{-q} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^x f(t)\int_0^1 [(x-t)(1-y)]^{p-1}[y(x-t)]^{q-1}(x-t)dydt \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^x f(t)(x-t)^{p+q-1}\int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dydt.
\end{aligned}$$

D'aprés la définition 1.1.2 et la relation (1.5), on aura :

$${}_a^R\mathcal{D}_x^{-p}({}_a^R\mathcal{D}_x^{-q} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^x f(t)(x-t)^{p+q-1}dt ={}_a^R \mathcal{D}_x^{-(p+q)} f(x).$$

• On montre la deuxiéme égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}({}_a^R\mathcal{D}_x^{-p} f(x)) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)dt\right).
\end{aligned}$$

Puisque $(x-t)^{p-1}$ et $f(t)$ sont continues, donc l'application :

$$t \rightarrow (x-t)^{p-1} f(t),$$

est continue, on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}({}_a^R\mathcal{D}_x^{-p}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_a^x \frac{d}{dx}((x-t)^{p-1}f(t)dt) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_a^x (p-1)(x-t)^{p-2}f(t)dt \\
&= \frac{(p-1)}{(p-1)\Gamma(p-1)}\int\limits_a^x (x-t)^{p-2}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(p-1)}\int\limits_a^x (x-t)^{p-2}f(t)dt \\
&= {}_a^R\mathcal{D}_x^{-(p-1)}f(x).
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.1.

On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = (t-a)^\beta \quad t \in [a,b],\ \beta \in \mathbb{R},\ (\beta > -1).$$

On a :

$${}_a^R\mathcal{D}_t^{-p}f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^{-p}(t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-s)^{p-1}(s-a)^\beta ds.$$

Soit le changement de variable suivant :

$$s = t - r(t-a) \Rightarrow ds = -(t-a)dr.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
{}_a^R\mathcal{D}_t^{-p}(t-a)^\beta &= \frac{-1}{\Gamma(p)}\int_1^0 [r(t-a)]^{p-1}[t-a-r(t-a)]^\beta(t-a)\,dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 (t-a)^{p+\beta}r^{p-1}(1-r)^\beta dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}(t-a)^{p+\beta}B(p,\beta+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}(t-a)^{p+\beta}\frac{\Gamma(p)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(p+\beta+1)}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-p}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(p+\beta+1)}(t-a)^{p+\beta}. \tag{1.20}$$

Exemple 1.2.2.

Considérons la fonction $f(t) = t^q$, on a alors :

$$\begin{aligned} {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{(p-1)} f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{(p-1)} \tau^q d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant le changement $\tau = xt$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{(p-1)} \tau^q d\tau &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-x)^{(p-1)} t^{p-1} x^q t^{q+1} dx \\ &= \frac{t^{p+q}}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-x)^{(p-1)} x^q dx \\ &= \frac{t^{p+q}}{\Gamma(p)} \beta(p, q+1) \\ &= t^{p+q} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}. \end{aligned}$$

Si $f(t) = c$, on a alors : ${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-p} = \dfrac{c}{\Gamma(p+1)} t^p$.

b - **Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville**

Définition 1.2.2.

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre p notée ${}_{a}^{R}\mathcal{D}^{p}$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-(n-p)} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-p-1} f(s) ds, \end{aligned}$$

où $Re(p) \geq 0$ et $n = [Re(p)] + 1$.

• *Si $p = n-1$, nous avons une dérivée conventionnelle d'ordre $n-1$:*

$$\begin{aligned} {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{n-1} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-(n-(n-1))} f(t)) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-1} f(t)) \\ &= f^{(n-1)}(t). \end{aligned} \tag{1.21}$$

• *En particulier :* ${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{0}f(t) = f(t)$.

Propriétés 1.2.1.

• *L'une des propriétés très importantes de la dérivée au sens de Riemann- Liouville pour* $p > 0$ *et* $t < a$ *est :*

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-p}f(t)) = f(t). \tag{1.22}$$

• *Si la dérivée fractionnaire* ${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}f(t)$, $(n-1 \leq p < n)$ *est intégrable, on a alors :*

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-p}({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^{n}[{}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p-j}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \quad p>0,\ t>a. \tag{1.23}$$

• *La dérivée n-iéme de la dérivée fractionnaire de* f *au sens de Riemann- Liouville d'ordre* p *pour tout* $n \in \mathbb{N}^{*}$ *est donnée par :*

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}f(t)) = {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{n+p}f(t). \tag{1.24}$$

Par contre la dérivée fractionnaire d'ordre p de la n-iéme dérivée est donnée par :

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{n+p}f(t) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(j+1-p-n)}. \tag{1.25}$$

Donc l'opérateur de la dérivation fractionnaire ${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}$ *de Riemann-Liouville commute avec* $\frac{d^n}{dt^n}$ *si et seulement si* $f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Exemple 1.2.3.

Soit la fonction : $f(t) = (t-a)^{\beta}$, $t \in [a,b]$, $\beta \in \mathbb{R}$, $(\beta > -1)$ *on a :*

$$ {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}(t-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dt^n}\left({}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-(n-p)}(t-a)^{\beta}\right).$$

En utilisant (1.20), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{p}(t-a)^{\beta} &= \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-p+1)}(t-a)^{n+\beta-p}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-p+1)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\beta-p}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$ \frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{\lambda} = \lambda(\lambda-1)... + (\lambda-n+1)(t-a)^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}(t-a)^{\lambda-n}. \tag{1.26}$$

Ainsi,

$$\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{\beta+n-p} = \frac{\Gamma(n+\beta-p+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(t-a)^{\beta-p}.$$

Il s'ensuit que :

$${}_a^R\mathcal{D}_t^p(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(t-a)^{\beta-p}. \tag{1.27}$$

• *Pour* $p=1$ *:*

$$\begin{aligned} {}_a^R\mathcal{D}_t^1(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} \\ &= \beta(t-a)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

• *Pour* $\beta = 0$

$${}_a^R\mathcal{D}_t^p(t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}.$$

Ce qui montre que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Lemme 1.2.1.
Soient $Re(p) > 0$, $n = [Re(p)] + 1$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction donnée. Supposons que* ${}_a^R\mathcal{D}_t^p f(t) = 0$, *alors :*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+p-n)}(t-a)^{k+p-n},$$

où les C_k, $k = 0, 1, ..., n-1$ *sont des constantes réelles.*

1.2.2 Dérivation au sens de Caputo

Dans cette section nous présentons la définition et quelques propriétés de la dérivation au sens de Caputo.

Définition 1.2.3.
Soient $f \in C^n([a,b])$ *et* $p > 0$. *La dérivée fractionnaire de la fonction* f *au sens de Caputo est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t) &= {}_a\mathcal{D}_t^{-(n-p)}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t f^{(n)}(s)(t-s)^{n-p-1}ds, \end{aligned} \tag{1.28}$$

où $n-1 < p < n$ *et* $t > a$.

• *Pour* $p = n \in \mathbb{N}$ *on a :* ${}_a^C\mathcal{D}_t^n f(t) = f^{(n)}(t)$.

En paticulier, ${}_a^C\mathcal{D}_t^0 f(t) = f(t)$.

a-Relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et Caputo

La relation entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée au sens de Riemann- Liouville est donnée par :

$$ {}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}. $$

Démonstration.

Soit le dévélopement limite de Taylor de la fonction f au point a :

$$ \begin{aligned} f(t) &= f(a) + \frac{(t-a)}{1!}f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1}, \end{aligned} $$

où

$$ R_{n-1} = \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx = \mathcal{I}_a^n f^{(n)}(x). $$

On utilise la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville, on trouve :

$$ \begin{aligned} {}_a^R\mathcal{D}_t^p f(t) &= {}_a^R\mathcal{D}_t^p \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^k(a) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_a^R\mathcal{D}_t^p (t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^k(a) + {}_a^R\mathcal{D}_t^p R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-p+1)} \frac{(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}_a^R\mathcal{D}_t^p I_a^n f^{(n)}(t) \ (d'aprs(1.26)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} f^{(k)}(a) + I_a^{n-p} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} f^{(k)}(a) + {}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t). \end{aligned} $$

Remarque 1.2.1.
Si $f^{(k)} = 0$ *pour* $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *on a alors :* ${}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^p f(t)$.

Exemple 1.2.4.
Calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction suivante :

$$ f(t) = (t-a)^\beta, \qquad \beta > p. $$

On a :

$$ {}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t) = {}_a^R\mathcal{D}_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}. $$

Et,

$$ f^{(k)}(a) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n-1. $$

Donc :

$$ \begin{aligned} {}_a^C\mathcal{D}_t^p (t-a)^\beta &= {}_a^R\mathcal{D}_t^p (t-a)^\beta \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(t-a)^{\beta-p}. \end{aligned} $$

Si $\beta < p$, on a alors :

$$ {}_a^C\mathcal{D}_t^p (t-a)^\beta = 0. $$

Remarque 1.2.2.

Soit $p > 0$.

1. Si $f \in C([a,b])$, alors :

$$ {}_a^C\mathcal{D}_t^p ({}_a\mathcal{D}_t^{-p} f(t)) = f(t). $$

2. Si $f \in C^n([a,b])$, alors :

$$ {}_a\mathcal{D}_t^{-p} ({}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. $$

•*En particulier, pour $0 < p \leq 1$, on a :*

$$ {}_a\mathcal{D}_t^{-p} ({}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t)) = f(t) - f(a). \tag{1.29} $$

Propriétés 1.2.2.

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n-1 < p < n$, on a alors :

$$ {}_a^C\mathcal{D}_t^p ({}_a\mathcal{D}_t^m f(t)) = {}_a^C\mathcal{D}_t^{p+m} f(t). $$

3.

$$ {}_a\mathcal{D}_t^m ({}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t)) = {}_a^C\mathcal{D}_t^{m+p} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}. $$

En particulier, si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = n, n+1, \cdots, n+m-1$, on a alors :

$$ {}_a\mathcal{D}_t^m ({}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t)) = {}_a^C\mathcal{D}_t^p ({}_a\mathcal{D}_t^m f(t)) = {}_a^C\mathcal{D}_t^{p+m} f(t). $$

Démonstration.

1. Si $f(t) = c \Rightarrow f^{(n)}(t) = 0$, donc :

$$ {}_a^C\mathcal{D}_t^p c = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-n+1}} d\tau = 0. $$

2. Montrons que : ${}_a^C\mathcal{D}_t^p({}_a\mathcal{D}_t^m f(t)) = {}_a^C\mathcal{D}_t^{p+m} f(t)$.
On a :

$$ \begin{aligned} {}_a^C\mathcal{D}_t^p({}_a\mathcal{D}_t^m f(t)) &= {}_a\mathcal{D}_t^{-(n-p)}\,{}_a\mathcal{D}_t^n({}_a\mathcal{D}_t^m f(t)) \\ &= {}_a\mathcal{D}_t^{-(n-p)}\,{}_a\mathcal{D}_t^{n+m} f(t) \\ &= {}_a^C\mathcal{D}_t^{m+p} f(t). \end{aligned} $$

3. Montrons que : ${}_a\mathcal{D}_t^m({}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t)) = {}_a^C\mathcal{D}_t^{m+p} f(t)$.
On a :

$$ \begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^m({}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t)) &= {}_a\mathcal{D}_t^m[{}_a^R\mathcal{D}_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}] \\ &= {}_a^R\mathcal{D}_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}\,{}_a\mathcal{D}_t^m(t-a)^{k-p} \\ &= {}_a^R\mathcal{D}_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\ &= {}_a^R\mathcal{D}_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\ &- \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\ &+ \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\ &= {}_a^R\mathcal{D}_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\ &+ \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)} \\ &= {}_a^C\mathcal{D}_t^{m+p} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(p+m)+1)}(t-a)^{k-(p+m)}. \end{aligned} $$

Alors :

$$ {}_a\mathcal{D}_t^m({}_a^C\mathcal{D}_t^p f(t)) = {}_a^C\mathcal{D}_t^{m+p} f(t), $$

si et seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = n, n+1, \cdots, n+m-1$.

1.2.3 Dérivation et intégration au sens de Grünwald-Letnikov

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On définie la dérivée d'ordre 1 de la fonction f par :

$$ f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to o} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{1.30} $$

De même, la dérivée d'ordre 2 de f est donnée par :

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

De (1.30) et (1.31), on obtient :

$$f^{(3)}(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}. \tag{1.32}$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f(t-kh), \tag{1.33}$$

où,

$$\begin{pmatrix} n \\ \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, \tag{1.34}$$

est la notation pour le coefficient binomial.

Donc la dérivée d'une fonction f au sens de Grünwald-Letnikov est donnée par la formule générale suivante :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^p f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh), \tag{1.35}$$

où $0 < p < n$ et $h = \dfrac{t-a}{n}$.

Puisque :

$$(-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{-p(1-p)(2-p)\cdots(k-p-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(-p)\Gamma(k+1)},$$

on a alors :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^p f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(-p)\Gamma(k+1)} f(t-kh). \tag{1.36}$$

Par conséquent, l'intégrale de f est donnée par :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^{-p} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(p)\Gamma(k+1)} f(t-kh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.37}$$

Si f est continue, on a :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. $$

Par partie :

$$ \begin{cases} u = f \Rightarrow u' = f' \\ v' = (t-\tau)^{p-1} \Rightarrow v = \dfrac{-1}{p}(t-\tau)^p \end{cases} $$

$$ \begin{aligned} {}_a^G\mathcal{D}_t^{-p} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left[\frac{-f(\tau)(t-\tau)^p}{p} \right]_a^t + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t \frac{f'(\tau)(t-\tau)^p}{p} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left[\frac{f(a)(t-a)^p}{p} \right]_a^t + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t f'(\tau)(t-\tau)^p d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} [f(a)(t-a)^p]_a^t + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t f'(\tau)(t-\tau)^p d\tau. \end{aligned} $$

Si $f \in \mathbb{C}^n$, en utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+p+1)} (t-a)^{k+p} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.38} $$

Et,

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^{p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \tag{1.39} $$

Exemple 1.2.5.

En générale, la dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est nulle ni constante. En effet :

Soit $f(t) = c$ et soit p un nombre non entier. On a donc $f^{(k)}(t) = 0$, pour $k = 1, 2, \cdots n$, cependant dans le cas fractionnaire, on a :

$$ \begin{aligned} {}_a^G\mathcal{D}_t^{p} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)} (t-a)^{k-p}}_{=0} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau}_{=0} \\ &= \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}. \end{aligned} $$

Exemple 1.2.6.

La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ au sens de Grünwald-Letnikov.

Soit p un nombre non entier ($0 < n-1 < p < n$) et soit $\beta > n-1$, alors on a $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Et $f^{(n)}(\tau) = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(\tau-a)^{\beta-n}$, d'où :

$$ {}_a^G\mathcal{D}_t^p(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau. $$

En utilisant le changement de variable $\tau = a + x(t-a)$, on obtient :

$$ \begin{aligned} {}_a^G\mathcal{D}_t^p(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)(t-a)^{\beta-p}}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^1 (1-x)^{n-p-1}x^{\beta-n}dx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\beta(n-p,\beta-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-p} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-p+1)}(t-a)^{\beta-p}. \end{aligned} $$

Remarque 1.2.3. ***Linéarité***

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire, c'est-à-dire :

$$ \mathcal{D}^p(\lambda f(t) + \beta g(t)) = \lambda \mathcal{D}^p f(t) + \beta \mathcal{D}^p g(t), $$

où $\mathcal{D}^p$ désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire considérée dans ce mémoire.

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution d'un problème aux limites d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{p}y(t) = f(t, y(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}y(t)), & t \in J = [0,T],\ T > 0,\ 0 < P \leq 1 \\ ay(0) + by(T) = c, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

2.1 Equivalence entre problème de Cauchy et l'équation intégrale de Voltera

Lemme 2.1.1.

Soient $0 < p \leqslant 1$ et $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit :

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{p}y(t) = f(t), \qquad \forall t \in J, \tag{2.2}$$

$$ay(0) + by(T) = c, \tag{2.3}$$

alors y est une solution du problème (2.1) si et seulement si y est une solution de l'équation d'intégrale de voltera suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s)ds - c\right]. \tag{2.4}$$

Démonstration.

En appliquant l'opérateur $\mathcal{I}^p$ au deux membres de l'égalité (2.2) et en utilisant la formule (1.29) du Remarque 1.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s) ds \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s) ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Si $t = T$, on a :

$$y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds.$$

En utilisant la condition (2.3), on trouve :

$$y_0 = \frac{-1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds - c \right].$$

Par suite :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} f(s) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} f(s) ds - c \right].$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Lemme 2.2.1.

Soit $f(t,u,v) : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème (2.1) est équivalent au problème :

$$y(t) = A + \mathcal{I}^p g(t), \tag{2.6}$$

où $g \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$g(t) = f(t, A + \mathcal{I}^p g(t), g(t)),$$

et,

$$A = \frac{1}{a+b} \left[c - \frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} g(s) ds \right].$$

Démonstration.

Soit y la solution du problème (2.6). On va montrer que y est également une solution du problème (2.1). En effet, on a :

$$y(t) = A + \mathcal{I}^p g(t).$$

Ainsi,

$$y(0) = A,$$

et,

$$y(T) = A + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} g(s)ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= \frac{-ab}{(a+b)\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} g(s)ds + \frac{ac}{a+b} - \frac{b^2}{(a+b)\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} g(s)ds \\ &+ \frac{bc}{a+b} + \frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} g(s)ds \\ &= c. \end{aligned}$$

Donc :

$$ay(0) + by(T) = c.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}^p y(t) &= {}^C\mathcal{D}^p (A + \mathcal{I}^p g(t)) \\ &= g(t) \\ &= f(t, y(t), {}^C\mathcal{D}^p y(t)). \end{aligned}$$

Théorème 2.2.1. *(Théorème d'existence et d'unicité)*
Supposons que les deux conditions suivantes sont vérifient :
•$(\mathcal{H}_1)$ *Il existe deux constantes $K > 0$ et $0 < L < 1$ telles que :*

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq K|u-\bar{u}| + L|v-\bar{v}| \qquad \forall t \in J \text{ et } \forall\, u, \bar{u}, v, \bar{v} \in \mathbb{R}.$$

•$(\mathcal{H}_2)$

$$\frac{KT^p}{(1-L)\Gamma(p+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) < 1, \tag{2.7}$$

alors le problème (2.1) admet une unique solution.

Démonstration.

Pour quantifier notre objectif, on va essayer de transformer le problème (2.1) en un problème de point fixe. Pour cela on considère l'opérateur :

$$N : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$$

définie par :

$$Ny(t) = A_y + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g_y(s)ds,$$

où,

$$g_y(t) = f(t, A_y + \mathcal{I}^p g_y(t), g_y(t)),$$

et,

$$A_y = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} g_y(s)ds\right].$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (2.1).
L'opérateur N est bien défini. En effet, si $y \in C(J,\mathbb{R})$ alors $(Ny) \in C(J,\mathbb{R})$.
Pour démontrer que N admet un point fixe, il suffit de démontrer que N est un opérateur contractant.
Soient $x, y \in C(J,\mathbb{R})$ et $t \in J$, on a alors :

$$\begin{aligned} |Ny(t) - Nx(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |g_y(s) - g_x(s)| ds \\ & + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} |g_y(s) - g_x(s)| ds \end{aligned} \tag{2.8}$$

et,

$$\begin{aligned} |g_y(t) - g_x(t)| = & |f(t, y(t), g_y(t)) - f(t, x(t), g_x(t))| \\ & \leq K|y(t) - x(t)| + L|g_y(t) - g_x(t)|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|g_y(t) - g_x(t)| \leq \frac{K}{1-L}|y(t) - x(t)|. \tag{2.9}$$

En remplaçant (2.9) dans (2.8), devient :

$$\begin{aligned} |Ny(t) - Nx(t)| \leq & \frac{K}{(1-L)\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |y(s) - x(s)| ds \\ & + \frac{|b|K}{(1-L)|a+b|\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} |y(s) - x(s)| ds \\ & \leq \frac{KT^p}{(1-L)\Gamma(p+1)} \|y-x\|_\infty + \frac{|b|KT^p}{(1-L)|a+b|\Gamma(p+1)} \|y-x\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|Ny - Nx\|_\infty \leq \left[\frac{KT^p}{(1-L)\Gamma(p+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)\right]\|y - x\|_\infty.$$

D'après (2.7), N est un opérateur contractant, donc le théorème de point fixe de Banach 3.3.1, nous permet d'affirmer que l'opérateur N admet un unique point fixe, ainsi que le problème considéré ayant une unique solution.

C.Q.F.D.

CHAPITRE 3

STABILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE SOUS CERTAINES CONDITIONS

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de stabilité d'Ulam-Hyers [4, 5, 6, 7]de l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$^{C}\mathcal{D}^{p}y_t = f(t, y(t), ^{C}\mathcal{D}^{p}y_t), \qquad t \in J = [0, T],\ T > 0,\ 0 < p \leq 1 \tag{3.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

3.1 Types de stabilité

3.1.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition 3.1.1.

L'équation (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel $c_f > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ de l'inégalité :

$$|^{C}\mathcal{D}^{p}x(t) - f(t, x(t), ^{C}\mathcal{D}^{p}x(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ de l'équation (3.1) vérifiant :

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f \varepsilon, \quad t \in J.$$

3.1.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée

Définition 3.1.2.

L'équation (3.1) est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisée, s'il existe une fonction $\psi_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\psi_f(0) = 0$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ de l'inégalité :

$$|{}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t) - f(t, x(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation* (3.1) *vérifiant :*

$$|x(t) - y(t)| \leq \psi_f(\varepsilon), \quad t \in J.$$

3.1.3 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias

Définition 3.1.3.
L'équation (3.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias par rapport à* $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$, *s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$, *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$|{}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t) - f(t, x(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t))| \leq \varepsilon\varphi(t), \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation* (3.1) *vérifiant :*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f \varepsilon \varphi(t), \quad t \in J.$$

3.1.4 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias généralisée

Définition 3.1.4.
L'équation (3.1) *est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias généralisée par rapport à* $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$, *s'il existe un nombre réel* $c_{f,\varphi} > 0$, *tel que pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$|{}^{C}\mathcal{D}^{p}x_t - f(t, x(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}x_t)| \leq \varphi(t), \quad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation* (3.1) *vérifiant :*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi}\varphi(t), \quad t \in J.$$

Remarque 3.1.1.
Une fonction $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *est dite solution de l'inégalité :*

$$|{}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t) - f(t, x(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t))| \leq \varepsilon, \quad t \in J,$$

si et seulement s'il existe une fonction $g \in C(J, \mathbb{R})$*(qui dépend de la solution y) vérifiant :*
1. $|g(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in J.$
2. ${}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t) = f(t, x(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t)) + g(t), \quad t \in J.$

3.2 Étude de la stabilité

Cette section est consacrée à l'étude de stabilité au sens d'Ulam-Hyers de l'équation différentielle fractionnaire (2.1).

3.2.1 Stabilité d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites

Nous allons étudier la stabilité du problème :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{p}y(t) = f(t, y(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}y(t)), & t \in J,\ 0 < p \leq 1 \\ ay(t) + by(T) = c, \end{cases} \tag{3.2}$$

où a, b, c sont des constantes réelles, avec $a + b \neq 0$.

Théorème 3.2.1.
Supposons que les deux conditions $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont satisfaites, alors le problème (3.2) est stable au sens d'Ulam- Hyers.

Démonstration.

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ une fonction vérifiant :

$$|{}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t) - f(t, x(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}x(t))| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in J, \tag{3.3}$$

et soit aussi $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{p}y(t) = f(t, y(t), {}^{C}\mathcal{D}^{p}y(t)), & t \in J,\ 0 < p \leq 1 \\ y(0) = x(0), \\ y(T) = x(T). \end{cases}$$

En utilisant les lemmes 2.1.1 − 2.2.1, on obtient :

$$y(t) = A_y + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g_y(s) ds.$$

D'autre part, si $y(0) = x(0)$ et $y(T) = x(T)$, on aura $A_y = A_x$.
En effet,

$$\begin{aligned} |A_y - A_x| &= \left| \frac{b}{(a+b)\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} (g_x(s) - g_y(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1} |g_y(s) - g_x(s)| ds \end{aligned}$$

De l'inégalité (2.9), il vient que :

$$\begin{aligned}|A_y - A_x| &\leq \frac{|b|K}{(1-L)|a+b|\Gamma(p)} \int_0^T (T-s)^{p-1}|y(s)-x(s)|ds \\ &= \frac{|b|K}{(1-L)|a+b|} \mathcal{I}^p |y(T)-x(T)| = 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que,

$$A_y = A_x,$$

ainsi,

$$y(t) = A_x + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g_y(s)ds.$$

En intégrant l'inégalité (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned}\left| x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g_x(s)ds \right| &\leq \frac{\varepsilon t^p}{\Gamma(p+1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon T^p}{\Gamma(p+1)},\end{aligned}$$

avec,

$$g_x(t) = f(t, A_x + \mathcal{I}^p g_x(t), g_x(t)).$$

On a donc, pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned}|x(t) - y(t)| &= \left| x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g_x(s)ds + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} (g_x(s) - g_y(s))ds \right| \\ &\leq \left| x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g_x(s)ds \right| + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |g_x(s) - g_y(s)|ds.\end{aligned}$$

En utilisant (2.9), on trouve :

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon T^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{K}{(1-L)\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} |x(s) - y(s)|ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall 3.3.1 (voir Annexe), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \frac{\varepsilon T^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{\gamma K}{(1-L)\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} \frac{\varepsilon T^p}{\Gamma(p+1)} ds \\ &\leq \frac{\varepsilon T^p}{\Gamma(p+1)} \left[1 + \frac{\gamma K T^p}{(1-L)\Gamma(p+1)} \right] = c\varepsilon, \end{aligned}$$

où $\gamma = \gamma(p)$ une constante.

C.Q.F.D.

Remarque 3.2.1.

Si on pose $\psi(\varepsilon) = \varepsilon c$, alors $\psi(0) = 0$ et donc le problème (3.2) devient stable au sens d'Ulam-Hyers généralisé.

Théorème 3.2.2.

Supposons que les deux conditions $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ sont satisfaites. On suppose également que :

- $(\mathcal{H}_3)$ *il existe une fonction croissante $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et il existe $\lambda_\varphi > 0$ telles que :*

$$\mathcal{I}^p \varphi(t) \leq \lambda_\varphi \varphi(t), \quad \forall t \in J,$$

alors le problème (3.2) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias.

Démonstration.

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ la solution de l'inégalité suivante :

$$|{}^C\mathcal{D}^p x(t) - f(t, x(t), {}^C\mathcal{D}^p x(t))| \leq \varepsilon \varphi(t), \quad t \in J, \tag{3.4}$$

et soit aussi $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^p y(t) = f(t, y(t), {}^C\mathcal{D}^p y(t)), & t \in J,\ 0 < p \leq 1 \\ y(0) = x(0), \\ y(T) = x(T). \end{cases}$$

En utilisant toujours les lemmes 2.1.1 – 2.2.1, on aura :

$$y(t) = A_x + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-s)^{p-1} g_y(s) ds,$$

où $g_y \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation suivante :

$$g_y(t) = f(t, A_x + \mathcal{I}^p g_y(t), g_y(t)),$$

et,

$$A_x = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(p)}\int_0^T (T-s)^{p-1} g_x(s)ds\right].$$

Par intégration de l'inégalité (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned}\left|x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1} g_x(s)ds\right| &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}\varphi(s)ds \\ &\leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t).\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &= \left|x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1} g_x(s)ds + \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}(g_x(s)-g_y(s))ds\right| \\ &\leq \left|x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1} g_x(s)ds\right| + \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|g_x(s)-g_y(s)|ds.\end{aligned}$$

De (2.9), il vient que :

$$|x(t)-y(t)| \leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t) + \frac{K}{(1-L)\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}|x(s)-y(s)|ds.$$

On obtient alors :

$$|x(t)-y(t)| \leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t) + \frac{\gamma_1\varepsilon K\lambda_\varphi}{(1-L)\Gamma(p)}\int_0^t (t-s)^{p-1}\varphi(s)ds,$$

où $\gamma_1 = \gamma_1(p)$ une constante.
En utilisant $(\mathcal{H}_3)$, on obtient :

$$|x(t)-y(t)| \leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t) + \frac{\gamma_1\varepsilon K\lambda_\varphi^2\varphi(t)}{(1-L)} = \left(1 + \frac{\gamma_1 K\lambda_\varphi}{1-L}\right)\varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t).$$

Ainsi pour tout $t \in J$:

$$|x(t)-y(t)| \leq \left[\left(1 + \frac{\gamma_1 K\lambda_\varphi}{1-L}\right)\lambda_\varphi\right]\varepsilon\varphi(t) = c\varepsilon\varphi(t).$$

C.Q.F.D.

3.3 Exemples

Exemple 3.3.1.

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) = \dfrac{t^2}{10}(\cos y(t) - \sin y(t)) + \dfrac{|{}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}{5 + |{}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}, & \forall t \in [0,1] \\ y(0) = 1, \; y(1) \in \mathbb{R}, \; a \neq 0, \; b = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{t^2}{10}(\cos u - \sin u) + \frac{|v|}{5+|v|}, \quad \forall t \in [0,1], u, v \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de montrer que la fonction f est continue.

Soient maintenant $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a alors :

$$\begin{aligned} |f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| &= \left| \frac{t^2}{10}(\cos u - \cos \bar{u}) + \frac{t^2}{10}(\sin \bar{u} - \sin u) + \frac{5(|v| - |\bar{v}|)}{(5+|v|)(5+|\bar{v}|)} \right| \\ &\leq \frac{t^2}{10}|\cos u - \cos \bar{u}| + \frac{t^2}{10}|\sin u - \sin \bar{u}| + \frac{5||v| - |\bar{v}||}{(5+|v|)(5+|\bar{v}|)} \\ &\leq \frac{1}{10}|u - \bar{u}| + \frac{1}{10}|u - \bar{u}| + \frac{5|v - \bar{v}|}{25} \\ &\leq \frac{1}{5}|u - \bar{u}| + \frac{1}{5}|v - \bar{v}|. \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{H}_1)$ est satisfaite avec :

$$K = L = \frac{1}{5},$$

de plus,

$$\frac{KT^p}{(1-L)\Gamma(p+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) = \frac{\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})\Gamma(\frac{3}{2})},$$

puisque,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

on trouve alors :

$$\frac{KT^p}{(1-L)\Gamma(p+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} < 1,$$

alors $(\mathcal{H}_2)$ est satisfaite.

D'après le Théorème 2.2.1, le problème (3.5) a une unique solution, et par le Théorème 3.2.1 le problème (3.5) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

Exemple 3.3.2.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) = \dfrac{4 + |y(t)| + |{}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}{8e^{t}(1 + |y(t)| + |{}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|)}, \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 1,\ y(1) \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{4 + |u| + |v|}{8e^{t}(1 + |u| + |v|)}, \quad t \in [0,1], u, v \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est bien continue.

Pour tous $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| &= \left| \frac{3(|\bar{u}| - |u|) + 3(|\bar{v}| - |v|)}{8e^{t}(1 + |u| + |v|)(1 + |\bar{u}| + |\bar{v}|)} \right| \\ &\leq \frac{3}{8e^{t}} |(|\bar{u}| - |u|) + (|\bar{v}| - |v|)| \\ &\leq \frac{3}{8e^{t}} (|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|), \end{aligned}$$

d'autre part, pour $t \in [0,1]$ *on a :*

$$\frac{3}{8e^{1}} \leq \frac{3}{8e^{t}} \leq \frac{3}{8e^{0}}.$$

Finalement,

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq \frac{3}{8}(|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|).$$

Donc $(\mathcal{H}_1)$ *est satisfaite avec :*

$$0 < K = L = \frac{3}{8} < 1,$$

de plus,

$$\begin{aligned} \frac{KT^{p}}{(1 - L)\Gamma(p + 1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a + b|} \right) &= \frac{\frac{3}{8}}{\left(1 - \frac{3}{8}\right)\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &\leq \frac{6}{5\sqrt{\pi}} \\ &< 1, \end{aligned}$$

alors $(\mathcal{H}_2)$ *est aussi vérifiée.*

Soit $\varphi(t) = t^{3}$, *on a :*

$$\mathcal{I}^{p}\varphi(t) = \frac{t^{p+3}}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(4)\Gamma(p)}{\Gamma(p + 4)}, \quad t > 0,$$

sachant que $p = \frac{1}{2}$, *en utilisant les propriétés (2) et (3) du lemme 1.1.1, on obtient :*

$$\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}\varphi(t) = \frac{32t^{\frac{7}{2}}}{35\sqrt{\pi}},$$

ensuite, pour $t \in [0,1]$ *on a :*

$$t^{\frac{7}{2}} \leq t^3,$$

alors :

$$\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}\varphi(t) \leq \frac{32t^3}{35\sqrt{\pi}} = \lambda_\varphi \varphi(t).$$

Ainsi $(\mathcal{H}_3)$ *est satisfaite avec* $\varphi(t) = t^3$, *et*

$$\lambda_\varphi = \frac{32}{35\sqrt{\pi}}.$$

Par le Théorème 2.2.1, le problème (3.6) a une unique solution, et par le Théorème 3.2.2, le problème (3.6) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias.

Exemple 3.3.3.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t) = \dfrac{1}{15e^t(1 + |y(t)| + |{}^C\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} y(t)|)}, & \forall t \in [0,1] \\ y(0) + y(1) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{1}{15e^t(1 + |u| + |v|)}, \quad t \in [0,1], u,v \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que la fonction f est continue.
Pour tous $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0,1]$, *on a :*

$$\begin{aligned} |f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| &= \frac{1}{15e^t}\left|\frac{(|\bar{u}| - |u|) + (|\bar{v}| - |v|)}{(1 + |u| + |v|)(1 + |\bar{u}| + |\bar{v}|)}\right| \\ &\leq \frac{1}{15e^t}|(|\bar{u}| - |u|) + (|\bar{v}| - |v|)| \\ &\leq \frac{1}{15e^t}[|\bar{u} - u| + |\bar{v} - v|], \end{aligned}$$

d'autre part, pour $t \in [0,1]$ *on a :*

$$\frac{1}{15e^1} \leq \frac{1}{15e^t} \leq \frac{1}{15e^0}.$$

Finalement,

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq \frac{1}{15}[|\bar{u} - u| + |\bar{v} - v|],$$

comme $0 < K = L = \dfrac{1}{15} < 1$, *alors* $(\mathcal{H}_1)$ *est satisfaite.*
De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{KT^p}{(1-L)\Gamma(p+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) &= \frac{\frac{1}{15}}{(1-\dfrac{1}{15})\Gamma(\frac{3}{2})}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{14\sqrt{\pi}} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

alors la condition $(\mathcal{H}_2)$ *est satisfaite.*

D'aprés le Théorème 2.2.1, le problème (3.7) a une unique solution, et par le Théorème 3.2.1 le problème (3.7) est stable au sens d'Ulam-Hyers.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail de ce mémoire, nous avons présenté différentes types de stabilité au sens d'Ulam-Hyers d'un problème avec des conditions aux limites d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notions de base de calcul fractionnaire, qui nous semblent utiles pour la bonne compréhension de notre travail présenté dans ce mémoire. La théorie de la dérivation fractionnaire a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et les propriétés de la dérivée fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la résolution d'un problème aux limites d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire.

Le dernier chapitre a été consacré à l'étude de la stabilité au sens d'Ulam-Hyers d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire. L'utilisation de cette étude a nous permis de montrer sous certaines conditions adéquates la démonstration de la stabilisation de telles équations.

Enfin, trois exemples illustratifs ont été fournis pour vérifier la validité et la capacité du schéma de la stabilité considéré.

ANNEXE

Définition 3.3.1.
Soient X un espace de Banach et F : $X \to X$*. On dit que* $x \in X$ *est un point fixe de F si :*

$$F(x) = x.$$

Théorème 3.3.1. *(Théorème de point fixe(Contraction) de Banach)*
Soient X un espace de Banach et F : $X \longrightarrow X$ *une contraction, c'est-à-dire, il existe* $0 \leq k < 1$ *tel que :*

$$\forall x, y \in X : \|f(x) - f(y)\|_X \leq K\|x - y\|_X,$$

alors F a un unique point fixe.

Lemme 3.3.1. *(Lemme de Gronwall)*
Soient $v : [0, T] \to [0, \infty)$ *une fonction réelle et* $w(.)$ *une fonction non négative, localement intégrable sur* $[0, T]$*. Supposons qu'il existe des constantes* $a > 0$ *et* $0 \leq 1$ *telles que :*

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t (t - s)^{-p} v(s) ds.$$

Alors, il existe une constante $K = K(p)$ *telle que :*

$$v(t) \leq w(t) + Ka \int_0^t (t - s)^{-p} w(s) ds. \qquad \forall t \in [0, T].$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jesus, I. S. and Machado, J. T. Fractional control of heat diffusion systems. *Nonlinear Dynamics* **54** (3) (2008) 263–282.

[2] Schmidt, V. H. and Drumheller, J. H. Dielectric properties of lithium hydrazinium sulfate. *Physical Review B* **4** (1971) 4582–4597.

[3] Bagley, R. L. and Calico, R. A. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guid Control Dynamics.* **14** (2) (1991) 304–311.

[4] Abbas, S. and Benchohra, M. On the generalized Ulam-Hyers-Rassias stability for darboux problem for partial fractional implicit differential equations. *Applied. Mathematics. E-Notes* **14** (2014), 20–28.

[5] Gavruta, P. A. Generalization of the Hyers-Ulam-Rassias stability of ap-proximately additive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **184** (1994), 431–436.

[6] Rassias, T. M., Brzdek, J. Functional equations in mathematical analysis, **86** Springer, 2012.

[7] Takahasi, S.-E., Miura, T. and Miyajima, S. On the Hyers-Ulam Stability of the banach spacevalued differential equation $\dot{y} = \lambda y$. *Bulletin of the Korean Mathemamatical Society* **39** (2002), 309–315.

[8] Podlubny, I. Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. *Elsevier science.* **198** (1998).

[9] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. Theory and applications of fractional differential equation. *North-holland mathematics studies* **204** (2006).

[10] Mittag-Leffler, G. M. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène. *Acta Mathematica* **29** (1905) 101–182.

[11] Agarwal, R. P. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. *C.R. Académie des Sciences*, (1953).