الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
AbdElhafidBoussoufMila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques appliquées

Méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire-quadratique

Préparé par :

- Leknouche Houda
- Belbedroune Fadia

Soutenue devant le jury

BOUFELGHA Ibrahim	MAA	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Président
AZI Mourad	MCB	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
BAZENIAR Abd Alghafeur	MCB	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Examinateur
RUIBEH Khawla	MAB	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire : 2021/2022

DÉDICACE

A mes chers parents Ahmed Leknouche et Fatma Kadja.
Qui m'ont fourni les meilleures conditions pour terminer mes études, en témoignage de grande amour, tendresse et encouragement. Que dieu m'offre la chance d'être à la hauteur de leurs attentes.

Vous avez guidé mes premiers pas, vous m'avez toujours servi de modèle et vous rester toute ma vie.

Je vous dédie ce modeste travail qui n'est d'autre que le fruit de vos nobles sacrifices.

A mes chers frères , Mes chères soeurs .

Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité et pour la tendre affectation qu'ils m'ont toujours témoigné. A tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom leknouche, qui à était ma beaucoup encouragé.

A tous mes amies et collègues Amel , Ilham , chahra, Djawharra, Selwa pours leurs soutiens moraux.

Mon binôme fadia qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail.

A tous mes collégues de math.

A tous mes collégues de l'université.

Je dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur, de santé et de réussit.

HOUDA

DÉDICACE

A Mon père, qui est toujours disponible pour nous, et prêt à nous aider. Je lui confirme mon attachement et mon profond respect.
A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non âmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse :Ma mère.

A ma chére soeur, qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études.

A mon adorable Petite soeur qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour tout la famille.

A Ma famille, mes proches et à ceux qui me donnent de la l'amour et de la vivacité.

A touts Mes amis mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès .

Mon binôme Houda qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail.

A tous mes collègues de math.

A tous ceux que j'aime .

Fadia

REMERCIEMENT

Nous remercions notre dieu qui nous a donnée le courage et la volonté de poursuivre nos études, ainsi que nos parents,que ont sacrifié leur vie pour notre réussite.

Nous tenant remercier sincérement Dr Azi Mourad, qui en tant que Directeur de mémoire, se est toujours montrés à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, laide et le temps qu'ils ont bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nos remerciements s'adressent aussi aux Membres de jury pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail.

Nous remercions tous la famille, tous les amis pour leurs encouragement.

Nous présentons notre vif remerciement à ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à l 'élaboration de ce travail.

Nos remerciements les plus sincères à tous les enseignants et administrateurs de l'institut des science et de la technologie.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction générale

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener un système d'un état initial à un certain état final en respectant certains contraintes. Cette théorie est appliquée dans de nombreux domaines des sciences, notamment l'ingénierie, la physique, la biologie, l'économie et la finance. De point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. La théorie du contrôle optimal est un domaine des mathématiques appliquées, développé de façon à contrôler les systèmes dynamique d'une manière optimal.

Plusieurs méthodes numérique performantes de résolution des problèmes de contrôle optimal ont vu le jour dans les années 1980, parmi ces méthodes, on distingue la méthode développée pa R.Gabasov et Kirillova, qui consiste comme tout méthode numérique en optimisation, à faire le passage d'une solution réalisable à une autre tout en améliorant la qualité de la solution.

Notre mémoire est organisé de la manière suivant :
Dans le premier chapitre, nous exposons la théorie de contrôle optimal où nous présentons certains éléments de base de cette théorie, en portant un intérêt particulier aux condition d'optimalité d'un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes.
Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de pontriaguine, formuler par L .S. pontrigiune en 1956 qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de caractériser les trajectoires optimales dans certains cas.
Dans le second chapitre, nous présentons un algorithme de résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire avec des contraintes d'inégalité, l'algorithme de résolution

se base sur trois procédures essentielles : changement de commande, changement de support et procédure finale.
Le dernier chapitre est consacré à la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire quadratique avec commande vectorielle, l'idée principale de cette algorithme consiste à trouver la solution optimale en trois actions : changement de contrôle, changement de support et procédure finale.

Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion générale et une bibliographie.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION À LA THÉORIE DU CONTRÔLE OPTIMAL

Introduction

La théorie du contrôle optimal permet d'amener un système dynamique d'un état initial donné à un certain état final, tout en optimisant certains critères.

Historiquement, la théorie du contrôle est liée au calcul des variations, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, elle a vue une autre dimension dans les années 50 après l'apparition du principe du maximum de pontriaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales pour certains cas.

1.1 Théorie de contrôle

1.1.1 Formulation mathématique d'un problème de contrôle d'optimal

La partie la plus importante dons la résolution de tout problème pratique est le processus de modélisation, qui exige une description mathématique suffisamment réaliste, simple et la plus fidèle possible à la situation réelle, qu'elle soit physique, économique ou autre.
La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôle, avec des contraintes physiques à imposer au système et la détermination du critère de performance à optimiser (objectif du contrôle).

La théorie du contrôle s'intéresse à prédire la réponse du système à une entrée et à expliquer l'influence du contrôle sur la dynamique du système.

1.1.2 Système de contrôle

Considérons un système différentiel explicite de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = f(x(t), t), \\ x(0) = x^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

Dont l'état est décrit par un vecteur $x(.) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ dit variable d'état, x^0 étant l'état initial de cette variable d'état dépend de la variable réelle $t \in [0, t^*]$ et vérifie des relations (souvent différentielles) appelées équations d'états, f étant une fonction vectorielle de n composantes $f_i, i = \overline{1, n}$ pouvant être linéaire ou non linéaire.
Généralement, on souhaite agir sur le système (1.1). de façon à atteindre une cible ou un objectif donné. C'est pour cela que nous modifions le système (1.1) en introduisant une fonction (paramètre) $u(.) \in \mathbb{R}^{\mathbf{r}}$ qu'on appelle contrôle(commandes), qui est une fonction localement intégrable, définie sur $[0, t^*]$. Ainsi, nous obtenons le système de contrôle explicite que peut être caractérisé par un ensemble d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), x(0) = x^0, x \in R^n, u \in R^r. \tag{1.2}$$

Nous supposons que $f : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \times \mathbb{R}^{\mathbf{r}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy de sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité.

Stratégie de contrôle d'un système dynamique

Pour contrôler un système dynamique, on distingue deux types de Stratégies :

• Stratégie en boucle ouverte [1]

La stratégie en boucle ouverte consiste à chercher un contrôle admissible et qui ne dépend pas de l'état de système. Cette stratégie est schématisée par la figure suivante :

$$\xrightarrow{\text{entrée } u} \boxed{\dot{x} = f(x, u)} \xrightarrow{\text{sortie } x}$$

FIGURE 1.1 – Commande en boucle ouverte

• Stratégie en boucle fermée [1]

Considérons un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôles. Dons la stratégie en boucle fermée, la loi du contrôle u est déterminée en fonction du temps mais aussi de l'état x. Autrement dit, l'état du système est pris en compte à chaque instant afin de détermine(en temp réel) le contrôle.est alors appelé feedback. Cette stratégie peut se résumer par le schéma suivant :

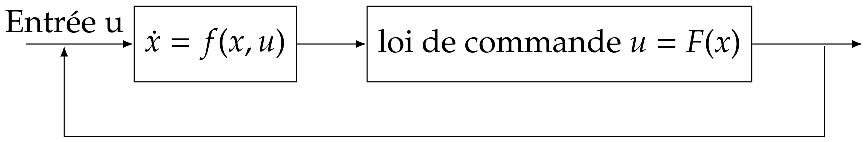

FIGURE 1.2 – Commande en boucle fermée

1.1.3 Classe des commandes admissible

Généralement, les commandes admissibles peuvent être non borné, borné ou de type bang-bang.

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les commandes $u_j(t)$, $1 \leq j \leq r$, par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

Commande bang-bang

Un commande $u \in \mathbb{R}^r$ est appelé contrôle bang-bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, ..., m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande bang-bang est une commande qui bascule brusquement entre deux valeurs et qui possède au moins un instant de commutation.

1.1.4 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle. Avant d'aborder cette notion, nous rappelons tout d'abord la définition de la trajectoire .

Définition 1.1.1. *(trajectoire)*
On appelle trajectoire du système (1.2) *toute fonction* $t \longrightarrow (x(t))$ *que satisfait sur un intervalle non vide T de R les équation* (1.2) *[1].*

Définition 1.1.2. *(Contrôlabilité au sens de Kalman)*
Le système (1.2) *est complètement au contrôlable si pour deux points quelconques* x^0 *et* x^* *de* $\mathbb{R}^n$*, on peut trouver un instant fini* t^* *est une commande admissible* $(u(t))$ *telle que l'état* $x(t)$ *du système satisfait la condition* $x(0) = x^0$ *et* $x(t^*) = x^*$.
Les problèmes linéaire de contrôle ont été étudiés dons la littérature d'une manière très détaillée, mais l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez développée comme dans le cas linéaire. Pour cela, on se concentre beaucoup plus dans cette section sur la contrôlabilité des systèmes linéaires définis par une équation différentielle linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x^0, x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, t^*]. \tag{1.3}$$

Contrôlabilité des systèmes linéaires stationnaires

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante explicite de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 1.1.1.
Le système stationnaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$, *est contrôlable en temps* t^* *si et seulement si :*

$$rangC = rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n.$$

La matrice C d'ordre $n \times rn$ *est appelée matrice de contrôlabilité de Kalman, et la condition* $rangC = n$ *est appelée condition de Kalman [1].*

Contrôlabilité des systèmes linéaires non-stationnaires

Théorème 1.1.2. *Considérons le système :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x^0, \tag{1.4}$$

où les applications A, B, r *sont supposées* $\mathbb{C}^\infty$ *sur* $[0, t^*]$.
Définissons par récurrence :

$$B_0(t) = B(t) \text{ et } B_{k+1}(t) = A(t)B_k(t) - \dot{B}_k(t).$$

1. *S'il existe un instant* $t \in [0, t^*]$ *tel que :* $rangC = [B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}] = n$, *alors le système de contrôle* (1.4) *est contrôlable sur* $[0, t^*]$.

2. *Si de plus les applications A,B,r sont analytiques sur* $[0,t^*]$*, alors le système* (1.4) *est contrôlable si et seulement si* $\forall t \in [0,t^*], rangC = [B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-1}] = n.$

1.1.5 Contrôlabilité des systèmes dynamiques non linéaires

Se prononcer sur la contrôlabilité des systèmes non linéaires reste jusqu'à présent une tache très difficile. Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé, partant du fait que la contrôlabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale. La non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité du système non linéaire. Considérons un système de contrôle non linéaire suivant [2] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Théorème 1.1.3. *Considérons le système* (1.5) *avec* $f(x^0, u^0) = 0$ *.*
Notons

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0).$$

Si

$$rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n,$$

alors le système (1.5) *est localement contrôlable en* x^0*.*

1.2 Problème de contrôle optimal

Considérons le système dynamique suivant [1] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x^0, t \in [0, t^*], \\ u \in U, \end{cases} \tag{1.6}$$

où U est un compact de $\mathbb{R}^r$.
Lors de la formulation d'un problème de contrôle optimal, l'objectif est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état désirable.
En d'autre terme, le problème de contrôle optimal à pour but d'amener le système d'un

état initial donné à un certain état final, tout en optimisant un critère de qualité.
Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule :

$$\min_{u\in U,t^*} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt. \tag{1.7}$$

Où :
$S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x(t^*)$ et t^* peuvent être libre ou fixés.

On peut classer les fonctions objectifs en trois critères physiques de performance :

Temps optimal

On parle d'un problème en temps minimal lorsque $F(x(t), u(t), t) = 1, S(x(t^*), t^*) = 0$ et le temps final t^* est libre dans l'expression :

$$\min_{t^*} \int_0^{t^*} 1dt.$$

Coût optimal

On parle d'un problème en coût minimal lorsque le temps final t^* est fixé dans l'expression :

$$\min_{u\in U} J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt.$$

E'videment, il existe des problèmes qui combinent les deux critères de qualité précédents, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût minimal.

1.2.1 Les classes de problème de contrôle optimal

Selon la forme du critère de qualité, on distingue généralement trois types de problèmes de contrôle optimal [1] :

a) Problème de Lagrange

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \tag{1.8}$$

où les contrôles $u(.)$ sont des fonctions définies de $[0, t^*]$ dans $U \subset \mathbb{R}^r$, et la fonction coût $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$, est comme suit :

$$\min_{u \in U, t^*} J(u) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt. \tag{1.9}$$

avec $x(0) = x^0$ est un état initial donné.

b) Problème de Mayer

Dans ce cas, le critère à optimiser dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. Soit la fonction $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors le problème de Mayer peut être définit par :

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in U, t^*} J(u) = S(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.10}$$

c) Problème de Bolza

L'avantage du problème de Bolza est que, il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer).
Soient $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$, et $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors, le problème de Bolza est défini par :

$$\begin{cases} \min\limits_{u \in U, t^*} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt. \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Remarque 1.2.1. *Les trois formulations sont équivalentes, c'est à dire qu'on peut passer de l'une à l'autre.*
Le problème de Lagrange a été discuté pour la première fois en 1762, Mayer a considéré son problème en 1878, et le problème de Bolza a été formulé en 1913.

1.3 Principe du maximum de Pontriaguine

Dans cette section, nous énonçons sans preuve les condition nécessaires d'optimalité, pour des problème de contrôle optimal sans contraintes sur l'état, puis avec contrainte sur l'état. Pour plus de détails, voir Pontriaguine et al. [18], Grass et al. [10], Sethi et al.[19] et E. Trélat [20].

1.3.1 Principe du maximum de Pontriaguine sans contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant, avec un temps terminal t^* fixé :

$$\begin{cases} \min J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, t^*], \\ u \in U, \end{cases} \tag{1.12}$$

où U est un ensemble compact de de $\mathbb{R}^r$

La démonstration historique du principe du maximum est basée essentiellement sur la maximisation du Hamiltonien, définit comme suit pour le problème (1.12) :

$$H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \psi_0 F(x(t), u(t), t) + \psi'(t) f(x(t), u(t), t), \tag{1.13}$$

où le vecteur $\psi(t) : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état adjoint ; ψ_0 est appelée variable duale du coût.

Conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 1.3.1. *(Principe du maximum) [19]*
Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$, alors, il existe un réel $\psi_0^* \leq 0.$ et un vecteur $\psi^*(t)$ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), & x^*(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t), & \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) \geq H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), & \forall v(t) \in u, \quad t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{1.14}$$

avec :

$$H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \frac{\partial H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)}{\partial x}|_{x(t)=x^*(t), \quad u(t)=u^*(t), \quad \psi_0=\psi_0^*, \quad \psi(t)=\psi^*(t)},$$

$$S_x(x^*(t^*)) = \frac{\partial S(x(t^*))}{\partial x}|_{x(t^*)=x^*(t^*)}.$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global du Hamiltonien $H(x^*(t), \psi^*(t), v(t), t)$ pour $v(t) \in U$, c'est Pour cette raison, qui les conditions nécessaires (1.14) appelées "Principe du maximum".

Remarque 1.3.1. *On peut travailler avec $\psi_0^* > 0$ ($\psi_0^* = 1$) et la derniére inégalité des relation (1.14) sera inversée. On parle alors du principe du minimum.*

Conditions suffisantes d'optimalité

Jusqu'à présent, nous avons énoncé les conditions nécessaires d'optimalité. Dans ce qui suit, nous énonçons sans preuve un théorème que nous donne une conditions suffisante d'optimalité pour un probléme de contrôle optimal sans contraintes sur l'état. Ce théorème est important, car les modèles dérivés de nombreux problémes de la physique et de sciences de gestion satisfont les condition requises pour que les conditions nécessaires deviennent suffisantes.
Définissons, tout d'abord, la fonction H^0 :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \min_{v \in U} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t). \tag{1.15}$$

Théorème 1.3.2 (19)**.** *Si $(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t))$ satisfait les conditions nécessaires (1.14) pour tout $t \in [0, t^*]$ et si la fonction $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ est convexe en x pour tout $t \in [0, t^*]$ et $S(x(t^*))$ est convexe en x, alors $u^*(t)$ est un contrôle optimal du problème (1.12)*

1.3.2 Principe du maximum de Pontriaguine avec contrainte sur l'état

Ici nous imposons au problème précédent des contraintes sur l'état et le contrôle. Pour tout instant $t \in [0, t^*]$, le couple $(x(t), u(t))$ doit satisfaire la contrainte :

$$g(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t^*], \tag{1.16}$$

où $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
Avant d'aller plus loin, écrivons le problème de contrôle optimal à étudier :

$$\begin{cases} \min J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, t^*], \\ u \in U = \mathbb{R}^r, \qquad g(x(t), u(t), t) \leq 0, t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{1.17}$$

Conditions nécessaires d'optimalité

Introduisons le Lagrangien du problème (1.17) définit par :

$$L(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t) = H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) + \lambda'(t) g(x(t), u(t), t), \tag{1.18}$$

Les composantes λ_i du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs de Lagrange doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\lambda_i(t) \geq 0, \quad \lambda_i(t) g_i(x(t), u(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \forall t \in [0, t^*]. \tag{1.19}$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle suivante.

$$\dot{\psi}(t) = -L_x(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t), \quad \psi(t^*) = \psi_0 S_x(x^*(t)). \tag{1.20}$$

Théorème 1.3.3. *. [19] (Principe du maximum de Pontriaguine avec contrainte sur l'état) Soit $u^*(t) \in \mathbb{R}^r$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$, alors il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$, un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un vecteur multiplicateur de Lagrange λ^* tels que les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -L_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t), \qquad \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \max\limits_{v(t) \in \mathbb{R}^r|_{g(x^*, v, t) \leq 0}} H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), \quad t \in [0, t^*], \\ \dfrac{\partial L(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u(t), t)}{\partial u} |_{u(t) = u^*(t)} = 0, \\ g(x^*(t), u^*(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*], \\ \lambda_i^*(t) \geq 0, \quad \lambda_i^*(t) g_i(x^*(t), u^*(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{1.21}$$

Conditions suffisantes d'optimalité

Le résultat de condition suffisante nécessite le concept de fonction convexe et quaci-convexe.

Définition 1.3.1. *Une fonction $F : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définit sur un ensemble convexe X de $\mathbb{R}^n$, est dite convexe, si pour tous les points $x,y \in X$, et pour tout nombre réel $\lambda \in [0, 1]$ la relation suivante est vérifiée :*

$$F(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda) F(y). \tag{1.22}$$

La fonction F est dite quasi-convexe si :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq max\{F(x), F(y)\}. \tag{1.23}$$

En outre, on dit que F est strictement convexe si pour tous les points x,y $\in X$, $x \neq y$ *et pour tout nombre réel* $\lambda \in]0, 1[$, *la relation* (1.22) *est vérifiée avec une inégalité stricte. De plus, on dit que F est convexe, quasi-convexe ou strictement convexe si* $(-F)$ *est respectivement convexe, quasi-convexe ou strictement convexe.*

Nous pouvons maintenant énoncer les conditions suffisantes d'optimalité concernant le problème de contrôle optimal avec contraintes. A cet effet, définissons la fonction suivante :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \max_{v(t) \in \mathbb{R}^r|_{g(x,u,t) \leq 0}} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t). \tag{1.24}$$

Théorème 1.3.4 (19)**.** *(Les Condition suffisante d'optimalité)*
Si $(x^*, u^*, \psi_0^*, \psi^*, \lambda^*)$ *satisfaisant les conditions nécessaires* (1.21) *pour tout* $t \in [0, t^*]$ *et si la fonction* $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ *est convexe en x pour tout* $t \in [0, t^*]$ *et si la fonction* $S(x(t^*))$ *et convexe pour tout trajectoire x admissible et la fonction* $g(x(t), u(t), t)$ *définie par* (1.16) *est quasi-convexe pour tout couple* (x, u) *admissible, alors*(x^*, u^*) *est optimale.*

Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés au problème de contrôle optimal, dont nous avons présenté les notions de contrôlabilité du système dynamique, par la suite, nous avons exposé le principe du maximum de pontriaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité. Pour le cas d'un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes.

CHAPITRE 2

CONTRÔLE OPTIMAL UN SYSTÈME DYNAMIQUE LINÉAIRE AVEC CONTRAINTES D'INÉGALITÉS

Introduction

Dans ce chapitre, nous représentons une méthode numérique pour la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes d'inégalités et commande vectorielle. Cette méthode a été développée par R. Gabassov et F. M. kirillova. [17], [11], [12].

2.1 Position du problème

Sur l'intervalle $T = [0, t^*]$, considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$\min J(u) = c_1^{'} x(t^*) \tag{2.1}$$

avec $c_1^{'}$ un vecteur de coût, de dimension n.
Le système de contrôle dynamique linéaire auquel on s'intéresse est celui à commande vectorielle, défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in T, \tag{2.2}$$

où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur qui représente l'état du système à l'instant t ; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ la commande agissant sur le système à l'instant t (signal d'entrée), telle que $d^- \leq u(t) \leq d^+$, $d^- = (d_1^-, d_2^-, ..., d_r^-)$, $d^+ = (d_1^+, d_2^+, ..., d_r^+)$; A est une matrice (réelle) carrée d'ordre n, qui caractérise le système (pour plus de simplicité on la suppose constante, c'est-à-dire ne dépendante pas de la variable t), de la même manière B est une matrice réelle $n \times r$ constante et x_0 la position initiale du système.

Associons à la trajectoire $x(t)$, solution du système, une contrainte (signal de sortie) à l'instant $t = t^*$

$$g^- \leq Gx(t^*) \leq g^+ \tag{2.3}$$

oû G est une matrice d'ordre $m \times n$ et rang $G = m < n$. Ainsi le problème qu'on étudiera se présente sous la forme suivante :

$$\min J(x, u) = c_1^{'} x(t^*), \tag{2.4a}$$

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu + r, x(0) = x_0, \tag{2.4b}$$

$$g^- \leq Gx(t^*) \leq g^+, \tag{2.4c}$$

$$d^- \leq u(t) \leq d^+, t \in T = [0, t^*], \tag{2.4d}$$

avec : $A = A(K, K)$, $B = (K, J)$, $G = G(I, K)$, $g^- = g^-(I)$, $g^+ = g^+(I)$, $d^- = d^-(J)$, $d^+ = d^+(J)$, $K = \{1, ..., n\}$, $I = \{1, ..., m\}$, $J = \{1, ..., r\}$.
La solution du système dynamique (2.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)[x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)(Bu(\tau) + r(\tau))d\tau], t \in T, \tag{2.5}$$

oû $F(t) = exp(At)$, est une matrice carrée d'ordre n, solution du système homogène :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n, \end{cases} \tag{2.6}$$

I_n est une matrice identité d'ordre n.
En remplaçant cette solution dons problème (2.4), celui-ci devient un problème de la seule variable $u(t)$ suivant :

$$\begin{cases} \min J(u) = c_1^{'} F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} (c_1^{'}(t)F(t^*)F^{-1}(t)B)u(t)dt + \int_0^{t^*} c_1^{'}(t)F(t^*)F^{-}(t)r(t)dt, \\ g^- \leq GF(t^*)[x_0 + \int_0^{t^*} F^{-1}(t)(Bu(t) + r(t)]dt \leq g^+, \\ d^- \leq u(t) \leq d^+, t \in T = [0, t^*]. \end{cases} \tag{2.7}$$

En posant $c^{'}(t) = c_1^{'} F(t^*)F^{-1}(t)B$, $c_3^{'}(t) = c_1^{'} F(t^*)F^{-1}(t)$, $\varphi(t) = GF(t^*)F^{-1}(t)B$, $\bar{g}^- = g^- -$

$GF(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} GF(t^*)F^{-1}(t)r(t)dt$, et $\bar{g}^+ = g^+ - GF(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} GF(t^*)F^{-1}(t)r(t)dt$, le problème (2.4) s'écrit :

$$\begin{cases} \min J(u) = c_1^{'}F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c^{'}(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} c_3^{'}(t)r(t)dt \\ \bar{g}^- \leq \int_0^{t^*} \varphi(t)u(t)dt \leq \bar{g}^+, \\ d^- \leq u(t) \leq d^+, t \in T = [0, t^*]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Choisissons dans l'ensemble I, un sous ensemble $I_s \subset I$, avec $|I_s| = p \leqslant m$. Sur l'intervalle T choisissons un ensemble de moments isolés $T_s = \{t_k, k \in K_s\}$, $K_s = \{1, ..., k_s\}$, $K_s \leqslant p$. A chaque moment $t_k \in T_s$ faisons correspondre un ensemble d'indices $J_k \subset J$, $\sum_{k \in K_s} |J_k| = p$.
Posons $J_s = \{J_k, k \in K_s\}$ et $\varphi_s = \{I_s, J_s, T_s\}$.

Construisons la matrice :

$$\varphi_s = \varphi(Q_s) = (\varphi_{ij}(t_k), i \in I_s, j \in J_k, k \in K_s), \tag{2.9}$$

où $\varphi_j(t)$ est la j^{ime} colonne de la la matrice $\varphi(t) = Gq(t)$, $t \in T$ et $q(t)$, $t \in T$, est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} = Aq, \\ q(0) = B, \end{cases}$$

Définition 2.1.1. *La commande constante par morceaux $u = u(.) = (u(t), t \in T)$ est dite admissible si elle satisfait aux contraintes (2.4c), (2.4d).*

Définition 2.1.2. *Une commande admissible $u^0 = u^0(.) = (u^0(t), t \in T)$ est dite optimale si et seulement si*

$$J(u^0) = \max J(u). \tag{2.10}$$

La trajectoire correspondante $x^0(t)$ est dite trajectoire optimale.
En outre, on appelle commande suboptimale (ou ε-optimale) toute commande admissible $u^\varepsilon = u^\varepsilon(.) = (u^\varepsilon(t), t \in T)$ satisfaisant à l'inégalité :

$$J(u^0) - J(u^\varepsilon) \leq \varepsilon, \tag{2.11}$$

Où $\varepsilon \geq 0$ et u^0 est la commande optimale.

Définition 2.1.3. *L'ensemble $Q_s = \{I_s, J_s, T_s\}$ est appelé support du problème (2.4) si* *det* $\varphi_s \neq 0$.

Définition 2.1.4. *Le paire* $\{u, Q_s\}$ *formé de la commande admissible* u *et du support* Q_s *est appelé commande de support.*

Définition 2.1.5. *La commande de support* $\{u, Q_s\}$ *est dite non dégénérée si :*

1) *Pour toute moment* t_k *de* T_s *et pour toute indice* $j \in J_k$, $k \in K_s$, *l'une des deux conditions est vérifiée :*
   - *dans le voisinage de* t_k, *le contrôle* $u_j(t)$ *est non critique*

$$d^- < u_j(t) < d^+, t \in [t_k - \delta, t_k + \delta], \delta > 0,$$

   - *où le contrôle* $u_j(t)$, $t \in T$, *est discontinus à* t_k *;*
2) *En outre, le contrainte suivant est vérifiée :*

$$g^-(I_c) < G(I_c, K)x(t^*) < g^+(I_c), I_c = I \backslash I_s. \tag{2.12}$$

2.2 Formule de l'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, Q_s\}$ une commande de support du problème (2.4) Considérons une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$.

L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) =& J(\bar{u}) - J(u) \\
&= c_1' F(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} (c'(t)\bar{u}(t) + c_3'(t) r(t)) dt - c_1' F(t^*) x_0 - \int_0^{t^*} (c'(t) u(t) + c_3'(t) r(t)) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\bar{u}(t) dt + \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t)) dt - \int_0^{t^*} c'(t) u(t) dt - \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\bar{u}(t) dt - \int_0^{t^*} c'(t) u(t) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)(\bar{u}(t) - u(t)) dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\Delta u(t) dt.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Définissons le vecteur :

$$c_s = (c_j(t_k), j \in J_k, k \in K_s),$$

où $c_j(t)$, $j \in J$, est la j^{ime} élément du vecteur

$$c^{'}(t) = (c_1(t), ..., c_r(t)), t \in T.$$

Construisons le vecteur des potentiels :

$$y^{'}(I_s) = c^{'}_s \varphi_s^{-1}, \qquad y(I_c) = 0, \tag{2.14}$$

on définie la co-commande $E^{'}(t) = (E_1(t), ..., E_r(t)), t \in T$:

$$\begin{aligned} E^{'}(t) =& y^{'}\varphi(t) - c^{'}(t) \\ =& y^{'}GF(t^*)F^{-1}(t)B - (c^{'}_1F(t^*)F^{-1}(t)B) \\ =& (y^{'}G - c^{'}_1)F(t^*)F^{-1}(t)B. \end{aligned} \tag{2.15}$$

En introduisant la fonction $\psi(t)$ défini comme suit :

$$\psi^{'} = -(G^{'}y - c_1)^{'}F(t^*)F^{-1}(t), t \in T, \tag{2.16}$$

qui est la solution du système conjuguée :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^{'}\psi, \\ \psi(t^*) = c_1 - G^{'}y, \end{cases} \tag{2.17}$$

alors, la co-commande peut s'écrire sous la forme :

$$E^{'}(t) = -\psi^{'}(t)B, t \in T. \tag{2.18}$$

En vertu des définitions (2.14) et (2.15), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) =& J(\bar{u}) - J(u) \\ =& \int_0^{t^*} c^{'}(t)\Delta u(t)dt \\ =& \int_0^{t^*} [y^{'}\varphi(t) - E^{'}(t)]\Delta u(t)dt \\ =& y^{'}\int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t^*} E^{'}(t)\Delta u(t)dt \\ =& y^{'}G\Delta x(t^*) - \int_0^{t^*} E^{'}(t)\Delta u(t)dt. \end{aligned} \tag{2.19}$$

En posant $G\Delta x(t^*) = v$, l'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\Delta J(u) = \sum_{i \in I_s} y_i v_i - \int_0^{t^*} E^{'}(t)\Delta u(t)dt. \tag{2.20}$$

Par conséquent, il est clair que le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle $\Delta J(u)$ sous la contrainte :

$$\begin{cases} g_i^- - G(i,K)x(t^*) \leq v_i \leq g_i^+ - G(i,K)x(t^*), i \in I_s, \\ d^- - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d^+ - u(t), t \in T, \end{cases} \tag{2.21}$$

est égal à :

$$\begin{aligned} \beta(u, Q_s) = & \sum_{j=1}^{r} [\int_{T_j^+} E_j(t)(u_j(t) - d_j^-)dt + \int_{T_j^-} E_j(t)(u_j(t) - d_j^+)dt] \\ & + \sum_{y_i < 0, i \in I_s} y_i v_i^- + \sum_{y_i > 0, i \in I_s} y_i v_i^+, \end{aligned} \tag{2.22}$$

où :

$$T_j^+ = \{t \in T \quad : E_j(t) > 0\}, T_j^- = \{t \in T \quad : E_j(t) < 0\}, j \in J,$$

et

$$v^-(I) = (v_i^-, i \in I) = g^- - Gx(t^*),$$

$$v^+(I) = (v_i^+, i \in I) = g^+(s) - Gx(t^*).$$

Le nombre $\beta(u, Q_s)$ est appelé estimation de suboptimalité. Ainsi, nous obtenons une majoration de l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, Q_s). \tag{2.23}$$

2.3 Critère d'optimalité

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. *(Critère d'optimalité).*

Soit $\beta(u, Q_s)$ une commande du support du problème (2.4) *. Les relations suivantes :*

$$\begin{cases} E_j(t) \geq 0, & si \quad u_j(t) = d_j^-, \\ E_j(t) \lesssim 0, & si \quad u_j(t) = d_j^+, \\ E_j(t) = 0, & si \quad d_j^- \leq u_j(t) \leq d_j^+, t \in T, j \in J; \\ y_i \geq 0, & si \quad G(i,K)x(t^*) = g_i^+, \\ y_i \leq 0, & si \quad G(i,K)x(t^*) = g_i^-, \\ y_i = 0, & si \quad g_i^- < G(i,K)x(t^*) < g_i^+, i \in I_s, \end{cases} \tag{2.24}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont aussi nécessaires pour l'optimalité de la commande de support (u, Q_s).

2.4 Principe du ε-maximum

Le critère d'optimalité décrit ci-dessus peut être écrit sous forme du principe du maximum. Pour cela, construisons la fonction Hamiltonien :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \psi(t)'(Ax(t) + Bu(t) + r(t)), \tag{2.25}$$

où $\psi(t)$ est la solution du système conjugué (2.17)

Théorème 2.4.1. *(Principe de maximum).*
Pour que la commande de support non dégénérée $\{u, Q_s\}$ soit optimale, il est nécessaire et suffisant que le long de la commande $u(t)$, $t \in T$ et des trajectoire $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, la condition suivante du maximum soit vérifiées :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v), t \in T. \tag{2.26}$$

Théorème 2.4.2. *Principe de ε-maximum*
Soit $\varepsilon > 0$, pour l'ε-optimalité de la commande admissible $u(t)$, $t \in T$, il est nécessaire et suffisante de trouver un support Q_s de telle sorte que le long des trajectoires $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, on ait la condition de ε-maximum :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v) - \varepsilon(t), t \in T, \tag{2.27a}$$

$$y' Gx(t^*) = \max_{g^- \leq J \leq g^+} y' J - \varepsilon_1, \tag{2.27b}$$

avec $\int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt + \varepsilon_1 \leq \varepsilon.$

2.5 Algorithme de la méthode

Soient $\varepsilon > 0$ et $\{u, Q_s\}$ une commande de support initiale. Le but de l'algorithme est de construire une commande u^ε ε-optimale ou carrément optimale u^0, en faisant des itérations qui consiste à faire le passage de $\{u, Q_s\}$ à $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$ de telle sort $J(\bar{u}) \geq J(u)$. Pour cela, l'algorithme se décompose en trois procédures :
• changement de commande $u \to \bar{u}$;
• changement de support $Q_s \to \bar{Q}_s$;
• procédure finale.

Changement de commande

Soit $\varepsilon \geq 0$ donné et une commande de support $\{u, Q_s\}$ vérifiant $\beta(u, Q_s) > \varepsilon$. Construisons une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \theta\Delta u(t)$, $t \in T$, de telle façon à avoir $J(\bar{u}) \geq J(u)$, où $\Delta u(t)$ est la direction du changement de la commande, et $\theta \geq 0$ est le pas maximal admissible le long de cette direction. Pour cela, choisissons les nombres $\eta > 0$, et $h > 0$ (paramètres de l'algorithme) et construisons les ensembles :
$T_\eta = \{t \in T : \eta(t) \leq \eta\}$, $T_* = T \backslash T_\eta$, avec $\eta(t) = \min_{j\in J} |E_j(t)|$, $t \in T$.

Subdivision l'ensemble T_η en intervalles $[\tau_k, \tau^k]$, $k = \overline{1, N}$, $\tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$,
$T_\eta = \cup_{k=1}^N [\tau_k, \tau^k[$, de telle façon que nous ayons $\tau^k - \tau_k \leq h$; $T_s \subset \{\tau_k, k = \overline{1, N}\}$; $u_j(t) = u_{jk} = const$, $t \in [\tau_k, \tau^k[$, $k = \overline{1, N}$, $j \in J$.
Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_{jk} = -\int_{\tau_k}^{\tau^k} E_j(t)dt, \quad q_{jk} = \int_{\tau_k}^{\tau^k} \varphi_j(t)dt, \quad k = \overline{1, N}, j \in J; \tag{2.28}$$

$$\beta_{N+1} = -\sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} E_j(t)\Delta u_j(t)dt + \sum_{i\in I_s} y_i\bar{v}_i; \tag{2.29}$$

$$q_{iN+1} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t)\Delta u_j(t) - \bar{v}_i dt, i \in I_s; \tag{2.30}$$

$$q_{iN+1} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t)\Delta u_j(t)dt, i \in I_G; \tag{2.31}$$

avec :

$$\bar{v}_i = \begin{cases} g_i^+ - G(i,K)x(t^*), & \text{si} \quad y > 0, \\ g_i^- - G(i,K)x(t^*), & \text{si} \quad y < 0, \end{cases} \tag{2.32}$$

et

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d_j^+ - u_j(t), & \text{si} \quad E_j(t) < -\eta, \\ d_j^- - u_j(t), & \text{si} \quad E_j(t) > \eta, \quad t \in T_*, j = \overline{1,r}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Posons :

$$\begin{cases} l_{jk} = \theta\Delta u_j(t), t \in [\tau_k, \tau^k], & j = \overline{1,r}, K = \overline{1,N}; \\ l_{N+1} = \theta & avec \quad 0 \leq \theta \leq 1; \end{cases} \tag{2.34}$$

$f_*(I_G) = g^-(I_G) - G(I_G,K)x(t^*)$, $f^*(I_G) = g^+(I_G) - G(I_G,K)x(t^*)$, $f_*(I_s) = 0$, $f^*(I_s) = 0$,

$$l = (l_{11}, ..., l_{1N}, ..., l_{r1}, ..., l_{rN}, l_{N+1})^{'}; \tag{2.35}$$

$$\beta = (\beta_{11}, ..., \beta_{1N}, ..., \beta_{r1}, ..., \beta_{rN}, \beta_{N+1})^{'}. \tag{2.36}$$

Les vecteurs l, β, et q_{jk} ont pour dimensions respectives (N_{r+1}), (N_{r+1}) et m.
En utilisant ces quantités, le problème (2.20)- (2.22) sera équivalent au problème de support suivant :

$$\begin{aligned} &\beta^{'}l \quad \rightarrow \max, \\ &f_* \leq \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{N} q_{jk}l_{jk} + q_{N+1}l_{N+1} \leq f^*, \\ &d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk}, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,N}, 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Résolvons le problème (2.37) et soit la solution optimal l^ε.
Ainsi, construisons la nouvelle commande de support $\{\bar{u}, Q_s\}$, avec :

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^\varepsilon, & \text{si} \quad t \in [\tau_k, \tau^k], k = \overline{1,N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^\varepsilon \Delta u_j(t), & \text{si} \quad t \in T_*, j = \overline{1,r}. \end{cases} \tag{2.38}$$

La nouvelle commande ainsi construite vérifie l'inégalité $J(\bar{u}) \geq J(u)$. Calculons alors la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, Q_s)$. A partir de cette valeur on distingue trois cas :

- $\beta(\bar{u}, Q_s) = 0$, alors $\bar{u}$ est une commande optimale pour le problème (2.4) ;
- $\beta(\bar{u}, Q_s) \leq \varepsilon$, alors $\bar{u}$ est une commande ε-optimale ;
- sinon, nous passons soit à une nouvelle itération en démarrant avec une commande de support $\beta(\bar{u}, Q_s)$ et les paramètres $\bar{\eta} < \eta, \bar{h} < h$, soit à la procédure de changement de

support.

2.5.1 Changement de support

Soit $\{\bar{u}, Q_s\}$ la commande de support obtenue après résolution du problème (2.37). Calculons par la formule (2.14)- (2.15) la co-commande $\tilde{E}'(t) = -\tilde{\psi}'(t)B - c_2'(t)$, $t \in T$, correspondante à $\{\bar{u}, Q_s\}$.
Par la suite, construisons la quasi-commande $\omega = \omega(.) = (\omega(t), t \in T)$.

$$\omega_j(t) = \begin{cases} d_j^- & \text{si} \quad E_j(t) < 0, \\ d_j^+ & \text{si} \quad E_j(t) > 0, \\ \in \left[d_j^-, d_j^+\right] & \text{si} \quad E_j(t) = 0, j = \overline{1,r}, t \in T, \end{cases} \tag{2.39}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\kappa = (.) = (\kappa(t), t \in T)$, vérifiant l'équation :

$$\dot{\kappa}(t) = A\kappa + B\omega + r(t), \kappa(0) = x^0. \tag{2.40}$$

Construisons les vecteurs :

$$\gamma(J_s, T_s) = \varphi_s^{-1}(g_-^+(I_s) - G(I_s, K)\kappa(t^*)), \tag{2.41}$$

avec

$$g_{-i}^+ = \begin{cases} g_i^-, & \text{si} \quad y_i < 0, \\ g_j^+, & \text{si} \quad y_i > 0, \end{cases} \tag{2.42}$$

et les quantités :

$$\gamma^+(I_G) = (\gamma_i^*, i \in I_G = I \backslash I_s),$$

$$\gamma^-(I_G) = (\gamma_{i*}, i \in I_G),$$

avec γ_i^+ et γ_i^- sont définies comme suit :

$$\gamma_i^+ = \sum_{j \in \tilde{J}_k, k \in \tilde{K}_s} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + G(i, K)\kappa(t^*) - g_i^+.$$

$$\gamma_i^- = \sum_{j \in \tilde{J}_k, k \in \tilde{K}_s} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + G(i, K)\kappa(t^*) - g_i^-.$$

En introduisant un paramètre u suffisamment petite, deux cas peuvent si présentés :
• si le relation suivantes :

$$\|\gamma(J_s, T_s)\| \leq \mu, \quad \gamma^+(I_G) \geq 0, \gamma^-(I_G) \leq 0, \tag{2.43}$$

sont vérifiées, alors on passe à la procédure finale avec le support $\bar{Q}_s = Q_s$.
• sinon, on va changer le support ($Q_s \to \bar{Q}_s$) en effectuant une itération de la méthode dual, et on refait une nouvelle itération avec $\{\bar{u}, Q_s\}$, $\bar{\eta} < \eta, \bar{h} < h$.

$$\begin{cases} \min L(\lambda) = c_1'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c_3'(t)r(t)dt - v'^-\bar{g}^- + v'^+\bar{g}^+ - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^-dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+dt, \\ v'^+\varphi(t) - v_*'\varphi(t) - f^-(t) + f^+(t) = c(t), \\ v^- \geq 0, v^+ \geq 0, f^-(t) \geq 0, f^+(t) \geq 0, t \in T. \end{cases} \tag{2.44}$$

Soit $\lambda = (v^-, v^+, f^-(t), f^+(t))$ une solution réalisable du problème dual (2.28).
Construisons une nouvelle solution réalisable λ avec sa co-commande correspondante $\bar{E}(t) = \bar{y}'\varphi(t) - c(t)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \sigma^0\xi, \\ \bar{y} = \tilde{y} + \sigma^0\Delta y, \\ \bar{E}(t) = \tilde{E}(t) + \sigma^0\delta(t), t \in T, \end{cases} \tag{2.45}$$

où, $\delta(t)$ est la direction du changement de la co-commande et Δy est celle du vecteur des potentiels, σ^0 est le pas le long de cette direction. Supposons que $\exists I_G^0 \subset I_G$, avec $i \in I_G^0$ et ($\gamma_i^* > 0, \quad ou \quad \gamma_{i*} < 0$). Calculons la quantité suivante :

$$\alpha(0) = \sum_{y_i>0, i\in\tilde{I}_s} \Delta y_i \bar{g}_i^+ + \sum_{y_i<0, i\in\tilde{I}_s} \Delta y_i \bar{g}_i^- - \sum_j^r \left(\int_{T_j^+} \delta_j(t)d_j^-dt + \int_{T_j^-} \delta_j(t)d_j^{-+}dt\right), \tag{2.46}$$

$$\alpha(\sigma) = \alpha(0) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{l_j} \int_{T_j^l}^{T_j^l(\sigma)} \delta_j(t)(d_j^- - d_j^+)sign \quad \dot{\tilde{E}}_j(t_j^l)dt, \tag{2.47}$$

avec : t_j^l, $t_j^l(\sigma)$ sont les zéros de $\tilde{E}_j(t)$ et de $E_j(t)$ respectivement. Posons :

$$\gamma_{i0} = \min_{i\in I_{G0}} f_j|\gamma_i^-|, |\gamma_i^+|,$$

$$\Delta y_{i0} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad \gamma_{i0} = |\gamma_i^+|, \\ +1 & \text{si} \quad \gamma_{i0} = |\gamma_i^+|, \end{cases}$$

$$\Delta y(I_G \backslash i_0) = 0.$$

De l'égalité :

$$\delta_s^{'} = \Delta y^{'}(I_s)\varphi_s + \Delta y_{i0}(\varphi_{i0j}, j \in J_k, k \in K_s),$$

on trouve :

$$\Delta y^{'}(I_s) = \Delta y_{i0}(\varphi_{i0j}, j \in J_k, k \in K_s)\varphi_s^{-1}.$$

La direction $\delta(t)$, $t \in T$, est donnée par :

$$\delta(t) = -\Delta\psi^{'}(t)B(t), t \in T,$$

avec $\Delta\psi(t)$, $t \in T$, est la solution du système suivant :

$$\Delta\dot{\psi} = -A^{'}\Delta\psi, \Delta\psi(t^*) = -\Delta y^{'}G.$$

Ainsi, le changement de support se fait de la façon suivante :
• si il existe $i_* \in I_s$ avec $y_{i*} = 0$, alors, le nouveau support $\bar{Q}_s = (\bar{I}_s, \bar{J}_s, \bar{T}_s)$, avec :

$$\bar{I}_s = (I_s \backslash i_*) \cup [i_0 \bar{J}_s = J_s, \bar{T}_s = T_s;$$

• sinon choisissons (j_1, t_s), $j_1 \in J \backslash J_s$, $t_s \in T \backslash T_s$ avec :

$$\bar{E}_{J1}(t_s) = \tilde{E}_{j1}(t_s) + \sigma^0 \delta_{j1}(t_s) = 0 \quad et \quad \delta_{j1}(t_s) \neq 0,$$

le pas σ^0, est calculé de telle sorte que $(\alpha(\sigma^0)) \geq 0$,
Ainsi, le nouveau support est $\bar{Q}_s = (\bar{I}_s, \bar{J}_s, \bar{T}_s)$, avec :

$$\bar{I}_s = (I_s \cup i_0), \bar{J}_s = (J_s \cup j_1), \bar{T}_s = (I_s \cup t_s).$$

Supposons maintenant que l'on a $\gamma^+(I_G) \geq 0, \gamma^+(I_G) \leq 0$ et $\|\gamma(I_s, T_s)\| > \mu$ Posons :

$$|\gamma(j_0, t_{s0})| = \max|\gamma(I_s, T_s)| j_0 \in J_{s0}, s_0 \in K_s.$$

Dans ce cas, le changement de support se fait de la manière suivante :
• s'il existe $i_* \in \tilde{I}_s$, avec $\bar{y}_{i*} = 0$, ou $y = y + \sigma^0 \Delta_y$, et $\Delta_y(I_c) = 0$,
$\Delta_y(I_s) = -sing\gamma(j_0, t_{s0})\varphi^{-1}(I_s, j_0, t_{s0})$ alors, le nouveau support $\bar{Q}_s = (\bar{I}_s, \bar{J}_s, \bar{T}_s)$ est :

$$\bar{I}_s = I_s \backslash i_*, \bar{J}_s = J_s \backslash j_0, \bar{T}_s = T_s \backslash t_{s0};$$

• sinon, le nouveau support est $\bar{Q}_s = (\bar{I}_s, \bar{J}_s, \bar{T}_s)$ avec :

$$\bar{I}_s = I_s, \bar{J}_s = (J_s \backslash j_0) \cup j_1, \bar{T}_s = (T_s \backslash t_{s0}) \cup t_s.$$

Calculons la valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s)$:

• si $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) = 0$ alors la commande de support $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$ est optimale ;

• si $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) \leq \varepsilon$ alors $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$ est une commande ε-optimale ;

• sinon aller à la procédure finale si les relation (2.43) sont vérifiées.

2.5.2 Procédure finale

Admettons que les relations (2.43) sont vérifiées pour la quasi-commande $\omega = \omega(.) = (\omega(t), t \in T)$, et la quasi-trajectoire $\kappa = \kappa(.) = (\kappa(t), t \in T)$ construites avec le support $\bar{Q}_s$.

La procédure finale consiste à déterminer le support optimal $Q_s^* = \{J_s^*, T_s^*\}$ de telle sort à avoir : $g^- \leq G\kappa(t^*) \leq g^+$.

Ainsi, le support optimal Q_s^* est déterminé en résolvant le système d'équation suivant :

$$\sum_{j \in \bar{J}_k} \sum_{k \in \bar{K}_s} (d_j^+ - d_j^-) sign \dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T_s^*)} \varphi_{ij}(t) dt - g + G(i, K)\kappa(t^*) = 0, i \in I_s^*, \tag{2.48}$$

avec $V_k(T_s^*), k \in K_s^*$ est déterminé par les relations :

$$E_j(V_k(T_s^*), T_s^*) = 0, V_k(\bar{T}_s) = t_k, j \in \bar{J}_k, k \in \bar{K}_s;$$

$$E(t, T_s^*) = c_{1s}^{*'} \varphi_s^{*-1} \varphi(t) - c(t).$$

Supposons que Q_s^l est la l^{ime} approximation, et Q_s^0 l'approximation initiale, avec $I_s^0 = \bar{I}_s$, $J_s^0 = \bar{J}_s$ et $T_s^0 = \bar{T}_s$, Supposons que la l^{ime} approximation est connue, Alors la $(l+1)^{ime}$ approximation sera construite comme suit :

$$T_s^{l+1} = T_s^l + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-} sign \dot{E}_j(t_k) \gamma(j, t_k^l), j \in J_k^l, k \in K_s^l \right\}. \tag{2.49}$$

En outre, la $(n+1)^{ime}$ approximation est construite de manière à satisfaire les relation (2.43).

Si à chaque approximation, les condition (2.43) ne sont pas vérifiées, nous changeons le support jus qu'a ce qui ils seront satisfaites : Posons $I_s^l = I_s^{l+1}, J_s^l = J_s^{l+1}, T_s^l = T_s^{l+1}$, et faisons une nouvelle itération jusqu'à ce que les approximations successives ne différent pas.

Soit $Q_s^* = \{I_s^*, J_s^*, T_s^*\}$ la solution du système (2.48), alors la quasi-commande $\omega^*(t), t \in T$ calculée par (2.39) et le support Q_s^* est une commande optimale pour le problème (2.4) , et Q_s^* est le support optimal.

2.6 Schéma de l'algorithme

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Début

(1) Teste de commandabilité du système :

Si $rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n$, alors le système est commandable, aller en (2).
Sinon, le problème n'admet pas de solution.

(2) Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support de départ admissible du problème (2.4).
$*$ Déterminer la trajectoire admissible $x(t), t \in T$.
$*$ Calculer $\varphi(t) = GF(t^*)F^{-1}(t)B$;
$*$ Calculer $c'(t) = c_1'(t)F(t^*)F^{-1}(t)B + c_2(t)$;
$*$ Calculer $y'(I_s) = c_s'\varphi_s^{-1}, \quad y(I_c) = 0$;
$*$ Déterminer la co-commande $E(t) = y'\varphi(t) - c'(t)$;
$*$ Calculer la valeur de la fonctionnelle $J(u) = c_1'x(t^*) + \int_0^{t^*} c_2'u(t)$.

(3) Test d'optimalité de la commande de support de départ
$*$ Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, Q_a)$ donnée par la formule (2.4).
Si $\beta(u, Q_a) = 0$ alors la commande de support $\{u, Q_a\}$ est optimale ;
Si $\beta(u, Q_a) \leq \varepsilon$ alors la commande de support $\{u, Q_a\}$ est ε-optimale ;
SINON, aller en (4).

(4) Changement de la commande u en $\bar{u}$
$*$ Construire les ensembles :
$T_\eta = \{t \in T : \eta(t) \leq \eta\}, \quad T_* = T \backslash T_\eta, \quad \eta(t) = \min_{j \in J} |E_j(t)|, t \in T$;
$*$ Subdiviser l'ensemble T_η en intervalles $[\tau_k, \tau^k]$;
$*$ Calculer les quantités : $\beta_{jk}, q_{jk}, \beta_{N+1}, q_{N+1}$ avec les relations
(2.28), (2.29), (2.30), (2.31).

$*$ Résoudre le problème suivant par la méthode adaptée :

$$\begin{cases} \beta' l \quad \to \max, \\ f_* \leq \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{N} q_{jk} l_{jk} + q_{N+1} l_{N+1} \leq f^*, \\ d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk}, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,N}, 0 \leq l_{N+1} \leq 1, \end{cases} \tag{2.50}$$

ou f^*, f_*, l et β sont données par les relations (2.35), (2.36).

$*$ Construire la nouvelle commande de support $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$, avec :

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^{\varepsilon}, & \text{si} \quad t \in [\tau_k, \tau^k], k = \overline{1,N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^{\varepsilon} \Delta u_j(t), & \text{si} \quad t \in T_*, j = \overline{1,r}, \end{cases} \tag{2.51}$$

(5) Test d'optimalité de la nouvelle commande de support $\{\bar{u}, Q_s\}$

$*$ Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, Q_s)$

Si $\beta(\bar{u}, Q_s) = 0$, alors $\bar{u}$ est une commande optimale ;

Si $\beta(\bar{u}, Q_s) \leq \varepsilon$, alors $\bar{u}$ est une commande ε-optimale ;

SINON aller en (6).

(6) Changement du support Q_s en $\bar{Q}_s$.

$*$ Construire la quasi-commande $\omega = \omega(.) = (\omega(t), t \in T)$ telle que

$$\omega_j(t) = \begin{cases} d_j^- & \text{si} \quad E_j(t) > 0, \\ d_j^+ & \text{si} \quad E_j(t) < 0, \\ \in \left[d_j^-, d_j^+\right] & \text{si} \quad E_j(t) = 0, j = \overline{1,r}, t \in T, \end{cases}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\kappa = (.) = (\kappa(t), t \in T)$, vérifiant l'équation :

$$\dot{\kappa}(t) = A\kappa + B\omega + r(t), \kappa(0) = x^0.$$

Construisons les vecteurs :

$$\gamma(J_s, T_s) = \varphi_s^{-1}(g^{*-}(I_s) - G(I_s, K)\kappa(t^*));$$

$$\gamma_i^+ = \sum_{j \in J_k, k \in K_s} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + G(i, K)\kappa(t^*) - g_i^+;$$

$$\gamma_i^- = \sum_{j \in J_k, k \in K_s} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + G(i, K)\kappa(t^*) - g_i^-.$$

Si $||\gamma(I_s, T_s)|| > \mu, \quad \gamma^+(I_G) \geq 0, \gamma^-(I_G) \leq 0$ alors on pose $\bar{Q}_a = Q_a$ et aller en (7).

SINON, changer le support ($\bar{Q}_s \to Q_s$) en effectuant une itération de la méthode duale, et aller en (2) avec le nouveau support.

(7) Test d'optimalité de la nouvelle commande de support $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$

$*$ Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s)$

Si $\beta(\bar{u}, Q_a) = 0$, alors $\bar{u}$ est une commande optimale ;

Si $\beta(\bar{u}, Q_a) \leq \varepsilon$, alors $\bar{u}$ est une commande ε-optimale ;

SINON aller en (8).

(8) Procédure finale

$*$ Résoudre le système suivant par la méthode de Newton :

$$\sum_{j\in \bar{J}_k}\sum_{k\in \bar{K}_s}(d_j^+ - d_j^-)sign\dot{E}_j(t_k)\int_{t_k}^{V_k(T_s^*)} \varphi_{ij}dt - g + G(i,K)\kappa(t^*) = 0, i \in I_s^*,$$

on prend comme approximation initiale Q_s^0 avec $I_s^0 = \bar{I}_s$, $J_s^0 = \bar{J}_s$ et $T_s^0 = \bar{T}_s$,

(a) Calculer la $(l+1)^{ime}$ approximation, construite comme suit :

$$T_s^{l+1} = T_s^l + \left\{\frac{1}{d_j^+ - d_j^-}sign\dot{E}_j(t_k)\gamma(j, t_k^l), j \in J_k^l, k \in K_s^l\right\}.$$

Si $\exists i^- \in I_s^l$ avec $y_{i*}^{l+1} = 0$, $\gamma_{i+}^{l+1} \geq 0$, $\gamma_i^{+l+1} \leq 0$, $i \in I_c^k$, posons $Q_s^{l+1} = \{I_s^{l+1}, J^{l+1}s, T_s^{l+1}\}$, avec $I_s^{l+1} = I_s^l \backslash i_-$, $J_s^{l+1} = J_s^l \backslash j_0$, $T_s^{l+1} = T_s^l \backslash t_{s0}$.

Si $\exists i^- \in I_s^l$ avec $y_{i*}^{l+1} = 0, \gamma_{i+}^{l+1} \geq 0, \gamma_i^{+l+1} \leq 0$, nous changeons le support de la manière suivante :

$$I_s^{l+1} = (I_s^l \backslash i^-) \cup i_0, J_s^{l+1} = J_s^l, T_s^{l+1} = T_s^l.$$

Si $\forall i \in I_s^l$, $y_i^{l+1} \neq 0$,et $\exists i_0 \in I_c$; $\exists i_0 \in I_c^k$, $\gamma_{i0}^{-l+1} > 0$, $\gamma_{i0}^{+l+1} < 0$, posons

$$I_s^{l+1} = I_s^l \cup i_0, J_s^{l+1} = J_s^l \cup j_1, T_s^{l+1} = T_s^l \cup t_s.$$

(b) Calculer $\gamma^+(I_G^{l+1})$, $\gamma^-(I_G^{l+1})$, $\gamma^+(J_s^{l+1}, T_s^{l+1})$

Si les conditions (2.43) sont vérifies, posons $Q_s^0 = Q_s^{l+1}$,

SINON changeons le support jusqu'à ce que les conditions (2.43) soient satisfaites.

(c) Si $Q_a^{l+1} = Q_a^l$, alors $Q_a^{l+1} = Q_a^*$ est optimal, et la quasi-commande $\omega^*(t)$, $t \in T$ et le support Q_a^* a est une commande optimale.

SINON, aller en (a).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié une méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes inégalités et commande vectorielle. Cette méthode se base sur trois procédures essentielles : i) changer la commande u par $\bar{u}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité de la commande ; ii) changer le support Q_s par $\bar{Q}_s$ de telle sorte que la mesure de non optimalité de support sera diminuée ; iii) procédure finale, qui consiste à rendre la quasi-commande w à la fois réalisable et optimale. [13], [14].

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE SUPPORTE D'UN PROBLÈME LINÉAIRE QUADRATIQUE

Introduction

La présent chapitre est consacré à la résolution d'un problème de contrôle optimal à plusieurs entrées généralisant le contrôle scalaire et dont la fonction objectif est quadratique convexe. Sur la base du concept de support, nous développons une méthode constructive primale-duale pour résoudre le problème considéré. L'idée principale consiste en trois procédures : le changement de contrôle, le changement de support et la procédure finale qui permet d'obtenir une solution optimale avec une bonne précision. Ce chapitre est basé sur le document [15].

3.1 Position du Problème et définitions

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u) = c^{'}x\,(t^{*}) + \frac{1}{2}x^{'}\,(t^{*})\,Dx\,(t^{*})\,, \tag{3.1}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in T, \quad x(0) = x^{0}, \tag{3.2}$$

$$Gx\,(t^{*}) = g, \quad d^{-} \leq u(t) \leq d^{+}, \quad t \in T = [0, t^{*}]\,, \tag{3.3}$$

où A et D sont des matrices carrées d'ordre n avec $D^{'} = D \geq 0$, B est une $n \times r - matrice$, G est une $m \times n - matrice$ avec rank $(G) = m < n$. Les fonction $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))^{'}$ et $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^{'}$ représentent respectivement la valeur du contrôle multivariable et l'état du système à l'instant t ; x^0 est un n-vecteur representant l'état initial ; c, g, d^- et d^+ sont des vecteurs de dimension correspondante. Le symbole $(')$ représente l'opérateur de transposition. Nous supposerons que le système dynamique (3.2) est controllable au sens de Kalman.

La fonction continue par morceaux $u(t), t \in T$, et sa trajectoire correspondante $x(t), t \in T$, sont dites respectivement contrôle admissible et trajectoire admissible, si elles satisfont les contraintes (3.2) et (3.3).

Pour un contrôle admissible $u(t), t \in T$, l'état final via la formule de Cauchy est :

$$x(t^*) = F(t^*)x^0 + \int_0^{t^*} F(t^*)F^{-1}(t)Bu(t)dt = F(t^*)x^0 + \int_0^{t^*} q(t)u(t)dt, \tag{3.4}$$

où $F(t) = e^{At}$ et $q(t) = F(t^*)F^{-1}(t)B = e^{A(t^*-t)}B$.

La contrainte terminale s'écrit alors :

$$Gx(t^*) = g \Leftrightarrow \int_0^{t^*} Gq(t)u(t)dt = \int_0^{t_*} p(t)u(t)dt = g - Ge^{At^*}x^0, \tag{3.5}$$

où $p(t) = Gq(t)$, et la matrice $q(t), t \in T$, vérifie l'équation différentielle :

$$\dot{q}(t) = -Aq(t), t \in T, \quad q(t^*) = B. \tag{3.6}$$

Pour définir le support, nous utilisons la formule (3.5). Pour cela, nous choisissons dons l'ensemble T un sons-ensemble de moments isolés $T_s = \{t_j, j \in J_s\}$, $J_s = \{1, \dots j_s\}$, $j_s \leq m$ et pour chaque moment $t_j \in T_s$ nous associons un ensemble d'indices $I_j \subset I$ tel que $\sum_{j \in J_s} |I_j| = m$, où $I = \{1, 2, \dots, r\}$. Nous posons $I_s = \{I_j, j \in J_s\}$, $Q_s = \{I_s, T_s\}$ et formons la matrice $P_s = P(Q_s) = (p_i(t_j), i \in I_j, j \in J_s)$, où $p_i(t)$ est la i^{ime} colonne de la matrice $p(t) = Gq(t), t \in T$.

Définition 3.1.1. *L'ensemble $Q_s = \{I_s, T_s\}$ est appelé support du problème*(3.1) - (3.3)*, si la matrice P_s est régulière. Le couple $\{u, Q_s\}$ formé du contrôle admissible u et du support Q_s est appelé contrôle admissible de support.*

Définition 3.1.2. *Le contrôle de support $\{u, Q_s\}$ est dit non dégénéré, si pour tout moment t_j de T_s et pour tout indice $i \in I_j$, $j \in J_s$, une des deux condition suivantes :*

i) au voisinage de t_j, la composante $u_i(t), t \in T$, est non critique ;

ii) le point t_j est un point de discontinuité de la fonction $u_i(t), t \in T$.

Définition 3.1.3. *Le contrôle admissible $u^\epsilon(t)$, $t \in T$, est dit ϵ-optimal (ou suboptimal), s'il vérifie $J(u^\epsilon) - J(u^0) \leq \epsilon$, où u^0 est une solution optimale du problème* (3.1) - (3.3) *et ϵ un nombre non négatif arbitraire, choisi comme une précision.*

3.2 Optimalité et Estimation de Suboptimalité

Nous assignons au contrôle de support $\{u, Q_s\}$, le vecteur des multiplicateurs

$$y' = \left((Dx(t^*) + c)' q_i\left(t_j\right), i \in I_j, j \in J_s\right) P_s^{-1}, \tag{3.7}$$

et la fonction $E(t)$, $t \in T$, appelée co-contrôle :

$$E'(t) = (E_1(t), E_2(t), \ldots, E_r(t)) = y' p(t) - (Dx(t^*) + c)' q(t), \quad t \in T, \tag{3.8}$$

où $q_i(t)$ est la i^{ime} colonne de la $n \times r$-matrice $q(t) = F(t^*)F^{-1}(t)B$.
Soit $\{u, Q_s\}$ un contrôle de support, où $u(t)$, $t \in T$, est un contrôle admissible et $x(t)$, $t \in T$, sa trajectoire correspondante. Considérons un autre contrôle admissible quelconque $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$.
L'accroissement de la fonction définie dans (3.1) est :

$$\begin{aligned}
\triangle J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) \\
&= \int_0^{t^*} (Dx(t^*) + c)' q(t) \Delta u(t) dt + \Gamma \\
&= \sum_{i=1}^{r} \int_0^{t^*} (Dx(t^*) + c)' q_i(t) \Delta u_i(t) dt + \Gamma,
\end{aligned}$$

où $\Gamma = \frac{1}{2} \Delta x'(t^*) D \Delta x(t^*) \geq 0$. En vertu de la relation (3.8) et $G\Delta x(t^*) = 0$, nous obtenons :

$$(Dx(t^*) + c)' q(t) = y' p(t) - E'(t),$$

$$\begin{aligned}
\triangle J(u) &= \int_0^{t^*} y p(t) \Delta u(t) dt - \int_0^{t^*} E'(t) \Delta u(t) dt + \Gamma \\
&= 0 - \int_0^{t^*} E' \Delta u(t) dt + \Gamma = -\sum_{i=1}^{r} \int_0^{t^*} E_i(t) \Delta u_i(t) dt + \Gamma.
\end{aligned}$$

Notons $T_i^+ = \{t \in T : E_i(t) > 0\}$, $\quad T_i^- = \{t \in T : E_i(t) < 0\}$, $\quad i = 1, ..., r$, ainsi, l'accroissement de la fonctionelle prend la forme finale suivante :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = -\sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^+} E_i(t)(\bar{u}_i(t) - u_i(t)) dt - \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^-} E_i(t)(\bar{u}_i(t) - u_i(t)) dt + \Gamma. \tag{3.9}$$

3.2.1 Estimation de Suboptimalité

Soit u^0 une solution optimale du problème(3.1) - (3.3). En substituant dans la formule d'accroissement(3.9) le vecteur $\bar{u}$ par u^0, nous obtenons :

$$J(u) - J(u^0) = -\sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^+} E_i(t)(u_i^0(t) - u_i(t))dt + \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^-} E_i(t)(u_i^0(t) - u_i(t))dt - \Gamma.$$

Puisque $d_i^- \leq u_i^0(t) \leq d_i^+$ et $\Gamma \geq 0$, alors :

$$J(u) - J(u^0) \leq \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^+} E_i(t)(d_i^+ - u_i(t))dt + \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^-} E_i(t)(d_i^- - u_i(t))dt.$$

La quantité

$$\beta(u, Q_s) = \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^+} E_i(t)(d_i^+ - u_i(t))dt + \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^-} E_i(t)(d_i^- - u_i(t))dt \tag{3.10}$$

est appelée estimation de suboptimalité et vérifie toujours inégalité :

$$J(u) - J(u^0) \leq \beta(u, Q_s). \tag{3.11}$$

Ainsi, si $\beta(u, Q_s) \leq \varepsilon$, alors u est une solution ε-optimale du problème(3.1) - (3.3).

3.2.2 Critère d'optimalité

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *(Critère d'optimalité) . Les relation*

$$\begin{cases} u_i(t) = d_i^+, & si \quad E_i(t) > 0, \\ u_i(t) = d_i^-, & si \quad E_i(t) < 0, \quad t \in T, \quad i = 1, \dots, r, \\ u_i(t) \in \left[d_i^-, d_i^+\right] & si \quad E_i(t) = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

Sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence aussi nécessaires, pour l'optimalité de contrôle de support $\{u, Q_s\}$.

Démonstration. .(Suffisance).

Soit $\{u, Q_s\}$ un contrôle de support vérifiant les relations (3.12). Considérons un autre contrôle admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$. En vertu de la relation (3.9) et en utilisant les relation (3.12), nous obtenons

$$\Delta J(u) = \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^+} E_i(t)(d_i^+ - \bar{u}_i(t))dt + \sum_{i=1}^{r} \int_{T_i^-} E_i(t)(d_i^- - \bar{u}_i(t))dt + \Gamma \geq 0. \tag{3.13}$$

Alors, la solution u est optimale pour le problème (3.1) (3.3).
La démonstration de la nécessité est similaire à la méthode décrite dons [7]. □

Nous pouvons aussi écrire $E^{'}(t) = \psi^{'}(t)B$, où $\psi(t)$, $t \in T$, est la solution du système conjugué

$$\dot{\psi}(t) = -A^{'}\psi(t), \quad \psi(t^*) = G^{'}y - Dx(t^*) - c. \tag{3.14}$$

En formait le Hamiltonien $H(x, \psi, u) = \psi^{'}(Ax+Bu)$, nous avons le principe du maximum de support suivant :

Théorème 3.2.2. *(principe du maximum de support).*
soit $\{u, Q_s\}$ une contrôle de support admissible. pour l'optimalité de contrôle u, il est suffisant, et aussi nécessaire dons le cas de la non dégénérescence de $\{u, Q_s\}$, que la condition du maximum suivant sont satisfaite :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(x(t), \psi(t), v), t \in T. \tag{3.15}$$

3.3 Algorithme

Cet algorithme est construit sans discrétisation du système (3.2). Le processus de résolution consiste initialement à résoudre un problème quadratique auxiliaire. La solution de ce dernier nous permettra de construire un contrôle de support admissible $(\bar{u}, \tilde{Q}_s)$ tel que $J(\bar{u}) < J(u)$. Ensuite, nous déterminons via une méthode duale un nouveau support $\bar{Q}_s$ satisfaisant la relation $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) \leq \beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s)$. Ces transformations sont réitérées jusqu'à ce que les condition de passage à la procedure finale soient obtenues. Au final, nous résolvons un système d'équations dans le but d'obtenir une solution optimale de meilleure précision.

3.3.1 Changement de contrôle

Supposons donné $\varepsilon \geq 0$ et soit $\{u, Q_s\}$ un contrôle de support initial tel que $\beta(u, Q_s) > \varepsilon$. Faisons une itération $\{u, Q_s\} \to \left\{\bar{u}, \tilde{Q}_s\right\}$ tel que $J(\bar{u}) < J(u)$. Choisissons deux nombres $\eta > 0$ et $h > 0$ et construisons les ensembles $T_\eta = \{t \in T : \eta(t) \leq \eta\}$, $T_* = T \backslash T_\eta$, où $\eta(t) = \min_{i \in I} |E_i(t)|$, $t \in T$. Subdivision l'ensemble T_η en N intervalles $[\tau_j, \tau^j]$, $j = 1, ..., N$, de telle sorte que $\tau_j < \tau^j \leq \tau_{j+1}$, $\tau^j - \tau_j \leq h$, $T_s \subset \{\tau_j, j = 1, ..., N\}$, $u_i(t) = u_{ij} = const$, $t \in [\tau_j, \tau^j)$, $j = 1, ..., N$, $i = 1, ..., r$. Calculons pour $i = 1, ..., r$, $j = 1, ..., N$:

$$\beta_{ij} = -\int_{\tau_j}^{\tau^j} E_i(t)dt, \quad z_{ij} = \int_{\tau_j}^{\tau^j} q_i(t)dt, \quad v_{ij} = \int_{\tau_j}^{\tau^j} p_i(t)dt,$$

$$\beta_{N+1} = -\sum_{i=1}^{r} \int_{T_*} E_i(t)\alpha_i(t)dt, \quad Z_{N+1} = \sum_{i=1}^{r} \int_{T_*} q_i(t)\alpha_i(t)dt,$$

$$v_{N+1} = \sum_{i=1}^{r} \int_{T_*} p_i(t)\alpha_i(t)dt,$$

où

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} d_i^+ - u_i(t), & \text{si} \quad E_i(t) > \eta, \\ d_i^- - u_i(t), & \text{si} \quad E_i(t) < -\eta. \end{cases}$$

Posons :

$S = \{1, 2, ..., N+1\}$, $l = (l_{11}, ..., l_{1N}, ..., l_{r1}, ..., l_{rN}, l_{N+1})$, $\beta = (\beta_{11}, ..., \beta_{1N}, ..., \beta_{r1}, ..., \beta_{rN}, l_{N+1})$, $Z = (z_{11}, ..., z_{1N}, ..., z_{r1}, ..., z_{rN}, z_{N+1})$.

Les vecteurs l, β sont de dimension $(Nr + 1)$ et le matrice Z est d'ordre $n \times (Nr + 1)$. Considérons le problème de support auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \min \Delta J(u) = \min \phi(l) = \beta' l + \frac{1}{2} l' Z' DZL, \\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{N} v_{ij} l_{ij} + v_{N+1} l_{N+1} = 0, \\ d_i^- - u_{ij} \leq l_{ij} \leq d_i^+ - u_{ij}, \quad j = 1, ..., N, \quad i = 1, ..., r, \quad 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \end{cases} \tag{3.16}$$

Nous pouvons résoudre le problème (3.16) par la méthode et soit l^{ε_1} une solution réalisable ε_1-optimale. le contrôle admissible $\bar{u}(t)$, $t \in T$, défini par les relations [8] :

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} u_{ij} + l_{ij}^{\varepsilon_1}, t \in [\tau_j, \tau^j), & j = 1, ..., N, \\ u_i(t) + l_{N+1}^{\varepsilon_1} \alpha_i(t), & t \in T_*, \quad i = 1, ..., r, \end{cases}$$

vérifie l'inégalité

$$J(\bar{u}) < J(u).$$

3.3.2 Changement de support

Soit le contrôle de support $\{\bar{u}, \tilde{Q}_s\}$ déterminer après la résolution du problème (3.16). Calculons à l'aide des formules (3.7) et (3.8) le co-contrôle $\tilde{E}(t)$, $t \in T$, correspondant au contrôle de support $\{\bar{u}, \tilde{Q}_s\}$ et construisons le quasicontrôle $\tilde{\omega}(t) = (\tilde{\omega}_1(t), ..., \tilde{\omega}_r(t))'$, $t \in T$, où

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i(t) = d_i^+, & \text{si} \quad \tilde{E}_i(t) > 0; \\ \tilde{\omega}_i(t) = d_i^-, & \text{si} \quad \tilde{E}_i(t) < 0; \\ \tilde{\omega}_i(t) \in \left[d_i^-, d_i^+\right] & \text{si} \quad \tilde{E}_i(t) = 0, \quad i = 1, ..., r. \end{cases}$$

la quasitrajectoire $\tilde{\kappa}(t)$, $t \in T$, correspondant à ce quasicontrôle vérifie l'équation :

$$\dot{\tilde{\kappa}}(t) = A\tilde{\kappa}(t) + B\tilde{\omega}(t), \quad \tilde{\kappa}(0) = x_0, \quad t \in T.$$

Introduisons deux paramètres $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$ et notons

$$T_i^* = \{t \in T : \quad sign \quad \tilde{E}_i(t) \neq \quad sign E_i(\tilde{\omega}, t)\}, \quad i = 1, ..., r,$$

où $E(\tilde{\omega}, t)$, $t \in T$, est le co-contrôle construit à partir du couple $\{\tilde{\omega}, \tilde{Q}_s\}$.
Si

$$\|G\tilde{\kappa}(t^*) - g\| \leq \mu_1, \quad |T_i^*| \leq \mu_2, \quad i = 1, ..., r, \tag{3.17}$$

alors, on passe à la procedur finale décrite ci-après.
Supposons que les condition (3.17) ne sont pas vérifiées et $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) > \varepsilon$. Si $G\tilde{\kappa}(t^*) = g$, alors on construit un nouveau contrôle admissible de la forme

$$\bar{\bar{u}}(t) = \bar{u}(t) + \theta(\tilde{\omega}(t) - \bar{u}(t)), t \in T, 0 < \theta \leq 1,$$

avec

$$\theta = \min\{1, \theta_{\gamma_0}\}, \theta_{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s)}{\gamma_0}, & \text{si} \quad \gamma_0 > 0, \\ \infty, & \text{si} \quad \gamma_0 = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

et

$$\gamma_0 = (\tilde{\kappa}(t^*) - \bar{x}(t^*))^T D(\tilde{\kappa}(t^*) - \bar{x}(t^*)),$$

où $\bar{x}(t)$, $t \in T$, est la trajectoire correspondante au contrôle $\bar{u}$. Nous avons la relation :

$$J(\bar{\bar{u}}) - J(\bar{u}) = -\theta\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) + \theta^2\frac{\gamma_0}{2} \leq -\frac{1}{2}\theta\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) < 0. \tag{3.19}$$

Alors, nous commençons une nouvelle itération avec le contrôle de support $\{\bar{\bar{u}}, \tilde{Q}_s\}$. Dans le cas où $G\tilde{\kappa}(t^*) \neq g$, nous considérerons le problème dual du problème (3.1)

- (3.3) défini par :

$$
\begin{cases}
\max_{\lambda} L(\lambda) = -\frac{1}{2}\kappa' D\kappa + y' g - \psi'(0)x_0 + \int_0^{t^*} v'(t)d^- dt \\
\qquad\qquad - \int_0^{t^*} \omega'(t)d^+ dt, \\
\psi'(t)B + v'(t) - \omega'(t) = 0, \quad v(t) \geq 0, \quad \omega(t) \geq 0, \quad t \in T, \\
\dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = G'y - D\kappa - c,
\end{cases}
\tag{3.20}
$$

où $\lambda = (\kappa, y, v(t), \omega(t), t \in T)$, $\kappa \in R^n$, $y \in R^m$.

En fixant le vecteur $\kappa = \bar{x}(t^*)$, le problème (3.20) devient linéaire :

$$
\begin{cases}
\max L_{\bar{u}}(\lambda) = -\frac{1}{2}\bar{x}'(t^*)D\bar{x}(t^*) + y' g - \psi'(0)x_0 \\
\qquad\qquad + \int_0^{t^*} v'(t)d^- dt - \int_0^{t^*} \omega'(t)d^+ dt, \\
\psi'(t)B + v'(t) - \omega'(t) = 0, \quad v(t) \geq 0, \quad \omega(t) \geq 0, \quad t \in T, \\
\dot{\psi} = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = G'y - D\bar{x}(t^*) - c.
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

Le vecteur $\tilde{\lambda} = (\tilde{y}, \tilde{v}(t), \tilde{\omega}(t), t \in T)$, où

$$
\begin{cases}
\tilde{y}' = \left((D\bar{x}(t^*) + c)' q_i(\tau_j), i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s\right)' p^{-1}(\tilde{Q}_s), \\
\tilde{v}_i(t) = 0, \tilde{\omega}_i(t) = \tilde{E}_i(t), pour \tilde{E}_i(t) \geq 0, \\
\tilde{v}_i(t) = -\tilde{E}_i(t), \tilde{\omega}_i(t) = 0, pour \tilde{E}_i(t) < 0, t \in T, i = 1, ..., r,
\end{cases}
\tag{3.22}
$$

est une solution réalisable duale accordée du problème (3.21). Calculons le m-vecteur

$$
\gamma(\tilde{I}_s, \tilde{J}_s) = (\gamma_{ij}, i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s) = P^{-1}(\tilde{Q}_s)[g - G\tilde{\kappa}(t^*)],
$$

et posons $|\gamma_{i_0 j_0}| = \max |\gamma_{ij}|, i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s$.

Faisons une itération du problème dual (3.21) en construisant une autre solution duale accordée $\bar{\lambda} = (\bar{y}, \bar{v}(t), \bar{\omega}(t), t \in T)$, du problème (3.21) selon les relation du problème dual (3.22), où $\bar{\lambda} = \tilde{\lambda} + \sigma\Delta\lambda$; $\bar{y} = \tilde{y} + \sigma\Delta y$; $\bar{v}(t) = \tilde{v}(t) + \sigma\Delta v(t)$; $\bar{\omega}(t) = \tilde{\omega}(t) + \sigma\Delta\omega(t)$; $\bar{E}(t) = \tilde{E}(t) + \sigma\delta(t)$; $\delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t), ..., \delta_r(t))$, $t \in T$, $\sigma \geq 0$.

Posons

$$
\Delta y^T = e^T P^{-1}(\tilde{Q}_s) \quad sign \quad \gamma(i_0 j_0), \quad \delta(t) = \Delta y^T p(t),
$$

où $e = (e_{ij}, i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s)$, $e_{ij} = 0$, $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, $e_{i_0 j_0} = 1$.

Déterminons les fonctions $\sigma_i(t), t \in T, i = 1, ..., r$:

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} -\frac{\tilde{E}_i(t)}{\delta_i(t)}, & \text{si} \quad \tilde{E}_i(t)\delta_i(t) < 0; \\ 0, & \text{si} \quad [\tilde{E}_i(t) = 0, \delta_i(t) > 0, \tilde{\omega}_i(t) \neq d_i^+] \\ & \text{où} \quad [\tilde{E}_i(t) = 0, \delta_i(t) < 0, \tilde{\omega}_i(t) \neq d_i^-]; \\ \infty & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

Construisons pour $i = 1, ..., r$, les ensemble $T(i, \sigma) = \{t \in T : \sigma_i(t) < \sigma\}$, $T^+(i, \sigma) = \{t \in T(i, \sigma) : \tilde{E}_i(t) > 0\}$ et $T^-(i, \sigma) = \{t \in T(i, \sigma) : \tilde{E}_i(t) < 0\}$.
Il est claire que

$$sign\bar{E}_i(t) = \begin{cases} -sign \quad \tilde{E}_i(t), & \text{si} \quad t \in T(i, \sigma); \\ sign \quad \tilde{E}_i(t), & \text{si} \quad t \in T \backslash (i, \sigma). \end{cases}$$

Calculons l'accroissement du critère de qualité du problème (3.21)

$$L_{\bar{u}}(\bar{\lambda}) - L_{\bar{u}}(\tilde{\lambda}) = \sigma|\gamma_{i_0 j_0}| + \sigma \sum_{i=1}^{r} \int_0^{t^*} \delta_i(t)\tilde{\omega}_i(t)dt + \sigma \sum_{i=1}^{r} \int_0^{t^*} (\Delta v_i(t)d_i^-$$

$$-\Delta\omega_i(t)d_i^+)dt$$

$$= \sigma|\gamma_{i_0 j_0}| + \sum_{i=1}^{r}(d_i^+ - d_i^-)\left(\int_{T^-(i,\sigma)}[\tilde{E}_i(t) + \sigma\delta_i(t)]dt - \int_{T^-(i,\sigma)}[\tilde{E}_i(t) + \sigma\delta_i(t)]dt\right).$$

Ainsi, la vitesse de changement du critère de qualité dans la direction $\Delta\lambda$ est :

$$\alpha(\sigma) = |\gamma_{i_0 j_0}| - \sum_{i=1}^{r}(d_i^+ - d_i^-) \int_{T(i,\sigma)} |\delta_i(t)|dt. \tag{3.23}$$

Nous avons par construction $\alpha(0) = |\gamma_{i_0 j_0}| > 0, \quad \alpha(\bar{\sigma}) < \alpha(\sigma), \quad \forall(\bar{\sigma}) > \sigma$.
Déterminons $\sigma_0 \geq 0$ tel que $\alpha(\sigma_0 - \xi) > 0$, $\alpha(\sigma_0 + 0) \leq 0$, pour tout $0 < \xi < \sigma_0$. Soit $(i_1, \tau_{j_1}) \in \{(i, t) : i \in I, t \in T\} \setminus \{(i, \tau_j) : i \in \tilde{I}_j, j \in \tilde{J}_s\}$ un couple tel que $\tilde{E}_{i_1}(\tau_{j_1}) + \sigma_0\delta_{i_1}(\tau_{j_1}) = 0$, $\delta_{i_1}(\tau_{j_1}) \neq 0$. Changeons le support $\tilde{Q}_s$ par $\bar{Q}_s = \{\bar{I}_s, \bar{T}_s\}$, $\bar{I}_s = \{\bar{I}_j, j \in \bar{J}_s\}$, $\bar{T}_s = \{\tau_j, j \in \bar{J}_s\}$, comme suite :

1) Si $j_1 \notin \tilde{J}_s$ et $\tilde{I}_{j_0} = \{i_0\}$, alors $\bar{J}_s = (\tilde{J}_s \backslash j_0) \cup j_1$, $\bar{I}_j = \tilde{I}_j$, $j \in \bar{J}_s \backslash j_1$, $\bar{I}_{j_1} = \{i_1\}$;
2) Si $j_1 \notin \tilde{J}_s$ et $|\tilde{I}_{j0}| > 1$, alors $\bar{J}_s = \tilde{J}_s \cup j_1$, $\bar{I}_j = \tilde{I}_j$, $j \in \tilde{J}_s \backslash j_0$,$\bar{I}_{j_0} = \tilde{I}_{j_0} \backslash i_0$, $\bar{I}_{j_1} = \{i_1\}$;
3) Si $j_1 \in \tilde{J}_s$ et $\tilde{I}_{j_0} = \{i_0\}$, alors $\bar{J}_s = \tilde{J}_s \backslash j_0$, $\bar{I}_j = \tilde{I}_j$, $j \neq j_1$, $\bar{I}_{j_1} = \tilde{I}_{j_1} \cup i_1$;
4) Si $j_1 \in \tilde{J}_s$ et $|\tilde{I}_{j0}| > 1$, alors $\bar{J}_s = \tilde{J}_s$, $\bar{I}_j = \tilde{I}_j$, $j \neq j_0$, $j \neq j_1$, $\bar{I}_{j_0} = \tilde{I}_{j_0} \backslash i_0$, $\bar{I}_{j_1} = \tilde{I}_{j_1} \cup i_1$;

En changeant $\tilde{Q}_s$ par le nouveau support $\bar{Q}_s$, la valeur de la fonctionnelle dans le problème (3.21) diminuera de la quantité $\int_0^{\sigma_0} \alpha(\sigma)d\sigma$. Nous avons alors

$$\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) = \beta(\bar{u}, \tilde{Q}_s) - \int_0^{\sigma_0} \alpha(\sigma)d\sigma. \tag{3.24}$$

Si $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) \leq \varepsilon$, alors nous arrêtons le processus de résolution du (3.1) - (3.3).
Dans le cas contraire, nous commencerons une nouvelle itération avec $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$, ou alors nous passerons à la procédure finale si les condition (3.17) sont satisfaites pour $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$.

3.3.3 Procédure Finale

Supposons que les conditions (3.17) sont satisfaites pour le quasicontrôle $\tilde{\omega}(t)$, $t \in T$, et la quasitrajectoire $\tilde{\kappa}(t), t \in T$, correspondant au contrôle de supporte $\{\bar{u}, \tilde{Q}_s\}$. Soit $\{t_1, ..., t_s\}$, $m \leq s \leq n$, l'ensemble de tous les points de T tel que $0 \leq t_1 < ... < t_s \leq t_*$, $\tilde{E}_i(t_j) = 0$, $i \in I_j \neq \emptyset$, $\tilde{E}_i(t_j) \neq 0$, $i \in I \backslash I_j$, $j \in J = \{1, ..., s\}$.
Considérons le cas ou $|I_j| = 1$ et $\dot{\tilde{E}}_i(t_j) \neq 0$, $i \in I_j$, $j \in J$.
La procédure finale consiste à chercher la solution y, $\tau = (\tau_j, j \in J)$ des $(m+s)$ équations du système

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in I_j, j \in J} d_{ij} \int_{t_j}^{\tau_j} p_i(t)dt + g - G\tilde{\kappa}(t^*) = 0, \\ E_i(y, \tau, \tau_j) = 0, \quad i \in I_j, \quad j \in J, \end{cases} \tag{3.25}$$

où $d_{ij} = (d_i^+, d_i^-)$ sign $(\dot{\tilde{E}}_i(t_j))$, $E_i(y, \tau, t) = y' p_i(t) - (D\kappa(t^*, \tau) + c)' q_i(t)$; $\kappa(t, \tau), t \in T$, est la trajectoire correspondante au contrôle $\omega(t, \tau) = (\omega_i(t, \tau), i \in I)$, $t \in T$, défini comme suit : soit $t_{j1}, ..., t_{jp}$, $0 \leq p \leq s$, les racines de la composante $\tilde{E}_i(t)$ sur l'ensemble T. Si $p = 0$, alors nous posons $\omega_i(t, \tau) = \tilde{\omega}_i(t)$, $t \in T$. Si $p \geq 1$, nous définirons $\omega_i(t, \tau)$ comme suit :

$$\omega_i(t, \tau) = \begin{cases} d(i, j_1), & t \in [0, \tau_{j1}); \\ d(i, j_q), & t \in [\tau_{jq-1}, \tau_{jq}), \quad q = 2, ..., p; \\ d_i^+ + d_i^- - d(i, j_p) & t \in [\tau_{jp}, t_*], \end{cases}$$

où $d(i, j) = \frac{1}{2}(d_i^+ + d_i^- - d_{ij})$.
Nous pouvons résoudre le système (3.25) par la méthode de Newton, avec l'approximation initiale $y^{(0)} = y_0$, $\tau^{(0)} = (t_j, j \in J)$, où y_0 est le vecteurs (3.7), construit avec le couple $\{\tilde{\omega}, \tilde{Q}_s\}$. Alors, pour des paramètres μ_1 et μ_2 assez petits, le contrôle optimal prend la forme suivante :

$$u^{(0)}(t) = \omega(t, \tau), \quad t \in T.$$

3.4 Exemples

Considérons le problème de la distance minimale entre deux points matériels, dont les équations de mouvement sont données par [16] :

$$\ddot{y}_1 = u_1, \quad y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad \ddot{y}_2 = u_2, \quad y_2(0) = 2, \quad \dot{y}_2(0) = 0, \tag{3.26}$$

où $|u_1(t)| \leq 1$, $|u_2(t)| \leq 1$, $t \in T = [0, t^*]$, $t^* = 1$. Il s'agit de trouver deux contrôles admissible $u_1^0(.)$, $u_2^0(.)$ tels qu'à l'instant terminal, les deux points matériels aient la même vitesse et une distance minimale entre eux.
En posant $x_1 = y_1, x_2 = \dot{y}_1, x_3 = y_2, x_4 = \dot{y}_2, x = (x_1, x_2, x_3, x_4)', u = (u_1, u_2)'$.
Nous obtenons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x_2} = u_1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x_3} = x_4, & x_1(0) = 2, \\ \dot{x_4} = u_2, & x_1(0) = 0. \end{cases}$$

cet exemple présentera un cas spéciale du problème(3.1) - (3.3) :

$$\min J(u) = \frac{1}{2}(x_1(t^*) - x_3(t^*))^2 = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}(x_1^2(t^*) + x_3^2(t^*) - 2x_1(t^*)x_3(t^*)),$$

avec $c = 0$, $g = 0$, $x^0 = (0, 0, 2, 0)$, $d^- = (-1, -1)$, $d^+ = (1, 1)$, $G = (0, 1, 0, -1)$,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

la matrice $q(t)$ et le vecteur $p(t)$, $t \in T$ sont :

$$q(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(t) = Gq(t) = (1, -1)'.$$

Le contrôle $u(t) = (u_1(t), u_2(t))' = 0$, $t \in [0, 1]$, est admissible. Nous avons ainsi $x(t^* = 1) = (0, 0, 2, 0)'$, $J(u) = 4$.

Nous assignons au contrôle admissible initial $Q_s = \{I_s, T_s\}$, $I_s = \{I_1\}$, $I_1 = \{1\}$, $T_s = \{0.25\}$.
Avec le couple $\{u, Q_s\}$, nous obtenons $P_s = 1$.
Calculons le vecteur des multiplications y et la contrôle $E(t)$ selon les formules (3.7) - (3.8) respectivement :

$$y' = [(Dx(t_*) + c)' q_i(t_j), i \in I_j, j \in J_s] P_s^{-1} = (-3, 3),$$

$$E' = (E_1(t), E_2(t)) = y' p(t) - (Dx(t^*) + c)' q(t) = (-4t + 1, \quad 4t - 1).$$

Alors

$$\begin{cases} E_1(t) > 0, & t \in [0, 0.25[, \\ E_1(t) < 0, & t \in]0.25, 1], \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} E_2(t) < 0, & t \in [0, 0.25[, \\ E_2(t) > 0, & t \in]0.25, 1]. \end{cases}$$

Ainsi, $T_1^+ = [0, 0.25[$, $\quad T_1^- =]0.25, 1]$, $\quad T_2^+ =]0.25, 1]$, $\quad T_2^- = [0, 0.25[$.
Choisissons $\varepsilon = 0$ et calculons l'estimation de suboptimalité $\beta(u, Q_s) = 1.25 > \varepsilon$.
Construisons un nouveau contrôle admissible. Posons $\eta = 2$ et $h = 0.1$. Nous avons alors $|E_1(t)| \leq 2, \quad t \in [0.25, \quad 0.75]$ et $|E_2(t)| \leq 2, \quad t \in [0.25, \quad 0.75]$,
$T_\eta = [0.25, \quad 0.75]$.
Subdivisons T_η en 5 intervalles $T_\eta = \bigcup_{i=1}^{N=5} [\tau_i, \tau^i]$ tels que :
$\tau_1 = 0.25, \quad \tau^1 = \tau_2 = 0.35, \quad \tau^2 = 0.45, \quad \tau_3 = 0.55, \quad \tau^3 = \tau_4 = 0.65, \quad \tau^4 = 0.75.$
L'ensemble T_* et les différents éléments du problème auxiliaire sont définis comme suit :
$T_* = [0, \quad 0.25[\cup]0.75, \quad 1], \quad N = 5, \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$$\alpha_1 = \begin{cases} +1, & t \in [0, \quad 0.25[, \\ -1 & t \in [0.25, \quad 1], \end{cases} \qquad \alpha_2 = \begin{cases} +1, & t \in [0.25, \quad 1], \\ -1, & t \in [0, \quad 0.25[; \end{cases}$$

$$u_1(t) = \begin{cases} u_{11} = 0, & t \in [0.25, \quad 0.35[, \\ u_{12} = 0, & t \in [0.35, \quad 0.45[, \\ u_{13} = 0, & t \in [0.45, \quad 0.55[, \\ u_{14} = 0, & t \in [0.55, \quad 0.65[, \\ u_{15} = 0, & t \in [0.65, \quad 0.75[, \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} u_{21} = 0, & t \in [0.25, \quad 0.35[, \\ u_{22} = 0, & t \in [0.35, \quad 0.45[, \\ u_{23} = 0, & t \in [0.45, \quad 0.55[, \\ u_{24} = 0, & t \in [0.55, \quad 0.65[, \\ u_{25} = 0, & t \in [0.65, \quad 0.75[; \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.04 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.46875 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.46875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0.06 & 0.05 & 0.04 & 0.03 & 0.46875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.46875 \end{pmatrix};$$

$\beta = (0.02, 0.06, 0.01, 0.25, 0.57, -0.02, -0.06, -0.01, -0.25, -0.57, -0.75)'$.
En résolvant le problème de support auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \min \Delta J(u) = \beta' l + \frac{1}{2} l' Z' D Z l, \\ \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{5} v_{ij} l_{ij} + v_6 l_6 = 0, \\ -1 - u_{ij} \leq l_{ij} \leq 1 - u_{ij}, j = \overline{1,5}, \quad i = \overline{1,2}, \quad 0 \leq l_6 \leq 1, \end{cases} \tag{3.27}$$

nous obtenons $l^0 = ((l_{ij})_{i=\overline{1,2}, j=\overline{1,5}}, l_6) = (1, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad -1, \quad -1, \quad 0, \quad -1, \quad 1, \quad 1, \quad 1)'$.
Le nouveau contrôle admissible prend alors la forme suivante :

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} 1, & t \in [0, \quad 0.15[, \\ 1, & t \in [0.15, \quad 0.25[, \\ 0, & t \in [0.25, \quad 0.35[, \\ 0, & t \in [0.35, \quad 0.45[, \\ 1, & t \in [0.45, \quad 0.55[, \\ 1, & t \in [0.55, \quad 0.65[, \\ -1, & t \in [0.65, \quad 0.75[, \\ -1, & t \in [0.75, \quad 0.85[, \\ -1, & t \in [0.85, \quad 0.95[, \\ -1, & t \in [0.95, \quad 1], \end{cases}$$

et

$$\bar{u}_2 = \begin{cases} -1, & t \in [0, \quad 0.15[, \\ -1, & t \in [0.15, \quad 0.25[, \\ 0, & t \in [0.25, \quad 0.35[, \\ 0, & t \in [0.35, \quad 0.45[, \\ 1, & t \in [0.45, \quad 0.55[, \\ 1, & t \in [0.55, \quad 0.65[, \\ -1, & t \in [0.65, \quad 0.75[, \\ 1, & t \in [0.75, \quad 0.85[, \\ 1, & t \in [0.85, \quad 0.95[, \\ 1, & t \in [0.95, \quad 1]. \end{cases}$$

L'état final et la valeur de $J(\bar{u})$ sont : $\bar{x}(1) = (0.25, 0.1, 1.87, 0.1)'$.
et $J(\bar{u}) = 2.64 < J(u) = 4$.
Pour le contrôle de support $\{\bar{u}, Q_s\}$, nous avons $\tilde{y} = (-2.4375, 2.4375)$. Alors le co-contrôle vaut :
$\tilde{E}(t) = (\tilde{E}_1(t), \tilde{E}_2(t))' = (0.8125 - 3.25t, \quad -0.8125 + 3.25t)'$.
Ainsi, $\beta(\bar{u}, Q_s) = 1 > \varepsilon$.
Nous passons alors à l'itération duale.

Itération duale

Le quasi contrôle correspondant $\tilde{\omega}(t) = (\tilde{\omega}_1(t), \tilde{\omega}_2(t))$, $t \in [0, 1]$ est :

$$\tilde{\omega}_1(t) = \begin{cases} +1, & t \in [0, \quad 0.25[, \\ -1, & t \in [0.25, \quad 1]. \end{cases} \qquad et \quad \tilde{\omega}_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \quad 0.25[, \\ +1, & t \in [0.25, \quad 1]. \end{cases}$$

L'état finale correspondant est : $\tilde{\kappa}(1) = (\frac{-1}{16}, \frac{-1}{2}, \frac{33}{16}, \frac{1}{2})'$, et $y(\tilde{\omega}) = \frac{-51}{16}$,
et $E_1(\tilde{\omega}) = -E_2(\tilde{\omega}) = -\frac{17}{4}t + \frac{17}{16}$, $t \in [0, 1]$, avec $G\tilde{\kappa}(1) - g = (-1)', \gamma_{11} = 1$, $\delta(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t))' = (1, -1)'$, $t \in T$;.
Afin de déterminer les ensembles $T(1, \sigma)$ et $T(2, \sigma)$, calculons :

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \begin{cases} \infty, & t \in [0, \frac{1}{4}[, \\ 4t - 1, & t \in [\frac{1}{4}, 1[, \end{cases}$$

ainsi

$$T(1,\sigma) = T(2,\sigma) = \left[\frac{1}{4}, \frac{(1+\sigma)}{4}\right[, \quad \sigma \geq 0;$$

Alors, $\alpha(\sigma) = 1 - \sigma; \quad \sigma^0 = 1$. De l'équation $\tilde{E}_1(\tau) + \sigma^0 \delta_1(\tau) = 0$, nous obtenons $\tau = \frac{1}{2}$. En changeant le support Q_s par $\bar{Q}_s = \{\bar{I}_s, \bar{T}_s\}$, $\bar{I}_s = \{1\}$, $\bar{T}_s = \{\frac{1}{2}\}$. Le co-contrôle correspondant au support $\{\bar{u}, \bar{Q}_s\}$ est donné par :

$$(\bar{E}_1(t), \bar{E}_2(t)) = \bar{E}_1(t) = -\bar{E}_2(t) = -4t + 2, \quad t \in T, \quad \bar{a}vec$$

y=(-2,2)

où

$$\begin{cases} \bar{E}_1(t) > 0, & t \in [0, \quad 0.5[, \\ \bar{E}_1(t) < 0, & t \in]0.5, \quad 1], \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \bar{E}_2(t) < 0, & t \in [0, \quad 0.5[, \\ \bar{E}_2(t) > 0, & t \in]0.5, \quad 1]. \end{cases}$$

Nous avons ainsi

$$\beta(\bar{u}, \bar{Q}_s) = \beta(\bar{u}, Q_s) - \int_0^{\sigma^0} \alpha(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Construisons le quasicontrôle $\bar{\omega}(t) = (\bar{\omega}_1(t), \bar{\omega}_2(t))$, $t \in [0, 1]$:

$$\bar{\omega}_1(t) = \begin{cases} +1, & t \in [0, \quad 0.5[, \\ -1, & t \in [0.5, \quad 1], \end{cases} \quad et \quad \bar{\omega}_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \quad 0.5[, \\ +1, & t \in [0.5, \quad 1]. \end{cases}$$

Calculons

$\bar{\kappa}(1) = (\frac{1}{4}, 0, \frac{7}{4}, 0)'$, $y(\bar{\omega}) = (\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ et le co-contrôle correspondant $\bar{E}(\bar{\omega}, t) = (\bar{E}_1(\bar{\omega}, t), \bar{E}_2(\bar{\omega}, t))'$, $t \in T$ qui vaut :

$(\bar{E}_1(\bar{\omega}, t), \bar{E}_2(\bar{\omega}, t)) = E_1(\bar{\omega}, t) = -E_2(\bar{\omega}, t) = \dfrac{(-6t+3)'}{2}$,

avec

$$\begin{cases} \bar{E}_1(\bar{\omega}, t) > 0, & t \in [0, 0.5[, \\ \bar{E}_1(\bar{\omega}, t) < 0, & t \in [0.5, 1], \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \bar{E}_2(\bar{\omega}, t)) < 0, & t \in [0, 0.5[, \\ \bar{E}_2(\bar{\omega}, t)) > 0, & t \in [0.5, 1], \end{cases} \quad et,$$

$$G\bar{\kappa}(1) - g \neq 0.$$

Ainsi, nous passons à la procédure finale.

Procédure finale

Nous avons :

$$d_{11} = -d_{22} = -2, \quad \omega_1(t,\tau_1) = \begin{cases} +1, & t \in [0,\tau_1[, \\ -1, & t \in [\tau_1,1], \end{cases} \qquad \omega_2(t,\tau_2) = \begin{cases} -1, & t \in [0,\tau_2[, \\ +1, & t \in [\tau_1]. \end{cases}$$

$E_1(y,\tau,\tau_1)$
$= y' p_1(t) - (D\kappa(1,\tau)+c)' q_1(\tau_1)$
$= y_1 - (1-\tau_1)(-6+4\tau_1 - 2\tau_1^2 - 2\tau_2^2 + 4\tau_2),$
et
$E_2(y,\tau,\tau_2)$
$= y' p_2(t) - (D\kappa(1,\tau)+c)' q_2(\tau_2)$
$= y_2 - (1-\tau_2)(6-4\tau_1 + 2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 - 4\tau_2).$
Nous avons ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} d_{11}\int_{t_1}^{\tau_1} p_1(t)dt + d_{22}\int_{t_2}^{\tau_2} p_2(t)dt = 0, \\ E_1(y,\tau,\tau_1) = 0, \\ E_2(y,\tau,\tau_2) = 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Après résolution du système (3.26) par la méthode de Newton avec l'approximation initiale

$$y^{(0)} = y(\bar{\omega}) = \frac{-51}{16}, \quad \tau_1^{(0)} = \frac{1}{4}.$$
$$y^{(0)} = y(\bar{\omega}) = \frac{-3}{2}, \quad \tau_2^{(0)} = \frac{1}{2}.$$

Le contrôle de support optimal $\{u^0, T_s^0\}$ avec $T_s^0 = \{0.5\}$ prend la forme :

$$u_1^0(t) = \begin{cases} +1, & t \in [0,0.5[, \\ -1, & t \in [0.5,1], \end{cases} \qquad u_1^0(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,0.5[, \\ +1, & t \in [0.5,1]. \end{cases}$$

L'état final et la valeur de $\bar{J}(u)$ sont $\bar{\kappa}(1) = (\frac{1}{4}, 0, \frac{7}{4}, 0)'$, et la valeur minimale de la fonctionnelle $J(u^0) = 2.25$.
Pour le quiascontrôle $\bar{\omega}$, les condition (3.17) sont vérifiées pour $u_1 = u_2 = 0$. Donc, le contrôle $u^0(t) = \bar{\omega}$, $t \in T$. est admissible et optimal puisque dons ce cas le critère d'optimalé (3.12) est vérifié pour le de contrôle de support $\{\bar{\omega}, \bar{Q}_s\}$.

Conclusion

Dans ce chapitre, un problème de contrôle optimal multivariable linéaire-quadratique est considéré. Nous avons exposé une méthode primale-duale pour résoudre le problème posé. Pour ce faire, le critère d'optimalité est reformulé en principe de maximum de support. L'algorithme étudié est construit sur la bas du concept de support et comprend trois procédures : changement du contrôle, changement du support et procédure finale. À titre d'illustration, un exemples d'application a été traité.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le but assigné à ce travail consiste à élaborer une méthode constructive pour résoudre un problème de minimisation d'un critère quadratique, défini par l'état final d'un système dynamique linéaire, agissant au moyen d'une commande multivariable, et trouver des stratégies qui améliorent la qualité de chaque solutions, en s'appuyant notamment sur algorithme de contrôle multivarié, pour ce faire, nous avons introduit au premier chapitre quelques notions de base de la théorie de contrôle optimale, avec un intérêt particulière aux conditions d'optimalité connue sous le nom de principe de maximum.

Nous avons rappelé au deuxième chapitre la méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes inégalité, l'algorithme de résolution se base sur trois procédures essentielles : changement de commande qui consiste a diminuer la non optimalité de la commande en trouvant une autre commande admissible ; changement de support ; procédure finale qui cherche un support qui rend la quasi-commande réalisable et optimal.

Le troisième chapitre, qui est l'objectif principal de ce mémoire, dont un problème de contrôle optimal multivariable linéaire quadratique est considéré. Puis nous avons construit une méthode primale-duale pour résoudre le problème posé. Pour cela, un critère d'optimalité est reformulé, l'algorithme proposé est construit sur la base du concept de support et comprend trois procédures : le changement de contrôle, le changement du support et la procédure finale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Azi, *Optimisation des systèmes dynamiques et application en économie financière*, Thèse de Doctorat, Université A. Mira de Béjaia, 2021.

[2] M. Azi, *Introduction à la théorie de contrôle optimal*, Supporte de Cours, Centre Universitaire de Mila, 2014.

[3] M. Azi, *Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application enéconomie financière* , Mémoire de magister, Université A. Mira de Béjaia, 2010.

[4] F. Bonnans and P. Rouchon, *Commande et optimisation de système dynamiques*, Ecole Polytechnique. Paris, 2005.

[5] A. Benabdallah, F. A. Khodja, *Une introduction à la théorie du contrôle*, 2005.

[6] M.Bergounioux, *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*, Dunod, Collection Sciences Sup, 2001.

[7] M. O. Bibi, *Optimization of a linear dynamic system with double terminal constraints on the trajectories*, Optimization, 30(4) : 359-366, 1994.

[8] M. O. Bibi and S. Medjdoub, *Optimization of a linear-quadratic problem of optimal control with free initial condition* 26-th European Conference on Operational Research, EURO'13, Rome, Italy, July 01-04, (2013), Book of Abstracts : 262.

[9] B. Brahmi and M. O. Bibi, *Dual support method for solving convex quadratic programs*, Optimization, 59(6) : 851-872, 2010.

[10] R. Gabassov and F. M. Kirillova, *Methods of linear programing*, vol.3, University Press, Minsk, 1980.

[11] D. Grass, G Feichtinger, J. P. Caulkins, G. Tragler and D. A.Behrens, *Optimal control of nonlinear Processes*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[12] R. Gabassov, F. M. Kirillova and S. V. Prischepova, *Optimal feedback control*, Springer-Verlag, London, 1995.

[13] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 5, no. 4, 437-451, 1999.

[14] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle*, ournal of dynamical and control systems, Vol. 5, no. 4, 1999, 437-451.

[15] N. Khimoum, *Contrôle optimal multivariable et application à un jeu différentiel linaire quadratique*, Thèse de Doctorat, Université A. Mira de Béjaia, 2019.

[16] G. Knowles,*An introduction to applied optimal control*, University of Southern California, New York, 1981.

[17] B. Khiter and D. Layoune, *Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contrainte d'inègalités*, Mémoire de Mastre, Centre University de Mila, 2016

[18] L. S. Pontryaguine, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Misbehenko, *The mathematiccal theory of optima processes* John Wiley and Sons, New Jenay 1962.

[19] S. P. Sethi,*Optimal controle theory : applications to management sciences and economics*, Third edition, Springer Nature, Switzerland, 2019.

[20] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, Paris, 2005.

[21] E. Trélat, *Contrôle Optimal*, notes de cours, Master de Mathématiques, Université d'Orléans, 2008.

Résumé

L'objectif de ce mémoire consiste à étudier une méthode constructive pour résoudre un problème de contrôle optimal linéaire-quadratique, dont nous avons exposé, tout d'abord, les conditions nécessaires d'optimalité, ensuit nous avons représenté une méthode numérique pour la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes inégalité et commande vectorielle. Finalement, nous avons exposé de support pour la résolution d'un problème linéaire-quadratique avec commande vectorielle. Cette méthode consiste à trouver la solutions optimale en trois étapes : Changement de contrôle ; Changement de support ; Et procédure finale

Les mots clés: Contrôle Optimal, Contrôle Multivariable, Méthode de Support, Principe de Pontriaguine.

Abstract

The objetive of this memory consits in studying a constructive method to solve a quadratic linear optimal control problem. In this work we exposed in the necessary conditions of optimality. Then we represented a numerical method to solve the lineair optimal control problem with inequality contraints and vector control. Finally, we exposed a support method for solving a lineair quadratic optimal control problem . This method consiste to find the optimal solution in three stepes : Contrôle transformation ; Support transformation ; and finishing procedure.

Key words : Optimal Control, Multivariable Control, Support Methode, Pontriguine Maximum.

تلخيص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة طريقة بناءة لحل مشكلة التحكم الأمثل الخطي التربيعي. في هذا العمل ، كشفنا أولا وقبل كل شيء عن الشروط اللازمة لتحقيق الأمثل في نظام ديناميكي خطي مع قيود عدم المساواة والتحكم متعدد المتغيرات. أخيرا، درسنا طريقة الداعم لحل مشكلة التحكم الامثل في الحالة الخطية التربيعية. هذه الطريقة تعتمد على إيجاد الحل الأمثل بثلاثة مراحل: التغيير الأمثل، تغيير الداعم ، الإجراء النهائي.

الكلمات المفتاحية : التحكم الأمثل ، تحكم متعدد المتغيرات، طريقة الداعم ، مبدأ بونترياجين.