



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

**Etude et Analyse d'un système
chaotique d'ordre fractionnaire basé
sur un memristor**

Préparé par : Khalouche Imane

Belguermat Kaouter

Soutenue devant le jury

Meskine Habiba	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Boudjerida Nadjjet	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Labeled Boudjema	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2021/2022

Remerciements

Nous remercions ALLAH tout puissant pour la volonté et la patience qu'il nous a donné tout au long de nos études. Nos remerciements pour notre encadreur Dr. Boudjrida Nadjat pour ses conseils pertinents, et ses orientations sages, sa patience et vigilance, ainsi pour tous les enseignants qui ont contribué à ma formation. Nos remerciements vont aussi à tous les membres du jury Labeled Boudjemaa et Maskine Habiba qui ont accepté de juger notre travail. Enfin, nous voulons exprimer notre reconnaissance à tous nos amis et collègues pour le soutien moral et matériel. . . .

Dédicace

Dieu soit loué, qui nous a guidés et nous a accordé ce à quoi nous aspirions.



Mon père Abd alhamid.

Ma mère Zahya.

Mon frère Abd razak.

*Mes soeurs Razika Nas-
sima Foziya Ratiba Karima
Marwa.*

A ma mes grande famil

A mes chers amie Faryale Ghada Hind Salwa.

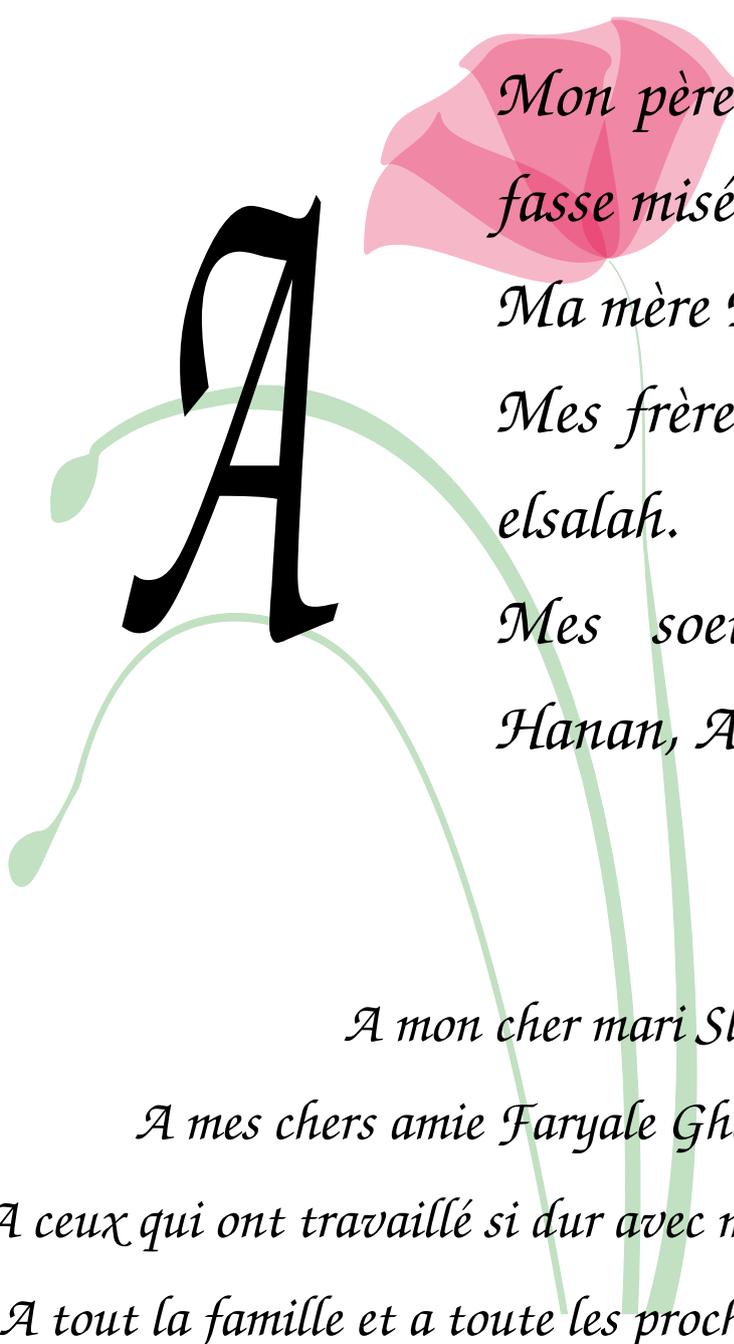
A ceux qui ont travaillé si dur avec moi, mon cher amie imane.

*Je demande a dieu de rendre ce travail utile pour que chacun en
profite.*

Belguermat Kaouter

Dédicace

Dieu soit loué car sa grâce est juste.



*Mon père Douadi que dieu lui
fasse miséricorde .*

Ma mère Djamila.

*Mes frères Badis et Mohamed
elsalah.*

*Mes soeurs Fatima, Ayda,
Hanan, Alima, Hada.*

A mon cher mari Slimane.

A mes chers amie Faryale Ghada Hind Salwa.

A ceux qui ont travaillé si dur avec moi, mon cher amie Koki.

*A tout la famille et a toute les proches, a tous ceux qui sont
dans ma mémoire et non dans mon journal .*

Khalouche Imane

Table des matières

1	<i>Notions générales sur les systèmes dynamiques chaotiques</i>	6
1.1	Système dynamique	6
1.1.1	flot	7
1.1.2	Orbite(trajectoire)	7
1.1.3	Portrait de phase	8
1.1.4	Propriétés des systèmes dynamiques	8
1.1.5	Attracteurs	8
1.1.6	Stabilité	10
1.1.7	Critère de Routh-Hirwitz dans \mathbb{R}^3	15
1.1.8	Bifurcation	15
1.2	Système chaotique	18
1.2.1	Propriétés du chaos	19
1.2.2	Route vers le chaos	20
1.2.3	Exposants de Lyapounov	20
1.2.4	Dimensions fractales des attracteurs étranges	22
2	<i>Systèmes dynamiques fractionnaires</i>	24
2.1	Fonctions utiles	24
2.1.1	Fonction Gamma	24
2.1.2	Fonction Bêta	25
2.1.3	Fonction Mittag-Leffler	26
2.2	Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire	27
2.2.1	L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,b]$	27
2.2.2	Approche de Riemann-Liouville R-L	28
2.2.3	Approche de Grünwald-Letnikov G-L	30
2.2.4	Approche de Caputo	31
2.3	Propriétés générales des dérivation et intégration fractionnaires	32

2.4	Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-liouville	34
2.5	Propriétés générales des dérivées fractionnaires	34
2.5.1	Linéarité	34
2.5.2	La règle de Leibniz	34
2.6	Stabilité des système fractionnaire	35
3	<i>Comportement dynamiques d' un système d'ordre fractionnaire basé sur un memristor</i>	37
3.1	introduction au circuit de Chua basé sur un memristor :	37
3.1.1	Memristor	38
3.1.2	système memristif	39
3.2	Chaos dans le système d'ordre entier basé sur un memristor	40
3.2.1	Les équations du systèmes	41
3.2.2	Étude théorique	42
3.2.3	Étude numérique	46
3.3	Chaos dans le système d'ordre fractionnaire basé sur les memristores	50
3.3.1	Étude théorique	50
3.3.2	Étude numérique	51

Table des figures

- 1.1 Classification des points d'équilibres 11
- 1.2 Les types des bifurcations 17

- 3.1 circuit de Chua 38
- 3.2 système memristifs. 40
- 3.3 Circuit de chua basé sur un memristor 41
- 3.4 Attracteur chaotique 46
- 3.5 Attracteur 4-périodique 47
- 3.6 Attracteur 2-périodique 47
- 3.7 Attracteur 1-périodique 48
- 3.8 Le spectre de Lyapunov 49
- 3.9 Attracteur chaotique quand $\alpha = 0.995$ 52

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent dans l'espace du temps, il sont utilisés dans de très nombreux domaines : physique, chimiques, économie, biologie,...etc. Une grande partie des systèmes dynamiques non linéaires sont des systèmes chaotiques qui sont développés par **Henri Poincaré** sur la mécanique céleste et la mécanique statistique vers 1900.

les systèmes chaotiques sont sensibles aux conditions initiales. Cette sensibilité est parmi les idées de base du chaos et la signature la plus visible de son comportement ce phénomène est ancien mais en 1963 Edward Lorenz décrit un modèle mathématique simple de trois équations différentielles. Lorenz a appelé ces systèmes présentant la dépendance sensible sur les conditions initiales comme avoir l'effet papillon.

Le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans. Il a été introduit le 30 septembre 1695, ce jour-là, Gottfried Wilhelm Leibniz a écrit une lettre à Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital, évoquant la possibilité de généraliser le sens des dérivées, de dérivée d'ordre entier à dérivée d'ordre non entier. De L'Hôpital voulait connaître le résultat pour la dérivée d'ordre $n = \frac{1}{2}$. Leibniz a répondu «un jour, des conséquences utiles seront tirées» et, en fait, sa vision est devenue réalité.

En 1971, le théoricien des circuits Leon Chua a publié un article intitulé "**Memristor : l'élément du cercle manquant**". Chua a établi le cadre théorique original du memristor et affirme qu'il s'agissait du quatrième élément de circuit de base à l'exception de la résistance et du condensateur et de l'inductance. En 2008, des chercheurs de HP Labs ont publié un article intitulé "**trouve le memristore manquant**" et affirmant avoir trouvé le memristore Chua. Depuis lors, il a intrigué les chercheurs de diverses disciplines à travers le monde. le memristor est un élément à deux bornes, non linéaire négativement.

Ces dernières années, Le système basé sur les memristors d'ordre fractionnaire est devenu un sujet brûlant dans le domaine de la science non linéaire. Un modèle de système basé sur un memristor d'ordre fractionnaire avec le memristor caractérisé par une

fonction linéaire par morceaux croissante de manière monotone a été introduit pour la première fois dans et des résultats de simulations numériques ont été fournis pour montrer l'existence du chaos. Un nouveau système d'ordre fractionnaire composé uniquement d'un memristor, d'un condensateur et d'une inductance a été étudié dans et un memristor avec une fonction de memristor polynomiale du quatrième degré a été utilisé dans le circuit chaotique le plus simple.

Ce mémoire présente l'étude de comportement d'un système dynamique chaotique basé sur un memristor d'ordre entier et d'ordre fractionnaire est structure de la manière suivante :

première chapitre, est on va rappeler quelques notions de systèmes dynamiques, la stabilité et les différents types de la bifurcations en codimension 1. Et on va découvrir et définir le chaos, présenter Exposants de Lyapounov.

Le deuxième chapitre, sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, nous citons par exemple la fonction Gamma, la fonction Bêta et Mittag-Leffler. Trois approches sont présentées, l'approche de Grünwald-Letnikov, l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo pour la généralisation des notions de dérivation entière.

le troisième chapitre, on va proposer un nouveau système memristive en remplaçant la diode dans la circuit de chua avec un memristor contrôlé en flux caractérisé par un non linéarité quadratique et conductance négative.

Ainsi, dans ce chapitre une analyse dynamique détaillée est effectuée en utilisant des méthodes théoriques et numériques dans les deux cas entier et fractionnaires, et plus spécifiquement l'étude de la stabilité, les attracteurs et exposant de Lyapounov.

Chapitre 1

Notions générales sur les systèmes dynamiques chaotiques

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions sur les systèmes dynamique, la stabilité d'un système linéaire et non linéaire, et la bifurcation en codimension 1 (neoud-col, transcritique, fourche et la bifurcation de Hopf sous-critique). Nous présentons aussi le système chaotique et leurs propriété, la Route vers le chaos et l'exposant de Lyapounov.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1. *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow T$, qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.*

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

Un système peut être :

- Cas continu : dans le cas où la composante temps est continue le système dynamique est présenté par système d'équation différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p),$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, est le valeur d'état et $p \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des paramètres.

- Cas discret : dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) :

$$x_{k+1} = f(x_k, p),$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}^m$, $k = 1, \dots, n$.

1.1.1 flot

Considérons le système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.1)$$

Définition 1.2. La correspondance $\varphi_t : x_0 \mapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t , qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps t du champs de vecteurs f .

Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temps t qui correspond à la donnée initiale $x : (t, x) \mapsto \varphi(t, x) = \varphi_t(x) = x(t)$. Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de $t \in]-\infty, +\infty[$.

Remarque 1.1. $\varphi_t(x_0)$ est vérifié :

- (Régularité du flot)
Si f est de classe C^K le flot est lui-même de classe C^K .
- (Transitivité du flot) Le flot vérifie, pour tous t et $s \in \mathbb{R}^+$

$$\varphi_t(\varphi_s) = \varphi_{s+t}.$$

- $\varphi_0(x_0) = x_0$.

1.1.2 Orbite(trajectoire)

Définition 1.3. Soient $(M, \varphi^t)_{t \in G}$ un système dynamique et x un état de l'espace des phases. On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow M \\ t &\longrightarrow \varphi^t(x) \end{aligned}$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel.

1.1.3 Portrait de phase

Définition 1.4. *Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. Étant donné un système dynamique, sans résoudre les équations, on peut toujours, à un instant t , représenter graphiquement (à l'aide de flèches) le champ des \dot{x} (le champ des vitesses si x sont des coordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système.*

1.1.4 Propriétés des systèmes dynamiques

1.1.4.1 point d'équilibre

Définition 1.5. *Un point d'équilibre de (1.1) est un point x^* de l'espace des phases vérifiant $f(x^*) = 0$ (ou pour tout $\varphi(t, x^*) = x^*$) sinon on dit que x^* est un point ordinaire.*

Remarque 1.2. Parmi les points ordinaires on distingue les points périodiques et les points récurrents.

- Un point ordinaire x^* est dit périodique s'il existe $T > 0$ tq $\varphi(T, x^*) = x^*$.
- Un point ordinaire et non périodique a est dit récurrent si pour tout voisinage V de x^* et tout $T \in \mathbb{R}$ il existe $t > T$ tq $\varphi(t, x^*) \in V$.

1.1.4.2 Ensembles limites

Ensemble ω -limite : Un point $a \in U$ est un point ω -limite d'une trajectoire $\varphi(\cdot, x_0)$ de (1.1), s'il existe une suite $(t_n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x_0) = a$. L'ensemble de tout les points ω -limite d'une trajectoire γ_{x_0} est appelé ensemble ω -limite de γ_{x_0} et noté $\omega(\gamma_{x_0})$ ou $\omega(x_0)$.

Ensemble α -limite : Un point $b \in U$ est un point α -limite d'une trajectoire $\varphi(\cdot, x_0)$ de (1.1), s'il existe une suite $(t_n) \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, x_0) = b$. L'ensemble de tout les points α -limite d'une trajectoire γ_{x_0} est appelé ensemble α -limite de γ_{x_0} et noté $\alpha(\gamma_{x_0})$ ou $\alpha(x_0)$.

1.1.5 Attracteurs

Définition 1.6. *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire un ensemble vers laquelle évolue*

un système quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

1. Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x)$ restre dans U si $x_0 \in V$.
2. $\bigcap \varphi_t(V) = A, t \geq 0$.
3. Il existe une orbite dense dans A .

1.1.5.1 Bassin d'attraction

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré, c'est l'ensemble

$$W = \bigcup \varphi_t(V), \quad t < 0.$$

1.1.5.2 Types d'attracteurs

On distingue deux types d'attracteurs : attracteur régulier et attracteur étrangé (chaotique).

1. Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois sortes :

- (a) **Le point fixe** : c'est l'attracteur le plus simple, il est représenté par un point dans l'espace des phases.
- (b) **Cycle ω -limite (attracteur périodique)** : C'est une trajectoire fermée qui attire toutes les trajectoires proches.
- (c) **Attracteur quasi périodique (tore)** : C'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un tore et remplit sa surface de manière dense et finira par se refermer sur elle-même au bout d'un temps infini.

2. Attracteurs étrangé :

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes chaotiques, il a été introduit par Ruelle et Takens. Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

- (a) Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.
- (b) La dimension de l'attracteur étrange est fractale (non entière) pour un système continue autonome $2 < d < n$, n la dimension de l'espace des phases.

- (c) Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarteler l'une de l'autre).

1.1.6 Stabilité

Le concept de stabilité dynamique du système caractérise le comportement du système sa trajectoire autour du point d'équilibre. Analyse de la stabilité du système. Ainsi, la dynamique permet d'étudier l'évolution de ses trajectoires d'état, lorsque l'état initial est proche du point d'équilibre. Il existe certains concepts de stabilité des systèmes dynamiques, tels que la stabilité de Lyapounov.

1.1.6.1 Classification des points d'équilibres

Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax,$$

où $x = (x_1, x_2, \dots)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A .

1. Si les valeurs propres λ_i sont réelles et de même signe, le point x^* est appelée nœud instable si $\lambda_i > 0$, et nœud stable $\lambda_i < 0$.
2. Si les valeurs propres λ_i sont réelles, non nulles et de signe différent, Le point x^* est appelée point selle.
3. Si les valeurs propres λ_i sont complexes, le point x^* est appelée :
 - (a) foyer stable si $Re(\lambda_i) < 0$.
 - (b) foyer instable si $Re(\lambda_i) > 0$.
 - (c) centre si $Re(\lambda_i) = 0$.

Cas d'un système non linéaire

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1.2}$$

avec f une fonction non linéaire.

Définition 1.7. *Stabilité locale simple et asymptotique le point d'équilibre x_0 du système (1.2) est :*

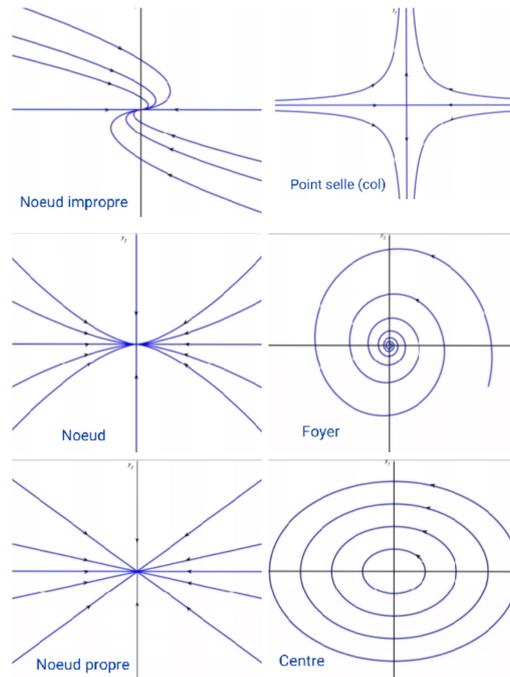


FIGURE 1.1 – Classification des points d'équilibres

– *stable au sens de Lyapounov si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x\| < \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

– *asymptotiquement stable si :*

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0.$$

– *exponentiellement stable si :*

* *Un équilibre qui n'est pas stable est dit instable.*

La stabilité en dimension n quelconque

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile, en effet, en raison de leur comportement assez compliqué, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapounov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de points d'équilibre des systèmes linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisqu'elle se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système en ce point. Pour étudier la stabilité d'un système dynamique non linéaire (1.1) on a deux méthodes :

- Méthode indirecte basé sur la linéarisation de la fonction f .
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelé fonction de Lyapounov.

1. méthode directe (méthode de Lyapounov)

Cette méthode basée sur utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapounov.

Théorème 1.1. (*Fonction de Lyapounov et stabilité globale*)

Si x^ est un point d'équilibre du système et si la fonction V de classe C^1*

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[,$$

est telle que

- $V(x^*) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq x^*$.
- V décroît le long de toutes les trajectoires ($\frac{dV}{dt} \leq 0$).

Alors x^ est stable au sens de Lyapounov. Si de plus pour $x \neq x^*$, $\frac{dV}{dt} < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov. Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x^* \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tendent vers x^* (on dit que x^* est globalement asymptotiquement stable), mais si $\frac{dV}{dt} > 0$ pour $x \neq x^*$ alors x^* est instable. V est appelé fonction de Lyapounov du système.*

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapounov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapounov.

Exemple 1.1. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - xy^2 \\ \dot{y} &= -y + 3x^2y \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre pour ce système. Soit la fonction V définie par $V(x, y) = ax^2 + by^2$, avec a et b deux réels positifs à déterminer.

On a $V(0, 0) = 0$ et $V(x, y) > 0$, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

et

$$\text{grad}(V(x)).f(x) = -2ax^2 - 2ax^2y^2 - 2by^2 + 6bx^2y^2.$$

Pour $a = 3, b = 1$, on a :

$$\text{grad}(V(x)).f(x) = -6x^2 - 2y^2 < 0, \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0).$$

2. méthode indirecte (la linéarisation)

Le point critique de (1.1) se ramène à l'origine par le changement de variable

$X = x - a$ et le développement de Taylor de f au point $x = 0$ est donné par :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

Lorsque x est très proche de 0, les termes non-linéaires devient négligeables devant le terme linéaire et la méthode indirecte de Lyapounov pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre 0, consiste à étudier le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.3}$$

Avec :

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix}$$

est la matrice Jacobienne de f en 0. Le système (1.3) s'appelle le linéarisé du système non-linéaire (1.1) au point d'équilibre 0.

Définition 1.8. *Un point d'équilibre a de (1.3) est dit point hyperbolique si aucune valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'admet pas la partie réelle nulle.*

Définition 1.9. *Un point d'équilibre a de (1.3) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles négatives, il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles positives et il est appelé point selle (col) si au moins une valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ a la partie réelle positive et au moins une valeur propre a la partie réelle négative.*

Définition 1.10. *Deux systèmes autonomes sont dits topologiquement équivalent, dans un voisinage de l'origine (ou bien ont la même structure), s'il y a un homéomorphisme H appliquant l'ouvert U contenant l'origine à l'ouvert V contenant l'origine qui transforme les trajectoires du premier système dans U vers les trajectoires du deuxième système dans V et préserve la direction du temps.*

Exemple 1.2. Considérons les deux systèmes linéaires :

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.4}$$

$$\dot{y} = Bx. \tag{1.5}$$

avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Soit $H(x) = Rx$ avec $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On a $B = RAR^{-1}$.

Soit $y = H(x) = Rx$ ou $x = R^{-1}y$ alors

$$\begin{aligned}\dot{y} &= R\dot{x} \\ &= RAx \\ &= RAR^{-1}y \\ &= By.\end{aligned}$$

Théorème 1.2. (Hartman-Grobman) :

Soient U, V deux ouverts de \mathbb{R}^n contenant l'origine, $f \in \mathbb{C}^1(U)$ et ϕ_t le flot du système non linéaire (1.1). Supposons que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique. Alors il existe un homéomorphisme H de l'ouvert U contenant l'origine vers l'ouvert V contenant l'origine tel que pour chaque $x_0 \in U$, il y a un intervalle ouvert $I_0 \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et pour tout $t \in I_0$.

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0),$$

i.e : H applique les trajectoires du système non-linéaire (1.1) vers les trajectoires de son linéarisé (1.3) et préserve la direction du temps.

Corollaire 1.1. Considérons le système (1.1) avec son linéarisé (1.3). Si toutes les valeurs propres de A ont leurs parties réelles négatives alors a est localement asymptotiquement stable.

S'il existe en moins une valeur propre de A a partie réelle positive, alors a est instable.

Exemple 1.3. Considérons le système d'un pendule avec frottement :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ry - \frac{g}{l} \sin(x) \end{cases}$$

Avec les points d'équilibres $(n\pi, 0)$ pour tout entier n , la matrice jacobienne au point

$$(n\pi, 0) \text{ est : } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}(-1)^{n+1} & -r \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = \frac{-r - \sqrt{r^2 + (-1)^{n+1}4g/l}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 + (-1)^{n+1}4g/l}}{2}.$$

Si n est pair alors les deux valeurs propres ont une partie réelle négative. D'où le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.

Si n est impair alors les deux valeurs propres sont réelles de signe opposés :

$$\lambda_1 = \frac{-r - \sqrt{r^2 + 4g/l}}{2} < 0 < \lambda_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4g/l}}{2}.$$

D'où le point d'équilibre est un point selle (instable).

1.1.7 Critère de Routh-Hirwitz dans \mathbb{R}^3

Considérons le systèmes :

$$\dot{x} = Ax,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

avec les déterminants de Routh-Hirwitz sont :

$$\begin{aligned} H_1 &= |a_1| = a_1, \\ H_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3, \\ H_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3H_2. \end{aligned}$$

Ainsi les conditions de stabilité du point d'équilibre sont :

$$H_1 > 0, \quad H_2 > 0, \quad H_3 > 0.$$

Donc le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

1.1.8 Bifurcation

Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude des systèmes d'équations non-linéaires en fonction des paramètres caractéristiques est classique.

Soit le système :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Définition 1.11. *Soit un système dynamique non linéaire de dimension n et de paramètre de contrôle μ et soit x^* sa solution.*

Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x^* du système (1.6) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

1.1.8.1 Les types des bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcations, parmi les quelles on peut citer :

1. Bifurcations Col-noeud (saddle-node)

Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre μ est le polynôme quadratique :

$$f(x) = \mu - x^2.$$

Si on peut réécrire la fonction f sous la forme :

$$\dot{x} = \mu - x^2 = f(\mu, x).$$

Où μ est un paramètre réel.

Trois cas peuvent être distingués selon les valeurs de μ .

- (a) Si $\mu < 0$: il n'y a pas d'équilibre et \dot{x} est toujours négative.
- (b) Si $\mu = 0$: l'origine est le seul point d'équilibre avec :

$$\dot{x} = -x^2 < 0, \quad \forall x.$$

- (c) $\mu > 0$: il existe deux équilibres : $x_+^* = \sqrt{\mu}$ et $x_-^* = -\sqrt{\mu}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_+^*) = -2\sqrt{\mu} < 0 \text{ donc } x_+^* \text{ est stable.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_-^*) = 2\sqrt{\mu} > 0 \text{ donc } x_-^* \text{ est instable.}$$

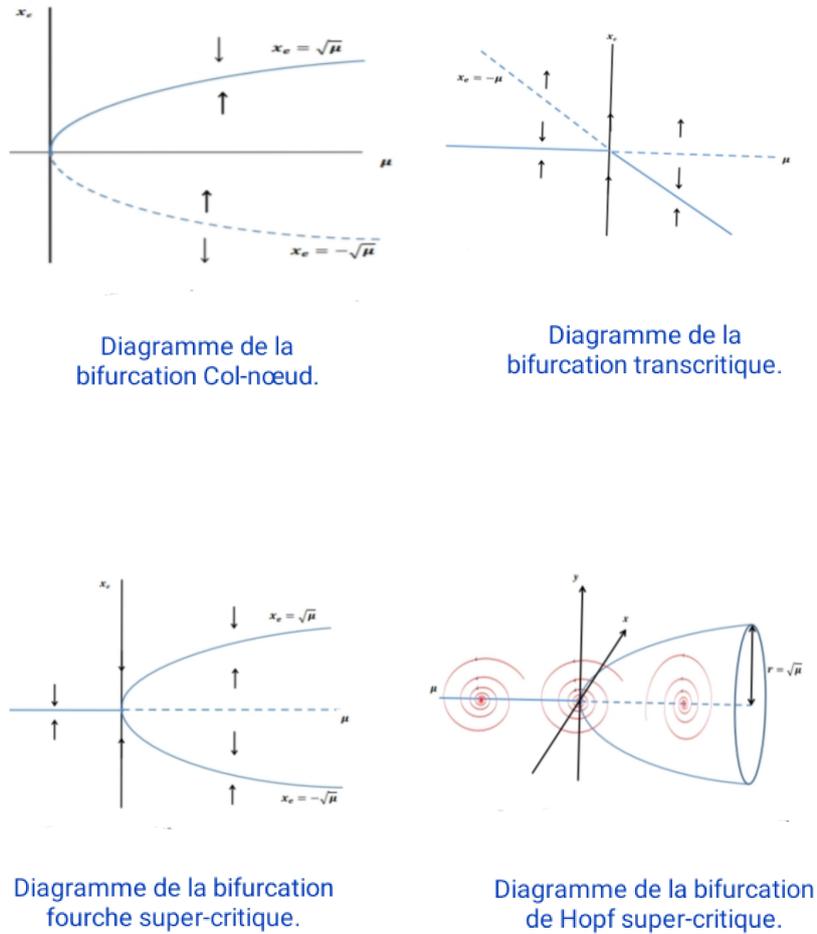


FIGURE 1.2 – Les types des bifurcations

2. Bifurcation fourche (Pitchfork)

On a l'équation différentielle :

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2) = f(x, \mu).$$

Où μ est un paramètre réel.

Trois cas sont possibles :

- (a) $\mu < 0$: l'origine est l'unique point d'équilibre qui est stable.
- (b) $\mu = 0$: l'origine est l'unique point d'équilibre et est stable.
- (c) $\mu > 0$: on a trois points d'équilibres, l'origine qu'est instable et deux autres points d'équilibres $x_+^* = \sqrt{\mu}$ et $x_-^* = -\sqrt{\mu}$ qui sont stables.

3. Bifurcation transcritique (échange de stabilité)

Soit l'équation différentielle :

$$f(x, \mu) = \mu x + x^2,$$

μ est un paramètre réel, on a toujours deux équilibres 0 et $x^* = -\mu$.

On a trois cas :

- (a) $\mu < 0$ alors 0 est stable mais $x^* = -\mu$ est instable.
- (b) $\mu = 0$ les deux points sont confondus en un seul point qui est semi stable.
- (c) $\mu > 0$ alors 0 est instable mais x^* est stable.

4. Bifurcation de Hopf

C'est la bifurcation associée à l'équation dans le plans complexe :

$$z'(t) = f(z(t)) = (\mu + i\omega)z(t) - |z|^2 z(t).$$

Pour étudier cette équation, on écrit la variable z sous la forme $z(t) = x(t) \exp^{i\theta(t)}$.

L'équation s'exprime sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} x' &= \mu x - x^3 \\ \theta' &= \omega \end{cases}$$

La première équation n'est autre qu'une la bifurcation de fourche de paramètre de contrôle μ .

Nous partons d'un système ou le paramètre μ est négatif. Le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un point puits les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine. Lorsque $\mu = 0$ ce point d'équilibre perd sa stabilité. Puis lorsque $\mu > 0$, il se forme une trajectoire périodique stable ou cycle limite.

La bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire.

1.2 Système chaotique

Définition 1.12. *Le phénomène du chaos est un phénomène complexe non linéaire, qui dépend de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes chaotiques sont des systèmes dont les trajectoires évoluent dans une région bornée présentant un caractère stable mais sans toute fois converge vers un point fixe ou un cycle limite. Ces trajectoires qui restent denses dans cette région sont très sensibles aux conditions initiales. Les solutions des équations différentielles non*

linéaires ne peuvent pas être calculés avec exactitude analytiquement car il n'existe pas de méthode de résolution analytique pour ces équations, sauf pour certaines classes particulières. Elles sont alors déterminées numériquement et le comportement du système analysé par simulation. Le terme chaos associé à une application itérée a été formellement introduit par Li et Yorke en 1975, où ils ont établi un critère simple pour le chaos dans les équations aux différences unidimensionnelles.

1.2.1 Propriétés du chaos

Les définitions et les propriétés suivantes permettent d'analyser qualitativement les points marquants des systèmes chaotiques.

1.2.1.1 La non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire par contre un système linéaire ne peut pas être chaotique. La notion de système dynamique est relative à tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. En général, pour prévoir des phénomènes réels générés par ces systèmes, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

1.2.1.2 Le déterminisme

Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer), son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, (l'instant initial) permet le calcul précis de l'état de système à n'importe quel autre moment.

1.2.1.3 La Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique, puisque la plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales. En effet, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement.

1.2.2 Route vers le chaos

On ne sait toujours pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant, il existe un certain nombre de scénarios de transition vers le chaos, qui sont universels. On considère que le système possède un paramètre dit "contrôle". Lorsque l'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique.

1.2.2.1 l'intermittence vers le chaos

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouées de turbulence. Lorsque l'on augmente le paramètre de contrôle, les bouées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

1.2.2.2 Le doublement de période

Qui est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, 4, 8, ..., etc. Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

1.2.2.3 La quasi-périodicité

qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique.

1.2.3 Exposants de Lyapounov

Alexander Lyapounov a développé une quantité pour mesurer la divergence des trajectoires adjacentes au début, appelée «l'exposant de Lyapounov», et est souvent utilisée pour déterminer si un système est chaotique.

Les valeurs propres de la matrice dynamique A du système linéaire permettent de caractériser le point d'équilibre et sa stabilité. L'exposant de Lyapounov est une généralisation de ces valeurs propres et permet de caractériser l'attracteur Ω . L'exposant de Lyapounov est une mesure de la différence entre différentes trajectoires au sein d'un attracteur.

Soit un système dynamique autonome :

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (1.7)$$

On considère d'abord que ce système est de dimension $n = 1$. Soient deux condition initiale très proches x_0 et x'_0 . La trajectoire issue de la condition initiale x_0 est $x_k = f^k(x_0)$, et celle issue de la condition x'_0 est $x'_k = f^k(x'_0)$.

Si les trajectoires x_k et x'_k s'écartent à un rythme exponentiel après k itération, alors :

$$|x'_k - x_k| = |x'_0 - x_0| \exp(k\lambda), \quad (1.8)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ correspond au taux de divergence des deux trajectoires. Il vient :

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x'_k - x_k}{x'_0 - x_0} \right|, \quad (1.9)$$

Si l'on considère que deux condition initiales sont très proches, leur différence $\epsilon = |x'_0 - x_0|$ tend vers 0 et, lorsque k tend vers l'infini, il vient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x'_k - x_k}{x'_0 - x_0} \right|, \quad (1.10)$$

Cette relation est équivalente à :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x'_k - x_k}{x'_{k-1} - x_{k-1}} \cdot \frac{x'_{k-1} - x_{k-1}}{x'_{k-2} - x_{k-2}} \cdots \frac{x'_1 - x_1}{x'_0 - x_0} \right|, \quad (1.11)$$

ce qui se réécrit aussi :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{x'_{i+1} - x_{i+1}}{x'_i - x_i} \right| = \lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{f(x'_{i+1}) - f(x_{i+1})}{x'_i - x_i} \right|, \quad (1.12)$$

Finalement, cette relation devient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|, \quad (1.13)$$

Le terme λ_L est appelé exposant de Lyapounov de la trajectoire $x_k = f^k(x_0)$ et ne doit pas être confondu avec λ ou λ_i , valeur propre d'un système linéaire. λ_L mesure le taux moyen de convergence ou de divergence de deux trajectoires issues de conditions initiales très proches. S'il est positif, les trajectoires divergent. Très souvent dans la littérature, si $\lambda_L > 0$, le système est dit chaotique. Intuitivement, cela reflète la sensibilité aux conditions initiales.

La relation (1.7) se généralise aux système de dimension $n > 1$, qui possèdent alors n

exposants de Lyapounov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. On a alors $x_k = f^k(x_0)$ avec $x_k = [x_k^{(1)} \dots x_k^{(n)}]^T \in R^n$ et $f = [f_1 \dots f_n]^T$. Les n exposants de Lyapounov λ_{Li} s'écrivent :

$$\lambda_{Li} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln | \lambda_i(J_k \dots J_1) |, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

$\lambda_i(J_k \dots J_1)$ représente la i ème valeur propre du produit des matrices $(J_k \dots J_1)$. Les J_k sont les matrices jacobiniennes issues de la linéarisation de f autour de x_k . Une condition nécessaire pour qu'un système dynamique à temps discret (1.1) soit chaotique est qu'au moins un de ses exposants de Lyapounov soit positif.

Types d'attracteur par le signe des exposants de Lyapounov

Les exposants de Lyapounov sont une généralisation des valeurs propres pour le points fixe et des multiplieurs caractéristique pour les solutions périodiques. Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapounov sont tous inférieur ou égaux à 0 et leurs somme est négative. Un attracteur étrange possédera toujours au moins trois exposants de Lyapounov. Dont un au moins doit être positive (voir le tableau ci-dessus)

Etat stable	Flot	Dimension	Exposants de Lyapounov
point fixe	point	0	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$
période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \dots \geq \lambda_n$
période d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0, 0 > \lambda_{k+1} \geq \lambda_{k+2} \geq \dots \geq \lambda_n$
chaotique		non entier	$\lambda_1 > 0, \sum \lambda_i < 0$
hyper chaotique		non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum \lambda_i < 0$

TABLE 1.1 – Exposants de Lyapounov et Dimensions.

1.2.4 Dimensions fractales des attracteurs étranges

On remarque qu'il y a un lien, entre les exposants de Lyapounov et la dimension de l'attracteur, comme nous en avons discute plus tôt si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'ils sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

Dimension de Mori :

Soient m_0 le nombre des exposants de Lyapounov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants

positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs, $\bar{\lambda}_-$ la moyenne des exposants négatifs. La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{m_0} + m_+ \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|}\right).$$

Dimension de Kaplan-Yorke

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0.$$

On définit alors la dimension de **Kaplan-Yorke** par la relation suivant :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}.$$

Chapitre 2

Systèmes dynamiques fractionnaires

En mathématique, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse qui généralise les dérivées fractionnelles à des ordre non entiers. Dans ce chapitre nous présentons quelques notions de base du calcul fractionnaire, nous commençons par fonctions spéciales : fonction Gamma, Bêta et Mittag-Leffler, qui jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire. En suite, nous donnons les trois approches du calcul fractionnaire qui sont : L'approche de Riemann-Liouville, l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Caputo.

2.1 Fonctions utiles

2.1.1 Fonction Gamma

Définition 2.1. *La fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est une fonction complexe, qui prolonge la factorielle à l'ensemble des nombres complexes, on la définit par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt. \quad (2.1)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, tel que $\text{Re}(\alpha) > 0$.

Par intégration par parties, on trouve la relation important de $\Gamma(\alpha)$ qui est la suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (2.2)$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha \exp(-t) dt = [-t^\alpha \exp(-t)]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (2.3)$$

en particulier :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} \exp(-t) dt = \int_0^{\infty} \exp(-t) dt = [-\exp(-t)]_0^{\infty} = 1. \quad (2.4)$$

Remarque 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+1) = n!$.

Théorème 2.1. *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. Pour $Re(\alpha) > 0$, la relation(2.1) équivaut la relation suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 (\ln(\frac{1}{t}))^{\alpha-1} dt.$$

2. Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

4. Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$\Gamma(1-\alpha) = -\alpha \Gamma(-\alpha).$$

5. La fonction Gamma peut être représentée par la limite

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}, Re(\alpha) > 0.$$

Exemple 2.1. 1. $\Gamma(2) = 1!$.

2. $\int_0^{+\infty} t^5 \exp(-t) dt = \Gamma(6) = 5! = 120.$

3. $\int_0^{+\infty} t^8 \exp(-3t) dt.$

posons $3t = y$ l'intégrale devient alors :

$$\int_0^{+\infty} (\frac{y}{3})^8 \exp(-y) \frac{dy}{3} = \frac{1}{3^9} \int_0^{+\infty} y^8 \exp(-y) dy = \frac{1}{3^9} \Gamma(9) = \frac{8!}{3^9}.$$

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.2. *La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad Re(p) > 0, \quad Re(q) > 0. \quad (2.5)$$

Cette fonction possède quelques propriétés :

⊗ La fonction Bêta liée à la fonction Gamma par l'équation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}, \quad \forall p, q : \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (2.6)$$

Théorème 2.2. La fonction Bêta possède les propriétés suivante :

1. $\beta(p + 1, q + 1)$ est la solution de la Bêta intégrale

$$\int_0^1 t^p (1 - t)^q dt = \beta(p + 1, q + 1).$$

2. Les identités suivantes sont vérifiées :

$$(a) \beta(p, q) = \beta(q, p).$$

$$(b) \beta(p, q) = \beta(p + 1, q) + \beta(p, q + 1).$$

$$(c) \beta(p, q + 1) = \frac{q}{p} \beta(p + 1, q) + \frac{q}{p+q} \beta(p, q).$$

Exemple 2.2. $\int_0^1 t^8 (1 - t)^7 dt = B(9, 8) = \frac{\Gamma(9) \cdot \Gamma(8)}{\Gamma(9+8)} = \frac{8!7!}{16!}.$

2.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par le développement en série suivante :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.7)$$

pour $\beta = 1$, on obtient la fonction Mittag-Leffler dit à un paramètre :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (2.8)$$

La fonction exponentielle est déduite de $E_{\alpha}(z)$ en posant $\alpha = 1$:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)}, \quad (2.9)$$

Comme $k \in \mathbb{N}$, la fonction Gamma équivaut à la fonction factorielle $\Gamma(k + 1) = k!$, ce qui donne :

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.10)$$

cette expression n'est autre que le développement en série de la fonction $\exp(z)$.

Théorème 2.3. *La fonction Mittag-Leffler possède les propriétés suivante :*

Pour les valeurs spéciale, la fonction Mittag-Leffler est donner par :

1. $E_0(z) = \frac{1}{1-z}$.

2. $E_1(z) = \exp(z)$.

2.2 Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions. Dans cette section, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les trois définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville, Grunwald-letnikov et de Caputo, en donnant les propriétés plus importantes de ces notions.

2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)} f(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (2.11)$$

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du, \quad (2.12)$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt. \quad (2.13)$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

pour tout entier n Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$.

2.2.2 Approche de Riemann-Liouville R-L

Définition 2.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ avec $a \in \mathbb{R}$, et f une fonction localement intégrable définie sur $[a, +\infty[$. L'intégral d'ordre α de f de borne inférieur a est définie par :

$${}^{\text{RL}}I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

avec $t \geq a$ et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler définie précédemment par l'expression (2.1). Pour $\alpha = 0$, On a I_a^0 , I est l'opérateur d'identité.

Exemple 2.3. Soient $\alpha > 0$, $m > -1$ et $f(t) = (t - a)^m$ alors :

A l'aide de changement de variable $\tau = a + x(t - a)$ on a :

$$\begin{aligned} {}^{\text{RL}}I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^m d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1 - x)^{\alpha-1} x^m dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+m} \beta(m + 1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(\alpha + m + 1)} (t - a)^{\alpha+m}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5$, $m = 1$ et $a = 0$ on aura :

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

Théorème 2.4. Pour $f \in \mathbb{C}([a, b], \mathbb{R})$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe

$$(I_a^\alpha I_a^\beta f)(t) = (I_a^{\alpha+\beta} f)(t), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Démonstration 1.1

Soit $f \in \mathbb{C}([a, b], \mathbb{R})$, alors on a grâce au théorème de Fubini.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_\tau^t (t - s)^{\alpha-1} (s - \tau)^{\beta-1} f(\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t - s)^{\alpha-1} (s - \tau)^{\beta-1} f(\tau) ds d\tau. \end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = \tau + x(t - \tau)$ on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha I_a^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_0^1 [(t-\tau)(1-x)]^{\alpha-1} [x(t-\tau)]^\beta (t-\tau) dx d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx d\tau. \end{aligned}$$

On a $\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx$ est la fonction Bêta alors :

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = I_a^{\alpha+\beta} f(t).$$

Définition 2.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ avec $a \in \mathbb{R}$, n un entier positif et f une fonction localement intégrable définie sur $[a, +\infty[$.

La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par :

$${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.15)$$

où le nombre entier n est choisie de telle manière que : $(n-1) < \alpha < n$.

Pour $\alpha = 0$, On a $D_a^0 = D$, D est l'opérateur d'identité.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi se réécrire comme suit :

$${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{I^{(n-\alpha)} f(t)\}. \quad (2.16)$$

Exemple 2.4. $f(t) = (t-a)^m$.

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $m > -1$, alors on a :

$${}_a^{RL} D_t^\alpha (t-a)^m = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^m d\tau,$$

En faisant le changement $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}_a^{RL} D_t^\alpha (t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+m-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^m ds \\ &= \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)\beta(n-\alpha, m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1)} (t-a)^{m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)} (t-a)^{m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} (t-a)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

- En particulier, si $m = 0$ et $\alpha > 0$ alors la dérivée fractionnaire de Riemann d'une fonction constante est en générale non nulle, en effet, on a :

$$({}_a^{RL} D_t^\alpha C)(t) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

2.2.3 Approche de Grünwald-Letnikov G-L

Définition 2.5. La dérivée d'ordre fractionnaire de l'ordre $\alpha > 0$ de G-L est donnée par :

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{t-a}{h}] = n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad (2.17)$$

avec

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - k + 1)}{k!}. \quad (2.18)$$

La généralisation de cette formule pour α non entier (avec $0 \leq n - 1 < \alpha < n$) et comme

$$\begin{aligned} (-1)^k \binom{\alpha}{k} &= \frac{-\alpha(1 - \alpha)\dots(k - \alpha - 1)}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-\alpha)}, \end{aligned}$$

nous obtenons

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{t-a}{h}] = n} \frac{\Gamma(k - \alpha)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(-\alpha)} f(t - kh). \quad (2.19)$$

La définition de Grünwald-Letnikov de l'intégration d'ordre fractionnaire se traduit par l'expression suivante :

$${}_a^{GL}I_t^\alpha f(t) = {}_a^{GL}D_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{t-a}{h}] = n} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t - kh). \quad (2.20)$$

Théorème 2.5. Soit $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha]$ et $f \in C^n[a, b]$, alors :

$${}_a^{GL}I_t^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Exemple 2.5. $f(t) = (t - a)^m$.

Soit α non entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ et $m > n - 1$, alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)} (\tau - a)^{m-n},$$

d où

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{m-n} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
 {}_a^{GL}D_t^\alpha (t - a)^m &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{m-n} d\tau. \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} (t - a)^{m-\alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} s^{m-n} ds \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)\beta(m - \alpha, m - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} (t - a)^{m-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)\Gamma(m - \alpha)\Gamma(m - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)\Gamma(m - \alpha + 1)} (t - a)^{m-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)} (t - a)^{m-\alpha}.
 \end{aligned}$$

A titre d'exemple

$${}^G D^{\frac{1}{2}} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}.$$

-En générale la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Grünwald- Letnikov n'est pas nulle ni constante.

$${}_a^{GL}D_t^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}.$$

2.2.4 Approche de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire, exprimée par :

$$\begin{aligned}
 {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= I^{n-\alpha} \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} d\tau.
 \end{aligned}$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n - 1) < \alpha < n$.

Exemple 2.6. $f(t) = (t - a)^m$.

Soit α non entier et $0 \leq n - 1 \leq \alpha \leq n$ et $m > n - 1$, alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)} (\tau - a)^{m-n}.$$

d où

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^{m-n} d\tau.$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
 {}_a^C D_t^\alpha (t - a)^m &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{m - n} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} (t - a)^{m - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{m - n} ds \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)\beta(m - \alpha, m - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)} (t - a)^{m - \alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)\Gamma(m - \alpha)\Gamma(m - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(m - n + 1)\Gamma(m - \alpha + 1)} (t - a)^{m - \alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)} (t - a)^{m - \alpha}.
 \end{aligned}$$

- En particulier la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle

$${}_a^C D_t^\alpha C = 0, \forall C \in \mathbb{R}.$$

2.3 Propriétés générales des dérivation et intégration fractionnaires

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

- L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

$${}^R D^p (I^p f(t)) = f(t),$$

en général on a :

$${}^R D^p (I^q f(t)) = {}^R D^{p - q} f(t).$$

et si $p - q < 0$, ${}^R D^{p - q} f(t) = I^{q - p} f(t)$.

- Si f est une fonction continue on a :

$${}^C D^p I_a^p f = f,$$

et

$$I_a^p f = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t - a)^k}{k!}.$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

- En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas.

Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

$$\frac{d^n}{dt^n}({}^R D^p f(t)) = {}^R D^{n+p} f(t),$$

mais

$${}^R D^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}^R D^{n+p} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma(k-p-n+1)}.$$

Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n - 1 \leq p < n$ et $m - 1 \leq q < m$, alors :

$${}^R D^p ({}^R D_t^q f(t)) = {}^R D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma(p-k+1)},$$

et

$${}^R D^q ({}^R D^p f(t)) = {}^R D^{p+q} f(t) - \sum_{k=1}^m [{}^R D^{p-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma(-q-k+1)}.$$

par la suite :

deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}^R D^p$ et ${}^R D^q$ ($p \neq q$), ne commutent que si $[{}^R D^{p-k} f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, et $[{}^R D^{q-k} f(t)]_{t=a} = 0$ pour tout $k = 1, 2, \dots, m$.

Relation entre la dérivée de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo

Soit $p > 0$ avec $n - 1 < p < n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), supposons que f est une fonction telle que ${}^C D_t^p f(t)$ et ${}^R D_t^p f(t)$ existent alors :

$${}^C D^p f(t) = {}^R D^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}.$$

On déduit que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ On aura :

$${}^C D^p f(t) = {}^R D^p f(t).$$

Relation entre la dérivée de Grünwald-Letnikov et la dérivée de Riemann-Liouville

Si f une fonction de classe C^n , on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL} D_a^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= {}^{GL} D_a^\alpha f(t). \end{aligned}$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

2.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-liouville

- L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est à dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $t = a$.
- Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo par contre par Riemann-Liouville elle est

$$\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

2.5 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

2.5.1 Linéarité

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t).$$

où D^α désigne n'importe quelle approche de dérivation considérée dans ce mémoire.

Preuve. la linéarité de la dérivée fractionnaire vient directement de la définition correspondante.

La linéarité de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov définie par la formule(2.17), on a :

$$\begin{aligned} D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} (\lambda f(t - kh) + \mu g(t - kh)) \\ &= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) + \mu \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} g(t - kh) \\ &= \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t). \end{aligned}$$

2.5.2 La règle de Leibniz

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t).$$

La généralisation de cette formule nous donne :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)}g(t) + R_n^p(t),$$

où $n \geq p + 1$ et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n! \Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_{\tau}^t f^{(n+1)}(\zeta) (\tau - \zeta)^n d\zeta,$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0$.

- Si f et g sont continues dans $[a, t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)}g(t).$$

D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

2.6 Stabilité des système fractionnaire

Les théorèmes suivants, nous permettent d'affirmer les conditions nécessaires et suffisantes, pour la stabilité des systèmes fractionnaires.

Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires :

Théorème 2.6. *Considérons le système non linéaire fractionnaire décrit par le modèle suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.21)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $f \in \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire continue

1. Supposons que le système (2.21) est commensurable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ associée à f au point d'équilibre.

Alors, le système (2.21) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n.$$

2. . Supposons maintenant que le système (2.21) est non commensurable, c'est-à-dire $\alpha_i \neq \alpha_j$, pour tout $i \neq j$, et soit m le plus petit multiple commun des dénominateurs u_i de α_i , tel que :

$$\alpha_i = \frac{u_i}{v_i}, \quad (u_i, v_i) = 1, \quad u_i, v_i \in \mathbb{Z}^+.$$

Posons $\gamma = \frac{1}{m}$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de l'équation caractéristique :

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - \frac{\partial f}{\partial x}) = 0.$$

Alors, le système non commensurable (2.21) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n.$$

Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

Théorème 2.7. *Considérons le système linéaire fractionnaire décrit par le modèle suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x = A(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$. soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de l'équation caractéristique, le système (2.22) est asymptotiquement stable si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n.$$

Le système (2.22) est stable si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n.$$

et les valeurs propres critiques satisfont à $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique égale à leur multiplicité algébrique.

Chapitre 3

Comportement dynamiques d' un système d'ordre fractionnaire basé sur un memristor

Dans ce chapitre, On va s'intéresser à l'étude d'un nouveau système memristive en remplaçant le diode dans le circuit de chua avec un memristor contrôlé par flux. On va commençons par La dynamique du circuit basé sur un memristor d'ordre entier. Ensuite, l'étude de même système dans le cas d'ordre fractionnaire.

3.1 introduction au circuit de Chua basé sur un memristor :

les circuit de chua sont des circuits autonomes fabriques à partir des composants standards. Une fléchette [résistance, condensateur, inductance] doit remplir trois condition pour voir affichage d'un comportement confus :

1. il doit contenir un ou plusieurs éléments non linéaires.
2. une ou plusieurs résistance actives localement.
3. trois élément de stockages d'énergie.

Un circuit électronique simple répondant à ces critères est un circuit chua. Le memristor à été postulé comme le quatrième circuitment par Leon Chua en 1971. En remplaçant la diode de chua par un memristor caractérisé par une fonction linéaire augmentant par morceaux. Il a donc pris sa place à côté du reste de circuit plus familier des éléments

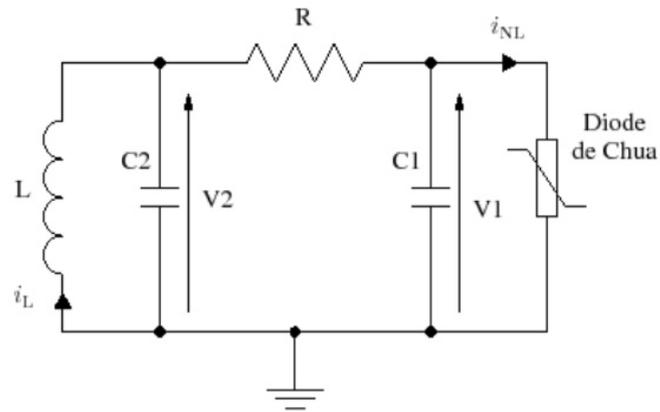


FIGURE 3.1 – circuit de Chua .

tel que la résistance, le condensateur et l'inducteur le fil conducteur qui relie ces quatre éléments.

3.1.1 Memristor

En électronique : Le memristor est un composant électronique passif. Il a été décrit comme le quatrième composant passif élémentaire, aux côtés du condensateur, de la résistance et de la bobine. Le nom est formé à partir des deux mots anglais memory et resistor. Un memristor soit un memristor contrôlé par flux, soit à charge memristor commandé en charge est une résistance variable à deux bornes caractérisé par une relation de type $f(\phi, q) = 0$. Le memristor a été prédit et décrit en 1971 par Leon Chua, depuis 1971, le memristor était un composant hypothétique, aucun exemple physique n'étant connu ainsi difficile la réalisation physique du memristor. En avril 2008 soit 37 ans plus tard, une implémentation physique du memristor a été reportée dans le journal Nature par une équipe de chercheurs des laboratoires HP conduite par R. Stanley Williams.

En physique : Le memristor est un élément dans lequel le flux électrique (ou densité de champ électrique et de courant électrique) ϕ_e est une fonction de la charge électrique q qui traversé le composant. Soit $\phi_e = \phi_e(q)$ le taux de changement de flux avec la charge $M(q) = \frac{d\phi_e}{dq}$, est connu comme memristance ceci est identique aux autres trois éléments fondamentaux des circuits :

- Résistance $R(I) = \frac{dv}{dI}$.
- Condensateur $\frac{1}{c(q)} = \frac{dv}{dq} \Rightarrow c(q) = \frac{dq}{dv}$.
- Inductance $L(I) = \frac{d\phi_B}{dI}$.

ici q est la charge électrique, I est le courant électrique, v est le potentiel électrique et ϕ_B est le flux magnétique.

Comme d'autre par :

$v = \frac{d\phi_B}{dt}$ et $I = \frac{dq}{dt}$. il en résulte la tension v aux limite du memristor est liée au courant I par la valeur instantanée de la memristance :

$$v = M(q(t))I(t).$$

Ainsi à chaque instant donnée un memristor se comporte comme une résistance ordinaire, cependant sa résistance $M(q)$ dépend de l'histoire du courant.

3.1.2 système memristif

Comme le quatre éléments de base de la théorie des circuit est le fait que les caractéristiques de ces éléments concernant les quatre variables en génie électrique (tension, courant, flux, charge) intimement la figure(3,2) montre cette relation graphiquement Pour affirmer cela, Chua dresse la liste des doublets réalisables avec les deux grandeurs utilisées pour l'électronique : la tension (v), le courant (i), ainsi que leur intégrale temporelle, le flux ϕ et la charge (q). Il remarque que les doublets (ϕ, v) et (q, i) forment deux des lois de l'électromagnétisme et que les doublets (v, i) , (q, v) et (ϕ, i) définissent respectivement la résistance, la capacité et l'inductance. Le dernier doublet (ϕ, q) n'a pas de correspondance. C'est ce doublet qui engendre la définition du memristor qu'il sépare en deux cas. Le cas du memristor contrôlé en charge qui donne :

$$v(t) = M(q(t))i(t).$$

et

$$M(q) = \frac{d\phi}{dq}.$$

Le cas du memristor contrôlé en flux :

La relation entre la tension ($v(t)$) et le courant traversant le memristor $i(t)$ est donc donné par :

$$i(t) = W(\phi(t))v(t),$$

Avec une fonction de memductance $W(\phi)$, le taux de variation de la charge dépendant du flux

$$W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi}.$$

Il ya plusieurs modèles mathématiques utilisés pour décrire un memristor.

Dans ce cas, nous utilisons le modèle décrit par une fonction non linéaire quadratique définit comme suivant :

$$q(\phi) = -a\phi + 0.5\phi|\phi|, \tag{3.1}$$

où a et b sont deux paramètres positifs, et la fonction memductance donné par :

$$W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi} = -a + b|\phi|.$$

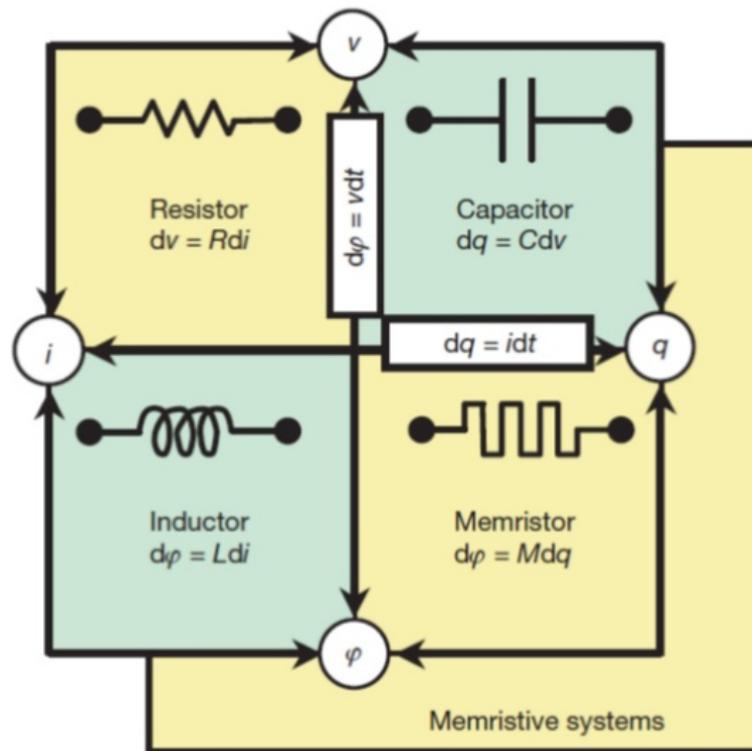


FIGURE 3.2 – système memristifs.

3.2 Chaos dans le système d'ordre entier basé sur un memristor

Dans ce partie, on remplaçant le diode de Chua dans le circuit par un conductance négative et un memristor contrôle en flux décrits par équation (3.1). Parallèlement, un nouveau circuit chaotique basé sur un memristor peut être conçu. Suivant les indications dans la figure (3.3).

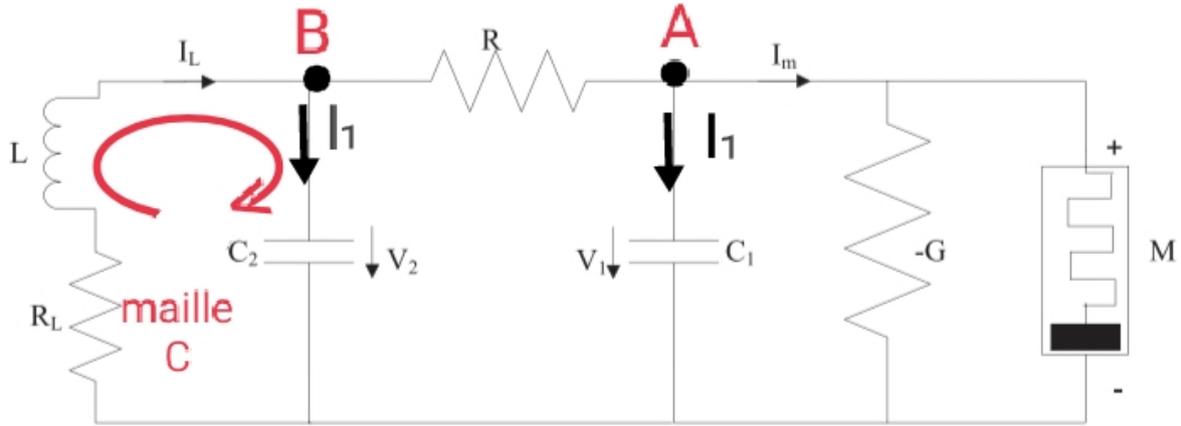


FIGURE 3.3 – Circuit de chua basé sur un memristor

3.2.1 Les équations du systèmes

On applique la lois de Kirchhoff pour obtenir les équation du système :

$$\sum I_{entree} = \sum I_{sortie}.$$

Noeud A : On a

$$I_1 = I_R - (I_G + I_m).$$

avec

$$\begin{cases} I_R = \frac{V_2 - V_1}{R} \\ I_1 = c_1 \frac{dV_1}{dt} \\ I_m = W(\phi)V_1(t) \\ I_G = -GV_1(t) \end{cases}$$

Alors :

$$c_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{R} + GV_1(t) - W(\phi)V_1(t) \Rightarrow \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{c_1} \left[\frac{V_2 - V_1}{R} - GV_1(t) - W(\phi)V_1(t) \right] \dots (1)$$

Noeud B : On a

$$I_L = I_R + I_2 \Rightarrow I_2 = I_L - I_R.$$

avec

$$\begin{cases} I_R = \frac{V_2 - V_1}{R} \\ I_2 = c_2 \frac{dV_2}{dt} \end{cases}$$

Alors :

$$c_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R} + I_L = 0 \Rightarrow \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{c_2} \left[\frac{V_1 - V_2}{R} + I_L \right] \dots (2).$$

Maille C : On a

$$V_2 + V_R + V_L = 0 \Rightarrow V_L = -V_2 - V_R.$$

avec

$$\begin{cases} V_R = R_L I_L(i) \\ V_L = L \frac{dI_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Alors : $L \frac{dI_L(t)}{dt} = -V_2 - R_L I_L(i) = 0 \Rightarrow \frac{dI_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} [-V_2(t) - R_L I_L(i)] \dots (3)$.

D'après (1),(2)et(3) on obtient le système suivante :

$$\begin{cases} \frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[\frac{V_2 - V_1}{R} + G V_1(t) - W(\phi) V_1(t) \right] \\ \frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \left[\frac{V_1 - V_2}{R} + I_L \right] \\ \frac{dI_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} [-V_2(t) - R_L I_L(i)] \\ \frac{d\phi(t)}{dt} = V_1(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

On faisant le changement de variables suivantes :

$V_1 = x, V_2 = y, I_L = z, \omega = \phi, \frac{1}{C_1} = \alpha, \frac{1}{L} = \beta, \frac{R_L}{L} = \gamma, G = \xi, C_2 = 1, R = 1.$

On peut obtenir un système d'équations non linéaire (3.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha [y(t) - x(t) + \xi x(t) - W(\omega) x(t)] \\ \dot{y}(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) = -\beta y(t) - \gamma z(t) \\ \dot{\omega}(t) = x(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Où $W(\omega)$ est défini comme $W(\omega) = -a + b|\omega|$ et $a=1.5$ et $b=1$.

3.2.2 Étude théorique

Nous allons étudier la stabilité du système dynamique (3.3) dans l'équilibre, l'espace de phase est en quatre dimensions.

Les points d'équilibre du système

On cherche les points d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \\ \dot{\omega} = 0 \end{cases}$$

c-à-d :

$$\begin{cases} \alpha [y(t) - x(t) + \xi x(t) - W(\omega) x(t)] = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -\beta y - \gamma z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

On trouve :

$$x = y = z = 0, \omega = \omega_0.$$

on obtient les points d'équilibres suivants :

$$E = \{(x, y, z, \omega) / x = y = z = 0, \omega = \omega_0\}$$

Stabilité du système :

Pour étudier la stabilité, en utilisant la méthode indirecte de Lyapounov qui est basé sur la linéarisation du système autour de l'équilibre, donc la stabilité de l'équilibre dépend le signe des parties réelles du valeurs propres de la matrice jacobienne. La matrice jacobienne dans chaque point d'équilibre est donné par :

$$J_E = \begin{pmatrix} \alpha[-1 + \xi - W(\omega_0)] & \alpha & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & 0 & -\beta & -\gamma \\ & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{J_E} = |\lambda I - J_E| = \begin{vmatrix} \alpha[-1 + \xi - W(\omega_0)] - \lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_{J_E} = [\alpha[-1 + \xi - W(\omega_0)] - \lambda][-\lambda(-1 - \lambda)(-\gamma - \lambda) + \beta] + \alpha\lambda(-\gamma - \lambda)$$

Où $[-1 + \xi - W(\omega_0)] = Q$

$$\begin{aligned} P_{J_E} &= (\alpha Q - \lambda)[-\lambda(-1 - \lambda)(-\gamma - \lambda) + \beta] + \alpha\lambda(-\gamma - \lambda) \\ &= \lambda^4 + (1 + \gamma - \alpha Q)\lambda^3 + (-\alpha Q(1 + \gamma) + \gamma - \alpha + \beta)\lambda^2 + (-\alpha Q(\beta + \gamma) - \alpha\gamma)\lambda \\ &= \lambda(\lambda^3 + (1 + \gamma - \alpha Q)\lambda^2 + (-\alpha Q(1 + \gamma) + \gamma - \alpha + \beta)\lambda + (-\alpha Q(\beta + \gamma) - \alpha\gamma)). \end{aligned}$$

Alors on a :

$$P_{J_E} = \lambda(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0), \quad (3.4)$$

Où

$$a_0 = -\alpha Q(\beta + \gamma) - \alpha\gamma \text{ et } a_1 = -\alpha Q(1 + \gamma) + \gamma - \alpha + \beta \text{ et } a_2 = 1 + \gamma - \alpha Q.$$

Si nous considérons les paramètres suivants :

$$\alpha = 7, \beta = 10, \gamma = 0.11, \xi = 0.1, a = 1.5, b = 1.$$

Alors l'équation caractéristique (3.4) peut être simplifier comme :

$$P_{J_E} = \lambda(\lambda^3 + 7|\omega_0| - 3.09\lambda^2 + 7.77|\omega_0| - 1.552\lambda + 70.77|\omega_0| - 43.232) = 0 \quad (3.5)$$

Pour déterminer l'intervalle de ω_0 qui s'assure que le système (3.3) est stable on va appliqué le critère de Routh à l'équation (3.5) indépendant de l'influence de la valeur propre zéro.

On va former la colonne de Routh comme suite :

λ^3	1	$7.77 \omega_0 - 1.552$
λ^2	$7 \omega_0 - 3.09$	$70.77 \omega_0 - 43.232$
λ^1	$\frac{(7 \omega_0 - 3.09)(7.77 \omega_0 - 1.552) - 70.77 \omega_0 + 43.232}{7 \omega_0 - 3.09}$	0
λ^0	$70.77 \omega_0 - 43.232$	

TABLE 3.1 – Tableau de Routh du système (3.3)

Alors selon le condition nécessaire et suffisante de Routh-Hurwitz pour la stabilité les paires des racines de l'équation entre parenthèse sont négatives si est seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} 7|\omega_0| - 3.09 > 0 \\ 70.77|\omega_0| - 43.232 > 0 \\ (7|\omega_0| - 3.09)(7.77|\omega_0| - 1.552) - 70.77|\omega_0| - 43.232 > 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\omega_0| > 0.441 \\ |\omega_0| > 0.61088 \\ |\omega_0| < 0.72554, \quad |\omega_0| > 1.21639 \end{array} \right.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} |\omega_0| > 0.441 \\ |\omega_0| > 0.61088 \\ |\omega_0| < 0.72554, \quad |\omega_0| > 1.21639 \end{array} \right.$$

Alors la résolution des inégalités ci-dessus donné :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.61088 < |\omega_0| < 0.72594 \\ \text{ou} \\ |\omega_0| > 1.21639 \end{array} \right.$$

Remarque 3.1. Pour avoir du chaos, il nécessaire qu'au moins un λ_i soit positif. Mais aussi que la somme λ_i soit négative, puisque dans le cas contraire le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est émerge et on aurait plus un attracteurs de faible dimension ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe.

Dans le cas inverse, ces conditions ou bien l'une de ces condition n'est pas satisfaites, et pour donner la possibilité que le chaos se produise, l'intervalle de ω_0 pour lequel le polynôme caractéristique a une ou plusieurs racines avec des parties réelles positives est le suivant :

$$\begin{cases} |\omega_0| < 0.61088 \\ \text{ou} \\ 0.72594 < |\omega_0| < 1.21639 \end{cases}$$

Nous avons calculé ces valeurs propres non nuls λ_i , $i=1,2,3$. Corresponds aux points fixes de l'ensemble E pour différent valeurs de ω_0 compris entre 0 et 1.5, ceci explique que le comportement de système dynamique(3.3) dépend de l'état initial de variable d'état $\omega(t)$. Les résultat sont représentés dans le tableau (3.2)

Pour $|\omega_0| = 0$:

$$\lambda^3 - 3.09\lambda^2 - 1.552\lambda - 43.232 = 0$$

$$(\lambda - 5.0746)(\lambda^2 + 1.9846\lambda + 8.5193) = 0$$

Pour $|\omega_0| = 0.5$:

$$\lambda^3 + 0.41\lambda^2 + 2.333\lambda - 7.847 = 0$$

$$(\lambda - 1.5048)(\lambda^2 + 1.9148\lambda + 5.2146) = 0$$

Pour $|\omega_0| = 0.61088$:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 3.1945\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 1.1816\lambda + +3.1945) = 0$$

$ \omega_0 $	λ_1	λ_2	λ_3
0	5.0746	$-0.9923 - i2.7449$	$-0.9923 + i2.7449$
0.5	1.5048	$-0.9574 - i2.0731$	$-0.9574 + i2.0731$
0.61088	0	$-0.5931 - i1.6861$	$-0.5931 + i1.6861$
0.65	-0.9221	$-0.2690 - i1.7118$	$-0.2690 + i1.7118$
0.72594	-1.9916	-2.0220	2.0220
1	4.0525	$0.0712 - i2.6058$	$0.0712 + i2.6058$
1.21639	-5.4247	-2.8106	2.8106
1.5	-7.2180	$-0.0960 - i2.9510$	$-0.0960 + i2.9510$

TABLE 3.2 – Les valeurs propre λ_i ($i = 1, 2, 3$) pour l'équilibre

3.2.3 Étude numérique

Pour la résolution numérique du système (3.3) on utilise le MATLAB avec les valeurs des des paramètres :

$$\alpha = 7, \beta = 10, \gamma = 0.11, \xi = 0.1, a = 1.5, b = 1. \quad (3.6)$$

et les conditions initiaux :

$$(x, y, z, \omega) = (0, 0, 10^{-4}, \omega_0). \quad (3.7)$$

3.2.3.1 Les attracteurs

Nous simulons le système (3.3) avec les paramètres (3.6) et les conditions initiaux (3.7), on obtient les attracteurs chaotiques qui sont représentés à les figures suivants tandis que chaque figure est exposé à chaque valeur de l'état initial ω_0 .

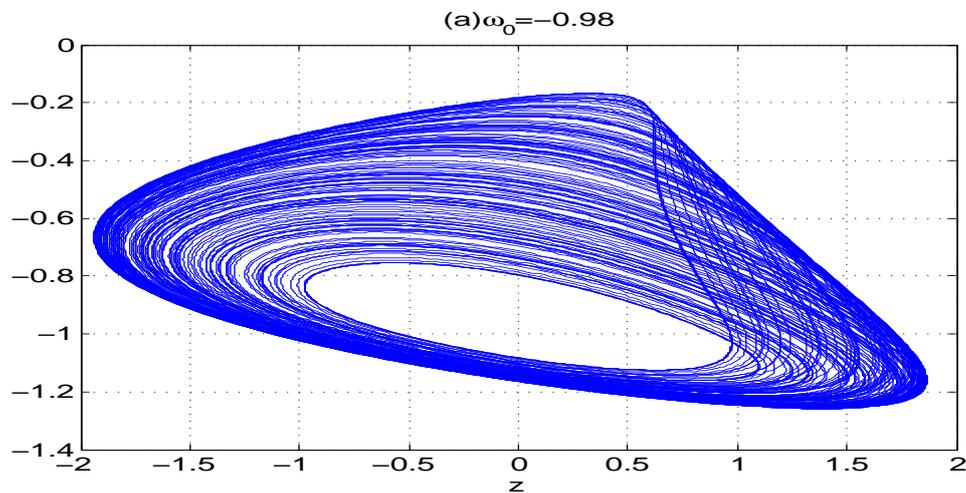


FIGURE 3.4 – Attracteur chaotique

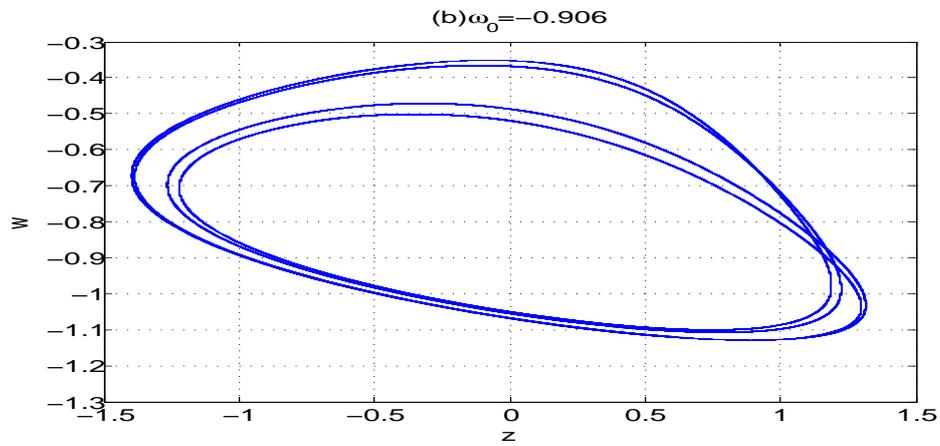


FIGURE 3.5 – Attracteur 4-périodique

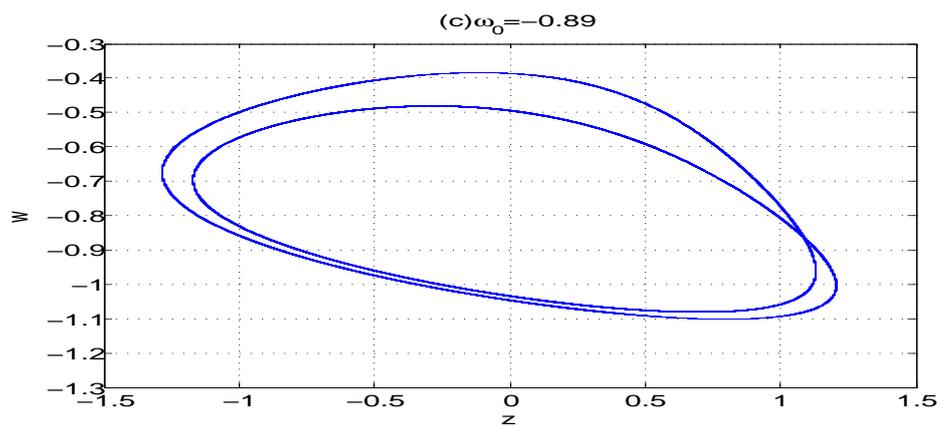


FIGURE 3.6 – Attracteur 2-périodique

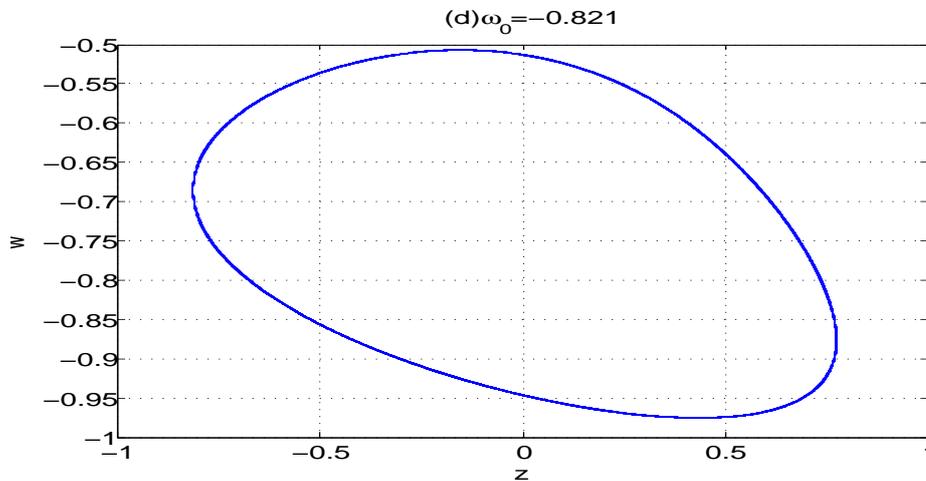


FIGURE 3.7 – Attracteur 1-périodique

A partir des figures (3.4), (3.5), (3.6) et (3.7), on observe qu'il existe une grande variation pour les attracteurs du système (3.3) sous différentes valeurs initiales. En particulier, une orbite 4-périodique et une orbite 2-périodique sont montrées dans la figure (3.5) et (3.6) respectivement. De plus, la figure (3.4) représente un attracteur chaotique à simple et la figure (3.7) présente un périodique.

3.2.3.2 Exposant de Lyapounov

Nous prenons les paramètres (3.6) sont fixés, et on prend ω_0 est varié dans l'intervalle $[-1.5, 1.5]$.

En utilisant MATLAB. Les exposants de Lyapounov de système (3.3) sont présenté dans le figure (3.8).

Lorsque la valeur de l'état initial ω_0 appartient aux six intervalle suivante : $[-1.21, -1.1]$, $[-0.989, -0.907]$, $[-0.005, 0.121]$, $[0.236, 0.312]$, $[0.89, 0.989]$, et $[1.11, 1.213]$ le système (3,3) présente le chaos .

En particulier, si on prend ω_0 est variée, les valeurs des exposant de Lyapounov de système

sont :

$$L_1 = 0,116; \quad L_2 = 0,1105; \quad L_3 = -0,03309; \quad L_4 = -3,843. \quad (3.8)$$

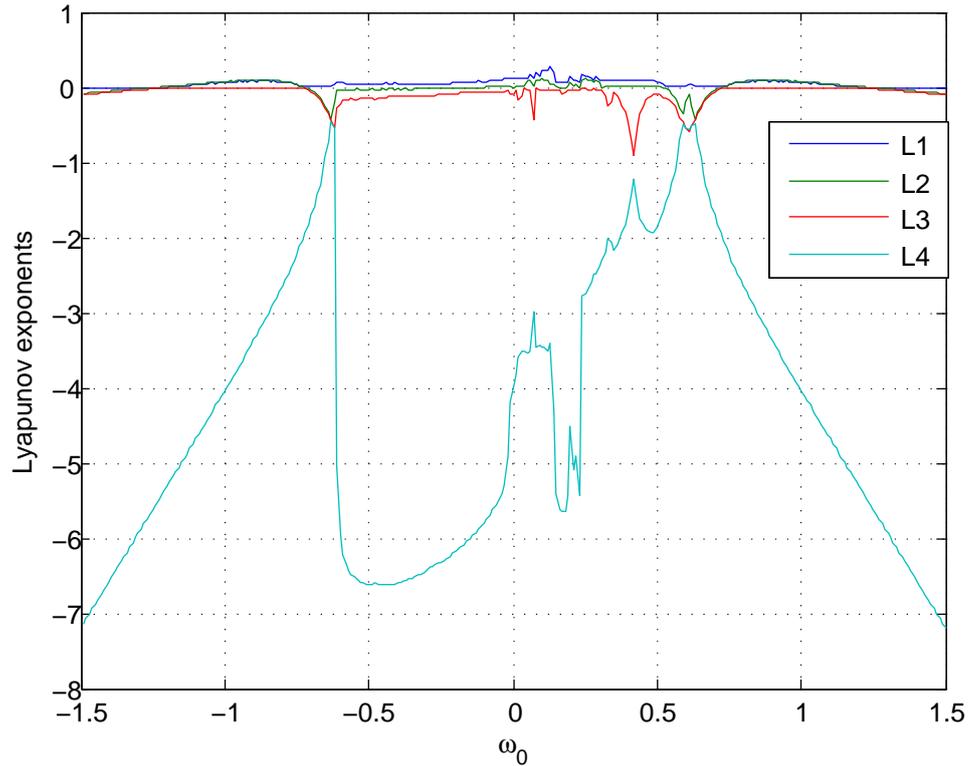


FIGURE 3.8 – Le spectre de Lyapunov

la dimension Kalpe-york du systeme (3,3)est calculée comme suit :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i > 0}{|\lambda_{j_0+1}| < 0}$$

d'après la relation (3,8) $j_0 = 3$

$$D_{KY} = 3 + \frac{L_1 + L_2 + L_3}{|L_4|} = 3,0688$$

A partir du figure (3.8) on a :

Le spectre de Lyapounov (3.3) a deux termes positives L_1, L_2 , et la somme des exposants

de Lyapounov est négative $\sum_{i=1}^4 L_i = -3,13311 < 0$. Ce qui montre que le système est (3.3) chaotique.

On remarque que par rapport a des systèmes chaotiques conventionnels, le circuit chaotique basé sur le memristor a des routes plus compliquée vers le chaos en fonction des états initiaux.

3.3 Chaos dans le système d'ordre fractionnaire basé sur les memristores

nous remplaçante simplement le condensateur d'ordre entier c_2 par un condensateur d'ordre fractionnaire sur la figure (3.3).

Autrement dit, en remplaçant la dérivée d'ordre entier de $y(t)$ par la dérivée d'ordre fractionnaire $\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha}$ dans le système (3.3), nous obtenons un système d'ordre fractionnaire décrit par :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha[y(t) - x(t) + \xi x(t) - W(\omega)x(t)] \\ \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = x(t) - y(t) + z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = -\beta y(t) - yz(t) \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = x(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

On va étudier la dynamique du système memristif d'ordre fractionnaire incommensurable (3.9), les points d'équilibre et la matrice jacobienne pour le système (3.9) restent la même pour le système (3.3).

3.3.1 Étude théorique

La stabilité du système non linéaire d'ordre fractionnaire est très compliqué, dans ce qui suit, nous utilisons la méthode de linéarisation locale pour étudier la stabilité du point d'équilibre du système(3.9) pour plus de commodité, la stabilité du point d'équilibre (0,0,0,0.24) est étudiée, et la stabilité d'autres points d'équilibre peut être étudiée presque de la même manière.

Pour le système d'ordre fractionnaire incommensurable on trouve :

$$\begin{cases} D^{q_1} x = \alpha[y(t) - x(t) + \xi x(t) - W(\omega)x(t)] \\ D^{q_2} y = x(t) - y(t) + z(t) \\ D^{q_3} z = -\beta y(t) - yz(t) \\ D^{q_4} \omega = x(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Où $q_1 = q_3 = q_4 = 1$, $q_2 = \alpha$, tel que $\alpha = 0.995 = \frac{199}{200}$.

le plus petit multiple de dénominateurs de q_1 , q_2 , q_3 et q_4 est $m = 200$.

D'après le théorème (2.6) précédant le système(3.10) est asymptotiquement stable si $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{400}$ pour toutes les racines λ_i de l'équation suivante :

$$\det(\text{daig}([\lambda^{mq_1}, \lambda^{mq_2}, \lambda^{mq_3}, \lambda^{mq_4}]) - J) = \begin{vmatrix} \lambda^{mq_1} - \alpha[-1 + \xi - W(\omega_0)] & -\alpha & 0 & 0 \\ -1 & \lambda^{mq_2} + 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda^{mq_3} + \gamma & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda^{mq_4} \end{vmatrix} = 0$$

En substituant des paramètre $\beta = 10$, $\alpha = 7$, $\xi = 0.1$, $\gamma = 0.11$, $a = 1.5$, $b = 1$ et $\omega_0 = 0.24$

$$\begin{vmatrix} \lambda^{200} - 2.52 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda^{199} + 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & \lambda^{200} + 0.11 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda^{200} \end{vmatrix} = 0$$

Alors l'équation caractéristique peut être simplifier comme :

$$\lambda^{799} + \lambda^{600} - 2.41\lambda^{599} + 0.59\lambda^{400} - 0.2772\lambda^{399} - 26.2472\lambda^{200} = 0.$$

$$\lambda^{200}(\lambda^{599} + \lambda^{400} - 2.41\lambda^{399} + 0.59\lambda^{200} - 0.2772\lambda^{199} - 26.2472) = 0. \quad (3.11)$$

La matrice jacobienne de système (3.10) est obtenue en substituant les paramètres (3.6) et ω_0 en résolvant l'équation (3.11) d'ordre élevé par MATLAB, on peut trouver qu'il ya 200 racines nulles et une racine $\lambda = 1,0003$ n'est pas satisfait $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{400}$.

Ainsi, $(0.0.0.0, 24)$ est un point d'équilibre instable et cela signifie que le système peut donner lieu au chaos.

3.3.2 Étude numérique

Pour la résolution numérique du système (3.10) on utilise le MATLEB avec les valeurs des des paramètres :

$$\alpha = 7, \beta = 10, \gamma = 0.11, \xi = 0.1, a = 1.5, b = 1.$$

et les conditions initiaux :

$$(x, y, z, \omega) = (0, 0, 10^{-4}, 0.24). \quad (3.12)$$

Nous simulons le système (3.10) avec les paramètres (3.6) et les conditions initiaux (3.12), on obtient les attracteurs chaotiques qui sont représentés à les figures suivants :

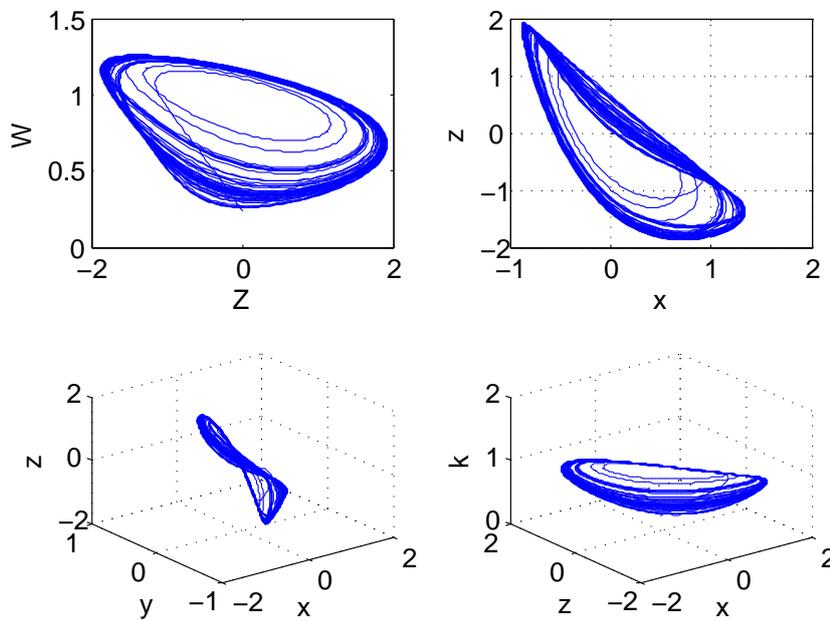


FIGURE 3.9 – Attracteur chaotique quand $\alpha = 0.995$

Conclusion

Nous avons présenté un système basé sur un memristor d'ordre fractionnaire et entier, obtenu directement en remplaçons la diode de chua par un memristor flux-contrôlé. caractérisé par une non-linéarité quadratique et une conductance négative.

L'analyse dynamique est effectuée en utilisant l'analyse de stabilité d'ordre entier et fractionnaire.

Cette mémoire indique comment le dérivé fractionnaire et l'état initial du memristor influencent les comportements dynamiques des systèmes chaotiques traditionnels.

Bibliographie

- [1] Xia Huang, Jia Jia, Yuxia Li et Zhen Wang, Comple Nonlinear Dynamics in Fractional and Integer Order Memristor-based Systems, Neurocomputing, 2016.
- [2] Bao Bo-Cheng, Xu Jian-Ping, Liu Zhong, Initial State Dependent Dynamical Behaviors in a Memristor Based Chaotic Circuit, 2009.
- [3] Megherbi, Ouerdia. Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques. Université Mouloud Mammeri, 2013.
- [4] TALBI, I. systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos . Thèse de Doctorat. Univ, Mentouri, Constantine 1, 2010.
- [5] HOUMOR Tarek, Analyse du Chaos dans un système d'équations, doctorat en sciences de l'université constantine 1 2014.
- [6] Caputo, Michele. "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II." Geophysical Journal International 13.5(1967) :529-539.
- [7] Dang-Vu, H. and Delcarte, C. Bifurcations et chaos : Introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses, 2000.
- [8] Perko, L. equations and dynamical systems Texts in applied mathematics. Springer, New York, (2006).
- [9] Gasri, Ahlem. (12/07/2018) Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Freres Mentouri Constantine-1.
- [10] Menacer, Tidjani. Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université- Constantine1, 2014.
- [11] Abdelouahab, Mohammed-Salah et Hamri, Nasreddine. A New Chaotic Attractor Form Hybrid Optical Bistable System, 2011.

- [12] Roy, R. Murphy Jr, T. W, Maier, T. D, Gills, Z. and Hunt, E. R. Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system. *Physical Review Letters*. 68 (9) (1992) 1259–1992.
- [13] Gaspar, V. Masere, J. and Showalter, K. Controlling chaos in the Belousov— Zhabotinsky reaction. *Nature*. 361 (6409) (1993) 240–243.
- [14] Garfinkel, A. Weiss, J. N. Ditto, W. L. and Spano, M. L. Chaos control of cardiac arrhythmias. *Trends in Cardiovascular Medicine*. 5 (2) (1995) 76–80.
- [15] Ding, J. and Yao, H. X. Chaos control of a kind of non-linear finance system. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*. 25 (6) (2004) 500–504.
- [16] Lorenz, E.N. : Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130–141 (1963).
- [17] Eric Goncalvès da Silva, Introduction aux système dynamique et chaos, Engineering school .Institut polytechnique de Grenoble, 2004, pp.23.
- [18] Mohammed-Salah Abdelouahab, René Lozi. Hopf Bifurcation and Chaos in Simplest Fractional-Order Memristor-based Electrical Circuit. *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, Indian Journals, 2015, 6 (2), pp.105-109.

Résumé

Dans cette mémoire, nous avons présenté un système basé sur un memristor d'ordre entier (et d'ordre fractionnaire) avec le memristor contrôlé par le flux caractérisé par une quadratique non-linéarité. Une analyse dynamique détaillée est effectuée au moyen des méthodes théoriques et numériques. Pour étudier l'influence produite par les caractéristiques fractionnaires, on remplace l'un des conductances d'ordre fractionnaire. Et plus spécifiquement l'étude de la stabilité, le chaos, exposant de Lyapounov.

Mots clés : Système dynamique, chaotique, fractionnaire, circuit, memristor.

Abstract :

In this work, an integer-order (and a fractional-order) memristor-based system with the flux-controlled memristor characterized by smooth quadratic nonlinearity is proposed and detailed dynamical analysis is carried out by means of theoretical and numerical methods. To be more specific, stability of each equilibrium set is analyzed for the integer-order memristive system. Meanwhile, dynamical behavior depending on the initial states of the memristor. For the fractional-order case, based on the fractional-order stability theory, stability analysis is carried out just for a certain equilibrium point.

This work indicates how the fractional order model and the initial state of the memristor extend the dynamical behaviors of the traditional chaotic systems.

Key words : Dynamic system, chaotic, fractional, circuit, memristor.

التلخيص :

في هذه المذكرة، قدمنا نظامًا قائمًا على ترتيب صحيح (وترتيب كسري) مع ميمريستور التي يتم التحكم فيها بالتدفق والتي تتميز من خلال تربيع غير خطي. مقترح ويتم إجراء تحليل ديناميكي مفصل عن طريق الأساليب النظرية والعديدية. لكي نكون أكثر دقة، يتم تحليل استقرار كل نقطة توازن في مجموعة التوازن لنظام ميمريستيف الترتيب بأكمله.

خلال هذا الوقت، يتم دراسة السلوك الديناميكي كدالة للحالات الأولية للميمريستور.

بالنسبة لحالة الترتيب الكسري على أساس نظرية استقرار الترتيب الجزئي، يتم إجراء تحليل الاستقرار فقط لنقطة توازن معينة.

توضح هذه المذكرة كيف يعمل نموذج الترتيب الكسري والحالة الأولية للميمريستور على توسيع السلوك الديناميكي للأنظمة الفوضوية التقليدية.

الكلمات المفتاحية : الفوضى، الميمريستور، النظام الديناميكي، دارة، ترتيب كسري.