



N° Réf :

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

**MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES
ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES FONCTIONNELLES**

Préparé par : • **KHENFRI Reguia**
• **TORCHE Khoula**

Soutenu devant le jury

Boudjamaa LABELD	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Chafika SEKHANE	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Hafida LAIB	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire: 2021/2022



REMERCIEMENT

Nous remercions Allah avant tout car à lui seul revient les louanges.

Nous adressons nos sincères remerciements à notre encadreur, Madame sakhane chafika pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support et pour son accompagnement à travers ses conseils et notes qui ont été très utiles dans la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier professeur Hafida Laib de pour nous avoir soutenue et encouragée tout au long de la préparation de cette mémoire, et pour avoir inspirée et guidée durant le cheminement de ce travail.

Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.

Enfin merci nous famille, notamment à nous parents dont l'affection et les encouragements nous ont rendue la vie vraiment plus agréable, nous remercions également ceux qui nous ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

ملخص

في هذه المذكرة , قمنا بدراسة نظرية وعددية لأنواع معينة من المعادلات التفاضلية الدالية, أو التفاضلية-التكاملية الدالية, وعلى وجه الخصوص المعادلات التفاضلية مع تأخير ثابت, المعادلات التفاضلية الحيادية والمعادلات التفاضلية حسب الحالة.

في الدراسة النظرية قمنا بدراسة وجود و وحدانية الحل أما في الدراسة العددية فقد تم استخدام طريقة التجميع بكثيرات حدود تايلور لإيجاد الحل التقريبي لهذا النوع من المعادلات .

Abstract

In this note, we have studied theoretically and numerically certain types of functional differential equations, or integro-differential equations, in particular differential equations with constant delay, neutral differential equations and differential equations as the case may be.

In the theoretical study, we studied the existence and uniqueness of the solution. In the numerical study, the aggregation method of Taylor polynomials was used to find the approximate solution for this type of equations.

Résumé

Dans cet mémoire, nous avons étudié théoriquement et numériquement certains types d'équations différentielles fonctionnelles, ou d'équations intégro-différentielles , en particulier les équations différentielles à retard constant, les équations différentielles neutres et les équations différentielles dépendant de l'état.

Dans l'étude théorique, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution, dans l'étude numérique, la méthode d'agrégation des polynômes de Taylor a été utilisée pour trouver la solution approchée pour ce type d'équations.

TABLE DES MATIÈRES

1	Équations différentielles fonctionnelles à retard	5
1.1	Définitions générales	5
1.2	Équation différentielle fonctionnelle à retard constant	7
1.2.1	Notations et définitions	7
1.2.2	Existence et unicité	7
1.2.3	Application d'équation différentielle à retard au dynamique de population	8
1.3	Équation différentielle fonctionnelle à retard dépendant de l'état	9
1.3.1	Notations et définitions	9
1.3.2	Existence et unicité	9
1.3.3	Application d'équation différentielle à retard dépendant de l'état	11
2	Équations différentielles fonctionnelles neutre	14
2.1	Définitions de l'équation neutre	14
2.2	Existence et unicité	16
2.3	Solution d'équations différentielles neutre d'ordre superieur	16
2.3.1	Description de la méthode	17
2.3.2	Analyse de convergence	18
2.3.3	Exemples numériques	20
3	Équation intégr-différentielles à retard	21
3.1	Équation intégr-différentielle	21
3.1.1	Équation intégr-différentielle de Fredholm	22
3.1.2	Équation intégr-différentielle de Volterra	22
3.1.3	Équation intégr-différentielle de Volterra-Fredholm	22
3.2	Équation intégr-différentielle à retard	23
3.3	Solution numérique des équations intégr-différentielles à retard par une méthode de collocation	23

3.3.1	Description de la méthode	24
3.3.2	Analyse de convergence	27
3.3.3	Exemples numériques	40

INTRODUCTION

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géométrie.

Une théorie classique dans la modélisation mathématique d'une transformation physique est de supposer que le comportement futur du système peut être résumé, dans le cadre déterministe, par son seul état présent, sans dépendre de son évolution antérieure. Cette supposition conduit à une modélisation sous forme de système d'équations différentielles ordinaires. Mais il existe de nombreux cas où cette théorie est mise en imperfection, et il est alors nécessaire de prendre en compte d'autres phénomènes, ce qui entraîne alors pour l'analyse du système un surcroît de complexité, Parmi ces raisons figure le phénomène de retard.

Les équations différentielles à retard sont étudiées de puis au moins 200 ans par E.schmitt(1911),il a été analysé dans les années cinquante ; et l'une des premières approches est présenté par 'Krasovskii' (1977), qui généralise la deuxième méthode de 'Lyaponov'. Ensuite de nombreux auteurs, ont développé différents problèmes, concernant l'analyse de la stabilité des équations différentielles, avec un argument retardé.

On peut les rencontrer dans plusieurs domaines d'applications, notamment en économie, physique, médecine, biologie, écologie,...etc. La signification du retard dans un tel ou tel modèle peut être différente : le temps de gestation en biologie, le temps de réaction en conduite automobile, la période d'incubation d'une maladie contagieuse, le temps d'accumulation, le temps nécessaire pour la maturation des cellules ou la transformation d'un type de cellules en un autre et la dynamite inventé par 'Alfred Nobel' dispose d'un dispositif (la mèche) pour retarder le déclenchement de son explosion, son utilisation, serait difficile sans cet artifice. D'après cet exemple, on remarque que le retard peut être utile, il peut même être absolument nécessaire .

Les équations différentielles à retard peuvent être classées comme linéaire ou non linéaire, autonome ou non autonome. Le retard est généralement une constante

positive, une variable dépendante continument du temps ou de l'état ou distribué et se traduit comme un temps nécessaire pour quel système répond à une certaine évolution, ou parce qu'un certain outils doit être atteint avant quel système ne soit activé.

Dans ce mémoire on s'intéressera aux équations différentielles fonctionnelles à retard et plus précisément aux résultat d'existence et d'unicité de la solution ou bien de trouver la solution approcher de certaines classes d'équation différentielle ou d'équation intégro-différentielle.

Équations différentielles à retard (EDR) avec des données initiale continues est défini par : $y'(t) = f(y_t)$, $t \in [0, \alpha]$ avec f est une fonction continue et $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ où $\tau \geq 0$, $y : [-\tau, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, $y_t \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre, étudier les équations différentielles à retard constant et dépendant de l'état (définition, existence et unicité de la solution et des application).

Dans le deuxième chapitre, consacrer les équations différentielles à retard de type neutre (définition, existence et unicité de la solution et une méthode numérique pour trouver la solution approcher).

Le troisième chapitre, sur les équations intégro-différentielles à retard où nous présentons la méthode de collocation basée sur les polynômes de taylor pour trouver la solution approcher.

CHAPITRE 1

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FONCTIONNELLES À RETARD

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations différentielles fonctionnelles à retard de type constant et de type dépendant de l'état.

En présentant quelques notions théoriques relative à l'existence et l'unicité de solution (voir [10], [12], [19], [16]).

1.1 Définitions générales

Définition 1.1.1.

Soit E un espace de Banach et $A : E \longrightarrow E$, un opérateur. On dit que A est une contraction(ou contractant), s'il existe une constante $0 < k < 1$ tel que :

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k\|x - y\|_E \quad \forall x, y \in E.$$

Théorème 1.1.1. (Ascoli)

Soit E un espace métrique compact, soit H un sous espace de $C(E)$ qui est l'ensemble des fonctions continues de E dans E . On suppose que H est uniformément équicontinue i.e : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

tel que :

$$d(y_1, y_2) < \delta \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon.$$

alors E relativement compact dans $C(E)$.

Définition 1.1.2.

On dit que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne par rapport à y si

pour $\forall (t_0, y_0)$ de Ω il existe un voisinage de (t_0, y_0) dans lequel f est lipschitzienne dans ce voisinage.

Définition 1.1.3.

Soient E et F deux espaces topologiques, une fonction $h : E \rightarrow F$ est dite compact si l'image de tout borné de E est relativement compact dans F .

Définition 1.1.4.

Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ une fonction :
 f est dite compacte si l'image $f(E)$ est relativement compacte dans F .
 f est dite complètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de E est relativement compacte dans F .

Définition 1.1.5.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est Fréchet dérivable (ou différentiable au sens de Fréchet) en y il existe une forme linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $f(y+h) = f(y) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. On pourra noter $f'(y) = L$ la forme linéaire.

Définition 1.1.6.

Une équation différentielle à retard (EDR) est une équation de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y_t), \\ y_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta). \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (1.1) à l'instant t , f est une fonction continue sur \mathbb{R}^3 avec $f(t, 0) = 0$

L'équation (1.1) indique que la dérivée de l'état $y(t)$ à l'instant t dépend du temps présent t et de l'état $y_t(\theta) \in C$ définie par $y_t(\theta) = y(t + \theta)$, pour tout $\theta \in [-\tau, 0]$.

Et pour lesquels le domaine de définition C est un sous espace de $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.1.1.

La condition initiale y_{t_0} peut ainsi être représenté par une fonction continue φ de la forme suivante : $y(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$ pour tout $\theta \in [-\tau, 0]$.

Exemple 1.1.1.

Si a, b et c fonctions continue :

1. Équation différentielle à retard linéaire : $\frac{dy}{dt}(t) = g(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t + \theta)$.
2. Équation différentielle à retard non linéaire : $\frac{dy}{dt}(t) = g(t) + a(t)y^2(t) + b(t)y(t)y^3(t + \theta) + c(t)y(t)y(t + \theta)$.
3. Si $g(t) = 0$ l'équation (1) et (2) sont dites homogène.
4. si $a, c = 0$ l'équation (1) et (2) sont dites autonome.

Exemple 1.1.2.

Dans cet exemple, on explique une signification d'un retard dans les modèles de prédateur-proie :

La chauve souris, à la chasse, étant aveugle, elle émet des sons, pour utiliser les parois des grottes, afin de localiser sa proie. L'écho obtenu par le rebondissement de ces cris représente le retard qui dépend de l'état, qui est le prédateur.

1.2 Équation différentielle fonctionnelle à retard constant

1.2.1 Notations et définitions

Définition 1.2.1.

On appelle équation différentielle à retard constant toute équation de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad (1.2)$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et τ un nombre réel positif que l'on appelle le retard.

Remarque 1.2.1.

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle (1.2) sur un intervalle $[t_0, t_0 + \tau]$, il faut connaître $y(t)$ sur un intervalle antérieur $[t_0 - \tau, t_0]$. c-à-d pour φ une fonction continue sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$ à valeurs dans \mathbb{R} , $y(t) = \varphi(t)$.

1.2.2 Existence et unicité

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), & \text{pour } t > 0 \\ y_{[t_0 - \tau, t_0]} = \varphi(t), & \text{pour } t \in [-\tau, 0] \text{ et } \varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}). \end{cases} \quad (1.3)$$

Théorème 1.2.1. [16]

Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors le problème (1.3) admet au moins une solution, si de plus f est localement lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables alors cette solution est unique.

Théorème 1.2.2. [16]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue localement lipschitzienne par rapport à la troisième variable, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, on se donne une fonction $\varphi : [t_0 - \tau, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors, le problème (1.3) admet une solution unique sur tout intervalle $[t_0 - \tau, \alpha]$ avec $\alpha \in [0, +\infty[$.

Définition 1.2.2.

Une fonction définie sur $[t_0 - \tau, +\infty[$ à valeur dans \mathbb{R} différentiable sur $[t_0, +\infty[$ est une solution de l'équation (1.2), si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $y_{[t_0-\tau, t_0]} = \varphi$.
2. $y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad \forall t \in [t_0, +\infty[$

Autrement dit :

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ \varphi(t) + \int_{t_0}^t f(s, y(s), y(s - \tau)) ds, & t \in [t_0 - \tau, +\infty[. \end{cases}$$

Exemple 1.2.1.

Soit l'équation différentielle à retard constant.

$$y'(t) = -y(t - \frac{\pi}{2}).$$

qui admet comme solution $y(t) = \sin t$.

Cette solution s'annule pour $t = k\pi$, tel que $k \in \mathbb{Z}$, mais elle n'est pas identiquement nulle.

1.2.3 Application d'équation différentielle à retard au dynamique de population

Les équations à retard jouent un rôle cruciale dans la modélisation de nombreux domaines. [16] Dans ce paragraphe nous présentons un exemple d'application d'une phénomène biologique.

Considérons une population composée d'individus jeunes et adultes. Soient :

$P(t)$: La densité d'adultes à un temps t .

τ : La longueur de la période juvénile pour chaque individu.

α : Taux de mourir.

β : Taux de survie des juvéniles.

Alors, la dynamique de la population P peut être décrite par l'équation différentielle à retard suivante :

$$P'(t) = -\alpha P(t) + \beta P(t - \tau). \tag{1.4}$$

$P(t - \tau)$: Signifie que les nouveaux nés deviennent adultes avec un retard, alors la variation de la densité de population P comprend des valeurs courantes, ainsi que des valeurs au passé. Pour intégrer l'équation (1.4) en certains temps $t \in [0, \tau]$, on nécessite de prescrire la valeur $P(t - \tau)$. Alors on doit considérer une fonction sur un intervalle de longueur τ , pour cela on prescrit P sur l'intervalle $[-\tau, 0]$, ensuite, on pose $P(\theta) = \varphi(\theta)$ pour $\theta \in [-\tau, 0]$ Où φ est une fonction donnée.

Explicitement, on a alors pour tout $t \in [0, \tau]$,

$$P(t) = \varphi(0) \exp(-\alpha t) + \tau \int_0^t \exp(-\alpha(t - P)) \varphi(s - \tau) ds.$$

1.3 Équation différentielle fonctionnelle à retard dépendant de l'état

1.3.1 Notations et définitions

Définition 1.3.1.

On appelle l'équation différentielle à retard dépendant de l'état une équation de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(y(t))))), & t \geq 0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [-\alpha, 0]. \end{cases} \quad (1.5)$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

et $\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, $-\alpha = \max_{y \in \mathbb{R}}(\tau(y))$ et $\varphi \in C([-\alpha, 0], \mathbb{R})$

1.3.2 Existence et unicité

Soit l'équation différentielle à retard dépendant de l'état de la forme (1.5),
On suppose que f et τ vérifient les hypothèses suivantes :

- 1/ f est localement lipschitzienne par rapport à $y(t)$ et $y(t - \tau(y(t)))$.
- 2/ τ est localement lipschitzienne.
- 3/ f est bornée sur les bornes.

Alors :

Pour un nombre positif T , soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-\alpha, T]$ à valeurs réelles muni de la norme infinie, E est un espace de Banach.

Proposition 1.3.1.

Soit $C_{\varphi, T}$ le sous ensemble de E défini par :

$$C_{\varphi, T} = \left\{ y \in E \quad , \quad y(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\alpha, 0] \right. \\ \left. \|y\| \leq \rho \quad \text{et} \quad |y(t) - y(s)| \leq p|t - s| \quad \forall t, s \in [-\alpha, T] \right\}.$$

Pour tout $(\rho, p) \in \mathbb{R}^2$, $C_{\varphi, T}$ est compact.

Démonstration.

Pour démontrer $C_{\varphi, T}$ est compact, il faut montrer que $C_{\varphi, T}$ est relativement compact et fermé.

Etape 1 : $C_{\varphi, T}$ est relativement compact :

D'après le théorème d'Ascoli, $C_{\varphi, T}$ soit borné et uniformément équicontinu.

1. Il est clair que $C_{\varphi, T}$ est borné par construction.

2. Pour tout $y \in C_{\varphi,T}$ et pour tout $t, s \in [-\alpha, \tau]$ on a :

$$|y(t) - y(s)| \leq p|t - s|, \quad (1.6)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, et pour $|t - s| \leq \frac{\varepsilon}{p}$

Alors(1.6) donne

$$|y(t) - y(s)| \leq \varepsilon.$$

Donc $C_{\varphi,T}$ est relativement compact.

Etape 2 : $C_{\varphi,T}$ est fermé :

On prend une suite y_n dans $C_{\varphi,T}$ qui converge vers y i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t) = y(t)$$

, Et on montre que $y(t) \in C_{\varphi,T}$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$y_n(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\alpha, 0],$$

Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in [-\alpha, 0],$$

Alors

$$\begin{aligned} |y(t) - y(s)| &= |y(t) - y_n(t) + y_n(t) - y_n(s) + y_n(s) - y(s)| \\ &\leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| \end{aligned}$$

D'après la définition de limite, on obtient :

$$|y(t) - y(s)| \leq \varepsilon/2 + u|t - s| + \varepsilon/2 = \varepsilon + R|s - t|, \forall \varepsilon \geq 0, \forall R \geq 0, \forall u \geq 0$$

Ainsi

$$|y(t) - y(s)| \leq p|t - s|$$

Et nous avons

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\| \\ &\leq \rho. \end{aligned}$$

Alors $y \in C_{\varphi,T}$ donc $C_{\varphi,T}$ est fermé.

□

Théorème 1.3.1. [19]

Supposons que les hypothèses 1/, 2/ et 3/, sont vérifiées, alors pour toute fonction φ dérivable avec $|\varphi'| \leq R$ pour tout $R > 0$. Alors, le problème (1.5) admet une solution unique.

Exemple 1.3.1.

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = -2 \sin(y(t - ((-y + 1)/2))) \quad \forall t \geq 0 \\ y(t) = \exp(-t) \quad \forall t \leq 0 \end{array} \right. .$$

alors : $\tau(y(t)) = (-y + 1)/2$ et $f(t, y(t), y(t - \tau(y(t)))) = -2 \sin(y(t - ((-y + 1)/2)))$,
 $\varphi(t) = \exp(-t)$ et $\alpha = \max_{t \in \mathbb{R}} \tau(\varphi) = \max_{t \in \mathbb{R}} \tau(\exp(-t)) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

1. Il est claire que $f \in C^1$ par rapport á y donc il est localement lipschitzienne.
2. τ est localement lipschitzienne.
3. Comme la fonction $\sin y$ est borné par 1 pour tout y , alors f est borné par 2
 Alors les hypothèse 1/, 2/ et 3/ sont vérifiée, de même $\varphi(t) = e^{-t}$ est une fonction dérivable est borné par 1, Alors d'après le théorème (1.3.1) cette équation admet une solution unique $y(t)$.

1.3.3 Application d'équation différentielle à retard dépendant de l'état

Pour bien comprendre cette application on propose de définir les notions suivantes[16] :

Hématopoïèse

Hématopoïèse est une phénomène très actif qui assure chez un adulte sain la production quotidienne de plusieurs centaines de milliards de cellules sanguines, elle se déroule dans la moelle osseuse.

Cellules souches hématopoïétiques

Les cellules souches hématopoïétiques notées CSH sont des cellules de base qui se transforment en différents types de cellules sanguines, qui ont des fonctions distincts. En se développant, les cellules souches deviennent des cellules blastiques qui sont des cellules sanguines immatures. Avec le temps les cellules blastique prennent la place des cellules normales.

Moelle osseuse

Substance molle et grasse contenue à l'intérieur des os. Lieu de la formation des cellules souches de l'hématopoïèse ainsi toutes les différentes cellules sanguines.

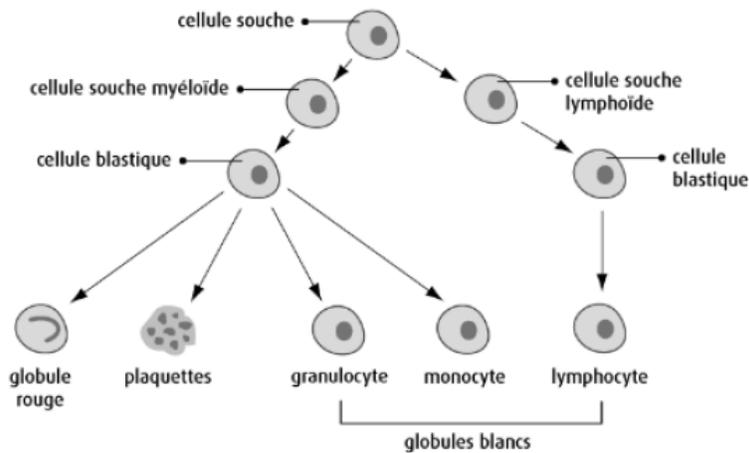


FIGURE 1.1 – *Cellules souches hématopoïétiques*

Modèle de Mackey-Glass

Le premier modèle mathématique de la dynamique des CSH est due à Mackey en 1978, qui a été utilisé pour comprendre des différentes maladies sanguines telle que les leucémies qui sont définies comme des cancers des cellules sanguines en formation qui génèrent des différentes maladies selon le type de ligné affectée. Il est donné sous la forme suivante :

$$y'(t) = \alpha y(t) + \beta \frac{y(t - \tau)}{1 + y^n(t - \tau)}$$

où $y(t)$ représente la densité des globules blancs matures en circulation dans le sang au temps t et τ est le temps de retard entre la production des cellules immatures dans la moelle osseuse et leurs maturation pour la libération dans la circulation sanguine.

α : Taux de destruction des cellules sanguines.

β : Taux de production des cellules sanguines.

n : Désigne la sensibilité de taux de production.

Les équations à retard interviennent dans des nombreux domaines d'applications des mathématiques où il y a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action, telle que la biologie et parmi les travaux réalisés dans ce domaine est l'étude de dynamique des populations cellulaires, notamment la modélisation de dynamique des cellules souches hématopoïétiques notées (CSH), qui s'appuie principalement sur des systèmes d'équations à retard dépendant de l'état. Le modèle mathématique proposé pour l'étude de cette maladie est composé de n équations non-linéaire à retard Dépendant de l'état, correspondant chacune à un ni-

veau de maturité de plus en plus élevé des cellules hématopoïétique. Les cellules les moins matures sont des cellules souches hématopoïétique, les cellules les plus matures sont des cellules différenciées (globules blancs). Durant les premiers stades conservent une capacité à s'auto-renouveler. Chaque équation est du type :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_i(t) &= -\delta_i + \beta_i(y_i(t))y_i(t) \\ &+ 2(1 + k_i) \int_0^{\tau_i} \exp^{-\gamma_i r} f_i(r) \beta_i(y_i(t-r)) y_i(t-r) dr \\ &+ 2k_{i-1} \int_0^{\tau_{i-1}} \exp^{-\gamma_{i-1} r} f_{i-1}(r) \beta_{i-1}(y_{i-1}(t-r)) y_{i-1}(t-r) dr. \end{aligned}$$

où $y_i(t)$ représente le nombre ou la densité de cellules au stade i de différenciation au temps t . Les caractéristiques de chaque stade de différenciation :

τ_i : est la durée du cycle cellulaires.

k_i : est la probabilité de s'auto-renouveler ou de se différencier.

γ_i et δ_i : représente les taux de mort.

$(1 - k_i)$: est la probabilité de s'auto-renouveler lors d'une division.

β_j : le temps moyen de séjour.

Ce modèle a mis en évidence l'importance de la régulation des taux de différenciation à chaque niveau de maturité et des durées de cycles cellulaires, de légères variation pouvant déstabilisé (au même stabilisé) la population totale ou la population des cellules matures (qui est d'un certain point de vue, la plus importante, puisque celle sur la quelle porte généralement les mesures cliniques).

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FONCTIONNELLES NEUTRE

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations différentielles fonctionnelles neutre, en présentant quelques notions théoriques relative à l'existence et l'unicité de solution (voir [10], [12], [14]).

2.1 Définitions de l'équation neutre

Définition 2.1.1.

Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ d'éléments (t, φ) . Une fonction $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite atomique au point β de Ω si D est continue ainsi que sa première et seconde dérivée au sens de Frechet par rapport à φ et D_φ , est continue.

Définition 2.1.2.

Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ est ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont donnés des fonctions continues avec D atomique à zéro. La relation :

$$\frac{d}{dt}D(t, y_t) = f(t, y_t). \quad (2.1)$$

est appelée équation différentielle fonctionnelle neutre EDFN(D, f). La fonction D sera appelée opérateur de différence pour la EDFN(D, f).

Définition 2.1.3.

Pour une EDFN(D, f), une fonction y est dite solution de la EDFN(D, f) s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$, $a > 0$, tel que :

$$y \in C([\sigma - \tau], \mathbb{R}^n) \quad (t, y_t) \in \Omega, \quad t \in [\sigma, \sigma + a]$$

$D(t, y_t)$ est continûment dérivable et vérifie l'équation (2.1) sur $[\sigma, \sigma + a]$.
 Pour un $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$, et $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, on dit $y(\sigma, \varphi, D, f)$ est une solution de l'équation (2.1) de valeur initiale φ en σ ou simplement une solution passant par (σ, φ) s'il existe un $a > 0$ tel que $y(\sigma, \varphi, D, f)$ est une solution de l'équation (2.1) sur $[\sigma - \tau, \sigma + a]$ et $y_\sigma(\sigma, \varphi, D, f) = \varphi$.

Définition 2.1.4.

Si $D(t, \varphi) = D_0(t)\varphi - g(t)$, $f(t, \varphi) = L(t)\varphi + h(t)$ où $D_0(t)$ et $L(t)$ sont linéaires en φ , la EDFN (D, f) est dite linéaire. Il est linéaire homogène si $g = 0$, $h = 0$ et linéaire non homogène si soit $g \neq 0$ ou $h \neq 0$. Une EDFN (D, f) est dite autonome si $D(t, \varphi)$ et $f(t, \varphi)$ ne dépendent pas de t .

Exemple 2.1.1.

Si $D\varphi = \varphi(0)$ pour tout φ , alors D est atomique à 0. Donc, pour tout f continue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, le couple (D, f) définit une EDFN. Par conséquent, EDFR sont EDFN.

Exemple 2.1.2.

Si $\tau > 0$, B est une matrice constante $n \times n$,
 $D(\varphi) = \varphi(0) - B\varphi(-\tau)$, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, alors le couple (D, f) définit une EDFN, c'est-à-dire l'équation

$$\frac{d}{dt}[y(t) - By(t - \tau)] = f(t, y_t).$$

est une EDFN.

Exemple 2.1.3.

Si $\tau > 0$, y est un scalaire, $D\varphi = \varphi(0) - \varphi^2(-\tau)$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors le couple (D, f) définit une EDFN ; c'est-à-dire l'équation

$$\frac{d}{dt}[y(t) - y^2(t - \tau)] = f(t, y_t).$$

est une EDFN.

Exemple 2.1.4.

Si $\tau > 0$, y est un scalaire, $D(\varphi) = \varphi(0) - \sin \varphi(-\tau)$, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors le couple (D, f) définit une EDFN,

$$\frac{d}{dt}[y(t) - \sin y(t - \tau)] = f(t, y_t). \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.1.

Notez que lorsque y est continûment différentiable, (2.2) équivaut à

$$\dot{y} - (\cos y(t - \tau))\dot{y}(t - \tau) = f(t, y_t).$$

Cela montre que notre définition de EDFN nécessite que la dérivée de y entre dans l'équation de manière linéaire. En fait, les termes impliquant y qui multiplient \dot{y} doivent se produire avec le même retard.

2.2 Existence et unicité

Théorème 2.2.1. [10] (Existence)

Si Ω est un ouvert dans $\mathbb{R} \times C$ et $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, alors il existe une solution de la EDFN(D, f) par (σ, φ) .

Théorème 2.2.2. [10] (Unicité)

Si $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ est un ouvert dans et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est Lipschitzien en φ sur les ensembles compacts de Ω , alors, pour tout $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, il existe une unique solution de la EDFN(D, f) par (σ, φ) .

2.3 Solution d'équations différentielles neutre d'ordre supérieur

Dans cet partie, nous étudions une méthode numérique pour la résolution d'équations différentielles d'ordre k à retard constant $\tau > 0$ et à coefficients variables de la forme :

$$y^{(k)}(t) = g(t) + \sum_{v=0}^{k-1} L_v(t)y^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^{k-1} M_v(t)y^{(v)}(t - \tau), \quad (2.3)$$

pour $t \in [0, T]$ et $y(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$.

Les fonctions $g, \{L_v\}_{v=0}^{k-1}, \{M_v\}_{v=0}^{k-1} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sont suffisamment lisses. De plus, nous supposons que

$$\varphi^{(k)}(0) = g(0) + \sum_{v=0}^{k-1} L_v(0)\varphi^{(v)}(0) + \sum_{v=0}^{k-1} M_v(0)\varphi^{(v)}(-\tau).$$

L'existence et l'unicité de la solution lisse peuvent être trouvées dans [5].

Les équations différentielles à retard (*EDR*) sont devenues cruciales dans la modélisation mathématique de plusieurs domaines des sciences et de l'ingénierie. Comme cas particulier dans le modèle épidémique, *Ghosh et al.*[8] ont développé un modèle en présence de vaccination pour les individus nouvellement entrants et considérant un délai pour que les individus infectés deviennent infectieux. De plus, *Liu et al.*[15] ont développé deux modèles mathématiques décrivant les épidémies de *COVID-19*. Le premier est un modèle ODE, tandis que le second est un modèle *EDR* avec un délai chez les individus nouvellement infectés avant qu'ils ne deviennent infectieux.

Plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour approximer la solution des *EDR*, notamment les méthodes spectrales et pseudospectrales, les méthodes aux différences finies, les méthodes aux éléments finis et méthode d'interpolation Hermite .

Nous proposons d'utiliser la méthode de collocation de Taylor (*MCT*), qui se caractérise par les principaux avantages suivants :

(i) la méthode *MCT* est directe, et la solution approchée est donnée en utilisant des

formules explicites.

(ii) cette méthode a un ordre de convergence .

(iii) de plus, aucun système algébrique n'a besoin d'être résolu, ce qui rend l'algorithme proposé très efficace et facile à mettre en oeuvre.

2.3.1 Description de la méthode

Nous supposons que $T = r\tau$ où $r \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Soit Π_N une partition uniforme de l'intervalle $I = [0, T]$ défini par $t_n^i = i\tau + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, $i = 0, 1, \dots, r-1$, où le pas est donné par $h = \frac{\tau}{N}$. Définir les sous-intervalles $\sigma_n^i = [t_n^i; t_{n+1}^i]$,

$n = 0, 1, \dots, N-1$, $i = 0, 1, \dots, r-1$ et $\sigma_{N-1}^{r-1} = [t_{N-1}^{r-1}, t_N^{r-1}]$.

De plus, notons π_{m+k-1} l'ensemble de tous les polynômes réels de degré n'excédant pas $m+k-1$, avec $m > 1$. L'espace spline des polynômes réels de degré $m+k-1$ est défini comme suit :

$$S_{m+k-1}^{k-1}(\Pi_N) = \{u \in C^{k-1}(I, \mathbb{R}) : u_n^i = u|_{\sigma_n^i} \in \pi_{m+k-1}, n = 0, 1, \dots, N-1, i = 0, 1, \dots, r-1\}$$

C'est l'espace des polynômes par morceaux de degré (au plus) $m+k-1$, tel que $m+k > k \geq 1$. Sa dimension est $rNm+k$, c'est-à-dire égale au nombre total des coefficients des polynômes u_n^i , $n = 0, \dots, N-1$, $i = 0, 1, \dots, r-1$. Pour trouver ces coefficients, on utilise le polynôme de Taylor sur chaque sous-intervalle.

Supposons d'abord que l'approximation de y dans l'intervalle σ_0^0 est le polynôme

$$u_0^0(t) = \sum_{j=0}^{m+k-1} \frac{y^{(j)}(0)}{j!} t^j; \quad t \in \sigma_0^0, \quad (2.4)$$

où $y^{(j)}(0)$, $j = 0, \dots, m+k-1$ est la valeur exacte de $y^{(j)}$ en 0,

En différenciant l'équation (2.3) j - fois, on obtient pour $j = 0, 1, \dots, m-1$,

$$y^{(j+k)}(0) = g^{(j)}(0) + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} L_v^{(j-l)}(0) y^{(l+v)}(0) + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} M_v^{(j-l)}(0) \varphi^{(l+v)}(-\tau),$$

tel que $y^{(v)}(0) = \varphi^{(v)}(0)$ pour tout $v = 0, 1, \dots, k-1$.

Deuxièmement, l'approximation de y est u_n^0 ($n \in \{1, 2, \dots, N-1\}$) sur l'intervalle σ_n^0 tel que

$$u_n^0(t) = \sum_{j=0}^{m+k-1} \frac{\hat{u}_{n,0}^j(t_n^0)}{j!} (t - t_n^0)^j; \quad t \in \sigma_n^0, \quad (2.5)$$

où $\hat{u}_{n,0}$ est la solution exacte de l'équation intégral-différentielle, pour $t \in \sigma_n^0$

$$\hat{u}_{n,0}^{(k)}(t) = g(t) + \sum_{v=0}^{k-1} L_v(t) \hat{u}_{n,0}^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^{k-1} M_v(t) \varphi^{(v)}(t - \tau), \quad (2.6)$$

tel que $\hat{u}_{n,0}^{(v)}(t_n^0) = u_{n-1}^{0(v)}(t_n^0)$ pour tout $v = 0, 1, \dots, k-1$.

Maintenant, pour tout $j = 0, 1, \dots, m+k-1$ la formule de calcul des valeurs des coefficients $\hat{u}_{n,0}^{(j)}(t_n^0)$ peut être obtenu en employant des arguments similaires à ceux utilisés pour obtenir les valeurs de $y^{(j)}(0)$ ci-dessus, on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n,0}^{(j+k)}(t_n^0) &= g^{(j)}(t_n^0) + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} L_v^{(j-l)}(t_n^0) \hat{u}_{n,0}^{(l+v)}(t_n^0) \\ &+ \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} M_v^{(j-l)}(t_n^0) \varphi^{(l+v)}(t_n^0 - \tau), \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour $j = 0, 1, \dots, m-1$ tel que $\hat{u}_{n,0}^{(v)}(t_n^0) = u_{n-1}^{0(v)}(t_n^0)$ pour tout $v = 0, 1, \dots, k-1$.

Troisièmement, pour que y soit approximé par u_n^p ($n \in \{0, \dots, N-1\}$ et $p \in \{1, 2, \dots, r-1\}$) sur l'intervalle σ_n^p , y doit être approché par u_k^j ($0 \leq k < n$ et $0 \leq j \leq p$) sur chaque intervalle σ_k^j tel que,

$$u_n^p(t) = \sum_{j=0}^{m+k-1} \frac{\hat{u}_{n,p}^{(j)}(t_n^p)}{j!} (t - t_n^p)^j; \quad t \in \sigma_n^p \quad (2.8)$$

où $\hat{u}_{n,p}$ est la solution exacte de l'équation intégral-différentielle :

$$\hat{u}_{n,p}^{(k)}(t) = g(t) + \sum_{v=0}^{k-1} L_v(t) \hat{u}_{n,p}^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^{k-1} M_v(t) u_n^{p-1(v)}(t - \tau), \quad (2.9)$$

pour $t \in \sigma_n^p$, $\hat{u}_{0,p}^{(v)}(t_0^p) = u_{N-1}^{p-1(v)}(t_0^p)$ et $\hat{u}_{n,p}^{(v)}(t_n^p) = u_{n-1}^{p(v)}(t_n^p)$ pour tout $v = 0, 1, \dots, k-1$. Les coefficients $\hat{u}_{n,p}^{(j)}(t_n^p)$ pour $j = 0, 1, \dots, m-1$, est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n,p}^{(j+k)}(t_n^p) &= g^{(j)}(t_n^p) + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} L_v^{(j-l)}(t_n^p) \hat{u}_{n,p}^{(l+v)}(t_n^p) \\ &+ \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} M_v^{(j-l)}(t_n^p) \hat{u}_{n,p-1}^{(l+v)}(t_n^{p-1}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

tel que $\hat{u}_{0,p}^{(v)}(t_0^p) = u_{N-1}^{p-1(v)}(t_0^p)$ et $\hat{u}_{n,p}^{(v)}(t_n^p) = u_{n-1}^{p(v)}(t_n^p)$ pour tout $v = 0, 1, \dots, k-1$.

2.3.2 Analyse de convergence

Les trois lemmes suivants seront utilisés dans cette section.

lemme 2.3.1. (*Inégalité discrète de type Gronwall [5]*)

Soit $\{k_j\}_{j=0}^n$ une suite non négative donnée et la suite $\{\varepsilon_n\}$ satisfait $\varepsilon_0 \leq p_0$ et

$$\varepsilon_n \leq p_0 + \sum_{i=0}^{n-1} k_i \varepsilon_i, \quad n \geq 1$$

avec $p_0 \geq 0$. Alors ε_n peut être borné par

$$\varepsilon_n \leq p_0 \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} k_j \right), \quad n \geq 1.$$

lemme 2.3.2. [9]

Supposons que la séquence de nombres non négatifs satisfait $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$

$$\varepsilon_n \leq A\varepsilon_{n-1} + B \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + K, \quad n \geq 1,$$

où A, B et K sont des constantes positives, alors

$$\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_0}{R_2 - R_1} [(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] \frac{K}{R_2 - R_1} [R_2^n - R_1^n],$$

où, $R_1 = (1 + A + B - C)/2$, $R_2 = (1 + A + B + C)/2$,

Donc, $C = \sqrt{(1 - A)^2 + B^2 + 2AB + 2B}$ et $0 \leq R_1 \leq 1 \leq R_2$.

Avant de commencer le résultat principal, le lemme suivant est nécessaires :

lemme 2.3.3. [14]

Soient $g, \{L_v\}_{v=0}^{k-1}$ et $\{M_v\}_{v=0}^{k-1}$ être m -fois continûment différentiable φ et être $m + k$ fois continûment différentiable sur leurs domaines respectifs. Puis, il existe un nombre positif $\alpha(m)$ telle que pour tout $n = 0, 1, \dots, N-1, p = 0, 1, \dots, r-1$, et $j = 0, 1, \dots, m+k$, on a,

$$\|\hat{u}_{n,p}^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} \leq \alpha(m).$$

à condition que h soit suffisamment petit, où $\hat{u}_{0,0}(t) = y(t)$ pour $t \in \sigma_0^0$.

Le théorème suivant décrit l'ordre de convergence de la méthode.

Théorème 2.3.1. [14] Soient $g, \{L_v\}_{v=0}^{k-1}$ et $\{M_v\}_{v=0}^{k-1}$ être m -fois continûment différentiables sur leurs domaines respectifs. Suppose que $u \in S_{m+k-1}^{(k-1)}(\Pi_N)$ dans les équations (2.4), ..., (2.10) définissent une unique solution approchée u . Ensuite, l'erreur résultante fonction $e := y - u$ satisfait :

$$\|e\|_{L^\infty(I)} \leq Ch^m,$$

C est une constante finie indépendante de h .

Démonstration. En utilisant une généralisation plus simple des techniques employées dans le cas des équations intégro-différentielles linéaires d'ordre élevé en utilisant la méthode de collocation de Taylor (voir, par exemple, [13]). \square

2.3.3 Exemples numériques

Des exemples numériques sont donnés pour illustrer les résultats théoriques obtenus dans la section précédente. Dans chaque exemple, nous calculons l'erreur entre y et la solution de collocation de Taylor u . Nous comparons nos résultats avec d'autres méthodes bien connues : méthode multi-étapes [11], méthode spline donnée dans [7]. Les résultats dans ces exemples confirment les résultats théoriques obtenus dans la théorème 2.3.1.

Exemple 2.3.1. *Considérons l'ODE linéaire pour la charge instantanée $q(t)$ au temps t sur le condensateur dans un circuit série LRC donné par*

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t), \quad q(0) = 0, \quad i(0) = q'(0) = 0, \quad t > 0$$

La solution exacte $q(t) = \frac{3}{4}(1 - e^{-10t}(\cos(10t) + \sin(10t)))$ et $L, R, C, E(t), i(t)$ sont respectivement l'inductance, la capacité, la résistance, la tension imprimée et le courant. Nous résolvons le problème pour $L = 1, R = 20, C = 0.005$ et $E(t) = 150$. Les erreurs absolues pour $m = 7, m = 10$ et $h = 0, 1$ sont comparées à l'erreur absolue de la méthode Multistep [11] dans le tableau 1.

Tableau 1 : Comparaison des erreurs absolues de l'exemple 2.3.1

t	<i>Multistep method</i> [17]	<i>Present method</i> $m = 7$	<i>Present method</i> $m = 10$
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	1.61×10^{-3}	2.92×10^{-4}	1.10×10^{-6}
0.2	1.11×10^{-3}	1.00×10^{-3}	4.48×10^{-6}
0.3	3.52×10^{-4}	7.05×10^{-4}	2.22×10^{-6}
0.4	2.25×10^{-3}	1.62×10^{-4}	3.31×10^{-8}
0.5	2.81×10^{-3}	7.12×10^{-5}	5.20×10^{-7}
0.6	7.93×10^{-4}	6.86×10^{-5}	2.52×10^{-7}
0.7	1.50×10^{-5}	1.94×10^{-5}	7.57×10^{-9}
0.8	2.92×10^{-4}	3.35×10^{-6}	9.15×10^{-8}
0.9	2.43×10^{-4}	4.92×10^{-6}	4.54×10^{-8}
1.0	5.71×10^{-5}	1.63×10^{-6}	8.09×10^{-8}
1.1	9.21×10^{-6}	9.39×10^{-8}	4.59×10^{-8}
1.2	1.48×10^{-5}	3.09×10^{-7}	3.81×10^{-8}

Exemple 2.3.2. *Considérons l'équation différentielle de retard linéaire du second ordre*

$$y''(t) = -5 \sin(t)e^{\cos(t)} - (\cos(t) + \sin(t))y(t) - (6 + \sin(t))y'(t) + \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)y\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + y'\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \quad t \in [0, 2]$$

et $\varphi(t) = e^{\cos(t)}$ pour $t \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$. La solution exacte $y(t) = e^{\cos(t)}$ Les erreurs absolues pour $m = 11, h = 0, 1$ et $h = 0, 2$ sont comparées à l'erreur absolue de la méthode Spline [7] dans le tableau 2.

tableau 2 : de comparaison des erreurs absolues de l'exemple 2.3.2

t	$h = 0, 2$		t	$h = 0, 1$	
	<i>Spline method</i> [10]	<i>Present method</i>		<i>Spline method</i> [10]	<i>Present method</i>
0.2	1.15×10^{-9}	3.47×10^{-12}	0.1	2.32×10^{-12}	8.51×10^{-16}
0.4	5.80×10^{-10}	1.92×10^{-11}	0.2	5.07×10^{-12}	2.95×10^{-12}
0.6	4.78×10^{-10}	9.18×10^{-11}	0.3	1.24×10^{-12}	2.10×10^{-11}
0.8	1.76×10^{-9}	8.08×10^{-11}	0.4	2.25×10^{-11}	5.70×10^{-11}
1.0	4.42×10^{-9}	6.76×10^{-11}	0.5	7.68×10^{-11}	6.21×10^{-11}
1.2	2.29×10^{-8}	5.96×10^{-11}	0.6	1.97×10^{-10}	5.80×10^{-11}
1.4	5.37×10^{-9}	4.15×10^{-11}	0.7	1.12×10^{-10}	4.58×10^{-11}
1.6	1.93×10^{-9}	1.83×10^{-10}	0.8	6.16×10^{-11}	2.90×10^{-11}
1.8	2.57×10^{-10}	9.85×10^{-9}	0.9	5.44×10^{-11}	3.22×10^{-11}
2.0	1.25×10^{-9}	7.82×10^{-9}	1.0	9.26×10^{-11}	5.90×10^{-11}

Exemple 2.3.3. *Considérons le DDE d'ordre 7*

$$y^{(7)}(t) = g(t) + y(t) + t^2 y'(t) + \sin(t) y^{(6)}(t) + t y''(t - \frac{1}{2}) \\ + (t^2 - 1) y^{(5)}(t - \frac{1}{2}) + t y^{(6)}(t - \frac{1}{2}), \quad t \in [0, 4]$$

g est choisi de sorte que la solution exacte soit

$y(t) = \frac{1+t}{2e^t}$ et les erreurs e pour $(m, N) = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (7, 7)\}$ à $t = 0, 0.5, \dots, 4$ sont présentés dans le tableau 3.

Tableau 3 : des erreurs absolues de l'exemple 2.3.3

t	$m = 3, N = 3$	$m = 4, N = 4$	$m = 5, N = 5$	$m = 7, N = 7$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	5.37×10^{-10}	1.55×10^{-11}	2.14×10^{-12}	1.83×10^{-12}
1.0	1.09×10^{-7}	1.51×10^{-9}	9.34×10^{-11}	6.12×10^{-11}
1.5	2.11×10^{-6}	2.66×10^{-8}	5.79×10^{-10}	4.90×10^{-15}
2.0	1.70×10^{-5}	2.08×10^{-7}	7.06×10^{-10}	5.35×10^{-10}
2.5	8.81×10^{-5}	1.06×10^{-6}	2.61×10^{-9}	2.12×10^{-9}
3.0	3.50×10^{-4}	4.20×10^{-6}	2.12×10^{-8}	4.53×10^{-9}
3.5	1.19×10^{-3}	1.42×10^{-5}	9.35×10^{-8}	3.58×10^{-9}
4.0	3.69×10^{-3}	4.41×10^{-5}	3.26×10^{-7}	2.46×10^{-9}

CHAPITRE 3

ÉQUATION INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES À RETARD

3.1 Équation intégré-différentielle

Les équations intégré-différentielles (E.I.D) est une branche importante en mathématique moderne et suivent fréquemment dans beaucoup de domaine appliqués, qui incluent mécanique de l'ingénieur, physique, chimie, astronomée, biologie, économie, théorie potentielle et électrostatique [5],[17].

Une (E.I.D) est une équation composée de deux opérateurs intégral et différentiel qui impliquent la fonction .

soit l'équation intégré-différentielle linéaire :

$$\varphi^{(n)}(y) + a_1\varphi^{(n-1)}(y) + \dots + a_n\varphi(y) + \sum_{m=0}^s \int_a^y k_m(y,t)\varphi^{(m)}(t)ds = f(y),$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des constantes, $f(y), k_m(y)(m = 0, 1, \dots, s)$ des fonctions données, $\varphi(y)$ la fonction cherchée.

La fonction $\varphi(y)$ est assujettie à des conditions initiales de la forme

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)}$$

Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées sont sous les trois principales classes, nommées équations intégré-différentielles de Volterra, équations intégré-différentielles de Fredholm et équations intégré-différentielles de Volterra-Fredholm

3.1.1 Équation intégral-différentielle de Fredholm

L'équation intégral-différentielle de Fredholm apparaît sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(y) = f(y) + \lambda \int_a^b k(y, t)\varphi(t)dt.$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n -ième de $\varphi(y)$. Autres dérivés de l'ordre de moins peuvent apparaître avec $\varphi^{(n)}$ sur le côté gauche.

Exemple 3.1.1.

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= 1 - \frac{1}{3}y + \int_0^1 y\varphi(t)dt, & \varphi(0) &= 0 \\ \text{et} \\ \varphi''(y) + \varphi'(y) &= y - \sin y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} yt\varphi(t)dt, & \varphi(0) &= 0, \quad \varphi'(0) = 1. \end{aligned}$$

3.1.2 Équation intégral-différentielle de Volterra

Équation intégral-différentielle de Volterra apparaît sous la forme :

$$\varphi^{(n)}(y) = f(y) + \lambda \int_a^y k(y, t)\varphi(t)dt.$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la dérivée n -ième de φ . Autres dérivés de l'ordre inférieur peuvent apparaître avec $\varphi^{(n)}$ sur le côté gauche.

Exemple 3.1.2.

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= 1 - \frac{1}{2}y^2 - ye^y + \int_0^y t\varphi(t)dt, & \varphi(0) &= 0 \\ \text{et} \\ \varphi''(y) + \varphi'(y) &= 1 - y - (\sin y + \cos y) - \int_0^y t\varphi(t)dt, & \varphi(0) &= -1, \quad \varphi'(0) = 1. \end{aligned}$$

3.1.3 Équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm

Équation intégral-différentielle de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous la forme

$$\varphi^{(n)}(y) = f(y) + \lambda_1 \int_a^y k_1(y, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(y, t)\varphi(t)dt.$$

λ_1 et λ_2 sont des paramètres numériques, k_1 et k_2 les noyaux de l'équation intégrale, f est la fonction donnée φ est la fonction inconnue.

3.2 Équation intégro-différentielle à retard

Équation intégro-différentielle à retard est un type d'équations intégro-différentielles. Formellement, l'approche de collocation décrite pour les problèmes de valeur initiale dans les *EDO* est facilement étendue aux équations intégrales ou aux équations intégro-différentielles de type Volterra [5] :

$$y(t) = g(t) + V_y(t), \quad t \in I = [t_0, T],$$

ou

$$y'(t) = f(t, y(t)) + V_y(t), \quad t \in I$$

où V désigne un opérateur intégral de Volterra donné par

$$V_y(t) = \int_{t_0}^t k(t, s, y(s)) ds.$$

et pour retarder les problèmes, par exemple pour

$$y'(t) = f(t, y(t), y(\theta(t))) + W_{\theta y}(t), \quad t \in I$$

Ici, le retard $\tau(t)$ dans la fonction de retard $\theta(t) = t - \tau(t)$ peut être non nul, $\tau(t) \geq \tau_0 > 0$ pour $t \in I$, ou nul, lorsque $\theta(t) = qt = t - (1 - q)t$ ($0 < q < 1$) avec $t_0 = 0$. L'intégrale de retard W_θ a la forme :

$$W_\theta = \int_{\theta(t)}^t k_2(t, s, y(s), y'(t)) ds.$$

3.3 Solution numérique des équations intégro-différentielles à retard par une méthode de collocation

Dans cet partie, nous étudions une méthode numérique pour la résolution d'équations intégro-différentielles à retard de la forme :

$$y'(t) = g(t) + \int_{t-\tau}^t k(t, s) y(s) ds, \quad (3.1)$$

pour $t \in [0, T]$ et $y(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$, où les fonctions g, k et φ sont suffisamment lisses. L'existence et l'unicité de la solution de (3.1) se trouvent par exemple dans [5]. Il y a eu un intérêt croissant pour la solution numérique des équations intégro-différentielles à retard. Brunner [5] a appliqué la méthode de collocation polynomiale pour approximer la solution de (3.1). Wu et Gan [18] ont utilisé des méthodes linéaires multi-étapes basées sur une règle de quadrature pour trouver une

solution numérique d'équations intégro-différentielles à retard de Volterra singulièrement perturbées. La méthode polynomiale de Taylor pour approximer la solution des équations intégrales a été proposée. S. Yalçınba[20] a appliqué la méthode de Taylor pour la résolution de certaines équations intégrales de Volterra-Fredholm. Akyüz-Dascio et glu et Sezer[2] et Darania et Ivaz [6] ont utilisé la méthode de Taylor pour trouver une solution approchée des équations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm. Notre but est d'approximer la solution de (3.1) dans l'espace $S_m^{(0)}$, l'espace des fonctions splines polynomiales continues de degré m , en utilisant des polynômes de Taylor.

3.3.1 Description de la méthode

Dans cette section, nous supposons sans perte de généralité que $T = \tau r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. Soit Π_N une partition uniforme de l'intervalle $l = [0, T]$ défini par $t_n^i = i\tau + nh, n = 0, 1, \dots, N, i = 0, 1, \dots, r - 1$, où le pas est donné par $h = \tau/N$. On définit les sous-intervalles : $\sigma_n^i = [t_n^i, t_{n+1}^i], n = 0, 1, \dots, N - 1, i = 0, 1, \dots, r - 1$. De plus, on note π_m l'ensemble de tous les polynômes réels de degré n n'excédant pas m . On définit l'espace spline polynomial réel de degré m et de classe de continuité comme suit :

$$S_m^0(\Pi_N) = \{ u \in C(l, \mathbb{R}), u_n^i = u|_{\sigma_n^i} \in \pi_m, n = 0, 1, \dots, N - 1, i = 0, 1, \dots, r - 1 \}.$$

Il est facile de voir que $S_m^{(0)}(\Pi_N)$ est un espace vectoriel réel, et sa dimension est donnée par

$$\dim(S_m^{(0)}(\Pi_N)) = rNm + 1.$$

On cherche une approximation u dans l'espace spline $S_{m-1}^{(0)}(\Pi_N)$ de la solution y de (3.1). Par la continuité de u , les polynômes u_n^i satisfaire $u_n^i(t_n^i) = u_{n-1}^i(t_n^i)$ pour $n=1, \dots, N-1$ et $u_0^i(t_0^i) = u_{N-1}^{i-1}(t_0^i)$ pour $i = 1, \dots, r - 1$. Trouver les coefficients des polynômes $u_n^i, n = 0, \dots, N - 1, i = 0, \dots, r - 1$, on utilise un polynôme de Taylor sur chaque sous-intervalle σ_n^i .

D'abord, nous approchons la solution exacte y dans l'intervalle σ_0^0 par le polynôme

$$u_0^0(t) = \sum_{j=0}^m \frac{y^{(j)}(0)}{j!} t^j; \quad t \in \sigma_0^0. \quad (3.2)$$

Pour trouver $y^{(j)}(0)$, on différencie (3.1) j -fois

$$\begin{aligned} y^{(j+1)}(t) &= g^{(j)}(t) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t, s) \varphi(s) ds \right)^{(j)} + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\delta_1^{(j)} k(t, t) y(t) \right]^{(j-1-i)} \\ &\quad + \int_0^t \delta_1^{(j)} k(t, s) y(s) ds, \end{aligned}$$

alors

$$y^{(j+1)}(0) = g^{(j)}(0) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\varphi(s)ds \right)^{(j)}(0) \\ + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} \left[\delta_1^{(j)} k(t,t) \right]^{(j-1-i-l)}(0) y^{(l)}(0),$$

pour $j = 0, 1, \dots, m$, où $y(0) = \varphi(0)$.

Deuxièmement, nous approchons y par le polynôme $u_n^0 (n \in \{1, 2, \dots, N-1\})$ sur l'intervalle σ_n^0 tel que

$$u_n^0(t) = \sum_{j=0}^m \frac{\hat{u}_{n,0}^{(j)}(t_n^0)}{j!} (t - t_n^0)^j; \quad t \in \sigma_n^0, \quad (3.3)$$

où $\hat{u}_{n,0}$ est la solution exacte de l'équation intégro-différentielle

$$\hat{u}'_{n,0}(t) = g(t) + \int_{t-\tau}^0 k(t,s)\varphi(s)ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} k(t,s)u_i^0(s)ds + \int_{t_n^0}^t k(t,s)\hat{u}_{n,0}(s)ds, \quad (3.4)$$

pour $t \in \sigma_n^0$ tel que $\hat{u}_{n,0}(t_n^0) = u_{n-1}^0(t_n^0)$.

Les coefficients $\hat{u}_{n,0}^{(j)}(t_n^0)$ sont donnés par la formule suivante

$$\hat{u}_{n,0}^{(j+1)}(t_n^0) = g^{(j)}(t_n^0) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\varphi(s)ds \right)^{(j)}(t_n^0) \\ + \sum_{i=0}^{j-1} \left[\delta_1^{(i)} k(t,t)\hat{u}_{n,0}(t) \right]^{(j-1-i)}(t_n^0) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} \delta_1^{(j)} k(t_n^0,s)u_i^0(s)ds \\ = g^{(j)}(t_n^0) + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\varphi(s)ds \right)^{(j)}(t_n^0) \\ + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} \left[\delta_1^{(i)} k(t,t) \right]^{(j-1-i-l)}(t_n^0) \hat{u}_{n,0}^{(l)}(t_n^0) \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \frac{\hat{u}_{i,0}^{(l)}(t_i^0)}{l!} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} \delta_1^{(j)} k(t_n^0,s) (s - t_i^0)^l ds, \quad (3.5)$$

pour $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ et $\hat{u}_{n,0}(t_n^0) = u_{n-1}^0(t_n^0)$.

Troisièmement, pour que y soit approché par $u_0^p (p \in \{1, 2, \dots, r-1\})$ sur l'intervalle σ_0^p , y doit être approché par u_k^j ($0 \leq k \leq N-1$) et ($0 \leq j < p$) sur chaque intervalle σ_k^j tel que

$$u_0^p(t) = \sum_{j=0}^m \frac{\hat{u}_{0,p}^{(j)}(t_0^p)}{j!} (t - t_0^p)^j; \quad t \in \sigma_0^p, \quad (3.6)$$

où $\hat{u}_{0,p}$ est la solution exacte de l'équation intégro-différentielle

$$\hat{u}'_{0,p}(t) = g(t) + \int_{t-\tau}^{t_0^p} k(t,s)u^{p-1}(s)ds + \int_{t_0^p}^t k(t,s)\hat{u}_{0,p}(s)ds, \quad (3.7)$$

pour $t \in \sigma_0^p$ tel que $\hat{u}_{0,p}(t_0^p) = u_{N-1}^{p-1}(t_0^p)$, où $u^i = u$ sur l'intervalle $\sigma^i = [t_0^i, t_0^{i+1}]$ pour $i \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$.

Les coefficients $\hat{u}_{0,p}^{(j)}(t_0^p)$ sont donnés par la formule suivante

$$\begin{aligned} \hat{u}_{0,p}^{(j+1)}(t_0^p) &= g^{(j)}(t_0^p) - \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} \left[\delta_1^{(i)} k(t, t-\tau) \right]^{j-1-i-l} (t_0^p) \hat{u}_{0,p-1}^{(l)}(t_0^{p-1}) \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^m \frac{\hat{u}_{i,p-1}^{(l)}(t_i^{p-1})}{l!} \int_{t_i^{p-1}}^{t_{i+1}^{p-1}} \delta_1^{(j)} k(t_0^p, s) (s - t_i^{p-1})^l ds \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} \left[\delta_1^{(i)} k(t, t) \right]^{j-1-i-l} (t_0^p) \hat{u}_{0,p}^{(l)}(t_0^p) \end{aligned} \quad (3.8)$$

pour $j \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ et $\hat{u}_{0,p}(t_0^p) = u_{N-1}^{p-1}(t_0^p)$

Enfin, sur l'intervalle $\sigma_n^p (n \in \{1, 2, \dots, N-1\})$, le polynôme u_n^p est défini par la formule suivante

$$u_n^p(t) = \sum_{j=0}^m \frac{\hat{u}_{n,p}^{(j)}(t_n^p)}{j!} (t - t_n^p)^j; \quad t \in \sigma_n^p, \quad (3.9)$$

où $\hat{u}_{n,p}$ est la solution exacte de l'équation intégro-différentielle

$$\hat{u}'_{n,p}(t) = g(t) + \int_{t-\tau}^{t_0^p} k(t,s)u^{p-1}(s)ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^p}^{t_{i+1}^p} k(t,s)u_i^p(s)ds + \int_{t_n^p}^t k(t,s)\hat{u}_{n,p}(s)ds, \quad (3.10)$$

pour $t \in \sigma_n^p$ tel que $\hat{u}_{n,p}(t_n^p) = u_{n-1}^p(t_n^p)$

Les coefficients $\hat{u}_{n,p}^{(j)}(t_n^p)$ sont donnés par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n,p}^{(j+1)}(t_n^p) &= g^j(t_n^p) - \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} \left[\delta_1^{(i)} k(t, t-\tau) \right]^{(j-1-i-l)} (t_n^p) \hat{u}_{n,p-1}^{(l)}(t_n^{p-1}) \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^m \frac{\hat{u}_{i,p-1}^{(l)}(t_i^{p-1})}{l!} \int_{t_i^{p-1}}^{t_{i+1}^{p-1}} \delta_1^{(j)} k(t_n^p, s) (s - t_i^{p-1})^l ds \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{l=0}^{j-1-i} \binom{j-1-i}{l} \left[\delta_1^{(i)} k(t, t) \right]^{(j-1-i-l)} (t_n^p) \hat{u}_{n,p}^{(l)}(t_n^p) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \frac{\hat{u}_{i,p}^{(l)}(t_i^p)}{l!} \int_{t_i^p}^{t_{i+1}^p} \delta_1^{(j)} k(t_n^p, s) (s - t_i^p)^l ds, \end{aligned} \quad (3.11)$$

pour $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ et $\hat{u}_{n,p}(t_n^p) = u_{n-1}^p(t_n^p)$.

3.3.2 Analyse de convergence

Les trois lemmes suivants seront utilisés dans cette section.

lemme 3.3.1. [5]

Soit $\{k_j\}_{j=0}^n$ une suite positive donnée, et la suite $\{\varepsilon_n\}$ satisfait

$$\varepsilon_n \leq p_0 + \sum_{i=0}^{n-1} k_i \varepsilon_i, \quad n \geq 0,$$

avec $p_0 \geq 0$. Alors, ε_n peut être borné par

$$\varepsilon_n \leq p_0 \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} k_j \right), \quad n \geq 0.$$

lemme 3.3.2. [1]

Si $\{f_n\}_{n \geq 0}$, $\{g_n\}_{n \geq 0}$, et $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$ sont des séquences non négatives et

$$\varepsilon_n \leq f_n + \sum_{i=0}^{n-1} g_i \varepsilon_i, \quad n \geq 0,$$

alors

$$\varepsilon_n \leq f_n + \sum_{i=0}^{n-1} f_i g_i \exp \left(\sum_{k=0}^{n-1} g_k \right), \quad n \geq 0.$$

lemme 3.3.3. [9]

Supposons que la séquence $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$ de nombres non négatifs satisfait

$$\varepsilon_n \leq A \varepsilon_{n-1} + B \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + K, \quad n \geq 0$$

où A, B et K sont des constantes non négatives, alors

$$\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_0}{R_2 - R_1} [(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] + \frac{K}{R_2 - R_1} [R_2^n - R_1^n],$$

où

$$R_1 = \left(1 + A + B - \sqrt{(1 - A)^2 + B^2 + 2AB + 2B} \right) / 2,$$

$$R_2 = \left(1 + A + B + \sqrt{(1 - A)^2 + B^2 + 2AB + 2B} \right) / 2.$$

Donc, $0 \leq R_1 \leq 1 \leq R_2$.

Le lemme suivant sera crucial pour établir la convergence de la solution d'approximation.

lemme 3.3.4.

Soient g, k , et φ m -fois continûment dérivables sur leurs domaines respectifs. Alors, il existe un nombre positif $\alpha(m)$ tel que pour tout $n = 0, 1, \dots, N-1$, $p = 0, 1, \dots, r-1$ et $j = 0, 1, \dots, m+1$ on a

$$\|\hat{u}_{n,p}^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} \leq \alpha(m)$$

à condition que h soit suffisamment petit, où $\hat{u}_{0,0}(t) = y(t)$ pour $t \in \sigma_0^0$.

Démonstration.

La preuve se décompose en deux étapes.

Première cas : Il existe une constante positive $\alpha_1(m)$ telle que

$$\|\hat{u}_{n,0}^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq \alpha_1(m).$$

Soit $a_n^j = \|\hat{u}_{n,0}^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq \alpha_1(m)$, alors on a, pour tout $j = 0, 1, \dots, m+1$.

$$a_0^j \leq \max \{ \|y^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma^0)}, j = 0, 1, \dots, m+1 \} = \alpha_1^j(m). \quad (3.12)$$

Par contre, pour $n \geq 1$, en dérivant (3.4) j -fois, on obtient, pour tout $j = 1, \dots, m$,

$$a_n^{j+1} \leq c_1 + (mb_1^1 + b_1^2) \sum_{k=0}^{j-1} a_n^k + hd_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k,$$

où

$$c_1 = \max \left\{ \left\| g^{(j)} + \left(\int_{t-\tau}^0 k(t,s)\varphi(s)ds \right)^{(j)} \right\|_{L^\infty(\sigma^0)}, j = 0, 1, \dots, m \right\},$$

$$b_1^1 = \max \{ \binom{j-1-i}{l} \left\| \left[\delta_1^{(j)} k(t,t) \right]^{(j-1-i-l)} \right\|_{L^\infty(\sigma^0)}, j = 1, \dots, m; \\ i = 0, \dots, j-1; l = 0, \dots, j-1-i \},$$

$$b_1^2 = \max \left\{ \left\| \int_0^t |\delta_1^{(j)} k(t,s)| ds \right\|_{L^\infty(\sigma^0)}, j = 0, 1, \dots, m \right\},$$

et

$$d_1 = \max \left\{ \frac{1}{l!} \left\| \delta_1^{(j)} k(t,s)(s-v)^l \right\|_{L^\infty(\sigma^0 \times \sigma^0)}; j = 0, \dots, m; l = 0, \dots, m \right\},$$

ce qui implique que, pour tout $j \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_n^j &\leq c_1 + (mb_1 + b_1^2) \sum_{k=0}^{j-2} a_n^k + hd_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k \\ &\leq c_1 + \underbrace{(mb_1^1 + b_1^2)}_{b_1} \sum_{k=0}^{j-1} a_n^k + hd_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k \\ &\leq c_1 + b_1 a_n^0 + b_1 \sum_{k=1}^{j-1} a_n^k + hd_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Maintenant, pour chaque $n \geq 1$ fixé, on considère la suite $y_j = a_n^j$ pour $j = 1, 2, \dots, m+1$. Alors, d'après (3.13), la suite (y_j) satisfait pour tout $j = 2, \dots, m+1$

$$y_j \leq c_1 + b_1 a_n^0 + b_1 \sum_{k=1}^{j-1} y_k + h d_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k.$$

De plus, pour $j = 1$, on a de (3.4),

$$\begin{aligned} y_1 &= a_n^1 \leq c_1 + b_1^2 a_n^0 + h d_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k \\ &\leq c_1 + b_1 a_n^0 + h d_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 3.3.1, pour tout $j = 1, 2, \dots, m+1$,

$$\begin{aligned} y_j &\leq \underbrace{c_1 \exp(b_1 m)}_{c_2} + \underbrace{b_1 \exp(b_1 m)}_{b_2} a_n^0 + h \underbrace{d_1 \exp(b_1 m)}_{d_2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k \\ &\leq c_2 + b_2 a_n^0 + h d_2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m+1} a_i^k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considérez la séquence $z_n = \sum_{j=1}^{m+1} y_j = \sum_{j=1}^{m+1} a_n^j$ pour $n \geq 0$.

Alors, d'après (3.14), la suite (z_n) satisfait

$$\begin{aligned} z_n &\leq \underbrace{(m+1)c_2}_{c_3^1} + \underbrace{(m+1)b_2}_{b_3} a_n^0 + h \underbrace{(m+1)d_2}_{d_3} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m+1} a_i^k \\ &\leq c_3^1 + b_3 a_n^0 + h d_3 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 + h d_3 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m+1} a_i^k \\ &\leq c_3^1 + b_3 a_n^0 + h d_3 \sum_{i=0}^n a_i^0 + h d_3 \sum_{i=0}^{n-1} z_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De plus, à partir de (3.12), on obtient

$$z_0 \leq (m+2)\alpha_1^1(m) = c_3^2. \quad (3.16)$$

Soit $c_3 = \max(c_3^1, c_3^2)$. Alors, d'après (3.15) et (3.16), on a pour tout $n \geq 0$,

$$z_n \leq c_3 + b_3 a_n^0 + h d_3 \sum_{i=0}^n a_i^0 + h d_3 \sum_{i=0}^{n-1} z_i.$$

Alors, par le lemme 3.3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
z_n &\leq c_3 + b_3 a_n^0 + h d_3 \sum_{i=0}^n a_i^0 + \sum_{j=0}^{n-1} h d_3 \left(c_3 + b_3 a_j^0 + h d_3 \sum_{i=0}^j a_i^0 \right) \exp(\tau d_3) \\
&\leq \underbrace{c_3 (1 + \tau d_3 \exp(\tau d_3))}_{c_4} + (b_3 + h d_3) a_n^0 \\
&\quad + h \underbrace{(d_3 + d_3 b_3 \exp(\tau d_3) + \tau d_3^2 \exp(\tau d_3))}_{d_4} \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 \\
&\leq c_4 + \underbrace{(b_3 + \tau d_3)}_{b_4} a_n^0 + h d_4 \sum_{i=0}^n a_i^0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Par contre, en intégrant (3.4) de t_n^0 à $t \in \sigma_n^0$, on obtient

$$\begin{aligned}
a_n^0 &\leq |u_{n-1}^0(t_n^0)| + h c_1 + h b_1^3 a_n^0 + h^2 d_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_i^k \\
&\leq |u_{n-1}^0(t_n^0)| + h c_1 + h b_1 a_n^0 + h^2 d_1 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 + h^2 d_1 \sum_{i=0}^{n-1} z_i.
\end{aligned}$$

De plus, à partir de (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}
|u_{n-1}^0(t_n^0)| &\leq a_{n-1}^0 + h \sum_{j=0}^m a_{n-1}^j \\
&\leq a_{n-1}^0 + h z_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_n^0 \leq a_{n-1}^0 + h z_{n-1} + h c_1 + h b_1 a_n^0 + h^2 d_1 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 + h^2 d_1 \sum_{i=0}^{n-1} z_i.$$

En utilisant (3.17), on en déduit que

$$\begin{aligned}
a_n^0 &\leq a_{n-1}^0 + h \left(c_4 + b_4 a_{n-1}^0 + h d_4 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 \right) + h c_1 + h b_1 a_n^0 \\
&\quad + h^2 d_1 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 + h^2 d_1 \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_4 + b_4 a_i^0 + h d_4 \sum_{k=0}^{n-1} a_k^0 \right) \\
&\leq (1 + h b_4) a_{n-1}^0 + h \underbrace{(c_4 + c_1 + \tau d_1 c_4)}_{c_5} + h b_1 a_n^0 \\
&\quad + h^2 \underbrace{(d_4 + d_1 + d_1 b_4 + \tau d_1 d_4)}_{d_5} \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0.
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$(1 - hb_1)a_n^0 \leq (1 + hb_4)a_{n-1}^0 + hc_5 + h^2d_5 \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0.$$

Donc, pour tout $h \in [0, 1/b_1]$, on a

$$a_n^0 \leq \frac{1 + hb_4}{1 - hb_1} a_{n-1}^0 + \frac{h^2d_5}{1 - hb_1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 + \frac{hc_5}{1 - hb_1}.$$

Alors, par le lemme 3.3.3, on obtient pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} a_n^0 &\leq \frac{a_0^0}{R_2 - R_1} [(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] + \frac{hc_5}{(R_2 - R_1)(1 - hb_1)} [R_2^n - R_1^n] \\ &\leq \frac{\alpha_1^1(m)}{R_2 - R_1} [(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] + \frac{hc_5}{(R_2 - R_1)(1 - hb_1)} [R_2^n - R_1^n]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(1 + \frac{1 + hb_4 + h^2d_5}{1 - hb_1} - h \sqrt{\frac{(b_1 + b_4)^2 + h^2d_5^2 + 2d_5(1 + hb_4)}{(1 - hb_1)^2} + 2\frac{d_5}{1 - hb_1}} \right) / 2, \\ R_2 &= \left(1 + \frac{1 + hb_4 + h^2d_5}{1 - hb_1} + h \sqrt{\frac{(b_1 + b_4)^2 + h^2d_5^2 + 2d_5(1 + hb_4)}{(1 - hb_1)^2} + 2\frac{d_5}{1 - hb_1}} \right) / 2. \end{aligned}$$

Puisque $0 < R_1 \leq 1 \leq R_2$, alors pour tout $h \in [0, 1/b_1]$, on a

$$R_1^n \leq 1 \leq R_2^n \leq R_2^N = R_2^{\frac{\tau}{h}}, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

ce qui implique, d'après (3.18), que

$$a_n^0 \leq \alpha_1^1(m) \frac{(R_2 - 1)R_2^{\frac{\tau}{h}} + (1 - R_1)}{(R_2 - R_1)} + c_5 \frac{hR_2^{\frac{\tau}{h}}}{(R_2 - R_1)(1 - hb_1)}.$$

Alors, il existe $h_1 \in [0, \frac{1}{b_1}]$ et $\alpha_1^2(m) \geq 0$ tels que pour tout $h \in [0, h_1]$,

$$a_n^0 \leq \alpha_1^2(m), n = 0, 1, \dots, N-1,$$

ce qui implique, d'après (3.17), que pour tout $j = 1, 2, \dots, m+1$ et $n = 0, 1, \dots, N-1$,

$$a_n^j \leq z_n \leq c_4 + b_4\alpha_1^2(m) + d_4\alpha_1^2(m)\tau = \alpha_1^3(m).$$

Par conséquent, la première étape est terminée en définissant

$$\alpha_1(m) = \max(\alpha_1^2(m), \alpha_1^3(m)).$$

Deuxième cas : Il existe une constante positive $\alpha(m)$ telle que

$$\|\hat{u}_{n,p}^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} \leq \alpha(m) \text{ pour tout } n = 0, 1, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, m+1 \text{ et } p = 1, \dots, r-1.$$

Soient $a_{n,p}^j \|\hat{u}_{n,p}^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)}$ et $\xi_p = \max \{a_{i,p}^j, j = 1, 2, \dots, m+1, i = 0, 1, \dots, N-1\}$ pour $p = 0, 1, \dots, r-1$.

De manière similaire à la revendication 1, en différenciant (3.7) j -fois, nous obtenons pour tout $j = 1, 2, \dots, m+1$,

$$a_{0,p}^j \leq c_1 + b_1 \xi_{p-1} + d_1 \sum_{l=0}^{j-1} a_{0,p}^l,$$

où c_1, b_1, d_1 sont des nombres positifs.

Par contre, en intégrant (3.7) de t_0^p à $t \in \sigma_0^p$, on obtient

$$a_{0,p}^0 \leq c_2 + b_2 \xi_{p-1} + h d_2 a_{0,p}^0,$$

où c_2, b_2, d_2 sont des nombres positifs.

Donc, il existe $h_2 \in [0, h_1]$ et des nombres positifs c_3, b_3, d_3 tels que pour tout $h \in [0, h_2]$, on a

$$a_{0,p}^j \leq c_3 + b_3 \xi_{p-1} + d_3 \sum_{l=0}^{j-1} a_{0,p}^l,$$

pour tout $j \in \{0, 1, \dots, m+1\}$.

Alors, d'après le lemme 3.3.1, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, m+1\}$,

$$a_{0,p}^j \leq \underbrace{c_3 \exp(d_3(m+1))}_{c_4^1} + \underbrace{b_3 \exp(d_3(m+1))}_{b_4} \xi_{p-1}.$$

Ainsi, pour $c_4 = \max(\alpha_1(m), c_4^1)$ on obtient pour tout $p = 0, 1, \dots, r-1$, $j \in \{0, 1, \dots, m+1\}$,

$$a_{0,p}^j \leq c_4 + b_4 \xi_{p-1}. \quad (3.19)$$

Ensuite, en différenciant (3.10) j -fois, on obtient pour tout $n = 1, \dots, N-1$, et $j = 0, 1, \dots, m+1$,

$$a_{n,p}^j \leq c_5 + b_5 \xi_{p-1} + e_5 \sum_{l=0}^{j-1} a_{n,p}^l + d_5 h \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m+1} a_{i,p}^l,$$

où c_5, b_5, e_5, d_5 sont des nombres positifs.

Alors, d'après le lemme 3.3.1, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, m+1\}$,

$$\begin{aligned} a_{n,p}^j \leq & \underbrace{c_5 \exp(e_5(m+1))}_{c_6} + \underbrace{b_5 \exp(e_5(m+1))}_{b_6} \xi_{p-1} + \underbrace{e_5 \exp(e_5(m+1))}_{e_6} a_{n,p}^0 \\ & + \underbrace{d_5 \exp(e_5(m+1))}_{d_6} h \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m+1} a_{i,p}^l. \end{aligned}$$

Considérez la séquence $y_n = \sum_{j=0}^{m+1} a_{n,p}^j$, $n = 0, 1, \dots, N-1$; donc, par l'inégalité précitée, la suite (y_n) satisfait pour tout $n = 1, \dots, N-1$,

$$y_n \leq \underbrace{(m+1)c_6}_{c_7^1} + \underbrace{(m+1)b_6}_{b_7^1} \xi_{p-1} + \underbrace{(m+1)e_6}_{e_7} a_{n,p}^0 + \underbrace{(m+1)d_6}_{d_7} h \sum_{i=0}^n a_{i,p}^0 + \underbrace{(m+1)d_6}_{d_7} h \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \quad (3.20)$$

De plus, à partir de (3.19), on obtient

$$y_0 \leq \underbrace{(m+1)c_4}_{c_7^2} + \underbrace{(m+1)b_4}_{b_7^2} \xi_{p-1}. \quad (3.21)$$

Soient $c_7 = \max\{c_7^1, c_7^2\}$ et $b_7 = \max\{b_7^1, b_7^2\}$. Alors, à partir de (3.20) et (3.21), on obtient pour tout $n = 0, 1, \dots, N-1$,

$$y_n \leq c_7 + b_7 \xi_{p-1} + e_7 a_{n,p}^0 + d_7 h \sum_{i=0}^n a_{i,p}^0 + d_7 h \sum_{i=0}^{n-1} y_i.$$

Ainsi, d'après le lemme 3.3.2, on obtient

$$y_n \leq \underbrace{c_7(1 + \tau d_7 \exp(\tau d_7))}_{c_8} + \underbrace{b_7(1 + \tau d_7 \exp(\tau d_7))}_{b_8} \xi_{p-1} + \underbrace{(e_7 + \tau d_7)}_{e_8} a_{n,p}^0 + h \underbrace{(d_7 + d_7 e_7 \exp(\tau d_7) + \tau d_7^2 \exp(\tau d_7))}_{d_8} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^0. \quad (3.22)$$

D'autre part, en intégrant (3.10) de t_n^p à $t \in \sigma_n^p$, on obtient

$$\begin{aligned} a_{n,p}^0 &\leq |u_{n-1}^p(t_n^p)| + hc_9 + hb_9 \xi_{p-1} + he_9 a_{n,p}^0 + d_9 h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m a_{i,p}^l \\ &\leq |u_{n-1}^p(t_n^p)| + hc_9 + hb_9 \xi_{p-1} + he_9 a_{n,p}^0 + d_9 h^2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^0 + d_9 h^2 \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \end{aligned}$$

pour tout $n = 0, 1, \dots, N-1$, où c_9, b_9, e_9, d_9 , sont des nombres positifs.

De plus, à partir de (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} |u_{n-1}^p(t_n^p)| &\leq a_{n-1,p}^0 + h \sum_{j=0}^m a_{n-1,p}^j \\ &\leq a_{n-1,p}^0 + h y_{n-1}, \end{aligned}$$

alors

$$a_{n,p}^0 \leq a_{n-1,p}^0 + hy_{n-1} + hc_9 + hb_9\xi_{p-1} + he_9a_{n,p}^0 + d_9h^2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^0 + d_9h^2 \sum_{i=0}^{n-1} y_i,$$

ce qui implique, en utilisant (3.22), que

$$\begin{aligned} (1 - he_9)a_{n,p}^0 &\leq a_{n-1,p}^0 + h \left(c_8 + b_8\xi_{p-1} + e_8a_{n-1,p}^0 + hd_8 \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^0 \right) + hc_9 + hb_9\xi_{p-1} \\ &\quad + d_9h^2 \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^0 + d_9h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_8 + b_8\xi_{p-1} + e_8a_{i,p}^0 + hd_8 \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,p}^0 \right) \\ &\leq (1 + he_8)a_{n-1,p}^0 + h \underbrace{(c_8 + c_9 + \tau d_9c_8)}_{c_{10}} + h \underbrace{(b_8 + b_9 + \tau d_9b_8)}_{b_{10}} \xi_{p-1} \\ &\quad + h^2 \underbrace{(d_8 + d_9 + d_9e_8 + \tau d_9d_8)}_{d_{10}} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^0. \end{aligned}$$

Donc, il existe $h_3 \in [0, h_2]$ tel que pour tout $h \in [0, h_3]$, on a

$$a_{n,p}^0 \leq \frac{1 + he_8}{1 - he_9} a_{n-1,p}^0 + \frac{h(c_{10} + b_{10}\xi_{p-1})}{1 - he_9} + \frac{h^2 d_{10}}{1 - he_9} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^0.$$

Alors, par le lemme 3.3.3, on obtient pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$a_{n,p}^0 \leq \frac{a_{0,p}^0}{R_2 - R_1} [(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] + \frac{h(c_{10} + b_{10}\xi_{p-1})}{(R_2 - R_1)(1 - he_9)} [R_2^n - R_1^n],$$

où

$$R_1 = \left(1 + \frac{1 + he_8 + h^2 d_{10}}{1 - he_9} - h \sqrt{\frac{(e_8 + e_9)^2 + h^2 d_{10}^2 + 2d_{10}(1 + he_8)}{(1 - he_9)^2} + 2 \frac{d_{10}}{1 - hb_9}} \right) / 2,$$

$$R_2 = \left(1 + \frac{1 + he_8 + h^2 d_{10}}{1 - he_9} + h \sqrt{\frac{(e_8 + e_9)^2 + h^2 d_{10}^2 + 2d_{10}(1 + he_8)}{(1 - he_9)^2} + 2 \frac{d_{10}}{1 - hb_9}} \right) / 2.$$

Ainsi, comme dans (3.18), il existe $h_4 \in [0, h_3]$ et $\bar{R} > 0$ tels que pour tout $h \in [0, h_4]$, on a

$$a_{n,p}^0 \leq a_{0,p}^0 \bar{R} + (c_{10} + b_{10}\xi_{p-1}) \bar{R},$$

ce qui implique, en utilisant (3.19), que pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ et $p \in \{0, 1, \dots, r-1\}$,

$$a_{n,p}^0 \leq \underbrace{(c_4 + c_{10})}_{c_{11}} \bar{R} + \underbrace{(b_4 + b_{10})}_{b_{11}} \bar{R} \xi_{p-1}.$$

Alors, à partir de (3.22), on obtient pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$, $j \in \{1, \dots, m + 1\}$ et $p \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$,

$$a_{n,p}^j \leq y_n \leq \underbrace{(c_8 + e_8 c_{11} + \tau d_8 c_{11})}_{c_{12}^1} + \underbrace{(b_8 + e_8 b_{11} + \tau d_8 b_{11})}_{b_{12}^1} \xi_{p-1}.$$

Soient $c_{12} = \max(c_{11}, c_{12}^1)$ et $b_{12} = \max(b_{11}, b_{12}^1)$.
On en déduit que, pour tout $p \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$,

$$\begin{aligned} \xi_p &\leq c_{12} + b_{12} \xi_{p-1} \\ &\leq c_{12} + b_{12} \sum_{i=0}^{p-1} \xi_i. \end{aligned}$$

Alors, par le lemme 3.3.1, on obtient pour tout $p \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$, $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$, et $j \in \{0, 1, \dots, m + 1\}$,

$$a_{n,p}^j \leq \xi_p \leq c_{12} \exp(rb_{12}) = \alpha(m).$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.3.4. □

Le théorème suivant décrit l'ordre de convergence de la méthode.

Théorème 3.3.1.

Soient g, k , et φ m -fois continûment différentiables sur leurs domaines respectifs. Alors, (3.2)-(3.11) définissent une approximation unique $u \in S_m^{(0)}\Pi_{(N)}$, et la fonction d'erreur résultante $e := y - u$ satisfait

$$\|e\|_{L^\infty(I)} \leq Ch^m$$

à condition que h soit suffisamment petit, où C est une constante finie indépendante de h .

Démonstration.

La preuve se décompose en deux étapes.

Première cas : Il existe une constante a indépendante de h telle que

$$\|e^0\|_{L^\infty(\sigma^0)} \leq ah^m, \text{ où l'erreur } e^0 = e|_{\sigma^0} \text{ qui est défini sur } \sigma_n^0 \text{ par}$$

$$e^0(t) = e_n^0(t) = |y(t) - u_n^0(t)| \text{ pour tous } n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}.$$

Soit $t \in \sigma_0^0$. Alors, on a du Lemme 3.3.4, pour h suffisamment petit,

$$|e_0^0(t)| = |y(t) - u_0^0(t)| \leq \frac{\|y^{(m+1)}\|_{L^\infty(\sigma_0^0)}}{(m+1)!} h^{m+1} \leq \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{m+1}.$$

En général pour $n \in 1, 2, \dots, N - 1$ et $t \in \sigma_n^0$, on a d'après (3.4),

$$y'(t) - \hat{u}'_{n,0}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^0}^{t_{i+1}^0} k(t, s) (y(s) - u_i^0(s)) ds + \int_{t_n^0}^t k(t, s) (y(s) - \hat{u}_{n,0}(s)) ds.$$

Cela implique que

$$\|y' - \hat{u}'_{n,0}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq h k_0 \sum_{i=0}^{n-1} \|e_i^0\|_{L^\infty(\sigma_i^0)} + h k_0 \|y - \hat{u}_{n,0}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)}, \quad (3.23)$$

où $k_0 = \|k\|_{L^\infty(\sigma^0 \times \sigma^0)}$.

D'autre part, pour $t \in \sigma_n^0$,

$$\begin{aligned} y(t) - \hat{u}_{n,0}(t) &= y(t_n^0) - \hat{u}_{n,0}(t_n^0) + \int_{t_n^0}^t (y'(s) - \hat{u}'_{n,0}(s)) ds \\ &= e_{n-1}^0(t_n^0) + \int_{t_n^0}^t (y'(s) - \hat{u}'_{n,0}(s)) ds. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|y - \hat{u}_{n,0}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq \|e_{n-1}^0\|_{L^\infty(\sigma_{n-1}^0)} + h \|y' - \hat{u}'_{n,0}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)}.$$

Ainsi, en utilisant (3.23), on obtient

$$\|y - \hat{u}_{n,0}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq \frac{1}{1 - h^2 k_0} \|e_{n-1}^0\|_{L^\infty(\sigma_{n-1}^0)} + \frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} \sum_{i=0}^{n-1} \|e_i^0\|_{L^\infty(\sigma_i^0)}.$$

Par conséquent, d'après le lemme 3.3.4,

$$\begin{aligned} \|e_n^0\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} &\leq \|y - \hat{u}_{n,0}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} + \|\hat{u}_{n,0} - u_n^0\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \\ &\leq \|y - \hat{u}_{n,0}\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \|e_n^0\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} &\leq \frac{1}{1 - h^2 k_0} \|e_{n-1}^0\|_{L^\infty(\sigma_{n-1}^0)} + \frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} \sum_{i=0}^{n-1} \|e_i^0\|_{L^\infty(\sigma_i^0)} \\ &\quad + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 3.3.3, pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned} \|e_n^0\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} &\leq \frac{\|e_0^0\|_{L^\infty(\sigma_0^0)}}{R_2 - R_1} [(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{(m+1)} [R_2^n - R_1^n] \\ &\leq \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{(m+1)} \frac{[(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] + [R_2^n - R_1^n]}{R_2 - R_1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(1 + \frac{1 + h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} - \sqrt{2 \left(\frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} \right)^2 + 2 \frac{h^2 k_0}{(1 - h^2 k_0)^2} + 2 \frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0}} \right) / 2 \\ &= \frac{1 - h\sqrt{k_0}}{1 - h^2 k_0}, \\ R_2 &= \left(1 + \frac{1 + h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} + \sqrt{2 \left(\frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} \right)^2 + 2 \frac{h^2 k_0}{(1 - h^2 k_0)^2} + 2 \frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0}} \right) / 2 \\ &= \frac{1 + h\sqrt{k_0}}{1 - h^2 k_0}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Parce que $0 < R_1 \leq 1 \leq R_2$, alors

$$R_1^n \leq 1 \leq R_2^n \leq R_2^N = R_2^{\frac{\tau}{h}}, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

ce qui implique, d'après (3.24), que

$$\|e_n^0\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^m (1 - h^2 k_0) \frac{[(R_2 - 1)R_2^{\frac{\tau}{h}} + (1 - R_1)] + R_2^{\frac{\tau}{h}}}{2\sqrt{k_0}}.$$

On en déduit qu'il existe \tilde{R}_1 et h_1 tels que pour tout $h \in [0, h_1]$.

$$\|e_n^0\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq \tilde{R}_1 h^m.$$

Ainsi,

$$\|e^0\|_{L^\infty(\sigma^0)} = \max_{n=0, \dots, N-1} \|e_n^0\|_{L^\infty(\sigma_n^0)} \leq \tilde{R}_1 h^m. \quad (3.26)$$

Par conséquent, la première étape est complétée en prenant $a = \tilde{R}_1$.

Deuxième cas : Il existe une constante C indépendante de h telle que $\|e\|_{L^\infty(I)} \leq Ch^m$. Définir l'erreur $e^p(t)$ sur σ^p par $e^p(t) = y(t) - u^p(t)$ et sur σ_n^p

par $e^p(t) = e_n^p(t) = y(t) - u_n^p(t)$ pour tous $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,
 $p \in \{0, 1, \dots, r-1\}$.

D'abord, soit $t \in \sigma_0^p$. Alors, on a d'après (3.7),

$$y'(t) - \hat{u}'_{0,p}(t) = \int_{t-\tau}^{t_0^p} k(t, s)e^{p-1}(s)ds + \int_{t_0^p}^t k(t, s)(y(s) - \hat{u}_{0,p}(s))ds$$

tel que $y(t_0^p) - \hat{u}_{0,p}(t_0^p) = y(t_0^p) - u^{p-1}(t_0^p) = e^{p-1}(t_0^p)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|y - \hat{u}_{0,p}\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} &\leq \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + h\|y' - \hat{u}'_{0,p}\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} \\ &\leq \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + hk_0(\tau\|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + h\|y - \hat{u}_{0,p}\|_{L^\infty(\sigma_0^p)}). \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\|y - \hat{u}_{0,p}\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} \leq \frac{1 + h\tau k_0}{1 - h^2 k_0} \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})}.$$

Par conséquent, d'après le lemme 3.3.4,

$$\begin{aligned} \|e_0^p\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} &\leq \|y - \hat{u}_{0,p}\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} + \|\hat{u}_{0,p} - u_0^p\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} \\ &\leq \|y - \hat{u}_{0,p}\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{m+1}. \end{aligned}$$

Puis,

$$\|e_0^p\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} \leq \frac{1 + h\tau k_0}{1 - h^2 k_0} \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{m+1}. \quad (3.27)$$

Ensuite, soit $t \in \sigma_n^p$ pour $n \in \{1, 2, \dots, n\}$. Alors, on a de (3.10),

$$\begin{aligned} y'(t) - \hat{u}'_{n,p}(t) &= \int_{t-\tau}^{t_0^p} k(t, s)e^{p-1}(s)ds + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^p}^{t_{i+1}^p} k(t, s)e_i^p(s)ds \\ &\quad + \int_{t_n^p}^t k(t, s)(y(s) - \hat{u}_{n,p}(s))ds \end{aligned}$$

tel que $y(t_n^p) - \hat{u}_{n,p}(t_n^p) = y(t_n^p) - u_{n-1}^p(t_n^p) = e_{n-1}^p(t_n^p)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|y - \hat{u}_{n,p}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} &\leq \|e_{n-1}^p\|_{L^\infty(\sigma_{n-1}^p)} + h\|y' - \hat{u}'_{n,p}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} \\ &\leq \|e_{n-1}^p\|_{L^\infty(\sigma_{n-1}^p)} + hk_0(\tau\|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + h\|y - \hat{u}_{n,p}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)}) \\ &\quad + h \sum_{i=0}^{n-1} \|e_i^p\|_{L^\infty(\sigma_i^p)}. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \|y - \hat{u}_{n,p}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} &\leq \frac{1}{1 - h^2 k_0} \|e_{n-1}^p\|_{L^\infty(\sigma_{n-1}^p)} + \frac{h k_0 \tau}{1 - h^2 k_0} \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} \\ &\quad + \frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} \sum_{i=0}^{n-1} \|e_i^p\|_{L^\infty(\sigma_i^p)}. \end{aligned}$$

Alors, d'après le lemme 3.3.4,

$$\begin{aligned} \|e_n^p\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} &\leq \|y - \hat{u}_{n,p}\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} + \|\hat{u}_{n,p} - u_n^p\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} \\ &\leq \frac{1}{1 - h^2 k_0} \|e_{n-1}^p\|_{L^\infty(\sigma_{n-1}^p)} + \frac{h k_0 \tau}{1 - h^2 k_0} \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} \\ &\quad + \frac{h^2 k_0}{1 - h^2 k_0} \sum_{i=0}^{n-1} \|e_i^p\|_{L^\infty(\sigma_i^p)} + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{m+1}. \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 3.3.3 que, pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$,

$$\begin{aligned} \|e_n^p\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} &\leq \frac{\|e_0^p\|_{L^\infty(\sigma_0^p)}}{R_2 - R_1} [(R_2 - 1)R_2^n + (1 - R_1)R_1^n] \\ &\quad + \frac{\frac{h k_0 \tau}{1 - h^2 k_0} \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{m+1}}{R_2 - R_1} [R_2^n - R_1^n] \\ &\leq \|e_0^p\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} \frac{(R_2 - 1)R_2^{\frac{\tau}{h}} + (1 - R_1)}{R_2 - R_1} \\ &\quad + \frac{k_0 \tau \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + (1 - h^2 k_0) \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^m}{2\sqrt{k_0}} R_2^{\frac{\tau}{h}}, \end{aligned}$$

où R_1 et R_2 sont définis par (3.25).

Alors, il existe \tilde{R}_2 et h_2 tels que pour tout $h \in [0, h_2]$,

$$\|e_n^p\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} \leq (\|e_0^p\|_{L^\infty(\sigma_0^p)} + \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + h^m) \tilde{R}_2,$$

ce qui implique, par (3.27), que pour tout $h \leq h_2$,

$$\begin{aligned} \|e_n^p\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} &\leq \left(\left(\frac{1 + h k_0 \tau}{1 - h^2 k_0} + 1 \right) \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + \frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h^{m+1} + h^m \right) \tilde{R}_2 \\ &\leq \left(\left(\frac{1 + h_2 k_0 \tau}{1 - h_2^2 k_0} + 1 \right) \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + \left(\frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h_2 + 1 \right) h^m \right) \tilde{R}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\tilde{R}_3 = \max \left\{ \left(\frac{1 + h_2 k_0 \tau}{1 - h_2^2 k_0} + 1 \right) \tilde{R}_2, \left(\frac{\alpha(m)}{(m+1)!} h_2 + 1 \right) \tilde{R}_2 \right\}$, on obtient

$$\|e_n^p\|_{L^\infty(\sigma_n^p)} \leq \tilde{R}_3 \|e^{p-1}\|_{L^\infty(\sigma^{p-1})} + \tilde{R}_3 h^m.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \|e^p\|_{L^\infty(\sigma^p)} &\leq \tilde{R}_3 \sum_{i=0}^{p-1} \|e^i\|_{L^\infty(\sigma^i)} + \tilde{R}_3 h^m \\ &\leq \tilde{R}_3 \sum_{i=0}^{p-1} \|e^i\|_{L^\infty(\sigma^i)} + \tilde{R}_4 h^m, \end{aligned} \tag{3.28}$$

où $\tilde{R}_4 = \max\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_3\}$.

Alors, à partir de (3.26) et (3.28) et en utilisant le lemme 3.3.1, on obtient

$$\|e^p\|_{L^\infty(\sigma^p)} \leq \tilde{R}_4 h^m \exp(r \tilde{R}_3). \tag{3.29}$$

Ainsi, la preuve est complétée en prenant $C = \tilde{R}_4 \exp(r \tilde{R}_3)$.

□

3.3.3 Exemples numériques

Pour appuyer l'analyse de convergence, nous donnons les deux exemples suivants avec $\tau = 1$. Toutes les solutions exactes y sont déjà connues. Dans chaque exemple, nous calculons l'erreur pour différentes valeurs de N et m entre y et la solution de collocation de Taylor u définie par (3.2)-(3.11).

Exemple 3.3.1.

Considérons l'équation intégro-différentielle de retard

$$y'(t) = g(t) + \int_{t-1}^t k(t, s)y(s)ds, \quad t \in [0, 3], \tag{3.30}$$

avec $\varphi(t) = \sin(t) + 1$ pour $t \in [-0.5, 0]$, $k(t, s) = \cos(t + s + 1) + 2$ et g est choisi de sorte que la solution exacte soit $y(t) = \sin(t) + 1$.

Les erreurs absolues pour $(m, N) \in \{(4, 4), (5, 5), (7, 7), (8, 8)\}$ à $t = 0, 0.5, \dots, 3$ sont présentées dans Tableau 1. La figure 3.1(a) représente les solutions approximatives et exactes pour $m = N = 5$, et la figure 3.1(b) représente les erreurs maximales

$$e_{(m, N)} = \max \{|y(t) - u(t)|, t = 0, 0.5, \dots, 3\}$$

avec $(m, N) = (4, 4), (5, 5), (7, 7), (8, 8)$.

Exemple 3.3.2.

Considérons l'équation intégral-différentielle de retard

$$y'(t) = g(t) + \int_{t-1}^t k(t,s)y(t)ds, \quad t \in [0,6], \quad (3.31)$$

avec $\varphi(t) = \cos(t) \exp(-t)$ pour $t \in [-1,0]$, $k(t,s) = (t-s) \exp(t-s)$, et g est choisi de sorte que la solution exacte soit $y(t) = \cos(t) \exp(-t)$.

Tableau 1 : Erreurs absolues pour la solution

t	$m = 4, N = 4$	$m = 5, N = 5$	$m = 7, N = 7$	$m = 8, N = 8$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.104×10^{-5}	0.1×10^{-8}	0.1×10^{-8}	0.1×10^{-9}
1.0	0.213×10^{-5}	0.7×10^{-8}	0.1×10^{-8}	0.111×10^{-8}
1.5	0.303×10^{-5}	0.13×10^{-7}	0.1×10^{-8}	0.9×10^{-9}
2.0	0.412×10^{-5}	0.26×10^{-7}	0.3×10^{-8}	0.217×10^{-8}
2.5	0.619×10^{-5}	0.47×10^{-7}	0.9×10^{-8}	0.6×10^{-9}
3.0	0.1×10^{-4}	0.89×10^{-7}	0.15×10^{-7}	0.3×10^{-9}

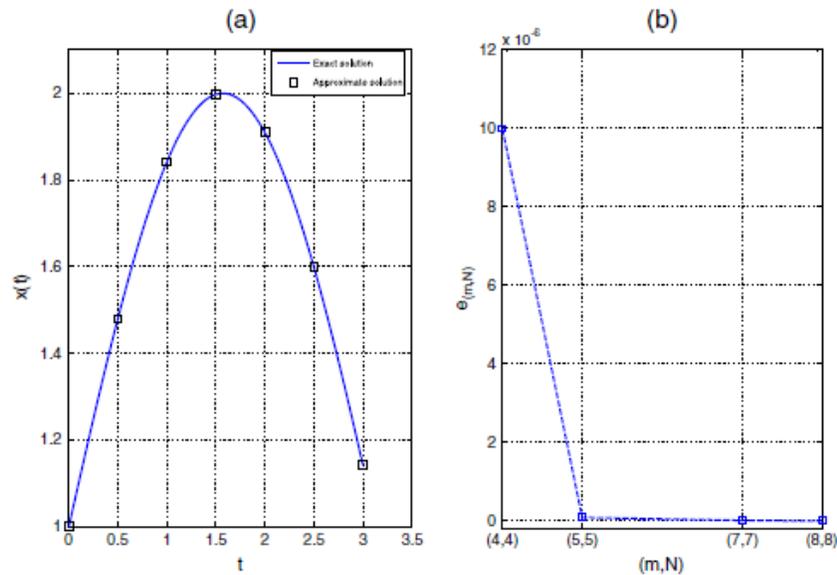


FIGURE 3.1 – Résultats numériques pour l'exemple 3.3.1

Tableau II : Erreurs absolues pour la solution

t	$m = 5, N = 5$	$m = 6, N = 6$	$m = 8, N = 8$	$m = 9, N = 9$
0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.805×10^{-6}	0.143×10^{-7}	0.253×10^{-9}	0.535×10^{-10}
2	0.215×10^{-5}	0.208×10^{-7}	0.592×10^{-9}	0.197×10^{-9}
3	0.418×10^{-5}	0.363×10^{-7}	0.123×10^{-8}	0.98×10^{-10}
4	0.788×10^{-5}	0.686×10^{-7}	0.208×10^{-8}	0.598×10^{-9}
5	0.148×10^{-4}	0.130×10^{-6}	0.402×10^{-8}	0.113×10^{-8}
6	0.281×10^{-4}	0.246×10^{-6}	0.764×10^{-8}	0.214×10^{-8}

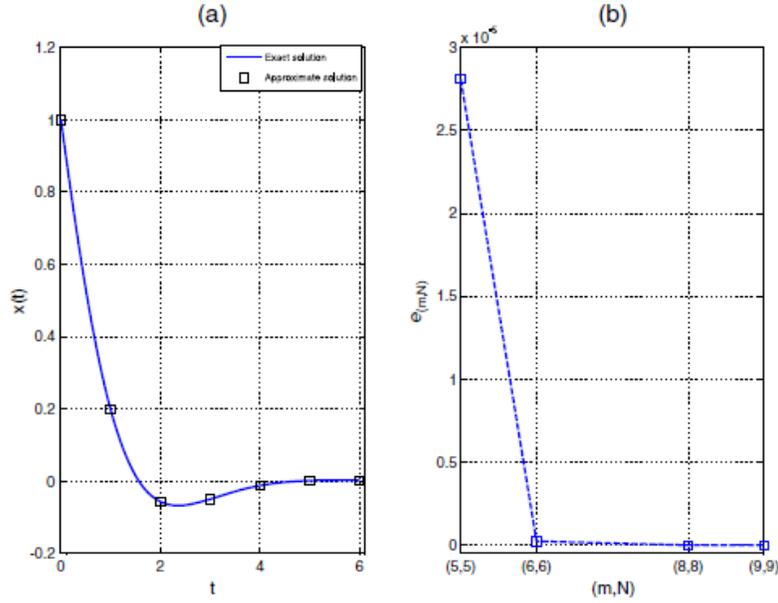


FIGURE 3.2 – Résultats numériques pour l'exemple 3.3.2

Les erreurs absolues pour $(m, N) \in \{(5, 5), (6, 6), (8, 8), (9, 9)\}$ à $t = 0, 1, \dots, 6$ sont présentées dans le tableau II. La figure 3.2(a) représente les solutions approximatives et exactes pour $m = N = 6$, et la figure 3.2(b) représente les erreurs maximales

$$e_{(m,N)} = \max \{|y(t) - u(t)|, t = 0, 1, \dots, 6\}$$

avec $(m, N) = (5, 5), (6, 6), (8, 8), (9, 9)$.

Les résultats de ces exemples confirment les résultats théoriques ; de plus, l'erreur absolue diminue à mesure que N et m augmentent (voir, par exemple, les colonnes 2 et 3 des tableaux I et II).

Les figures 3.1(b) et 3.2(b) indiquent que lorsque N et m augmentent, les erreurs diminuent rapidement, et d'après les figures 3.1(a) et 3.2(a), on observe que la solution numérique ne peut être distinguée de la solution exacte pour grandes valeurs de m et N .

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude théorique et numérique pour certaines classe d'équations différentielles fonctionnelles (EDF) ou intégro-différentielles fonctionnelles (EIDF). plus précisément, les équations différentielles fonctionnelles neutres, les équations différentielles fonctionnelles à retard constant et équations différentielles fonctionnelles dépendant de l'état.

Dans l'étude théorique, on présente quelques notions théorique relative à l'existence et l'unicité de solution et pour l'étude numérique, nous avons utilisé une méthode de collocation basée sur les polynômes de Taylor pour construire la solution numérique de ce type des équations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Agarwal.R.P, *Difference Equations and Inequalities : Theory, Methods, and Applications*.Second edition. Marcel Dekker, Inc. : New York, (2000).
- [2] Akyüz-Dascio.A - glu , Sezer.M *A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations in the most general form*. International Journal of Computer Mathematics 2007 ; 84(4) 527-539.
- [3] Bellour.A and Bousselsal.M *Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method*.Meth. Appl. Sci. 2014, 37 1491-1506,2012-2013.
- [4] Breda.D, Maset.S and Vermiglio.R, *Pseudospectral differencing methods for characteristic roots of delay differential equations*. SIAM Journal on Scientific Computing, 27(2) (2005),482-495.
- [5] Brunner.H, *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*, Cambridge university press, Cambridge, (2004).
- [6] Darania.P , Ivaz K. *Numerical solution of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations*. Computers and Mathematics with Applications 2008 ; 56(9) :2197-2209.
- [7] El-Hawary.H, El-ShamiK.A, *Spline collocation methods for solving second order neutral delay differential equations*. Int. J. Open Problems Compt. Math. 2(4), (2009) 536-545.
- [8] Ghosh.U, Chowdhury.S and Khan.D.K, *Mathematical modelling of epidemiology in presence of vaccination and delay*. Comput. Sci. Inform. Technol. 3 (2013), 91-98.
- [9] Hairer.E, Lubich.C and Norsett.SP, *Order of convergence of one-step methods for Volterra integral equations of the second kind*, SIAM J. Numer. Anal. 20 (1983), 569-579.
- [10] Jack K. Hale, Sjoerd M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*.Volume 99, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 1993.

- [11] Jator.S.N, J. Li, *A self starting linear multistep method for a direct solution of the general second order initial value problems*. Intern J. Comp. Math. 86(5), (2009) 827-836.
- [12] Kuang K. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press : San Diego, 1993.
- [13] Laib.H, Bellour.A and Bousselsal.A, *Numerical solution of high-order linear Volterra integro-differential equations by using Taylor collocation method*. International Journal of Computer Mathematics, 96(5) (2019), 1066-1085.
- [14] Laib.H, BELLOUR.A and BOULMERKA.A *Taylor collocation method for Solving High order differential equation and delay differential equation*.164-173,CMES, TURKEY,2021.
- [15] Liu.Z, Magal.P, O. Seydi, and G. Webb, *A COVID-19 epidemic model with latency period*, *Infect. Dis. Model.* 5 (2020), 323-337.
- [16] Mecene.R *Les Equations différentielles à retard dépendant de l'état*. mémoire de master ,Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent,2018.
- [17] Saoudi.I *Résolution numériques d'équations intégro-différentielles de fredholm*. mémoire de master ,Université Mohamed Khider,Biskra,2020.
- [18] Wu S, Gan. S. *Errors of linearmultistep methods for singularly perturbed Volterra delay integro-differential equations*. Mathematics and Computers inSimulation 2009 ; 79 :3148-3159.
- [19] Yahiaoui.M*Les Equations différentielles à retard dépendant de l'état*. mémoirede magister en mathématiques,Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen,2013.
- [20] Yalçınba.s *Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations*. Applied Mathematics and Computation 2002 ; 127 : 195-206.