



N° Réf :

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Processus GARCH avec erreurs normal de
moyenne quelconque**

**Préparé par : Randa Boucetta
Wissal Namous**

Soutenu devant le jury

Mohamed Salah Abdelouaheb	Pr	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Boularouk Yakoub	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Boukaf Samira	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2021/2022

Remerciement

Nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage et la santé afin de pouvoir élaborer ce modeste travail et nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apportés leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Nous voudrions aussi exprimer nos remerciements sincères au nos encadrement Mr.Boularouk Yakoub qui nous a fait l'honneur d'être rapporteur de la mémoire, ainsi que pour son encadrement, ses nombreux conseils et son soutien constant tout au long de ce sujet.

Nos sincères remerciements s'adressent également aux membres de jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Enfin un grand merci à nos familles qui jouent le rôle le plus important soit dans ce travail soit dans nos vies personnelles, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

C'est avec une pensée pleine de reconnaissance inspirée par la générosité et la gentillesse

Que nous dédions ce travail à :

Nos parents.

Nos frères .

Nos sœurs.

Nos amies.

Nos encadreur : Boularouk Yakoub.

A tous ceux qui nous ont aidés, conseiller.

Randa, Wissal.

Résumé

Dans ce mémoire,

Nous étudions l'estimateur de quasi-maximum vraisemblance d'un processus GJR-GARCH avec bruit $N(m,1)$. Pour cela, nous commençons par un aperçu général sur les notions de base et les définitions (processus stochastique, la loi Normale, processus GJR-GARCH ,...). Par suite, nous étudions la consistance et la normalité asymptotiques de l'estimateur de quasi-maximum de vraisemblance. Enfin, utilisant le programme R, nous confirmons les résultats théorique obtenu par des simulations numériques de type Monte-Carlo.

Mots clés :

Modèle GJR-GARCH, Fonction vraisemblance, Estimateur Quasi-Maximum de vraisemblance Normale, Normale($m,1$), Consistance forte, Normalité asymptotique.

Abstract

This dissertation studies the quasi-maximum likelihood estimator of a GJR-GARCH process with $N(m, 1)$ noise. We start with a general overview of the basics and definitions (stochastic process, Normal law, GJR-GARCH process,...). Therefore, we study the asymptotic consistency and normality of the quasi maximum likelihood estimator. Finally, we confirm the theoretical results obtained by numerical simulation of Monte Carlo type using the R program.

Keywords :

GJR-GARCH model, Likelihood function, Normal Quasi-Maximum Likelihood Estimator, Strong consistency, Asymptotic normality.

Table des matières

1	Définitions et Notations	5
1.1	Processus stochastique	6
1.1.1	La stationnarité	6
1.1.2	Le processus bruit blanc (BB)	8
1.1.3	Causalité	9
1.1.4	Les séries temporelles	9
1.2	Loi normale ou de Laplace-Gauss	11
1.2.1	La loi normale centrée-réduite	11
1.2.2	La loi normale de paramètres μ et σ	11
1.3	Fonction Gamma	11
1.4	Méthode du maximum de vraisemblance	12
1.4.1	Vraisemblance d'un échantillon	12
1.4.2	Estimateur du maximum de vraisemblance	13
1.4.3	L'estimateur de quasi maximum de vraisemblance	13
1.5	Inégalité de Cauchy-Schwarz	14
1.6	Convergence presque sûrement des variables aléatoires	14
2	Processus à puissance asymétrique GARCH modèle GJR-GARCH	15
2.1	Modèle GJR-GARCH(p,q)	16
2.2	Définition et hypothèse	21
2.2.1	Définition d'estimateur	21
2.2.2	Existence et stationnarité	24
2.2.3	Hypothèses nécessaires pour la convergence d'EQMV-Normale	28
2.3	Comportement asymptotique d'EQMV	29
2.3.1	Propriétaires asymptotiques de la quasi vraisemblance	29
2.3.2	Consistance forte	29

2.3.3	La normalité asymptotique	35
3	Étude numériques	41
3.1	La consistance	42

Table des figures

3.1	Représentation en boîte de α_0	43
3.2	Représentation en boîte de α	44
3.3	Représentation en boîte de β	44
3.4	Représentation en boîte de γ	45

Liste des tableaux

3.1	Racine-erreur quadratique moyenne des $\hat{\theta}_n^{(0)}$ et $\hat{\theta}_n$ pour les processus GJR-GARCH considérés.	42
-----	---	----

Notations générales

Notations

(Ω, A, \mathbb{P})

Espace de probabilité.

\mathcal{F}

Filtration (Suite de tribu).

Ensemble et espace

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

Les entiers positives, les entiers, les nombres réels.

Fonction

γ_X

La fonction d'autocovariance de (X_t) .

\mathbb{I}

Fonction indicatrice.

Processus

i.i.d

Indépendant et identiquement distribué.

$N(1, 1)$

La loi normale de moyenne 1 et variance 1.

p.s

Presque sûrement.

Estimation

arg

Argument.

Θ

L'ensemble de stationnarité.

θ

L'ensemble des paramètres.

$\hat{\theta}$

Estimateur de θ .

θ_0

La vraie valeur de paramètre.

Probabilité

\xrightarrow{D}

La convergence en distribution.

$\xrightarrow{p.s}$

La convergence presque sûre.

Introduction

Une série chronologique (ou temporelles) est une suite formée d'observation au cours du temps, l'analyse des séries chronologiques est un outil utilisé de nos jours pour la prédiction de données futures, ce domaine a beaucoup d'applications en finance, économie, médecine et démographie. L'idée est de prendre une réalisation de données et de construire le meilleur modèle qui ajuste ces données. Ce modèle permet de faire n'importe quelle conclusion sur la série. La théorie des séries chronologiques abordée dans ce travail est appliquée pour n'en citer qu'une petite partie. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un phénomène, dans le but de décrire, expliquer puis prévoir ce phénomène dans le futur. On dispose ainsi d'observations à des dates différentes, c'est-à-dire d'une suite de valeurs numériques indicées par le temps. Cette suite d'observation d'une famille de variables aléatoires réelles notées est appelées séries chronologiques. On spécifiait deux types de modèles pour représenter les séries chronologiques : les modèles linéaires et les modèles non linéaires.

En 1970, Box et Jenkins ont publié un livre "Time series : forecasting and control" ([8]), dans lequel ils ont présenté et étudié les modèles Autoregressifs moyenne mobile (ARMA) et les modèles Auto-regressifs moyenne mobile intégrés (ARIMA) de bruits Gaussiens et de variance constante. Les deux processus proposés dépendent de leurs passés et celui des bruits. En 1982, Engel ([22]) a proposé le modèle Autoregressif conditionnellement hétéroscédastique (*ARCH*) avec bruits Gaussiens. On considère un processus X_t tel que :

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2.$$

Où ε_t est une série non corrélée de moyenne nulle, et de variance conditionnelle h_t^2 qui varie avec le temps.

Le modèle GARCH (General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

a été introduit par Bollerslev (1986). C'est une extension du modèle ARCH initialement développé par Engle (2002). Ces modèles permettent une représentation autogressive de la variance conditionnelle d'un processus, ce qui permet de les utiliser notamment à des fins de prévisions de la volatilité sur les marchés financiers. Le modèle GARCH(p,q) qui s'écrit sous la forme :

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \varepsilon_t^2,$$

où h_t est la variance conditionnelle à la date t . $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, q$. $\beta_j \geq 0$ pour $j = 1, \dots, p$. Avec p, q deux entiers positifs non nuls et ε_t obéit à une $N(0,1)$ les modèles GARCH les plus populaires, qui se divisent en deux catégories : symétriques et asymétriques.

- GARCH asymétriques

L'idée derrière les modèles asymétriques est toute simple : l'effet hétéroscédastique n'est sans doute pas le même suivant que l'erreur précédente est positive ou négative. On note parmi les modèles asymétriques, ceux qui sont le plus utilisés, les modèles EGARCH, AGARCH, NGARCH et GJR-GARCH. Afin de prendre en compte la modification d'un coefficient selon la survenue d'un évènement, il est courant d'introduire une nouvelle explicative construite comme produit d'une indicatrice de l'évènement en question et de la variable initiale. C'est l'idée adoptée par Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) qui, partant de l'écriture GARCH(p,q) de base, arrivent à introduire le modèle suivant :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i X_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{X_{t-i} < 0} X_t^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}.$$

Le modèle GJR-GARCH capte l'effet d'asymétrie des perturbations sur la variance conditionnelle. Dans leurs études sur l'indice de la valeur pondérée par la capitalisation boursière de CRSP, Glosten, Jagannathan et Runkle [Glostenetal, 1993] trouvent que les chocs négatifs provoquent une augmentation de la variance conditionnelle plus forte que les chocs positifs. Cette relation négative entre les rendements conditionnels et la variance conditionnelle peuvent être expliquées par l'effet de levier, ou bien par la volatilité rétroactive qui suggère qu'une hausse anticipée de la volatilité accroisse le rendement exigé par les investisseurs, puisque le titre deviendra plus risqué, et ceci implique que la valeur du titre diminue immédiatement, toutes choses étant égales par ailleurs.

Ce mémoire étudie principalement l'estimateur de Quasi maximum de vraisemblance (EQMV) pour le modèle GJR-GARCH basé sur la distribution de Normale($m,1$) organisé comme suit :

- Dans le premier chapitre nous avons présenté les principales définitions, propriétés des processus stochastiques des séries chronologiques et quelques notions de base dans le premier chapitre.

- Dans le deuxième chapitre nous avons défini l'estimateur de quasi-maximum vraisemblance Normale. En suit, nous étudions l'existence et la stationnarité de processus GJR-GARCH. Enfin, nous prouvons la consistance forte et la normalité asymptotique de cet l'estimateur.

- Dans le troisième chapitre, nous avons effectué une étude numérique à l'aide de langage R pour vérifier les résultats théoriques obtenus dans le deuxième chapitre.

Chapitre 1

Définitions et Notations

Dans ce premier chapitre, nous exposons un petit rappel de quelques notions de bases concernant les processus stochastiques.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 Un processus stochastique défini sur \mathbb{T} noté $(X_t)_t$ est une suite de variable aléatoires X_t de Ω à valeur dans \mathbb{R} , de telle manière qu'à chaque élément $t \in \mathbb{T}$ est associée une variable aléatoire X_t . On a ainsi deux cas :

- i- Les processus à temps discret quand \mathbb{T} est discrète ; ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$).
- ii- Les processus à temps continu quand \mathbb{T} est continue ; ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$).

Définition 1.1.2 (L'opérateur de retard)

L'opérateur retard L (L Lag noté aussi B pour Backward) décale le processus d'une unité de temps vers le passé :

$$LX_t = X_{t-1},$$

Pour tout $t > 1$.

Si on applique h fois cette opérateur, on décale le processus de h unités de temps :

$$\underbrace{L(L(\dots L(X_t)\dots))}_h = L^h X_t = X_{t-h}.$$

L'opérateur retard possède les propriétés suivantes

- $L^j X_t = X_{t-j}$. ; en particulier, $L^0 X_t = X_t$.
- $X_t = C \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, alors $L^j X_t = L^j C = C$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$.
- $L^j(L^k X_t) = L^{j-k} X_t = X_{t-j+k}$.
- $L^{-j} X_t = X_{t+j}$.
- $(L^j + L^k)X_t = L^j X_t + L^k X_t = X_{t-j} + X_{t-k}$.

1.1.1 La stationnarité

Une des grandes questions dans l'étude de séries temporelles est de savoir si celles-ci suivant un processus stationnaire. Une série chronologique de réalisation d'une grandeur aléatoire, un pas de temps donné, est dite stationnaire si ses réalisations sont issues d'un même processus stochastique dont les paramètres (moyenne, variance...) restent constants au cours du temps.

Espérance Mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un

grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle se note $\mathbb{E}(X)$ et se lit « espérance de X ».

Définition 1.1.3 Soit X un variable aléatoire réelle continue qui admet une densité de probabilité f_X si :

$$\int_{\mathbb{R}} |x|f_X(x)dx < +\infty.$$

L'espérance mathématique de X est défini par :

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_{\Omega} X dp, \\ &= \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx, \end{aligned}$$

avec Ω l'ensemble des variables aléatoires, P la loi de probabilité.

Définition 1.1.4 Soit X un variable aléatoire réelle discrete défini sur un espace de probabilité (Ω, A, \mathbb{P}) tq : $X(\Omega) = (x_1, x_2, \dots)$ elle est dite intégrable si :

$$\sum_i |x_i|P(X = x_i) < +\infty.$$

L'espérance mathématique de X est défini par :

$$E\{X\} = \sum_i x_i P(X = x_i).$$

Moment d'ordre r

Définition 1.1.5 Soit X une variable aléatoire réelle quelconque et $r \in \mathbb{N}^*$ on dira que la variable aléatoire réel X a un **Moment d'ordre r** si X^r a une espérance finie.

- Dans le cas continue :

$$E\{X^r\} = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x)dx.$$

- Dans le cas discret :

$$E\{X^r\} = \sum_i x_i^r P(X = x_i).$$

- Le moment d'ordre r centré est donné par :

$$\begin{aligned} E\{X^r\} &= \int_{\Omega} (X - \mu)^r dp, \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^r f_X dx, \end{aligned}$$

où $\mu = E\{X\}$.

La stationnarité stricte

Définition 1.1.6 *Le processus aléatoire X est dit stationnaire au sens strict si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout n -uplet $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et pour tout $h \in \mathbb{Z}$, les vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont la même loi de probabilité.*

La stationnarité au second ordre (au sens faible)

Définition 1.1.7 *Un processus aléatoire $(X_t)_{t \in T}$ est dit stationnaire au sens faible si :*

$$\begin{cases} E\{X_t\} = \mu < +\infty & \forall t \in \mathbb{Z} \\ \text{Var}(X_t) = \sigma^2 & \forall t \in \mathbb{Z} \\ \text{cov}(X_t + X_{t+h}) = \gamma_t & \forall t, h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1.1.2 Le processus bruit blanc (BB)

Définition 1.1.8 *Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stochastique, on dit que $(\varepsilon_t)_t$ est un bruit blanc faible si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\forall t \in \mathbb{Z}, \quad E\{\varepsilon_t\} = 0.$
2. $\forall t \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma_{\varepsilon}(h) = E\{\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}\} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On appelle bruit blanc fort tout bruit blanc faible tel que les variables (ε_t) sont (i. i. d) et un bruit blanc gaussien tout bruit blanc fort $(\varepsilon_t)_t$ tel que $\forall t, (\varepsilon_t) \sim N(0, \sigma^2)$.

Remarque :

- Un BB faible est faiblement stationnaire.
- Un BB fort est fortement stationnaire.

1.1.3 Causalité

Définition 1.1.9 *Un processus stochastique X_t est dit causal s'il existe une suite des constantes $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ tel que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty$, on*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \eta_{t-k}.$$

1.1.4 Les séries temporelles

Définition 1.1.10 *Une série temporelle (une série chronologique) est une suite de valeurs numériques représentant l'évolution d'une quantité spécifique au cours du temps.*

Elle sera notée prochainement par :

$$X_t = (x_t)_t, x \text{ est une v.a et } t \in \mathbb{R}$$

Remarque : Une série chronologique peut être considérée comme une suite d'observations ponctuelles dans le temps d'un processus aléatoire.

Objectifs principaux dans l'étude des séries chronologiques

- Il y a nombreux domaines d'application des séries temporelles :
- Démographie : analyse de l'évolution d'une population.
 - Ânerie : prévision de la consommation d'électricité.
 - Finance et économétrie : évolution des indices boursiers, des productions agricoles ou industrielles.
 - Médecine : analyse d'électroencéphalogrammes d'électrocardiogrammes.
 - Science de la terre et l'espace : évolution des taches solaires, phénomènes d'avalanches.
 - Météorologie : analyse de données climatique.
 - Traitement de signal : signaux de communications de radars.

- Assurance : analyse des sinistres.
- Agriculture : la quantité d'un produit.
- Traitement des données : mesures successives de position ou de direction d'un objet mobile (trajectographie).

Modélisation d'une séries temporelles

Un modèle de série temporelle est une équation précisant la façon dont les composantes s'articulent les unes par rapport aux autres pour constituer la série temporelles. On distingue principalement deux types de modèles :

1. **les modèles déterministes** : Ces modèles relèvent de la Statistique Descriptive. Ils ne font intervenir que de manière sous-jacente le calcul des probabilités et consistent à supposer que l'observation de la série à la date t est une fonction du temps t et d'une variable ϵ_t centrée faisant office d'erreur au modèle, représentant la différence entre la réalité et le modèle proposé :

$$X_t = f(t, \epsilon_t).$$

On suppose de plus que les ϵ_t sont dé-corrélées.

Les deux modèles de ce type les plus usités sont les suivants :

- **Le modèle additif** : Nous considérons dans cette section une série $X = (X_t)_t$ admettant une décomposition additive

$$X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t,$$

Où Z_t est la composante tendancielle, S_t la composante saisonnière et ϵ_t les composantes ("erreurs au modèle") aléatoires i.i.d.

- **Le modèle multiplicatif** : Nous considérons dans cette section une série $X = (X_t)_t$ admettant une décomposition multiplicative

$$X_t = Z_t(1 + S_t)(1 + \epsilon_t).$$

Où Z_t est la composante tendancielle, S_t la composante saisonnière et ϵ_t représente l'erreur ou l'écart au modèle.

2. **Les modèles stochastiques** : Ils sont du même type que les modèles déterministes à ceci près que les variables de bruit ϵ_t ne sont pas i.i.d mais possèdent une structure de corrélation non nulle : ϵ_t est une fonction des valeurs passées (\pm lointaines suivant le modèle) et d'un terme d'erreur η_t

$$\epsilon_t = g(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots, \eta_t).$$

1.2 Loi normale ou de Laplace-Gauss

1.2.1 La loi normale centrée-réduite

Définition 1.2.1 Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R} suit une **loi normale centrée-réduite** notée $X \sim N(0, 1)$. Si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction $f(x)$ suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.2.2 La loi normale de paramètres μ et σ

Définition 1.2.2 Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R} suit une **loi normale de paramètres** $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, notée $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Si X est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction $f_{\mu, \sigma}$ suivante :

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.3 Fonction Gamma

Fonction définie par une intégrale et qui fournit notamment la valeur des moments (espérance mathématique, variance, ...) de plusieurs lois de proba-

bilité. Elle possède également un intérêt puissant sans d'autres domaines des mathématiques.

Définition 1.3.1

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt, \quad (x > 0).$$

*Pour tout x réel positif, on a la récurrence $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.
 Pour tout entier n positif, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

1.4 Méthode du maximum de vraisemblance

Tout les modèles statistiques ne peuvent pas être traités par la méthode des moindres carrés car ils n'ont pas tous la structure requise. La vraisemblance par contre, offre une approche générale de l'estimation de paramètres inconnus à l'aide de données. La vraisemblance est une fonction des observations et de paramètre dont l'objectif est de trier les différentes valeurs du paramètre selon leur «Likelihood».

1.4.1 Vraisemblance d'un échantillon

La vraisemblance des observations $X = (X_1, \dots, X_n)$ d'un échantillon aléatoire de loi parente la loi de X , note $L(x_1, \dots, x_n, \theta)$ est définie de façon suivante :

- Si X est une variable aléatoire discrète :

$$\theta \in \Theta \mapsto L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i),$$

où Θ est l'ensemble des valeurs possibles du paramètre θ .

- Si X est une variable aléatoire continue :

$$\theta \in \Theta \mapsto L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i\theta}(x_i),$$

Remarque : Les expressions des vraisemblances ci-dessus ne sont valables que parce que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes par définition d'un **échantillon aléatoire**.

Fonction de log-vraisemblance

Définition 1.4.1 On appelle fonction de log-vraisemblance pour (x_1, x_2, \dots, x_n) toute fonction de θ définie par :

$$C_n(x_1, \dots, x_n; \theta) = \log(L_n(x_1, \dots, x_n; \theta)).$$

Elle n'a de sens que si θ vérifie $L_n(x_1, \dots, x_n; \theta) > 0$.
La fonction logarithme népérien étant croissante.

1.4.2 Estimateur du maximum de vraisemblance

Définition 1.4.2 On appelle estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) toute fonction $\hat{\theta}_n$ de (X_1, \dots, X_n) qui vérifie

$$L(x_1, \dots, x_n, \hat{\theta}_n) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n, \theta)$$

Cette définition ne renseigne en aucune façon, ni sur l'existence, ni sur l'unicité, d'un tel estimateur. La recherche de l'EVM peut se faire directement par recherche du maximum de L , ou dans le cas particulier où la fonction L est deux fois dérivable par rapport à θ , comme solution de l'équation $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

qui vérifie aussi $\frac{\partial^2 L}{\partial^2 \theta} < 0$.

Cependant, la vraisemblance se calculant à partir d'un produit, on préfère remplacer ce dernier problème par le problème équivalent pour le log-vraisemblance, puisque la fonction \ln est strictement croissante, $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ avec $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \theta} < 0$ et qui aura une expression généralement simplifiée.

1.4.3 L'estimateur de quasi maximum de vraisemblance

En général, la fonction de vraisemblance pour un processus X n'est pas calculable puisque le passé du phénomène (X_0, X_{-1}, \dots) sont généralement inconnus. C'est pourquoi on utilise la quasi-vraisemblance qu'on obtient en remplaçant le passé du processus par des zéros. L'estimateur de quasi vraisemblance maximale (EQMV) est défini par :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \log(QL_\theta(X_1, \dots, X_n)).$$

1.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.5.1 Soient (U_1, \dots, U_n) et (V_1, \dots, V_n) des réels (ou des complexes). Alors :

$$\sum_{k=1}^n |U_k V_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |U_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |V_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.6 Convergence presque sûrement des variables aléatoires

Définition 1.6.1 La suite X_n converge presque sûrement vers X si :

$$P(\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)) = 0.$$

Et on note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X$.

Chapitre 2

Processus à puissance asymétrique GARCH modèle GJR-GARCH

Ce chapitre, nous traitons l'estimation des paramètres d'un modèle GJR-GARCH avec erreur normale $(m, 1)$, la méthode d'estimation envisagée est la méthode du quasi-maximum de vraisemblance. Dans un premier temps, nous étudions l'existence et la stationnarité pour ce modèle. Par suite, on va étudier en détail la méthode du quasi maximum de vraisemblance, et calculer l'estimateur de quasi-maximum de vraisemblance La loi normale, obtenu sous l'hypothèse que $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suit une loi normale $(m, 1)$. Enfin, nous prouvons la consistance forte et la normalité asymptotique de cet estimateur paramétrique.

2.1 Modèle GJR-GARCH(p,q)

Définition 2.1.1 *Un processus X_t satisfait une représentation GJR-GARCH(p,q) si et seulement si :*

$$\begin{cases} X_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i X_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{X_{t-i} < 0} X_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Où $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $-1 < \gamma_i < 1$, pour $i = 1, \dots, q$, $\beta_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$, avec $\alpha_q > 0$, $\beta_p > 0$ et $\sum_{i=1}^p \beta_i < 1$.

• On note le vecteur des paramètres par : $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_1, \dots, \gamma_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$.

• Le résidu normalisé η_t est un bruit faible et $\mathbb{I}_{X_{t-i} < 0}$ désigne la fonction indicatrice telle que :

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{X_{t-i} < 0} = 1 & \text{si } X_{t-i} < 0 \\ \mathbb{I}_{X_{t-i} < 0} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.1.1 *Soit X_t le processus GJR-GARCH définie par (2.1.1), si $(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i)^{-1}$ existe, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on peut écrire la variance conditionnelle h_t sous la forme suivante :*

$$h_t = b_0 + \sum_{i \geq 1} b_i^+ L^i (\max(X_t, 0))^2 + \sum_{i \geq 1} b_i^- L^i (\max(-X_t, 0))^2, \quad (2.1.2)$$

où $b_0 = (1 - \sum_{i=1}^p \beta_i)^{-1} \alpha_0$ et les coefficients $(b_i^+, b_i^-)_{i \geq 1}$ sont définis par les relations récurrent suivant :

$$\begin{cases} b_i^+ = \sum_{k=1}^p \beta_k b_{i-k}^+ + \alpha_i & \text{avec } \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i > q; \\ b_i^- = \sum_{k=1}^p \beta_k b_{i-k}^- + (\alpha_i + \gamma_i) & \text{avec } (\alpha_i + \gamma_i) = 0 \quad \text{pour } i > q, \end{cases}$$

avec $b_i^+ = b_i^- = 0$ pour $i < 0$.

Preuve 1 (preuve de la Proposition 2.1.1)

On a pour tout $t \in \mathbb{Z}$ la variance conditionnelle est définie par :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i X_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{X_{t-i} < 0} X_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \quad (2.1.3)$$

En remplaçant $X_t = \max(X_t, 0) + \min(X_t, 0)$ dans (2.1.3) on obtient :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i (\max(X_{t-i}, 0))^2) + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i) (\min(X_{t-i}, 0))^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \quad (2.1.4)$$

Par la multiplication de $(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i)$ et (2.1.4) on obtient :

$$(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i) h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i (\max(X_{t-i}, 0))^2) + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i) (\min(X_{t-i}, 0))^2, \quad (2.1.5)$$

donc on peut écrire (2.1.5) de la manière suivant :

$$B(L) h_t = \alpha_0 + \Theta^+(L) (\max(X_t, 0))^2 + \Theta^-(L) (\max(-X_t, 0))^2, \quad (2.1.6)$$

avec

$$\begin{aligned} B(L) &= (1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i), \\ \Theta^+(L) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i = \sum_{i=1}^q \theta_i^+ L^i, \\ \text{et } \Theta^-(L) &= \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i) L^i = \sum_{i=1}^q \theta_i^- L^i. \end{aligned}$$

Comme l'inverse de l'opérateur $B(L)$ existe alors on a :

$$h_t = b_0 + \sum_{i \geq 1} b_i^+ L^i (\max(X_t, 0))^2 + \sum_{i \geq 1} b_i^- L^i (\max(-X_t, 0))^2. \quad (2.1.7)$$

De (2.1.6) et (2.1.7) on peut déterminer les coefficients b_0 et $(b_i^+, b_i^-)_{i \geq 1}$:

$$\begin{cases} B(L) \sum_{i \geq 0} b_i^+ L^i = \alpha_0 + \Theta^+(L), \\ B(L) \sum_{i \geq 0} b_i^- L^i = \alpha_0 + \Theta^-(L), \end{cases} \quad (2.1.8)$$

implique que

$$b_0 = b_0^+ = b_0^- = \frac{\alpha_0}{B(L)} = \left(1 - \sum_{i=1}^q \beta_j\right)^{-1} \alpha_0.$$

Le système (2.1.8) est équivalent au système

$$\begin{cases} \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i\right) \sum_{i \geq 0} b_i^+ L^i = \sum_{i=0}^q \theta_i^+ L^i \\ \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i L^i\right) \sum_{i \geq 0} b_i^- L^i = \sum_{i=0}^q \theta_i^- L^i \end{cases}, \text{ avec } \theta_0 = \alpha_0,$$

d'où

$$\begin{cases} \sum_{i \geq 0} b_i^+ L^i - \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^p \beta_j b_i^+ L^{i+j} = \sum_{i=0}^q \theta_i^+ L^i \\ \sum_{i \geq 0} b_i^- L^i - \sum_{i \geq 0} \sum_{j=1}^p \beta_j b_i^- L^{i+j} = \sum_{i=0}^q \theta_i^- L^i \end{cases}, \text{ avec } \theta_0 = \alpha_0.$$

De la première équation on a :

$$\begin{aligned}
b_1^+ &= \beta_1 b_0^+ + \alpha_1, \\
b_2^+ &= \beta_1 b_1^+ + \beta_2 b_0^+ + \alpha_2, \\
b_3^+ &= \beta_1 b_2^+ + \beta_2 b_1^+ + \beta_3 b_0^+ + \alpha_3, \\
&\dots
\end{aligned}$$

De la deuxième équation on a :

$$\begin{aligned}
b_1^- &= \beta_1 b_0^- + (\alpha_1 + \gamma_1), \\
b_2^- &= \beta_1 b_1^- + \beta_2 b_0^- + (\alpha_2 + \gamma_2), \\
b_3^- &= \beta_1 b_2^- + \beta_2 b_1^- + \beta_3 b_0^- + (\alpha_3 + \gamma_3), \\
&\dots
\end{aligned}$$

Alors les coefficients $(b_i^+, b_i^-)_{i \geq 1}$ sont définis par les relations de récurrence :

$$\begin{cases}
b_i^+ = \sum_{k=1}^p \beta_k b_{i-k}^+ + \alpha_i & \text{avec } \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i > q, \\
b_i^- = \sum_{k=1}^p \beta_k b_{i-k}^- + (\alpha_i + \gamma_i) & \text{avec } (\alpha_i + \gamma_i) = 0 \quad \text{pour } i > q.
\end{cases}$$

Lemme 2.1.1 Soit $0 < \rho_0 < 1$, en définir $U = \{\theta \mid \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_p \leq \rho_0\}$.

Pour tout $\theta \in U$ on a :

$$b_i^+ \leq C_1 \rho_0^{\frac{i}{p}} \quad 0 \leq i < \infty, \quad (2.1.9)$$

$$b_i^- \leq C_2 \rho_0^{\frac{i}{p}} \quad 0 \leq i < \infty, \quad (2.1.10)$$

avec $C_1, C_2 > 0$ constant plus grand.

Preuve 2 (preuve du Lemme 2.1.1)

Nous donnons la même démarche de Berkes 2003

On va montrer ce lemme par récurrence.

• Pour $i=0$ on a :

$$b_0^+ = b_0^- = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \beta_i} \leq \frac{\alpha_0}{1 - \rho_0} \rho_0^{\frac{q}{p}}. \quad (2.1.11)$$

Relation vérifié.

• Pour $i \geq 1$:

Supposons que le Lemme est vérifié pour tout $i > R = \max(p, q)$ et on va montrer qui est reste vrais pour i :

De (2.1.9)on trouve,

$$\begin{aligned} b_i^+ &\leq (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p) \max_{1 \leq k \leq p} b_{i-k}, \\ &\leq \rho_0 C_1 \rho_0^{\frac{(i-p)}{p}}, \\ &\leq C_1 \rho_0^{\frac{i}{p}}. \end{aligned}$$

Et de (2.1.10) :

$$\begin{aligned} b_i^- &\leq (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_p) \max_{1 \leq k \leq p} b_{i-k}, \\ &\leq \rho_0 C_2 \rho_0^{\frac{(i-p)}{p}}, \\ &\leq C_2 \rho_0^{\frac{i}{p}}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

2.2 Définition et hypothèse

2.2.1 Définition d'estimateur

Soit $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ une trajectoire observée de η où $\theta \subset \mathbb{R}^{1+2q+p}$ est l'ensemble des paramètres inconnus du modèle, pour estimer θ nous considérons la log-vraisemblance de (X_1, X_2, \dots, X_n) . Si f est la densité de probabilité de η défini par :

$$f_\eta(\eta_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\eta_t - m)^2}. \quad (2.2.1)$$

- Le modèle GJR-GARCH(p,q) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} x_t &= \eta_t h_t^{1/2}, \\ h(t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i X_t^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{X_{t-i} < 0} X_t^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \end{aligned}$$

Et comme on a :

$$f_{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \prod_{t=1}^n f_\eta(\eta_t),$$

de (2.2.1) on obtient :

$$\begin{aligned} f_{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) &= \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\eta_t - m)^2}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\eta_t - m)^2}. \end{aligned}$$

Nous utilisons l'intégrale pour obtenir la fonction $f(X_1, \dots, X_n)$

$$\begin{aligned} \oint f_{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) d\eta_1 \dots d\eta_n &= \oint \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\eta_t - m)^2} d\eta_1 \dots d\eta_n, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \oint e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\eta_t - m)^2} d\eta_1 \dots d\eta_n. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

On fait un changement de variable $(\eta_1, \dots, \eta_n) \longrightarrow (X_1, \dots, X_n)$

on a $X_t = \eta_t h_t^{1/2}$ tel que $\eta_t \sim \mathcal{N}(m, 1)$,

$\Rightarrow \eta_t = X_t h_t^{-1/2}$,

alors $d\eta_t = h_t^{-1/2} dX_t, \forall t = 1 \dots n$.

Donc (2.2.2) devient :

$$\begin{aligned} \oint f_{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) d\eta_1 \dots d\eta_n &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \oint e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (X_t (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - m)^2} (h_\theta)^{-\frac{1}{2}} dX_1 \dots (h_\theta)^{-\frac{n}{2}} dX_n, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \oint e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (X_t (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - m)^2} \left(\prod_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} \right) dX_1 \dots dX_n, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \oint e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m (h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2} \left(\prod_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} \right) dX_1 \dots dX_n \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\prod_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m (h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2}, \\ &= \left(\prod_{t=1}^n \frac{1}{2\pi} (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m (h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2}. \end{aligned}$$

• La fonction vraisemblance :

$$l(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m (h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2} \left(\prod_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (2.2.3)$$

- La fonction log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \log l(\theta), \\
&= \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2} \left(\prod_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} \right) \right), \\
&= -n \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log(h_\theta^t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2, \\
&= -n \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\log(h_\theta^t) + (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2 \right).
\end{aligned}$$

- Nous définissons respectivement la vraisemblance de loi Normale et le quasi-vraisemblance de loi Normale par :

$$\begin{aligned}
L_n(\theta) &= - \sum_{t=1}^n q_t(\theta), & q_t(\theta) &= \log(h_\theta^t) + (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2, \\
\hat{L}_n(\theta) &= - \sum_{t=1}^n \hat{q}_t(\theta), & \hat{q}_t(\theta) &= \log(\hat{h}_\theta^t) + (\hat{h}_\theta^t)^{-1} (X_t - m(\hat{h}_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2.
\end{aligned}$$

Comme (X_0, X_{-1}, \dots) sont inconnus, généralement h_θ^t ne sont pas calculables pour cela, au lieu d'utiliser la log-vraisemblance on utilise la quasi log-vraisemblance.

Un EQMV de loi Normale $\hat{\theta}_n$ est le maximisateur de \hat{L}_n :

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_n &= \arg \max_{\theta \in \Theta} \hat{L}_n, \\
&= \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \hat{q}_i(\theta).
\end{aligned}$$

2.2.2 Existence et stationnarité

Proposition 2.2.1 *Le GJR-GARCH définie dans (2.1.1) est un processus causal faiblement stationnaire satisfaisant $E\{X^2\} < \infty$. Si et seulement si*

$$(1 + m^2) \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1. \quad (2.2.4)$$

Pour assurer la stationnarité de (2.1.1), nous définissons l'ensemble

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^{1+2q+p} \setminus (1 + m^2) \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1\}.$$

Dans la proposition suivante, nous établissons une représentation pour h_t^2 en termes de $\{X_{t-i}^2\}_{i \geq 1}$.

Proposition 2.2.2 *Si $\theta_0 \in \Theta$, alors il existe une représentation causale unique de h_t^2 donnée par*

$$h_t^2 = c_0 + \sum_{i \geq 1} c_i X_{t-i}^2, \quad (2.2.5)$$

où, il existe $0 < \rho, \rho_* < 1$ tel que,

$$c_i \leq C_1 \rho^i, \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial c_i(\theta)}{\partial \theta_k} \leq C_2 i \rho_*^i, \quad \forall 1 \leq j \leq 1 + 2q + p. \quad (2.2.7)$$

Preuve 3 (preuve de la Proposition 2.2.1)

L'idée de la preuve suit celle du théorème 1 de Bollerslev (1986)([4]).

Soit X_t est le processus GJR-GARCH(p, q) définit par :

$$X_t = \eta_t \sqrt{h(t)} \quad \eta \sim \mathcal{N}(m, 1), \quad (2.2.8)$$

$$h(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i X_t^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} X_t^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \quad (2.2.9)$$

Substituent (2.2.8) dans (2.2.9) on obtient :

$$\begin{aligned}
h(t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 h_{t-i} + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2 h_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}, \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 (\alpha_0 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \gamma_j \mathbb{I}_{\eta_{t-i-j} < 0} \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j})) \\
&\quad + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2 (\alpha_0 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \gamma_j \mathbb{I}_{\eta_{t-i-j} < 0} \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j})) \\
&\quad + \sum_{i=1}^p \beta_i (\alpha_0 + \sum_{j=1}^q (\alpha_j \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j} + \gamma_j \mathbb{I}_{\eta_{t-i-j} < 0} \eta_{t-i-j}^2 h_{t-i-j}) + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-i-j}), \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= \alpha_0 \sum_{k=1}^{+\infty} M(t, k). \tag{2.2.10}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
M(t, 0) &= 1, \\
M(t, 1) &= \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i, \\
M(t, 2) &= \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2) M(t, 1) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t, 1), \\
M(t, 3) &= \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 M(t, 2) + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2 M(t, 2)) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t, 2).
\end{aligned}$$

Et en générale

$$M(t, k+1) = \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 M(t-i, k) + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2 M(t-i, k)) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t-i, k). \tag{2.2.11}$$

On a η_t^2 est i.i.d, le moment de $M(t, k)$ est indépendant de t alors :

$$E\{M(t, k)\} = E\{M(s, k)\} \quad \text{pour tout } k, t, s. \quad (2.2.12)$$

De (2.2.8) on déduit que

$$\begin{aligned} E\{\eta_t^2\} &= \text{Var}(\eta_t) + E\{\eta_t\}^2, \\ &= 1 + m^2. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} E\{\mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2\} &= \int_{-\infty}^0 x^2 f(x), \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x), \\ &= \frac{1}{2} E\{\eta_t^2\}, \\ &= \frac{1}{2} (1 + m^2). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

De (2.2.11), (2.2.12), (2.2.13) et (2.2.14) on obtient :

$$\begin{aligned} E\{M(t, k+1)\} &= E\left\{ \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 M(t-i, k) + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2 M(t-i, k) + \sum_{i=1}^p \beta_i M(t-i, k) \right\}, \\ &= E\left\{ \sum_{i=1}^q (\alpha_i \eta_{t-i}^2 + \gamma_i \mathbb{I}_{\eta_{t-i} < 0} \eta_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^p \beta_i \right\} E\{M(t, k)\}, \\ &= ((1 + m^2) \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) + \sum_{i=1}^p \beta_i) E\{M(t, k)\}, \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= ((1 + m^2) \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) + \sum_{i=1}^p \beta_i)^{k+1} E\{M(t, 0)\}, \\ &= ((1 + m^2) \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) + \sum_{i=1}^p \beta_i)^{k+1}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

En fin de (2.2.8), (2.2.10) et (2.2.15) on obtient :

$$\begin{aligned}
E\{X_t^2\} &= E\{\eta_t^2 h_t\}, \\
&= E\left\{\alpha_0 \sum_{k=1}^{\infty} M(t, k) \eta_t^2\right\}, \\
&= \alpha_0 E\{\eta_t^2\} E\left\{\sum_{k=1}^{\infty} M(t, k)\right\}, \\
&= \alpha_0 (1 + m^2) \sum_{k=1}^{\infty} E\{M(t, k)\}, \\
&= \alpha_0 (1 + m^2) \left(1 - \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) + \sum_{i=1}^p \beta_i\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $E\{X_t^2\} < \infty$ si et seulement si :

$$(1 + m^2) \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1.$$

2.2.3 Hypothèses nécessaires pour la convergence d'EQMV-Normale

L'EQMV-Normale pourrait converger et être asymptotiquement Normal, mais cela nécessiter quelques hypothèses supplémentaires sur Θ et la fonction h_θ :

- **Hypothèses H1** (*compacité*) : Θ est un ensemble compacte.
- **Hypothèses H2** (*Borne inférieure de la variance conditionnelle*) : il existe un constante $\alpha_0 > 0$ tel que, $\forall \theta \in \Theta$ alors $h_\theta(x) > \alpha_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- **Hypothèses H3** : $E\{(\eta_t - m)^2\} = 1$.
- **Hypothèses H4** (*Identifiabilité*) : Le fonction h_θ est telle que pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, alors $h_{\theta_1} = h_{\theta_2}$ implique que $\theta_1 = \theta_2$.

2.3 Comportement asymptotique d'EQMV

2.3.1 Propriétaires asymptotiques de la quasi vraisemblance

Lemme 2.3.1 *Supposons que $\theta_0 \in \Theta$ et que X_t est la solution causal et stationnaire de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, alors pour tout $t \in \mathbb{N}^\infty$:*

$$E|\hat{h}_\theta^t - h_\theta^t|_\Theta^r \leq CE\{|X_0|^r\}(\sum_{i \geq t} \alpha_i^{(0)}(h_\theta^t, \Theta))^r.$$

Avec

$$\alpha_i^{(0)}(h_\theta^t, \Theta) = \sup_{\theta \in \Theta} \max(|b_i^+(\theta)|, |b_j^-(\theta)|).$$

2.3.2 Consistance forte

Théorème 2.3.1 *Supposons que les hypothèses sont H1 – H4 satisfaites, alors la suite d'EQMV-Normale $(\hat{\theta}_n)$ converge fortement, c'est-à-dire*

$$\hat{\theta}_n \longrightarrow \theta_0 \quad p.s.$$

Preuve 4 (Preuve du Théorème 2.3.1)

Nous prouvons ce théorème en deux étapes dans la première étape une forte loi uniforme des grandes nombres sur θ satisfaite par $\frac{1}{n}\hat{L}_n(\theta)$ qui converge vers $L(\theta) = -E\{q_t(\theta)\}$ est établi. Par suite, dans la deuxième étape nous prouvons que $L(\theta)$ admet un maximum unique en θ_0 .

On prouve **l'étape(1)** par le même façon de la preuve du théorème 1 de Bardet, Boularouk et Djaballah (2017)([6]), la loi uniforme forte des grands nombre satisfaite pour la moyenne d'échantillon $(\hat{q}_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ est obtenu en prouvant que $E\{|q_t(\theta)|\} < \infty$. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et sous l'hypothèse H2, on a :

$$\begin{aligned}
|q_t(\theta)| &= |\log(h_\theta^t) + (h_\theta^t)^{-1}(X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2|, \\
&\leq |\log(h_\theta^t)| + (X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - m)^2, \\
&\leq |h_\theta^t| + (X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - m)^2, \\
&\leq |h_\theta^t| + \left(\frac{X_t}{(\alpha_0)^{\frac{1}{2}}} - m\right)^2.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sup |q_t(\theta)| \leq |h_\theta^t| + \left(\frac{X_t}{(\alpha_0)^{\frac{1}{2}}} - m\right)^2, \quad (2.3.1)$$

où, $E\{X_t^2\} < \infty$ d'après la proposition 2.2.1 et $E\{|h_\theta^t|\} < \infty$ d'après le Lemme 1 de Bardet et Wintenberger (2009) ([1]) ce qui implique que $E\{|q_t(\theta)|\} < \infty$, d'où on conclut que :

$$\left|\frac{1}{n}L_n(\theta) - L(\theta)\right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0. \quad (2.3.2)$$

Maintenant nous allons montrer que :

$$\frac{1}{n}|\widehat{L}_n(\theta) - L_n(\theta)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0. \quad (2.3.3)$$

En effet, pour tout $\theta \in \Theta$ et $t \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta) &= \log(\widehat{h}_\theta^t) + (\widehat{h}_\theta^t)^{-1}(X_t - m(\widehat{h}_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2 - \log(h_\theta^t) - (h_\theta^t)^{-1}(X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2, \\
&= \log\left(\frac{\widehat{h}_\theta^t}{h_\theta^t}\right) + \left(X_t(\widehat{h}_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - m\right)^2 - \left(X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - m\right)^2, \\
&= \log\left(\frac{\widehat{h}_\theta^t}{h_\theta^t}\right) + \left(X_t(\widehat{h}_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(X_t(\widehat{h}_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} + X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - 2m\right), \\
&\leq \log\left(\frac{\widehat{h}_\theta^t}{h_\theta^t}\right) + \left(X_t(\widehat{h}_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(X_t(\widehat{h}_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} + X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}}\right), \\
&\leq \frac{\widehat{h}_\theta^t}{h_\theta^t} - 1 + \left((\widehat{h}_\theta^t)^{-1} - (h_\theta^t)^{-1}\right)X_t^2, \\
&= \frac{\widehat{h}_\theta^t - h_\theta^t}{h_\theta^t} + \left((\widehat{h}_\theta^t)^{-1} - (h_\theta^t)^{-1}\right)X_t^2.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)| &\leq |\widehat{h}_\theta^t - h_\theta^t| \alpha_0^{-1} + |\widehat{h}_\theta^t - h_\theta^t| \alpha_0^{-2} X_t^2 \\
&\leq C |\widehat{h}_\theta^t - h_\theta^t| (1 + X_t^2),
\end{aligned}$$

avec $C > 0$.

D'après le corollaire 1 de Kounias et Weng(1969)([19]), il suffit de montrer que il existe un $s \in [0, 1]$ telle que :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t^s} E\{|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|^s\} < \infty.$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $s = 1$

$$E\{|\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|\} \leq CE\{(1 + X_t^2)^2\}^{\frac{1}{2}} \times E\{(|\hat{h}_\theta^t - h_\theta^t|)^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.4)$$

D'après la proposition(2.2.1), le lemme(2.3.1), et la relation (2.3.4) on a $E\{|X_t|^2\} < \infty$ et $E\{|\hat{\sigma}_t|^2\} < \infty$ ce qui implique :

$$\begin{aligned} E\{|\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|\} &\leq CE\{|X_0|^2\}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \geq t} \alpha_j^{(0)}(\sigma_\theta^t, \Theta) \right), \\ &\leq C \left(\sum_{j \geq t} \alpha_j^{(0)}(\sigma_\theta^t, \Theta) \right), \\ &\leq C \sum_{j \geq t} \rho^j, \\ &\leq C' \rho^t. \end{aligned}$$

Tel que $C' = C \times \max(C_1, C_2)$ et $\rho = \rho_0^{\frac{1}{p}}$.

Nous avons donc :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t} E\{|\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)|\} \leq A \sum_{t \geq 1} \frac{\rho^t}{t}, \quad (\text{avec } A = \frac{C'}{1 - \rho}).$$

Cette série est fini car $0 < \rho < 1$, par conséquent, nous obtenons :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} |\hat{L}_n(\theta) - L_n(\theta)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0.$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} L_n(\theta) - L(\theta) \right| &= \left| \frac{1}{n} \widehat{L}_n(\theta) - \frac{1}{n} L_n(\theta) + \frac{1}{n} L_n(\theta) - L(\theta) \right|, \\ &\leq \frac{1}{n} \left| \widehat{L}_n(\theta) - L_n(\theta) \right| + \left| \frac{1}{n} L_n(\theta) - L(\theta) \right|. \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{n} \widehat{L}_n(\theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} L(\theta). \quad (2.3.5)$$

Pour prouver **l'étape(2)** on suppose que $L(\theta)$ admet deux maximum θ et θ_0 telle que $\theta \neq \theta_0$, pour $\theta \in \Theta$ on a :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -E\{q_t(\theta)\}, \\ &= -E\{\log(h_\theta^t) + (X_t(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} - m)^2\}, \\ &= -E\{\log(h_\theta^t) + (h_\theta^t)^{-1} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2\}, \\ &= -E\{\log(h_\theta^t) + (h_\theta^t)^{-1} (\eta_\theta^t (h_{\theta_0}^t)^{\frac{1}{2}} - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2\}, \\ &= -E\left\{ \log(h_\theta^t) + \left(\frac{h_{\theta_0}^t}{h_\theta^t} \right) \left(\eta_t - m \left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

D'autre par on a :

$$\begin{aligned} L(\theta_0) &= -E\{q_t(\theta_0)\}, \\ &= -E\{\log(h_{\theta_0}^t) + (X_t(h_{\theta_0}^t)^{-\frac{1}{2}} - m)^2\}, \\ &= -E\{\log(h_{\theta_0}^t) + (h_{\theta_0}^t)^{-1} (X_t - m(h_{\theta_0}^t)^{\frac{1}{2}})^2\}, \\ &= -E\{\log(h_{\theta_0}^t) + (\eta_t - m)^2\}, \\ &= -E\{\log(h_{\theta_0}^t)\} - 1. \end{aligned}$$

Par suite en utilisant l'Hypothèse H3, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
L(\theta_0) - L(\theta) &= -E\left\{\log(h_\theta^t) + (\eta_t - m)\right\} + E\left\{\log(h_\theta^t) + \left(\frac{h_{\theta_0}^t}{h_\theta^t}\right)(\eta_t - m\left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right)^{\frac{1}{2}})\right\}^2, \\
&= -E\left\{\log\left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right) - (\eta_t - m)^2 + \left(\frac{h_{\theta_0}^t}{h_\theta^t}\right)(\eta_t - m\left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right))\right\}, \\
&= -E\left\{\log\left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right)\right\} - 1 + E\left\{\eta_t - m\left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right)^{\frac{1}{2}} + m - m\right\}^2, \\
&= -E\left\{\log\left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right)\right\} - 1 + E\left\{(\eta_t - m) + \left(m - m\left(\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\}^2.
\end{aligned}$$

Mais pour un η_t suivant une distribution de probabilité symétrique, nous avons pour tout $m_1 \in \mathbb{R}^*$, $E\{(\eta_t - m + m_1)^2\} > E\{(\eta_t - m)^2\} = 1$, d'où :

$$\begin{aligned}
L(\theta_0) - L(\theta) &> E\left\{\log\frac{h_\theta^t}{h_{\theta_0}^t}\right\} + \frac{h_{\theta_0}^t}{h_\theta^t} - 1, \\
&> H\left(\frac{h_{\theta_0}^t}{h_\theta^t}\right).
\end{aligned}$$

Avec $H(x) = -\log(x) - 1 + x$. Mais pour tout $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, $H(x) > 0$ et $H(1) = 0$. Par conséquent si $\theta \neq \theta_0$, on a $H\left(\frac{h_{\theta_0}^t}{h_\theta^t}\right) > 0$ ($= 0$ si $\theta = \theta_0$). Cela implique, de l'hypothèse **H4** (identifiabilité), que $L(\theta_0) - L(\theta) > 0$ presque sûrement pour tout $\theta \in \Theta$, $\theta \neq \theta_0$. D'où une borne supérieur de $L(\theta)$ est atteinte seulement pour $\theta = \theta_0$ qui est un maximum unique.

2.3.3 La normalité asymptotique

Maintenant, nous donnons le théorème prouvant la normalité asymptotique pour l'EQMV.

Lemme 2.3.2 *Soit $\theta_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_1, \dots, \gamma_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$ avec X_t une solution stationnaire de (2.1.1), alors on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_d(0, G(\theta_0)). \quad (2.3.6)$$

Avec $G(\theta_0)$ la matrice définie dans par

$$G(\theta_0) = E \left\{ \frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial \theta_i} \frac{\partial q_t(\theta_0)}{\partial \theta_j} \right\} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p + q + 1. \quad (2.3.7)$$

Preuve 5 (preuve du Lemme 2.3.2)

La preuve est divisée en deux parties, premièrement nous prouvons que $(\partial q_t(\theta)/\partial \theta_i; F_t) = h(X_{t-1}, \dots)$ est une martingale de différences et deuxièmement nous avons appliqué le théorème central limite pour les martingales de différences. Pour prouver que $(\partial q_t(\theta)/\partial \theta_i; F_t)$ est un martingale-différences, si ses espérances mathématiques par rapport au passé sont nulles :

$$\begin{aligned} E \left\{ \frac{\partial q_t}{\partial \theta_i} \right\} &= E \left\{ h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} - h_t^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (X_t - m h_t^{\frac{1}{2}})^2 - h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (\eta_t - m) \right\}, \\ &= E \left\{ h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (1 - (\eta_t - m)^2 - m(\eta_t - m)) \right\}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \frac{\partial q_t}{\partial \theta_i} \right| \right\} &= E \left\{ \left| h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} - h_t^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (X_t - m h_t^{\frac{1}{2}})^2 - h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (\eta_t - m) \right| \right\}, \\ &= E \left\{ \left| h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (\eta_t - m)^2 + h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (1 - m(\eta_t - m)) \right| \right\}, \\ &= E \left\{ \left| h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \left| 1 - m(\eta_t - m) - (\eta_t - m)^2 \right| \right| \right\}, \\ &\leq E \left\{ \left| h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \right| (1 + m(\eta_t + m) + (\eta_t - m)^2) \right\}, \\ &\leq CE \left\{ \left| \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \right| \right\}, \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Donc $(\partial q_t(\theta)/\partial \theta_i; F_t)$ est un martingale-différences.
Maintenant, pour appliquer le théorème centrale limite d'un martingale-différence,
nous prouvons que $E\left\{\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i}\right\} < \infty$.

$$\begin{aligned}
E\left\{\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i}\right\}^2 &= E\left\{\left(h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i}(\eta_t - m)^2 + h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i}(1 - m(\eta_t - m))\right)^2\right\}, \\
&= E\left\{\left(h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i}\right)^2\left(1 - (\eta_t - m)^2 - m(\eta_t - m)\right)^2\right\}, \\
&= E\left\{\left(h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i}\right)^2\left(1 - m(\eta_t - m) - (\eta_t - m)^2\right)^2\right\}, \\
&= E\left\{\left(h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i}\right)^2\left((1 - m(\eta_t - m))^2 + (\eta_t - m)^4 - 2(\eta_t - m)^2 + 2m(\eta_t - m)^3\right)\right\}, \\
&\leq C'E\left\{\left(\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i}\right)^2\right\}, \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

et comme on a $E\{(\eta_t - m)^4\} < \infty$, $E\{(\eta_t - m)^2\} = 1$, et
 $E\{(\eta_t - m)^3\} = E\{\eta_t - m\} = 0$.

Par suite

$$E\left\{\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta}\right\}^2 = \sum_{t=n}^n E\left\{\frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta}\right\}^2 < \infty.$$

$$\begin{aligned}
E\left\{\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial q_t}{\partial \theta_j}\right\}^2 &= E\left\{\left(h_t^{-2}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_j}\right)\left(1 - (\eta_t - m)^2 - m(\eta_t - m)\right)^2\right\}, \\
&= E\left\{\left(h_t^{-2}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_j}\right)\right\}E\left\{\left(1 - (\eta_t - m)^2 - m(\eta_t - m)\right)^2\right\}, \\
&= E\left\{\left(h_t^{-2}\frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_j}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Le théorème centrale limite pour les différences de martingale implique que :

$$n^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_d(0, G(\theta_0)), \quad (2.3.8)$$

tell que $G(\theta_0)$ définie dans 2.3.7

Théorème 2.3.2 (La normalité asymptotique)

Soit X_t une solution stationnaire de (2.1.1), avec $\theta_0 \in \Theta$, $E\{X_t^4\} < \infty$, et que les conditions du théorème 2.3.1 vérifiée, si la fonction de probabilité cumulée de ξ_0 est continûment différentiable alors

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_d(0, F^{-1}GF^{-1}). \quad (2.3.9)$$

Où les matrices $G(\theta_0)$ définit dans 2.3.7 et $F(\theta_0)$ est définit par :

$$F(\theta_0) = E\left\{ \frac{\partial^2 q_t(\theta_0)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p + q + 1. \quad (2.3.10)$$

Preuve 6 (preuve du Théorème 2.3.2)

La première dérivée de L_n est

$$\frac{\partial L_n}{\partial \theta_i} = - \sum_{t=1}^n \frac{\partial q_t}{\partial \theta_i},$$

avec

$$\frac{\partial q_t}{\partial \theta_i} = h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} - h_t^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (X_t - mh_t^{\frac{1}{2}})^2 - mh_t^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (X_t - m(h_t)^{\frac{1}{2}}).$$

De puis $\theta_0 \in \Theta$ et $\widehat{\theta}_n \rightarrow \theta_0$, extension de Taylor de $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L(\widehat{\theta}_n)}{\partial \theta_i}$ implique

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L_n(\widehat{\theta}_n)}{\partial \theta_i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta_i} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\bar{\theta}_{n,i})}{\partial \theta \partial \theta_i} \sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0).$$

Avec n suffisamment grande telle que $(\bar{\theta}_{n,i}) \in \Theta$, qui est entre $\hat{\theta}_n$ et θ_0 .
En utilise la consistance de $\hat{\theta}_n$ et résultat de lemme(2.3.3), on déduire que

$$F_n = -\frac{1}{n} \left(\frac{\partial^2 L_n(\bar{\theta}_{n,i})}{\partial \theta \partial \theta_i} \right)_{1 \leq i \leq d} \rightarrow F(\theta_0).$$

Tel que $F(\theta_0)$ définie dans(2.3.10)

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= (h_\theta^t)^{-1} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} + \left[\left(2(h_\theta^t)^{-3} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) \right. \\ &\quad \left. (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2 + \left((h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} \right) (m(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})) \right] \\ &\quad + \left[\left(\frac{3}{2} (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-1} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) (m(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m^2 (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} \right], \end{aligned}$$

et comme on a $E\{(h_\theta^t)^{-1} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2\} = E\{\eta_t - m\}^2 = 1$, et
 $E\{(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})\} = E\{\eta_t - m\} = 0$, nous obtenons

$$E\left\{ \frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right\} = \left(1 + \frac{1}{2} m^2 \right) E\left\{ (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} \right\}.$$

$F(\theta_0)$ est une matrice inversible, et il existe n grand qui met F_n est une matrice inversible. En plus, puisque $E\left\{ \left\| \frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right\| \right\} < \infty$, la loi uniforme des

grands nombres pour $\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i}$. Implique que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = -n F_n^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial L_n(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} - \frac{\partial L_n(\theta_0)}{\partial \theta} \right). \quad (2.3.11)$$

En utilisant le lemme 2.3.2 on obtient théorème 2.3.2 puisque $\frac{\partial \hat{L}_n(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} = 0$ ($\hat{\theta}_n$ est un extremum local de \hat{L}_n),

$$E\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \frac{\partial L_n}{\partial \theta} - \frac{\partial \hat{L}_n}{\partial \theta} \right| \right\} \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \hat{q}_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i} \right| &= \left| \hat{h}_t^{-1} \frac{\partial \hat{h}_t}{\partial \theta_i} - \hat{h}_t^{-1} \frac{\partial \hat{h}_t}{\partial \theta_i} (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})^2 + \hat{h}_t^{-1} \frac{\partial \hat{h}_t}{\partial \theta_i} m (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}}) \right. \\
&\quad \left. - \left(h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} - h_t^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} (X_t - m h_t^{\frac{1}{2}})^2 + h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} m (X_t - m h_t^{\frac{1}{2}}) \right) \right|, \\
&= \frac{1}{2} \left| \left(\hat{h}_t^{-2} \frac{\partial \hat{h}_t^2}{\partial \theta_i} - h_t^{-2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \theta_i} \right) (1 + m (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})) - \left(\hat{h}_t^{-2} \frac{\partial \hat{h}_t^2}{\partial \theta_i} - h_t^{-2} \frac{\partial h_t^2}{\partial \theta_i} \right) \right. \\
&\quad \left. (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})^2 \right|, \\
&\leq \frac{1}{2\alpha^2} \left| \left(\frac{\partial \hat{h}_t^2}{\partial \theta_i} - \frac{\partial h_t^2}{\partial \theta_i} \right) (1 + m (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})) - \left(\frac{\partial \hat{h}_t^2}{\partial \theta_i} - \frac{\partial h_t^2}{\partial \theta_i} \right) (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})^2 \right|, \\
&\leq \frac{1}{2\alpha^2} \left(\left| \frac{\partial \hat{h}_t^2}{\partial \theta_i} - \frac{\partial h_t^2}{\partial \theta_i} \right| |1 + m (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})| + \left| \frac{\partial \hat{h}_t^2}{\partial \theta_i} - \frac{\partial h_t^2}{\partial \theta_i} \right| (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})^2 \right).
\end{aligned}$$

De la proposition 2.2.2, on peut écrire h_t^2 ce la forme causal $h_t^2 = \sum_{i \geq 1} c_i X_{t-i}^2$,
où

$$\frac{\partial c_i(\theta)}{\partial \theta_k} \leq C_2 i p_*^i,$$

pour tout $\theta \in \Theta$ et $i \leq 0 < \infty$. Donc

$$\left| \frac{\partial \hat{q}_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i} \right| \leq \frac{1}{2\alpha^2} (|1 + m (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})| + (X_t - m \hat{h}_t^{\frac{1}{2}})^2) \sum_{t \leq i < \infty} i p_*^i X_{t-i}^2.$$

Donc $E \left\{ \left| \frac{\partial \hat{q}_t(\theta)}{\partial \theta_i} - \frac{\partial q_t(\theta)}{\partial \theta_i} \right| \right\} < \infty$, puisque $E \{ X_t^2 \} < +\infty$.

Lemme 2.3.3 Soit $\theta_0 = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \gamma_1, \dots, \gamma_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$ avec X_t une solution stationnaire de (2.1.1), alors on a :

$$\left\| \frac{1}{n} \frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} - \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\|_{\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0 \text{ avec } \frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} = -E \left\{ \frac{\partial^2 q_0(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}. \quad (2.3.12)$$

Preuve 7 (preuve du lemme 2.3.3)

Le deuxième processus dérivé $\left(\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta^2} \right)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire ergodique (c'est une fonction mesurable de X_t, X_{t-1}, \dots) par conséquent, il satisfait à une loi uniforme des grands nombres, si son premier moment uniforme est borné.

Par conséquent, en utilisant la borne $h_\theta^{-1} \leq \alpha_0^{-1}$, il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right| &= \left| (h_\theta^t)^{-1} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} + \left[(2(h_\theta^t)^{-3} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2 + ((h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i}) (m(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\frac{3}{2} (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-1} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) (m(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} m^2 (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} \right] \right|, \\
&= \left| (h_\theta^t)^{-1} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} + \left(\frac{1}{2} m^2 - 1 \right) (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} + \left(2(h_\theta^t)^{-3} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) \right. \\
&\quad \left. (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})^2 + \left(\frac{5}{2} (h_\theta^t)^{-2} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_j} \frac{\partial h_\theta^t}{\partial \theta_i} - (h_\theta^t)^{-1} \frac{\partial^2 h_\theta^t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right) (m(h_\theta^t)^{-\frac{1}{2}} (X_t - m(h_\theta^t)^{\frac{1}{2}})) \right|, \\
&\leq C \left[\left(\left| \frac{\partial^2 h_t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right| + \left| \frac{1}{2} m^2 - 1 \right| \left\| \frac{\partial h_t}{\partial \theta_j} \right\| \left\| \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \right\| \right) + \left(2 \left\| \frac{\partial h_t}{\partial \theta_j} \right\| \left\| \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \right\| + \left| \frac{\partial^2 h_t}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right| \right) (X_t - m(h_t)^{\frac{1}{2}})^2 \right].
\end{aligned}$$

Nous concluons que $E \left\{ \left| \frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right| \right\} < \infty$ depuis, tout $t \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i, j \leq d$

tq $d = i + j + 1$

$$E\{X_t^2\} < +\infty, E\{|h_t|\} < +\infty, E\left\{ \left| \frac{\partial h_t}{\partial \theta_i} \right| \right\} < +\infty, E\left\{ \left| \frac{\partial^2 h_t}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right| \right\} < +\infty.$$

En conséquence, le LUGN pour $\frac{\partial^2 q_t(\theta)}{\partial \theta^2}$

Chapitre 3

Étude numériques

Dans ce chapitre nous réalisons les expériences de type Mont-Carlo sur le comportement du QMLE-Normale (m,1), dans le cas du processus GJR-GARCH(1,1) définie par $X_t = \eta_t \sqrt{h_t}$, à l'aide du programme R pour différentes tailles d'échantillons. Nous illustrons la consistance du paramètre $\hat{\theta}_n$ obtenu à travers le tableau. En fin, en réalisant une représentation en boîte des paramètres de processus qui explique la différence entre le RMSE ($\hat{\theta}_n^{(0)}$) et le RMSE ($\hat{\theta}_n$).

3.1 La consistance

Dans cette section, nous illustrons le RMSE ($\hat{\theta}_n$) pour plusieurs tailles d'échantillons ($n = 100, n = 500, n = 1000$) avec des valeurs différentes de la moyenne du bruit blanc ($m = -0.3, m = 0.0, m = 0.2, m = 1.0$), nous exposons les résultats dans le tableau 3.1.

Considérons le GJR-GARCH(1,1) définie par :

$$\begin{cases} X_t = \eta_t h_t^{\frac{1}{2}} \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \gamma_1 \mathbb{I}_{X_{t-1} < 0} X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \end{cases}$$

Avec $\alpha_0 = 1.0, \alpha = 0.2, \beta = 0.3, \gamma = 0.2$

		$m = -0.3$		$m = 0$		$m = 0.2$		$m = 1.0$	
		$\hat{\theta}_n^{(0)}$	$\hat{\theta}_n^{(m)}$	$\hat{\theta}_n^{(0)}$	$\hat{\theta}_n^{(m)}$	$\hat{\theta}_n^{(0)}$	$\hat{\theta}_n^{(m)}$	$\hat{\theta}_n^{(0)}$	$\hat{\theta}_n^{(m)}$
n=100	α_0	0.647	0.562	0.467	0.467	0.662	0.612	1.739	0.581
	α	0.185	0.169	0.188	0.188	0.162	0.153	0.272	0.079
	β	0.249	0.230	0.248	0.248	0.328	0.319	0.227	0.206
	γ	0.226	0.202	0.226	0.226	0.238	0.225	0.477	0.317
	Somme	1.307	1.163	1.129	1.129	1.390	1.309	2.715	1.183
n=500	α_0	0.336	0.289	0.304	0.304	0.335	0.317	1.175	0.208
	α	0.120	0.106	0.086	0.086	0.073	0.072	0.215	0.032
	β	0.137	0.136	0.158	0.158	0.169	0.168	0.086	0.079
	γ	0.133	0.117	0.126	0.126	0.146	0.139	0.416	0.184
	Somme	0.726	0.648	0.674	0.674	0.723	0.696	1.892	0.503
n=1000	α_0	0.250	0.179	0.183	0.183	0.235	0.207	1.026	0.169
	α	0.075	0.067	0.060	0.060	0.055	0.052	0.203	0.024
	β	0.086	0.085	0.092	0.092	0.107	0.102	0.074	0.068
	γ	0.093	0.079	0.082	0.082	0.100	0.094	0.328	0.150
	Somme	0.504	0.428	0.417	0.417	0.497	0.455	1.631	0.411

TABLE 3.1 – Racine-erreur quadratique moyenne des $\hat{\theta}_n^{(0)}$ et $\hat{\theta}_n$ pour les processus GJR-GARCH considérés.

La représentation en boîtes

Nous représentons les paramètres $(\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma)$ en boîte pour différentes tailles d'échantillons avec $m=0$, $m=1$, dans les figures 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 respectivement.

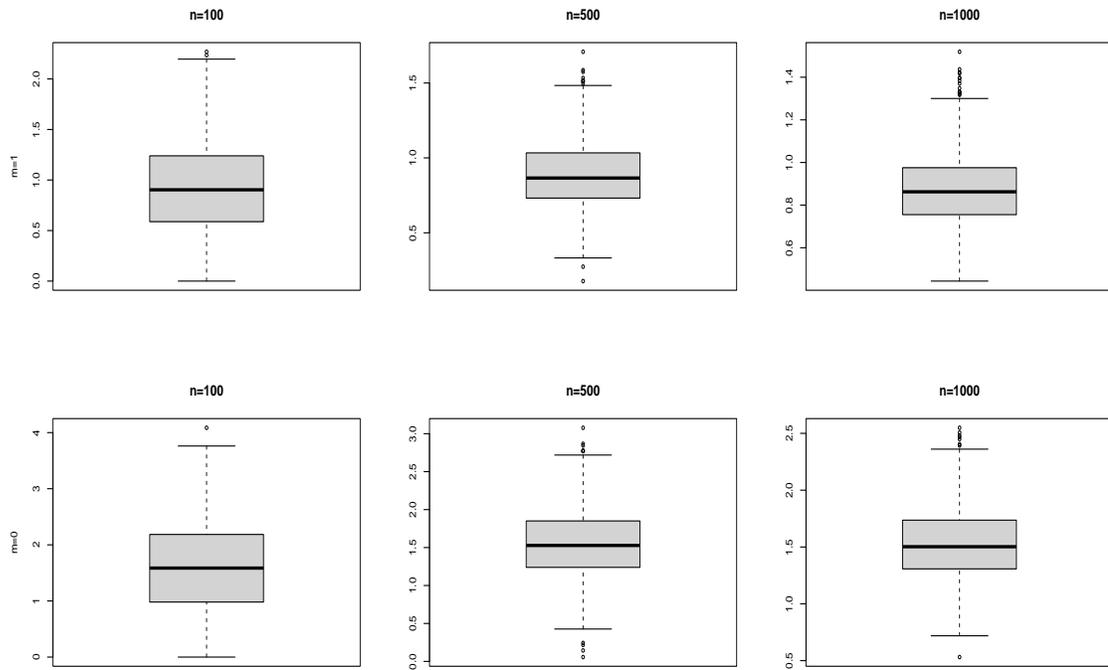


FIGURE 3.1 – Représentation en boîte de α_0 .

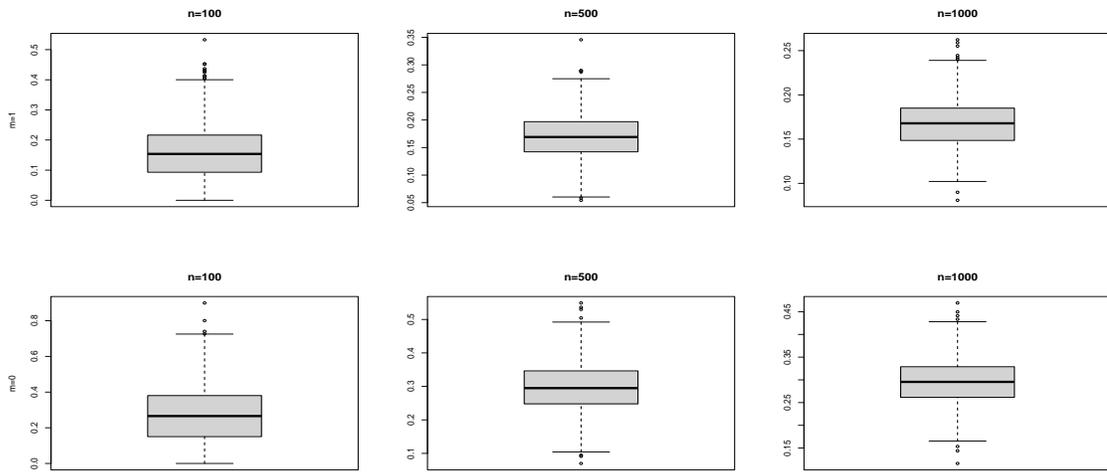


FIGURE 3.2 – Représentation en boîte de α .

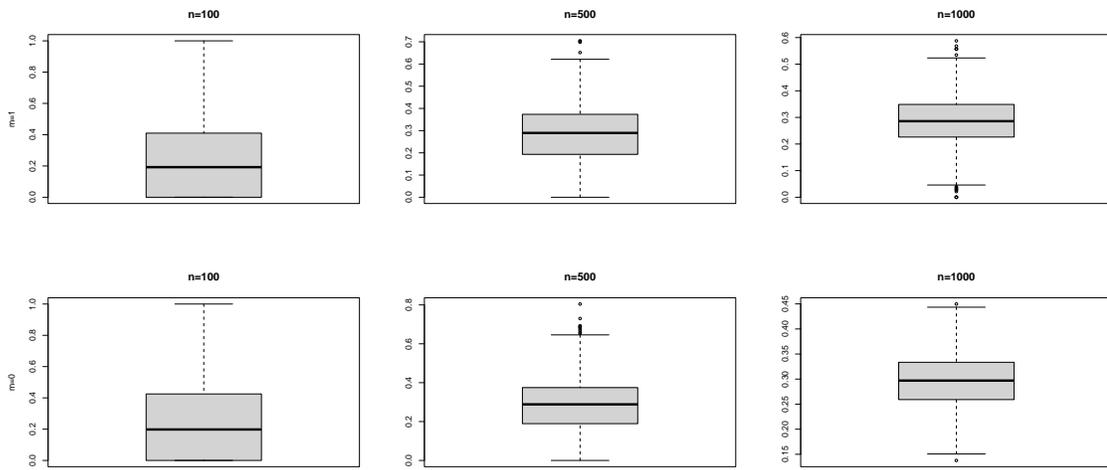


FIGURE 3.3 – Représentation en boîte de β .

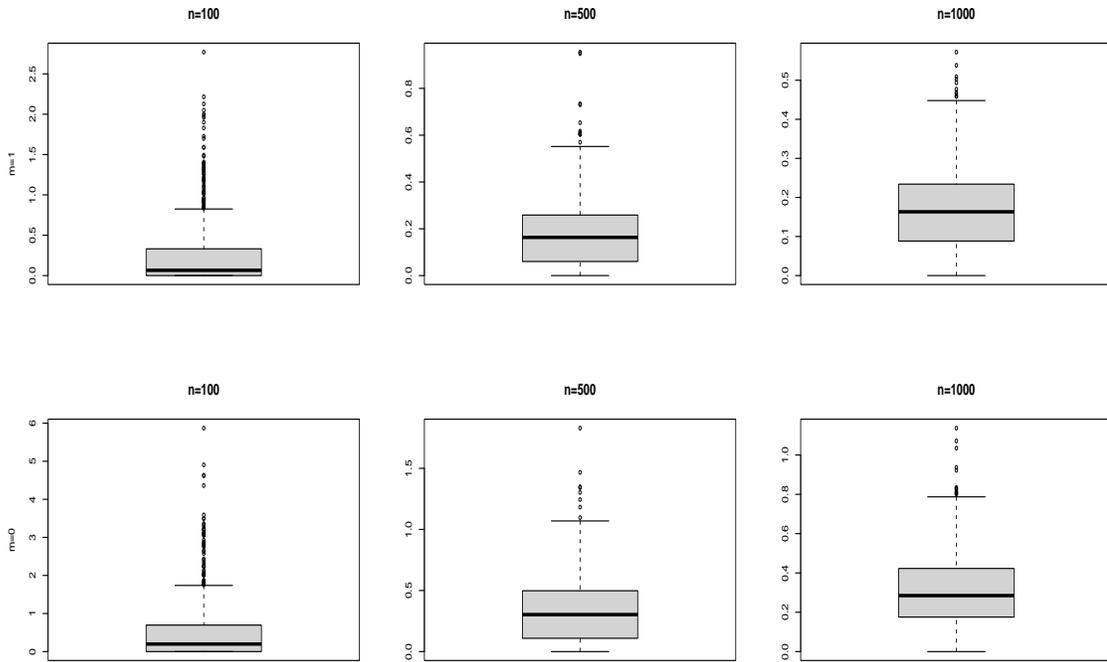


FIGURE 3.4 – Représentation en boîte de γ .

Il est clair que le RMSE diminue à mesure que la taille de l'échantillon augmente et les champs des paramètres se rapprochent du champ réel pour la base d'erreur moyenne ($m=1$) mieux que ($m=0$), ce qui valide les résultats théoriques (cohérence des estimateurs).

Conclusion

Dans cette mémoire, notre travail s'est basé sur l'étude de modèle GJR-GARCH dans le domaine de la modélisation des séries chronologique. Tout d'abord nous avons mentionné des définitions fondamentales, propriétés des processus stochastiques et quelques notions de bases.

Par suite nous avons défini le modèle GJR-GARCH qui introduit par Glosten, Jagannathan et Runkle et d'estimateur de quasi maximum vraisemblance Normale avec des conditions assurant l'existence et la stationnarité. Nous avons proposé des Hypothèses pour montrer les propriétés de la consistance forte. Nous avons terminé par prouver la normalité asymptotique de l'EQMV-Normale $(m, 1)$.

Enfin, nous avons présenté une simulation de type Monte-Carlo pour confirmer les résultats théoriques obtenus. Nous avons fait une comparaison entre les deux estimateurs $(\hat{\theta}_n^{(0)}, \hat{\theta}_n)$, où nous avons remarqué que le GJR-GARCH avec erreurs Normale $(1,1)$ est mieux dans certains cas que GJR-GARCH avec erreurs Normale $(1,0)$. Finalement, Nous avons fini par une représentation en boîte des paramètres de processus.

Bibliographie

- [1] Bardet, J.M. and Wintenberger, O. (2009), Asymptotic normality of the Quasi-Maximum likelihood estimator for multidimensional causal process, *The Annals of Statistics*, 37, 2730-2759.
- [2] Barnarda, W. Trindade, A.A. Wickramasingheb, R.I.P (2014), Autoregressive Moving Average Models Under Exponential Power Distributions, *ProbStat Forum*, 7, 65-77.
- [3] Berkes, I., Horváth, L. and Kokoszka, P. (2003), GARCH processes : structure and estimation, *Bernoulli*, 9, 201-227.
- [4] Bollerslev, T. (1986), Generalised autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [5] Boularouk, Y. (2021), Standard Laplace quasi-maximum likelihood estimator for GARCH processes, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*.
- [6] Bardet, J. M, Y. Boularouk, K. Djaballah. (2017). Asymptotic behaviour of the Laplacian quasi-maximum likelihood estimator of affine causal processes. *Electronic Journal of Statistics* 11 (1) :452–79.
- [7] Boularouk, Y.(2016) Estimation des paramètres de processus causaux affines par la méthode du maximum de vraisemblance, thèse, université des sciences et technologies Houari Boumediene.
- [8] Christophe Hurlin. (2006-2007), Master Econometrie et statistique appliquée, université d'Orléans,.
- [9] DeFrutos, R.F. Serrano, G.R.(1997), A generalized least squares estimation method for invertible vector moving average models, *Econom Lett* 57, 149-156.
- [10] Dress. F, (2007), Les probabilités et la statistique de A à Z, [https ://books.google.dz/books?id=vx9CJgAACAAJ](https://books.google.dz/books?id=vx9CJgAACAAJ).

- [11] Dugre, J.P.(1980), Generating covariance sequences and the calculation of quantization and rounding error variances in digital filters, Acoustics, Speech and n.a. Processing, IEEE Transactions, Vol. 28, 102 - 104.
- [12] Engle, R.F. (1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation,m *Econometrica* 50, 987-1008.
- [13] Francq, C. and Zakoian, J.-M. (2004), Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes, *Bernoulli*, 10. 605-637.
- [14] Francq, C. Lepage, G. and Zakoian, J-M. (2011), Two-stage non Gaussian QML estimation of GARCH models and testing the efficiency of the Gaussian EQMV. *Journal of Econometrics*, 165, 246-257.
- [15] Fredon. D, and Maumy-Bertrand. M, and Bertrand. F, (2009), *Mathématiques L1/L2 : Analyse : en 30 fiches*, <https://books.google.dz/books?id=8aUkXtpXM68C>.
- [16] CHOUEIB, H. (2016),*Evaluation d'options européennes sous un modele Bad Environment Good Environment (BEGE)*,HEC Montréal.
- [17] Jean-Pierre Lecoutre, *Statistique et probabilités*,4 édition.
- [18] Gérard-Michel Cochard (2019), *Introduction aux processus stochastiques et à la simulation*,Great Britain by ISTE Editions Ltd.
- [19] Kounias, E.G. and Weng, T.-S. (1969), An inequality and almost sure convergence. *Annals of Mathematical Statistics*, 40, 1091-1093.
- [20] Morgenthaler. S, (2007), *Troisième édition revue et augmentée*, <https://books.google.dz/books?id=AcgibGBknDkC>.
- [21] Xuan, H, L.Song, M. Amin, and Y.Shi.2017.Qusi-maximum likelihood estimator of Laplace(1,1)for GARCH models.*Open Mathematics* 15, 1573-48.