الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
**République Algérienne Démocratique et Populaire**
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Nº Réf :……………**


**Centre Universitaire**
**Abd elhafid boussouf Mila**

**Institut des sciences et de la technologie**

**Département de Mathématiques et Informatique**


**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master**

**En: Mathématiques**

**Spécialité: Mathématiques appliquées**

# Étude du comportement de la solution méromorphe de certaines équations fonctionnelles


**Préparé par : Meroua Betit**
**Rayane Bouank**


**Soutenue devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Bouzekria Fahima** | **MAA** | **C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila** | **Président** |
| **Bourourou Siham** | **MCB** | **C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila** | **Rapporteur** |
| **Amiour Moufida** | **MCB** | **C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila** | **Examinateur** |

**Année universitaire :2021/2022**

# Remerciements

*Au terme de ce travail, nous commençons par remercier* ***"DIEU"*** *pour nous avoir donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.*

*Je voudrais adresser toute ma reconnaissance à la directrice de ce mémoire, Madame* ***"Bourourou Siham"****, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

*Je remercie également toute l'équipe pédagogique de* Centre Universitaire ***"Abdelhafid Boussouf"****, on tient aussi remercier tous les membres du jury Madame* ***"Bouzekria Fahima"*** et *Madame* ***"Amiour Moufida"*** *qui ont accepté de juger notre modeste travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi. Un grand merci à nos familles, nos amis, nos collègues chacun son nom.*

*Enfin, nous remercions toutes personnes qu'ont contribué de prés ou de lois à l'achèvement de ce travail.*

*Merci Pour Tout*

# Dédicace

*Je dédice ce modeste travail accompagné d'un profond amour :*
*À celle qui m'a arroseé de tendresse et d'espoirs, à la source d'amour incessible, à la mère des sentiments fragilles qui ma bénie pas ces prières....ma mère*

*À mon support dans ma vie, qui m'a apprios m'a*
*supporté et ma dirigé vers la gloire .... mon père*

*À mes frères : Raid, Mohammed Mahdi*

*À ma soeur : Safa*

*À mon fiancé : Zaki*

*À mes amis : Hadjer, Maissa, Nihad*

*Je remercie ma collègue Rayane, avec qui elle a partagé ce travail, et à tous les gens qui m'ont aidédans ma vie.*

*Meroua*

# *Dédicace*

*Je dédice ce modeste travail accompagné d'un profond amour :*
*À celle qui m'a arroseé de tendresse et d'espoirs, à la source d'amour incessible, à la mère des sentiments fragilles qui ma bénie pas ces prières....ma mère*

*À mon support dans ma vie, qui m'a apprios m'a*
*supporté et ma dirigé vers la gloire .... mon père*

*À mes frères : Taki Eddine, Salah Eddine*

*À mes soeurs : Sara, Roumaissa*

*À mon fiancé : Khaled*

*À mes amis : Yasmine, Roumaissa*

*Je remercie ma collègue Meroua, avec qui elle a partagé ce travail, et à tous les gens qui m'ont aidédans ma vie.*

*Rayane*

# TABLE DES MATIÈRES

# NOTATIONS

- $p$ un nombre premier, $p = 1, 2, 3, 5, 7 \cdots, 2011, \cdots$
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers réels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{Q}_p$ l'ensemble des nombres p-adiques.
- $\mathbb{C}_p$ l'ensemble des nombres complexes p-adiques.
- $|.|_\infty$ la valeur absolue usuelle.
- $|.|_p$ la valeur absolue p-adique.
- $v_p(.)$ la valuation p-adique.
- $[x]$ la partie entière de $x$.
- $C_n^k$ coefficients binomiaux (combinaison de $k$ parmi $n$).
- $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble des polynômes a coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles a coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\widetilde{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.
- $D^+(a, r)$ le disque fermé de centre a et de rayon $r$.
- $D^-(a, r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon $r$.
- $C(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon $r$.
- $|f|(r)$ le module maximum de $f$.

# INTRODUCTION

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude du comportement des solutions méromorphes dans un corps ultramétrique (qui sera noté $\mathbb{K}$), de certaines équations aux différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(x+i) = h(x),$$

où $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{K}$ telle que $g_0(x)g_s(x) \not\equiv 0$. Nous traitons, en particulier, le comportement des solutions, dans le cas où elle existe, de ces équations. On insiste surtout sur l'étude de la solution méromorphe en général et la solution entière en particulier. Les caractéristiques de la solution dépendent particulièrement de la nature de coefficients de ces équations.

Ce travail est composé de tois chapitres.

Le premier chapitre est composé de deux parties. Dans la première partie on va rappeller les notions de base d'un corps ultramétrique, et traitons quelques propriétés fondamentales analytiques et topologiques. Ensuite on va décrire la méthode de construction du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, ainsi que l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$. Dans la seconde partie, nous allons introduire les notions et les propriétés nécessaires liées aux fonctions analytiques et méromorphes, dans un corps ultramétrique et dans un disque.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le polygône de valuation qui joue un rôle important pour établir la formule de Jensen dans le cas ultramétrique, puis on donne la version ultramétrique de la théorie de Nevanlinna qui est devenue l'une des champs mathématiques les plus intéresantes. Pour cela on a besoin de définir les notions classiques de cette théorie ; la fonction de comptage de zéros de $f$ avec multiplicités $Z(r, f)$, la fonction de comptage de pôles de $f$ avec multiplicités $N(r, f)$, la fonction de compensation $m(r, f)$, et en fin la fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r, f)$.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'application du théorème de Nevanlinna ultramétrique sur les équations aux différences. On utilise les notions de base du théorème de Nevanlinna pour caractériser la taille des solutions méromorphes de ces équations et étudier le comportement et l'ordre de croissance de ces solutions.

# CHAPITRE 1

# NOTIONS ÉLÉMENTAIRES EN ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de bases utilisées tout au long de ce mémoire, quelques résultats principaux sur les corps ultramétriques, puis on va décrire les méthodes de constructions du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, ainsi que l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$, en suite on donne quelques propriétés analytiques et topologiques du corps $\mathbb{Q}_p$, et définie aussi le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$. De plus, nous rappelons quelques propriétés des fonctions analytiques et méromorphes ultramétriques dans un disque ou dans le corps tout entier.

## 1.1 Corps valués ultramétriques

**Définition 1.1.1.** ***(Valeur absolue sur un corps)***
*Soit $\mathbb{K}$ un corps, une valeur asbolue sur $\mathbb{K}$ est une application*
$|.| : \mathbb{K} \longmapsto \mathbb{R}_+$, *vérifiant les trois propriétés suivantes*
$(i)$ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{K}$,
$(ii)$ $|xy| = |x||y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$,
$(iii)$ $|x + y| \leqslant |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$ *(inégalité triangulaire).*

**Définition 1.1.2.** ***(Valeur absolue ultramétrique)***
*Une valeur absolue sur $\mathbb{K}$ est dite ultramétrique ou non-archimédienne, si elle vérifie la propriété*

$$|x+y| \leqslant \max\{|x|,|y|\}, \quad \forall x,y \in \mathbb{K}.$$

*Cette propriété est connue comme l'inégalité triangulaire forte ou ultramétrique, elle est plus forte que la propriété (iii).*

**Définition 1.1.3.**
*(i) On appelle corps valué tout couple de la forme $(\mathbb{K},|.|)$ où $\mathbb{K}$ est un corps et $|.|$ est une valeur absolue sur $\mathbb{K}$.*
*(ii) On appelle la distance induite sur $\mathbb{K}$ par $|.|$, la distance $d$ sur $\mathbb{K}$ définie par*

$$\forall x,y \in \mathbb{K} : d(x,y) = |x-y|.$$

*(iii) Si $|.|$ est une valeur absolue ultramétrique, alors*

$$\forall x,y,z \in \mathbb{K} : d(x,z) \leq \max\{d(x,y),d(y,z)\},$$

*et la distance induite par cette valeur absolue appellée distance ultramétrique.*
*(iv) Lorsque $\mathbb{K}$ muni de la distance ultramétrique, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps valué ultramétrique. Dans le cas contraire, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps valué archimédien.*

## 1.2 Propriétés élémentaires d'un corps ultramétrique

**Théorème 1.2.1.** ***(Caractéristique du corps ultramétrique)****[15]*
*Soit $|.|$ une valeur absolue sur un corps $\mathbb{K}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
*(i) $|.|$ est un valeur absolue ultramétrique,*
*(ii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \leq 1$.*

**Preuve.**

On montre $(i) \Rightarrow (ii)$ par réccurence, soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $n = 1$, on a $|1|$=1.
Supposons $|k| \leq 1$ pour tout $k = 1,2,...,n-1$, et montrons que $|n| \leq 1$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned} |n| = |(n-1)+1| &\leq \max(|n-1|, |1|) \\ &\leq 1, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}$ on a $n = -n'$, $n' \in \mathbb{N}$. Nous avons toujours $|n| = |-n'| = |n'| \leq 1$, donc $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, supposons que $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Nous voulous prouver que pour deux éléments quelconque $x, y \in \mathbb{K}$, nous avons $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$. Si $y = 0$, c'est évident. Sinon, nous pouvons diviser par $|y|$, et nous voyons que cela équivant à l'inégalité

$$|\frac{x}{y} + 1| \leq \max\{|\frac{x}{y}|, 1\}.$$

Cela signifie que nous devons prouver l'inégalité dans le cas où le second terme de la somme est 1. En d'autre termes, nous voulons prouver que pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$|x+1| \leq \max\{|x|, 1\}.$$

Maintenant, soit n un entier positif. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} |x+1|^n = |(x+1)^n| &= |\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |C_n^k||x|^k. \end{aligned}$$

Puisque $C_n^k$ est un entier, on a $|C_n^k| \leq 1$, donc on peut continuer avec

$$|x+1|^n \leq \sum_{k=0}^{n} |x|^k \leq (n+1)\max\{|1, |x|^n\}.$$

Pour la dernière étape, notons que la plus grand valeur de $|x|^k$, pour $k = 0, 1, ..., n$ est égale à $|x|^n$ si $|x| > 1$ et égal à 1 sinon. Prenant le n-ième racine sur les deux côtés donne

$$|x+1| \leq \sqrt[n]{n+1}\ \max\{|1, |x|\}, \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et on sait que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Par conséquent,

$$|x+1| \leq \max\{|1, |x|\}, \textit{ pour tout } x \in \mathbb{K}.$$

$\blacksquare$

**Corollaire 1.2.1.** *[15]*
*Soit $\mathbb{K}$ un corps, alors la valeur absolue $|.|$ est archimédienne si et seulement si*

$$sup\{|n|, n \in \mathbb{Z}\} = +\infty.$$

**Proposition 1.2.1.** *[15]*
*Soit $a$ et $x$ deux éléments d'un corps ultramétrique $(\mathbb{K}, |.|)$, on a*

$$|x-a| < |a| \Rightarrow |x| = |a|.$$

**Preuve.**
Soit $x,\ a \in \mathbb{K}$, par l'inégalité ultramétrique, on a

$$|x| = |x-a+a| \leqslant \max\{|x-a|, |a|\} = |a|,$$
$$|a| = |a-x+x| \leqslant \max\{|x-a|, |x|\}.$$

Si $\max\{|x-a|, |x|\} = |x|$, on a le résultat. L'autre variante est contradiction avec l'hypothèse.

**Corollaire 1.2.2.** *[15]*
*Dans un espace ultramétrique, tous les triangles sont isocèles.*

**Preuve.**
*Soit le triangle $x, y, z$. On a si $|y-z|_p = |(y-x)-(z-x)|_p < |x-z|_p$, alors d'après la Proposition* (1.2.1), $|x-y|_p = |x-z|_p$. $\blacksquare$

## 1.3 Le corps des nombres p-adiques

Le corps des nombres p-adiques est un exemple des espaces ultramétrique. Dans cette section, nous allons construire le corps des nombres p-adiques en utilisant la méthode topologique (analytique) basé sur le théorème de complétion, de plus nous allons exposer certaines propriétés de ce corps qui restent pour la plupart vraies dans le cas d'un corps ultramétrique.

### 1.3.1 Valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$

Comme $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$, on peut le munir de la valeur absolue usuelle. Nous allons nous intéresser ici à d'autre valeurs absolues de $\mathbb{Q}$, associées à un nombre premier p.

**Définition 1.3.1.** *(Valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$)*
*Soit p un nombre premier. La valuation p-adique de a sur $\mathbb{Z}$ est la fonction*

$$v_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

$$a \to \begin{cases} v_p(a) & si \quad a \neq 0 \\ +\infty & si \quad a = 0, \end{cases}$$

*où $v_p(a)$ est le plus grand entier positif tel que $p^{v_p(a)}$ dévise a, i.e, $a = p^{v_p(a)}b$ avec p ne dévise pas b.*
*On peut étendre la valuation p-adique $v_p$ au corps $\mathbb{Q}$ de la façon suivante, si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on pose,*

$$v_p(x) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z}.$$

**Exemple 1.3.1.**
(1) *Soit $a = 525 = 3.5^2.7$. On a $v_3(a) = 1,\ v_5(a) = 2,\ v_7(a) = 1$ et $v_p(a) = 0$ pour tout nombre premier p différent de 3, 5 et 7.*
(2) *On a $v_2\left(\frac{12}{25}\right) = 2,\ v_3\left(\frac{12}{25}\right) = 1$ et $v_5\left(\frac{12}{25}\right) = -2$. Pour p différent de 2, 3, 5, on a $v_p\left(\frac{12}{25}\right) = 0$.*
(3) *On a $v_p(p^n) = n$, pour tout entier n.*

**Proposition 1.3.1.** *[3], [15]*
*Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, la valuation p-adique vérifie les propriétés suivantes*
*(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,*
*(ii) $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.*

**Preuve.**
Pour montre (i) et (ii) soient a, b deux nombres entiers ne sont pas nuls, on peut écrire

$$\begin{aligned} a &= p^{\alpha}n_1 \; avec \; \alpha = v_p(a) \; et \; p \; ne \; divise \; pas \; n_1. \\ b &= p^{\beta}n_2 \; avec \; \beta = v_p(b) \; et \; p \; ne \; divise \; pas \; n_2. \end{aligned}$$

Donc,

$$ab = p^{\alpha+\beta}(n_1n_2) \text{ avec } p \; ne \; divise \; pas \; n_1n_2,$$

d'où

$$v_p(ab) = \alpha + \beta = v_p(a) + v_p(b).$$

Pour (ii), on distingue trois cas,
Si $\alpha < \beta$, nous avons $a + b = p^{\alpha}(n_1 + p^{\beta-\alpha}n_2)$, d'où

$$v_p(a + b) = \alpha \geq min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha > \beta$, nous avons $a + b = p^{\beta}(n_2 + p^{\alpha-\beta}n_1)$, d'où

$$v_p(a + b) = \beta \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha = \beta$, nous avons $a + b = p^{\alpha}(n_1 + n_2)$, où $p$ ne divise pas $n_1 + n_2$. D'où

$$v_p(a + b) = \alpha \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

■

**Définition 1.3.2.** *(**Valeur absolue p-adique sur** $\mathbb{Q}$)*
*Soit p un nombre premier. On définit la valeur absolue p-adique comme application*

$$|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto |x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

*Avec la définition, on voit que* $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ *pour tous rationnels* $x$ *et* $y$*, car* $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

*Ainsi, si $x$ s'écrit $\prod_i p_i^{\alpha_i}$, où les $\alpha_i$ sont des entiers, alors $v_{p_i}(x) = \alpha_i$ et $|x|_{p_i} = \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$. Notons que $1 = \prod_i p_i^0$, donc $v_p(1) = 0$, pour tout nombre premier $p$.*

**Exemple 1.3.2.**
(1) *On a* $\left|\frac{12}{25}\right|_2 = \frac{1}{4}$, $\left|\frac{12}{25}\right|_3 = \frac{1}{3}$, $\left|\frac{12}{25}\right|_5 = 25$ *et* $\left|\frac{12}{25}\right|_p = 1$ *pour $p$ différent de 2, 3, 5.*
(2) *On a* $|p^n|_p = \frac{1}{p^n}$ *: plus on est divisible par $p$, plus on est petit.*

**Proposition 1.3.2.** *[15]*
*Pour tout $p$ premier l'application $x \mapsto |x|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.*

**Preuve.**

Vérifions l'inégalité triangulaire forte, soient $x, y \in \mathbb{Q}$, si $x = 0$ (ou $y = 0$), on a le résultat. En effet, soit $y \neq 0, x = 0$, on a

$$|x + y|_p = |y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Si $x + y = 0$, c'est à dire, $x = -y$ on a $|x|_p = |y|_p$ et

$$|x + y|_p = 0 \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Si $x, y \neq 0$, on a $|x + y|_p = p^{-v_p(x+y)}$. Soit $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ , $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$, nous avons

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} v_p(x + y) = v_p\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) &= v_p(ad + bc) - v_p(bd) \\ &= v_p(ad + bc) - v_p(b) - v_p(d) \\ &\geq \min\{v_p(a) + v_p(d), v_p(b) + v_p(c)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \min\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} \\ &= \min\{v_p(x), v_p(y)\}. \end{aligned}$$

Donc $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$, i.e,

$$\begin{aligned} -v_p(x+y) &\leq -\min(v_p(x), v_p(y)) \\ &= \max(-v_p(x), -v_p(y)). \end{aligned}$$

Si $\max(-v_p(x), -v_p(y)) = -v_p(x)$, on a $-v_p(x+y) \leq -v_p(x)$, donc

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(x)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}.$$

D'où $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.
Si $\max(-v_p(x), -v_p(y)) = -v_p(y)$, on a $-v_p(x+y) \leq -v_p(y)$, donc

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(y)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}.$$

D'où, $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, et par suite, $|.|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$. ∎

**Remarque 1.3.1.** *On peut définir sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ trois types des valeurs absolues*
($i$) *Valeur absolue triviale*

$$|x| = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

($ii$) *Valeur absolue ordinaire*

$$|x|_\infty = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}$$

($iii$) *Valeur absolue p-adique $|x|_p$.*

**Remarque 1.3.2.**
*La valeur absolue p-adique $|.|_p$ prend ses valeurs dans l'ensemble discret définie par*

$$|\mathbb{Q}|_p = \{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

**Théorème 1.3.1.** ***(Théorème d'Ostrowski)*** *[15]*
*Toute valeur absolue non triviale $|.|$ sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à $|.|_p$ pour un nombre premier $p$, soit à la valeur absolue usuelle notée $|.|_\infty$.*

**Théorème 1.3.2.** ***(Formule de produit)*** *[1]*
*Si $x \in \mathbb{Q}^*$, on a*

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = 1.$$

*Où $p \leq \infty$ signifie que nous prenons le produit sur l'ensemble des nombres premiers de $\mathbb{Q}$, y compris "l'infini".*

**Preuve.**

Il est facile de voir que nous avons seulement besion de prouver la formule lorsque x est un entier positif, et que le cas générale s'ensuit directement. Soit x un entier positif, que nous pouvons le factoriser comme $x = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Nous avons

$$|x|_\infty = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}.$$

Et

$$|x|_p = \begin{cases} 1 & si \quad p \notin \{p_i,\ i = 1, ...k\} \\ p_i^{-\alpha_i} & si \quad p \in \{p_i,\ i = 1, ...k\}. \end{cases}$$

D'où, le résultat. ■

### 1.3.2 Complétion de $\mathbb{Q}$

Ce paragraphe présente une construction du corps des nombres p-adiques. La méthode utilisée pour construire ce corps est semblable à la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.
Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue p-adique $|.|_p$, on le complète et on obtient un espace complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$ est qui s'appelle le corps des nombres p-adiques.
On rappelle le procédé de complétion (qui est valable pour un espace métrique

quelconque). Soit $E$ l'ensemble des suites des Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ (pour la valeur absolue $|.|_p$). On définit sur $E$ une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ de la façon suivante ; si $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont des éléments de $E$, on a $u\mathcal{R}v$ si et seulement si $|u_n - v_n|_p$ tend vers zéros si n tend vers l'infini.
On montre alors que sur L'espace quotient $\mathbb{Q}_p = E/\mathcal{R}$, on peut prolonger la distance sur E, et que cet espace métrique quotient est un espace complet, qui contient $\mathbb{Q}$ comme sous espace dense.
Nous indiquons comment prolonger la valeur absolue définie sur $\mathbb{Q}$ à tout $\mathbb{Q}_p$. Soit $x$ un élément de $\mathbb{Q}_p$ et $(x_n)_n$une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$. La suite $(|x_n|_p)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$ car :

$$||x_n|_p - |x_m|_p| \leq |x_n - x_m|_p,$$

donc elle converge vers une limite $l$ dans $\mathbb{R}_+$. Cette limite est appelée la valeur absolue p-adique de $x$, c'est une valeur absolue ultramétrique, et on a

$$|x|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p.$$

On peut également, étendre la valuation p-adique au $\mathbb{Q}_p$ ; $v_p(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_p(x_n)$.

**Remarque 1.3.3.** *L'ensemble des valeurs de l'application $|.|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_+$ est le même ensemble de valeurs de l'application $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$, et il est donné par : $\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$. Par contre la valeur absolue usuelle définit sur $\mathbb{R}$, elle parcourt tout l'ensemble des nombres réels positives $\mathbb{R}_+$.*

### 1.3.3 L'anneau des entiers p-adiques

Une partie intéressente de $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des éléments de la valeur absolue p-adique inférieure ou égale à 1 que l'on note $\mathbb{Z}_p$.

**Définition 1.3.3.**
($i$) *On dit que le nombre p-adique $x \in \mathbb{Q}$, est un entier p-adique si le développement canonique de $x$ ne contient que les puissances positives de $p$. Autrement dit $v_p(x) \geq 0$, on écrit*

$x = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + ... + \alpha_n p^n + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p^n$, $0 \leq \alpha < p$.

*(ii) On note $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des entiers p-adiques, où*

$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p^n\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : v_p(x) \geq 0\}$.

**Remarque 1.3.4.**

*(i)* $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : v_p(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$.

*Autrement dit $\mathbb{Z}_p$ réprésente la boule unité des fermée de $\mathbb{Q}_p$.*

*(ii) Le corps $\mathbb{Q}_p$ est l'ensemble des fractions de $\mathbb{Z}_p$ tel que :*

$\mathbb{Q}_p = Frac(\mathbb{Z}_p) = \left\{\frac{a}{b},\ a,\ b \in \mathbb{Z}_p,\ b \neq 0\right\}$.

## 1.4 Le corps $\mathbb{C}_p$

**Définition 1.4.1.** *On dit qu'un corps ultramétrique $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ admet des racines dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, chacun de ces polynômes se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[x]$.*

Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs pour tout $p$ premier, (considérer par exemple l'équation $x^2 - p = 0 \in \mathbb{Q}_p[x]$, puis on trouve que $v_p(x) = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, donc cette équation n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}_p$ (i.e. $\sqrt{\pm P} \notin \mathbb{Q}_p$)).
Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considéré une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complète (le corps $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ est constitué de toutes les racines des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$), donc nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôs noté $\mathbb{C}_p$. On montre que l'on peut prolonger la valeur absolue à ce corps, qui possède donc aussi une valeur absolue ultramétrique, que l'on note toujours $|.|_p$.
Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes

**Proposition 1.4.1.** *[2]*

*(i) $\mathbb{C}_p$ algébriquement clôs.*

*(ii) $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.*

*(iii) L'ensemble des valeurs p-adiques de $\mathbb{C}_p$ est l'ensemble de puissances rationnelles de p, c'est à dire, $|\mathbb{C}_p| = \{p^y, y \in \mathbb{Q}\}$.*

*(iv) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \widetilde{\mathbb{Q}}_p \subset \mathbb{C}_p$.*

## 1.5 Propriétés topologiques et analytiques des nombres $p$-adiques

### 1.5.1 Propriétés topologiques

Nous énonçons et démontrons dans cette section quelques propriétés topologiques importantes de $\mathbb{Z}_p$ et de $\mathbb{Q}_p$. Nous commençons avec des propriétés qui est aussi vrai pour les corps muni d'une valeur absolue ultramétrique.
Soit $r$ un réel strictement positif, et $a$ un nombre $p$-adique. On note $D^+(a,r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p \leq r\}$ et l'on appelle disque fermé. On note $D^-(a,r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p, |x-a|_p < r\}$ et l'on appelle disque ouvert et $C(a,r) = D^+(a,r)\backslash D^-(a,r)$ le cercle de centre $a$ et rayon $r$. La notation $D(a,r)$ désignera l'un ou l'autre de ces deux disque.

**Proposition 1.5.1.** *[3]*
*Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors*
($i$) *Si $b \in D(a,r)$, alors $D(b,r) = D(a,r)$. Autrement dit, tout point d'un disque est un centre de ce disque.*
($ii$) *Tout disque de l'espace topologique $\mathbb{Q}_p$ est à la fois ouvert et fermé.*
($iii$) *Soient $D(a,r)$ et $D(b,s)$ deux disques, alors ils sont disjoints, ou l'un est inclus dans l'autre.*

**Preuve.**
($i$) Si $b \in D(a,r)$, on a par définition $|b-a|_p < r$. Prenant $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|x-a|_p < r$, on a par l'inégalité ultramétrique,

$$|x-b|_p < \max\{|x-a|_p, |b-a|_p\} < r,$$

de telle sorte que $x \in D(b,r)$, et donc on a montré que $D(a,r) \subset D(b,r)$. En changeant simplement les rôles de $a$ et $b$, on montre que $D(b,r) \subset D(a,r)$, d'où l'égalité.
($ii$) Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et considérons $D^-(a,r), r > 0$ le disque ouvert centré en $a$ et de rayon $r$. Par définition, c'est un ouvert de $\mathbb{Q}_p$. Il reste donc à montrer qu'il est aussi fermé dans le cas non-archimédien. Alors, prenons un point $x$ sur la frontière de $D^-(a,r)$, ce qui signifie que tout disque ouvert centré en $x$ doit contenir des

points qui sont dans $D^{-}(a,r)$. Choisissons un rayon $s<r$. Maintenant, puisque $x$ est un point de la frontière de $D^{-}(a,r), D^{-}(a,r)\cap D^{-}(x,s)\neq\emptyset$, il existe un élément $y\in D^{-}(a,r)\cap D^{-}(x,s)$. Cela signifie que $|y-a|_p<r$ et $|y-x|_p<s<r$. Appliquant l'inégalité ultramétrique, nous obtenons

$$|x-a|_p<\max\{|x-y|_p,|y-a|_p\}<\max\{s,r\}<r,$$

d'où $x\in D^{-}(a,r)$. Cela montre que tout point sur la frontière de $D^{-}(a,r)$ appartient à $D^{-}(a,r)$, ce qui veut dire que $D^{-}(a,r)$ est un ensemble fermé.
(*iii*) Nous pouvons supposer que $r<s$. Si l'intersection n'est pas vide, il existe $c\in D(a,r)\cap D(b,s)$. En suite, nous avons, à partir de (*i*), que

$$D(a,r)=D(c,r)\ et\ D(b,s)=D(c,s).$$

Par conséquent,

$$D(a,r)=D(c,r)\subset D(c,s)=D(b,s).$$

■

L'anneau $\mathbb{Z}_p$ a des propriétés topologiques intéressantes.

**Proposition 1.5.2.** *[15]*
*L'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques est un ensemble compact, et $\mathbb{Z}$ (de même $\mathbb{N}$) est dense dans $\mathbb{Z}_p$.*

**Théorème 1.5.1.** *$\mathbb{Q}_p$ est localement compact.*

**Preuve.**

Le fait que $\mathbb{Q}_p$ soit localement compact est une conséquence directe de la compacité de $\mathbb{Z}_p$. En effet, pour tout $x\in\mathbb{Q}_p$, on a $D(x,1)=\{x+y; y\in\mathbb{Z}_p\}$ est un voisinage compact de $x$. ■

### 1.5.2 Propriétés analytiques

**Proposition 1.5.3.** *[15]*
*Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy si et seulement si,*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

**Preuve.**

Si $(a_n)_p$ est de Cauchy, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+m} - a_n|_p = 0, \forall m \geq 0,$$

d'où quand $m = 1$, On a

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Inversement, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n|_p &= |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} \ldots + a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p \\ &\leq \max\{|a_n - a_{n+1}|_p, |a_{n+1} - a_{n+2}|_p, \ldots, |a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+m} - a_n|_p = 0,$$

d'où $(a_n)_p$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$. ■

**Remarque 1.5.1.** *$(a_n)_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $|a_{n+1} - a_n|_p \longrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$.*

**Proposition 1.5.4.** *[15]*
*Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ dans $\mathbb{Q}_p$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p = 0,$$

*ou bien, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$, $|a_n|_p = |a_{N_0}|_p$, pour $n \geq N_0$ (la suite $(|a_n|_p)_{n\geq 0}$ est stationnaire à partir d'un rang $N_0$).*

**Preuve.**

Soit $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, on a

$$||a_n|_p - |a_m|_p| < |a_n - a_m|_p \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

donc $(|a_n|_p)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc $(|a_n|_p)_n$ est convergente.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p = \ell > 0$.
Posons $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $|a_n|_p > \frac{\ell}{2}$.
De même, il exists $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > N_2$ on a $|a_m - a_n|_p < \frac{\ell}{2}$. D'où, pour $n, m > \max(N_1, N_2) = N_0$, on a

$$|a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\} = |a_n|_p.$$

Si $n = N_0$, on aura $|a_m|_p \leq |a_{N_0}|_p$, pour $m \geq N_0$.
De même

$$|a_n|_p \leq \max\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\} = |a_m|_p.$$

Alors $|a_{N_0}|_p \leq |a_m|_p$, pour $m \geq N_0$, D'où $|a_{N_0}|_p = |a_m|_p$, pour $m \geq N_0$. ■

Soit la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ et $a_k \in \mathbb{Q}_p$. On sait que la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$.

**Proposition 1.5.5.** *[15]*
*Soit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ une série dans $\mathbb{Q}_p$ ($a_k \in \mathbb{Q}_p$). Alors $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Dans ce cas,*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p.$$

**Preuve.**

La série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$, donc $S_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, d'où

$$|S_n - S_{n-1}|_p \longrightarrow 0, \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

Mais $a_n = S_n - S_{n-1}$, donc $(a_n)$ tend vers zéro dans $\mathbb{Q}_p$.
Maintenant, supposons que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, on a le résultat. Sinon,

d'après la Proposition 1.5.4, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_0$, on a

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n|_p = |\sum_{n=1}^{N_0} a_n|_p. \tag{1.1}$$

D'autre part, on a

$$\max_{1 \leq n \leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|_p\}. \tag{1.2}$$

De (2.1) et (2.2), on a

$$|\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_p = |\sum_{n=1}^{N_0} a_n|_p \leq \max_{1 \leq n \leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|_p\}.$$

■

**Exemple 1.5.1.**
(1) *Le fait que* $v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$, *où* $S_p(n)$ *désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p. Il en résulte que* $v_p(n!)$ *tend vers l'infini, et* $\lim_{n \to +\infty} |n!| = \lim_{n \to +\infty} p^{-v_p(n!)} = 0$, *donc la série de terme général* $n!$ *converge, i.e la somme* $\sum_{n \geq 0} n!$ *existe dans* $\mathbb{Q}_p$.
(2) $\sum_{n \geq 0} p^n = \frac{1}{p-1}$ *converge dans* $\mathbb{Q}_p$, *car* $\lim_{n \to +\infty} |p^n|_p = \lim_{n \to +\infty} p^{-n} \neq 0$.
(3) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{p^n}$ *diverge dans* $\mathbb{Q}_p$, *car* $\lim_{n \to +\infty} |\frac{1}{p^n}|_p = \lim_{n \to +\infty} p^n \neq 0$.

## 1.6 Fonctions analytiques d'un corps ultramétrique

On note $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clôs, complet par rapport a une valeur absolue ultramétrique $|.|$.

**Définition 1.6.1.** ***(Série entière)***
*Une série entière dans* $\mathbb{K}$, *c'est une série de fonction qui s'écrit sous la forme*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n, \ a_n \in \mathbb{K},$$

*où x et a sont des nombres de* $\mathbb{K}$.

**Définition 1.6.2.** *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *Comme en*

*analyse archimédienne, si* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$*, on pose* $R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
*Le nombre R est appelé le rayon de convergence de f. Donc, pour* $x \in \mathbb{K}$*, on a les situations suivantes*
$(i)$ $|x| < R$*. Donc* $\lim_{n\to+\infty} |a_n||x|^n = 0$ *et alors la série est convergente,*
$(ii)$ $|x| > R$*. Donc la série est divergente,*
$(iii)$ $|x| = R$*. Donc on peut avoir ou bien* $\lim_{n\to+\infty} |a_n||x|^n = 0$ *et alors la série est convergente sur la totalité du cercle* $C(0, R)$*, ou bien* $\lim_{n\to+\infty} |a_n||x|^n \neq 0$ *et alors la série est divergente dans le* $C(0, R)$*.*
*D'autre part, quand* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$*, on a* $R = 0$ *et donc f est convergente seulement quand* $x = 0$*.*
*Quand* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$*, on dit que le rayon de convergence de f est égal à* $+\infty$ *et dans ce cas f est convergente pour tout* $x \in \mathbb{K}$*. Le disque* $D^-(0, R)$ *est appelé le disque de convergence .*

**Exemple 1.6.1.**
(1) *Soit* $b \in \mathbb{K}$ *non nul, le disque de convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} b^n x^n = \frac{1}{1-bx}$*,* $x \in \mathbb{K}$ *est* $D^-(0, |b|^{-1})$.
(2) *Le disque de convergence de la série* $\ln(x+1) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$*, pour tout* $x \in \mathbb{K}$ *est* $D^-(0, 1)$.

**Définition 1.6.3.** *Soit f une fonction définie de* $D^+(a, R)$ *dans* $\mathbb{K}$*, on dit que f est une fonction analytique sur* $D^+(a, R)$*, s'il existe une suite* $(a_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$*, satisfaisant* $|a_n|R^n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*, et pour tout* $x \in D^+(a, R)$*, on a*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n.$$

*Autrement dit, on dit q'une fonction f est analytique si elle est développable en série entière auteur de chaque point de son domaine de définition.*

**Définition 1.6.4.** *Soit f une fonction définie de* $D^-(a, R)$ *dans* $\mathbb{K}$*, on dit que f est une fonction analytique sur* $D^-(a, R)$*, si pour tout* $0 < r < R$*, la restriction de f à* $D^+(a, r)$ *est une fonction analytique sur* $D^+(a, r)$*.*

**Définition 1.6.5.** ***(Fonction entière)***
*Une fonction analytique dans le plan tout entier* $\mathbb{K}$ *est dit entière.*

**Proposition 1.6.1.** *[13]*

*Pour qu'une fonction $f : D^{-}(0,R) \to \mathbb{K}$ soit analytique sur $D^{-}(0,R)$, il faut et il suffit qu'il existe une suite unique $(a_n)_{n\geq 0}$, satisfaisant $|a_n|r^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, pou tout r, 0<r<R, et telle que pour $x \in D^{-}(0,R)$, on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.*

**Remarque 1.6.1.** *Les fonctions entières ce sont des fonctions somme d'une série entière de rayon de convergence infini.*

**Exemple 1.6.2.**

(1) *La fonction* $\exp(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *est analytique sur $D^{-}(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$, elle n'est pas analytique sur le cercle, est n'est pas entière sur $\mathbb{C}_p$. En effet, pour tout $r \in ]0, p^{-\frac{1}{p-1}}[$, il existe $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}_p$, telle que*

$$|a_n|_p r^n = \left|\frac{1}{n!}\right|_p r^n = p^{v_p(n!)} r^n = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} r^n = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} \left[p^{\frac{1}{p-1}} r\right]^n,$$

*où, $S_p(n)$ désigne la somme des chiffres de l'écriture de n en base p.*

*On sait que $p^{\frac{1}{p-1}} r < 1$, donc $|a_n|_p r^n$ tend vers zéro, l'orsque n tend vers l'infini. D'où* $\exp(x)$ *est analytique sur $D^{-}(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.*

*Si $|x|_p = p^{-\frac{1}{p-1}}$, alors*

$$|a_n|_p (p^{-\frac{1}{p-1}})^n = \left|\frac{1}{n!}\right|_p p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}},$$

*on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p (p^{-\frac{1}{p-1}})^n = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} \neq 0$ (puisque $S_p(n)$est constante). D'où la fonction* $\exp(x)$ *n'est pas convergente sur $C(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$ , donc elle n'est pas analytique sur $C(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.*
*Alors* $\exp(x)$ *n'est pas entière sur $\mathbb{C}_p$.*

(2) *La fonction $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} p^n x^n$ est analytique sur $D^{-}(0,1)$, elle n'est pas analytique sur $(D^{-}(0,p))$. En effet, pour $r < 1$, on a $0 \leq |a_n|_p r^n \leq p^{-n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 0$, d'où f est analytique sur $D^{-}(0,1)$ pour $r < p$, on a*

$$0 \leq |a_n|_p r^n \leq p^{-n} p^n = p^{-n+n} = p^0 = 1.$$

*D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 1$ et f n'est pas analytique sur $D^{-}(0,1)$.*

**Notation.**

*On note par $\mathcal{A}(D^{-}(a,R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^{+}(a,R))$) l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque $D^{-}(a,R)$(resp. $D^{+}(a,R)$).*

*On note par $\mathcal{A}(\mathbb{K})$(resp.$\mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[x]$) l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{k}$ (resp. l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{K}$, qui ne sont pas des polynôme, et qui s'appellent fonctions transcendantes).*

**Proposition 1.6.2.** *[13]*
*Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes*
*(i) $f \in \mathcal{A}(D^-(a,R))$,*
*(ii) La série $f(x)$ est convergente pour tout $x \in D^-(a,R)$.*

## 1.7 Zéros des fonctions analytiques

Dans cette partie on étudiera les zéros des fonctions analytiques sur un disque de $\mathbb{K}$.

**Définition 1.7.1.** *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) et soit $\gamma \in \mathbb{K}$ (resp. $\gamma \in (D^-(0,R))$). Soit $r \in ]0,+\infty[$ tel que $D^+(\gamma,r) \subset \mathbb{K}$ (resp. Soit $r \in ]0,R[$ tel que $D^+(\gamma,r) \subset D^-(\gamma,R)$), et soit $f(x) = \sum\limits_{n=q}^{+\infty} a_n(x-\gamma)^n$, $\forall x \in D^+(\gamma,r)$, où $a_q(\gamma) \neq 0$ et $q > 0$. On dit que dans ce cas $\gamma$ est un zéro de $f$ d'ordre de multiplicité $q$, et $q$ sera appelé l'ordre de multiplicité de zéro $\gamma$.*

**Proposition 1.7.1.** *[3]*
*Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire que si $b$ est un zéro de $f$, il existe un disque de centre $b$, de rayon assez petit, où la fonction $f$ n'admet comme zéro que $b$.*

**Preuve.**

Si $b$ est un zéro de $f$, on peut écrire la fonction non nulle $f$ sous la forme

$$f(x) = a_m(x-b)^m + a_{m+1}(x-b)^{m+1} + ...,$$

tels que $m \geq 1$ est un entier, et $a_m \neq 0$. Il résulte que si $|x-b|$ est assez petit, et non nul,

$$|f(x)| = |a_m||x-b|^m \neq 0.$$

■

**Corollaire 1.7.1.** *[13]*
*Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ non nulle. Pour chaque $\alpha \in D^-(0,R)$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\alpha)^n$. De plus, si $f(\alpha) = 0$, $\alpha$ est un zéro isolé et il existe $q \in \mathbb{N}$ unique tel que $f$ puisse être écrite dans $\mathcal{A}(D^-(0,R))$ sous la forme $(x-\alpha)^q g(x)$ où $g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ et $g(\alpha) \neq 0$.*

**Définition 1.7.2.**
*Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) .On définit le module maximum de $f$, pour $r \in ]0,+\infty[$ (resp. $r \in ]0,R[$), par la formule*

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n.$$

**Proposition 1.7.2.** *[2], [3], [13]*
*Soient $0 < r < R$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$, telles que $|a_n|r^n$ ait pour limite 0. La fonction*

$$f \mapsto |f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n,$$

*est une norme ultramétrique sur $\mathcal{A}(D^+(0,r))$. Elle est appelée la norme de Gauss.*
*De plus on a,*

$$\|f\| = \max_{x\in D^+(0,r)} |f(x)| = |f|(r).$$

*On a comme propriétés de la fonction $r \mapsto |f|(r)$.*

**Proposition 1.7.3.** *[3]*
*On suppose que $f \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$, $0 < r < R$. Si $f$ n'est pas nulle, alors*
*($i$) La fonction $|f|(r)$ est croissante,*
*($ii$) Si la fonction $f$ a un zéro $b$ dans le disque $D^+(0,r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante si $r > |b|$,*
*($iii$) La fonction $|f|(r)$ est continue.*

**Preuve.**
($i$) On a déjà vu que $|f|(r)$ est la borne supérieure de $|f(x)|$ sur le disque $D^+(0,r)$, ce qui fournit le résultat immédiatement.
($ii$) Soit $r_0 > |b|$. On a $|f|(r_0) = |a_s| r_0^s$, pour un $s \geq 1$, en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque $D^+(0,r_0)$. Comme $a_s$ n'est pas nul, si $r > r_0$, on a $|a_s|^s > |a_s| r_0^s$, donc

$$|f|(r) = \max_{k\geq 0} |a_k| r^k \geq |a_s|^s > |a_s| r_0^s = |f|(r_0).$$

(*iii*) Fixons $\beta \in ]0, r[$. Alors $|a_n|\beta^n$ tend vers 0 si $n \to +\infty$, de sorte qu'il existe N entier tel que

$$\max_{n \leq N} |a_n|\beta^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|\beta^n.$$

Il en résulte que $t \in [0, \beta]$, on a aussi

$$\max_{n \leq N} |a_n|t^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|t^n = |f|(t).$$

Comme la fonction $t \mapsto \max\limits_{n \leq N} |a_n|t^n$ est clairement continue, on a démontré le résultat. ∎

**Théorème 1.7.1.** *[8]*

*Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$), pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$), on a*

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

**Preuve.**

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(D^-(0, R))$), Pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$), on a $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$, alors $f'(x) = \sum\limits_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ et

$$|f'|(r) = \max_{n \geq 1} |na_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \max_{n \geq 1} |na_n| r^n \leq \frac{1}{r} \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \frac{1}{r}|f|(r).$$

∎

**Lemme 1.7.1.** *[3]*

*Soit $Q(x) = b_0 + ... + b_s x^s$, un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. On suppose que $|b_s|r^s = \max\limits_{0 \leq j \leq s}\{|b_j|r^j\} = |Q|(r)$. Alors le polynôme $Q$ a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r)$ de $\mathbb{K}$.*

**Preuve.**

Montrons que le polynôme $Q(x)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ dans le disque $D^+(0, r)$. On factorise Q(x),

$$Q(x) = b_s(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_s),$$

où $b_s \neq 0$, et les $\alpha_i$ sont dans $\mathbb{K}$, et pas forcément distincts. D'où

$$|x - \alpha_i|(r) = \max\{|x|, |\alpha_i|\} = \max\{r, |\alpha_i|\},$$

et on a

$$|Q|(r) = |b_s|r^s = |b_s| \prod_{i=1}^{s} \max\{r, |\alpha_i|\}.$$

Alors $\prod_{i=1}^{s} \max\{r, |\alpha_i|\} = r^s$, et comme $\max\{r, |\alpha_i|\} \geq r$, pour tout i, donc $\max\{r, |\alpha_i|\} = r$ et $|\alpha_i| \leq r$, pour tout i. On a donc bien montré que toutes les racines de Q sont dans le disque $D^+(0, r)$. ■

**Théorème 1.7.2.** *[3]*
*Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$ et soit s un indice tel que l'on ait $|a_s|r^s = |f|(r)$, et $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ pour $j > s$. Il existe alors un couple $(Q, H)$, $Q$ étant un polynôme de $\mathbb{K}[x]$, $Q(x) = b_0 + ... + b_s x^s$, avec $|b_s|r^s = |Q|(r) = |f|(r)$, et $H(x)$ une série entière appartenant à $\mathcal{A}(D^+(0, r))$, telle que $|H - 1|(r) < 1$, vérifiant $f(x) = Q(x)H(x)$.*

**Théorème 1.7.3.** *[3]*
*Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$ et soit s un indice tel que l'on ait $|a_s|r^s = |f|(r)$ et $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ pour $j > s$. Alors*
*($i$) Si $s \geq 1$, la fonction $f$ a exactement s zéros dans le disque $D^+(0, r)$, compte tenu des multiplicités,*
*($ii$) La fonction $f$ n'a aucun zéro dans le disque $D^+(0, r)$ si et seulement si $s = 0$, et sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.*

**Preuve.**

On va utiliser le Théorème 1.7.2. On a donc $f = QH$, avec les propriétés indiquées.
($i$) Comme $|H - 1|(r) < 1$, *on a* $|H(x)| = 1$, pour tout $x \in D^+(0, r)$, *donc* $H(x)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme $Q$ qui intervient dans la factorisation a toutes ses racines dans le disque $D^+(0, r)$. D'après le Lemme (1.7.1), $f$ a exactement s zéros compte tenu des multiplicités dans ce disque.
($ii$) Si $f$ n'a aucun zéro dans le disque, on doit avoir $s = 0$ par (i).
Si $s = 0$ , le polynôme $Q$ qui intervient dans la décomposition $f = QH$ est un polynôme de degré 0, donc une constante $c$, non nulle puisque $f$ est non nulle. Comme $|H - 1|(r) < 1$, on a $|H(x)| = 1$ pour tout $x \in D^+(0, r)$, et par suite $|f(x)| = |c|$. ■

## 1.8 Fonctions méromorphes d'un corps ultramétrique

**Définition 1.8.1.** *On dit q'une fonction $f$ est méromorphe sur $\mathbb{K}$ (resp. sur $D(0,R)$) si elle est analytique sur $\mathbb{K}$ (resp. Sur $D(0,R)$) sauf aux points de singularités isolées qui sont des pôles.*

**Remarque 1.8.1.** *Le quotient de deux fonctions entières est une fonction méromorphe. C'est à dire, si la fonction $f$ méromorphe dans $\mathbb{K}$ (resp. Dans $D(0,R)$), alors on peut écrire $f = \frac{g}{h}$ tel que $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(D(a,R))$) sans zéros communs.*

**Notation.**
*On note par $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ le corps des fonctions méromorphe dans $\mathbb{K}$ (resp dans $D(0,R)$), c'est à dire le corps de fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(D(0,R))$). La valeur absolue $|.|(r)$ définie sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(D^-(0,R))$) quand $r \in ]0,+\infty[$ (resp. $r \in ]0,R[$) , s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. à $\mathcal{M}(D^-(0,R))$) en posant $|f|(r) = \frac{|g|(r)}{|h|(r)}$ quand $f = \frac{g}{h}$ et $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$).*

Le Théorème qu'on énonce ci-dessous est une généralisation du Théorème 1.7.1.

**Théorème 1.8.1.** *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{M}(D(0,R))$). Pour tout $r \in ]0,+\infty[$ (resp. $r \in ]0,R[$), on a*

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

**Preuve.**

Posons $f = \frac{g}{h}$ où $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $g, h \in \mathcal{A}(D(0,R))$). Pour $r \in ]0,+\infty[$ (resp. $r \in ]0,R[$), on a

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} = \frac{|g'h - gh'|(r)}{|gh|(r)},$$

mais évidement $|g'h - gh'|(r) \leq \max\{|g'h|(r), |gh'|(r)\}$, ce qui entraîne que

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \max\left\{\frac{|g'|(r)}{|g|(r)}, \frac{|h'|(r)}{|h|(r)}\right\}.$$

Alors d'après le Théorème 1.7.1, on a $\frac{|g'|(r)}{|g|(r)} \leq \frac{1}{r}$ et $\frac{|h'|(r)}{|h|(r)} \leq \frac{1}{r}$, ce qui achève la démonstration. ∎

# CHAPITRE 2

# THÉORIE DE NEVANLINNA SUR UN CORPS ULTRAMÉTRIQUE

Dans la première partie de ce chapitre nous allons définir le polygône de valuation d'un polynôme (aussi d'une série entière) qui joue un rôle important pour établir la formule de Jensen qui est on traitera dans le seconde partie de ce chapitre.
Parmi les méthodes utilisées dans les problèmes de distribution de valeurs, la théorie de Nevanlinna ultramétrique, qui a été introduite en 1989 par A. Boutabaa. Elle s'applique non seulement à des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$, mais aussi en 2001, A. Boutabaa et A.Escassut ont appliqué cette théorie aux fonctions méromorphes dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$.

## 2.1 Polygône de valuation

Dans cette section, nous allons présenter les propriétés de polygône de valuation qui détermine la distribution des zéros des fonctions entières (aussi des polynômes).
Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une fonction non nulle de $\mathcal{A}(D^-(0,R))$ et soit $0 < r < R$, et regardons la fonction $r \mapsto |f|(r),$ pour $r \in ]0,+\infty[$. Pour simplifier, supposons que

$a_0 \neq 0$, alors pour $|x|$ assez petit, on aura $|f(x)| = |a_0|$, de sorte que $|f|(r) = |a_0|$= constante, pour r assez petit. Soit $r_1$ la première valeur de $r$ et $s_1$ la plus grande valeur de $k$ telle que $|a_k|r_1^k = |a_0|$, alors $f$ a exactement $s_1$ zéros sur le cercle $|x| = r_1$, et aucun dans le disque ouvert de centre 0, rayon $r_1$. On a $|f|(r) = |a_{s_1}|r^{s_1}$, pour $r \geq r_1$ et assez proche de $r_1$. En général, on s'arrête quand il existe une valeur $k > s_1$ et un $r > r_1$ tels que $|a_k|r^k = |a_{s_1}|r^{s_1}$ ; soit $r_2$ la première valeur de r telle qu'il en soit ainsi, et $s_2$ le plus grand des entiers $k > s_1$ tels que $|a_k|r_2^k = |a_{s_1}|r_2^{s_1}$. Alors, sur le cercle $|x| = r_2$, $f$ a $s_2 - s_1$ zéros, et aucun dans la couronne ouverte de centre 0 et de rayon $r_1, r_2$. On a $|f|(r) = |a_{s_1}|r^{s_1}$, pour $r \in [r_1, r_2]$. Et ainsi de suite, on trouve des cercles où se trouvent les zéros de $f$, de rayons $r_k$ (suite fini ou infinie), le nombre des zéros sur ces cercles est $s_k - s_{k-1}$, et en plus, on a le fait que la fonction $|f|(r)$ est continue et monomiale par morceaux, c'est à dire que sur $[r_k, r_{k+1}]$, il existe une constante $c_k$ et un entier $s_k$ tels que $|f|(r) = c_k r^{s_k}$. Les rayons $r_k$ s'appellent les rayons exceptionnels pour la série entière $f$.
On fabrique maintenant une fonction $\phi_f$ définie par

$$\begin{aligned} \phi_f : I = ]-\infty, \log R[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ \log r &\mapsto \phi_f(\log r) = \log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n| + n\log r\}. \end{aligned}$$

**Notation.**
*On note par $\nu^+(f,r)$ (resp. $\nu^-(f,r)$) le plus grand (resp. Le plus petit ) entier $j$ tel que*

$$\log|a_j| + j\log r = \phi_f(\log r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n| + n\log r\}.$$

*C'est à dire que, $|a_j|r^j = \max_{n\geq 0}|a_n|r^n$.*

**Théorème 2.1.1.** *[13]*
*La fonction $\phi_f$ vérifient les propriétés suivantes*
*(i) C'est une fonction convexe, croissante, continue et affine par morceau ;*
*(ii) Si $f$ a un zéro dans $D^-(0,r)$, la fonction $\phi_f$ est strictement croissante pour $\log r > \log|b|$;*
*(iii) La fonction $\phi_f$ est dérivable à gauche et à droite en chaque point $\log r \in I$. Sa dérivée à gauche en $\log r$ est égale à $\nu^-(f,r)$ et sa dérivée à droite en $\log r$ est égale à $\nu^+(f,r)$ ;*

(*iv*) *Le nombre de zéros de f dans le cercle* $C(0,r)$, *en prenant en compte les multiplicités, est égale à* $\nu^+(f,r) - \nu^-(f,r)$, *où* $\nu^+(f,r)$ *(resp.* $\nu^-(f,r)$ *) est le nombre des zéros de f dans le disque* $D^+(0,r)$ *(resp.* $D^-(0,r)$*).*

**Remarque 2.1.1.** *La représentation de la fonction* $\phi_f$ *est connue en analyse ultramétrique comme "polygône de valuation".*

**Exemple 2.1.1.** ***(Polygône de valuation des polynômes)***
(1) *Soient* $r, s \in ]0,+\infty[$, *tel que* $r < s$, *et soit* $P(x) = a_2x^2 + a_1x + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *où* $a_0 \neq 0$.
*Supposons* $|a_0| = |a_1|r > |a_2|r^2$, *on a* $|P|(r) = |a_0| = |a_1|r$, *donc* $\nu^+(P,r) = 1$ *et* $\nu^-(P,r) = 0$.
*Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le cercle* $C(0,r)$.
*Supposons maintenant* $|a_1|s = |a_2|s^2 > |a_0|$. *Alors* $v^+(P,s) = 2$ *et* $v^-(P,s) = 1$. *Par conséquent, le polynôme P admet un zéro le cercle* $C(0,s)$. *D'autre part,* $\nu^+(P,\rho) = \nu^-(P,\rho) = 1, \forall \rho \in ]r,s[$ *et* $\nu^+(P,\rho) = \nu^-(P,\rho) = 2, \forall \rho > s$.
(2) *Soit p un nombre premier et soit* $P(x) = 2p^2 + p^4 + (p + p^5)x + (p^2 + p^3)x^2$.
*Pour* $r = \frac{1}{p}$. *On a* $|a_0|r = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p^2}$ *et* $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^4}$, *donc* $\nu^+(P,r) = 1$ *et* $\nu^-(P,r) = 0$. *Par conséquent, le polynôme P ademt un zéro dans le cercle* $C(0,\frac{1}{p})$.
*Pour* $r = \frac{1}{p^2}$. *On a* $|a_0| = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p^3}$ *et* $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^6}$ *donc* $\nu^+(P,r) = \nu^-(P,r) = 0$. *Donc P n'a aucun zéro dans le cercle* $C(0,\frac{1}{p^2})$.
*Pour* $r = 1$. *On a* $|a_0| = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p}$ *et* $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^2}$, *donc P n'a aucun zéro dans le cercle* $C(0,1)$.

## 2.2 Formule de Jensen

Dans cette section, nous s'intéresse de la version ultramétrique de la formule de Jensen qu'on utilise pour obtenir le théorème fondamental de Nevanlinna.
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$). Pour tout $r \in ]0,+\infty[$ (resp.r $\in ]0,R[$) et $\alpha \in D^-(0,r)$, on note

$$z(r,f) = \sum_{|\alpha|=r} \max(0,\omega_\alpha(f)) \text{ et } p(r,f) = -\sum_{|\alpha|=r} \min(0,\omega_\alpha(f)) = z(r,\frac{1}{f}).$$

C'est à dire que, $z(r,f)$ (resp. $p(r,f)$) est le nombre de zéros (resp. pôles) de $f$ sur le cercle $|x| = r$, comptés avec leurs multiplicités, où $\omega_\alpha(f)$ est l'entier relatif $i_\alpha$ de

$\mathbb{Z}$, tel que $f(x) = \sum_{i \geq i_\alpha} a_i(x-\alpha)^i$ avec $a_{i_\alpha} \neq 0$.

**Théorème 2.2.1.** *[8], [9]*

*Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0, pour tout $r \in ]0,+\infty[$ (resp. $r \in ]0,R[$), on a*

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha|\leq r} \left\{ z(r,f) - z(r,\frac{1}{f}) \right\} \log\frac{r}{|\alpha|}.$$

**Preuve.**

La démonstration de cette formule est une conséquence des propriétés de polygône de valuation.

Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ telle que $f(0) \neq 0$. Le polygône de valuation de f donne pour $r \in ]0,R[$

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha|\leq r} z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|}. \tag{2.1}$$

Pour montre l'égalité (2.1), soient $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_k < \ldots < r$ et $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots < n$.

On pose, $\log|f|(r) = \max_{n\geq 0}\{\log|a_n| + n\log r\}$.

Le cas où $r_1$ plus proche de zéro, f n'a pas de zéros à valeur absolue entre 0 et $r_1$, on a

$$\log|f|(r_1) = \log|f(0)| = \log|a_0| + n_0\log r_1.$$

Le cas où $0 < r_1 < r_2$, on a

$$\log|f|(r_2) = \log|a_{n_1}| + n_1\log r_2.$$

$$\vdots$$

Le cas où $r_{k-1} < r_k$, on a

$$\log|f|(r_k) = \log|a_{n_{k-1}}| + n_{k-1}\log r_k.$$

Le cas où $r_k < r$, on a

$$\log|f|(r) = \log|a_{n_k}| + n_k\log r.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= [\log|f|(r) - \log|f|(r_k)] + [\log|f|(r_k) - \log|f|(r_{k-1})] + \ldots + [\log|f|(r_2) - \log|f|(r_1)] \\
&+ \log|f|(r_1) \\
&= [\log|a_{n_k}| + n_k \log r - \log|a_{n_k}| - n_k \log r_k] + [\log|a_{n_{k-1}}| + n_{k-1}\log r_k - \log|a_{n_{k-1}}| \\
&- n_{k-1}\log r_{k-1}] + \ldots + [\log|a_{n_1}| + n_1 \log r_2 - \log|a_{n_1}| - n_1 \log r_1] + \log|f(0)| \\
&= n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}} + \ldots + n_1 \log\frac{r_2}{r_1} + \log|f(0)| \\
&= n_k \log\frac{r}{r_k} + n_{k-1}\left(\log\frac{r}{r_{k-1}} - \log\frac{r}{r_k}\right) + \ldots + n_1\left(\log\frac{r}{r_1} - \log\frac{r}{r_2}\right) + \log|f(0)| \\
&= (n_k - n_{k-1})\log\frac{r}{r_k} + (n_{k-1} - n_{k-2})\log\frac{r}{r_{k-1}} + \ldots + (n_2 - n_1)\log\frac{r}{r_2} \\
&+ (n_1 - n_0)\log\frac{r}{r_1} + \log|f|(0) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(n_i - n_{i-1})\log\frac{r}{r_i} + \log|f(0)|.
\end{aligned}$$

Où $(n_i - n_{i-1})$ le nombre des zéros $f$ dans le cercle $|x| = r_i$, donc

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{0<|\alpha|\leq r} z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|}.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$ tel que $f(0) \neq 0, \infty$. On pose $f = \frac{g}{h}$ tel que $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. Soit $\alpha$ (resp. $\beta$) un zéro de g (resp. de h), on a

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \log|\frac{g}{h}|(r) \\
&= \log|g|(r) - \log|h|(r) \\
&= \log|g(0)| + \sum_{0<|\alpha|\leq r} z(r,g)\log\frac{r}{|\alpha|} - \log|h(0)| - \sum_{0<|\beta|\leq r} z(r,h)\log\frac{r}{|\beta|} \\
&= \log\left|\frac{g(0)}{h(0)}\right| + \sum_{0<|\alpha|\leq r} z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0<|\beta|\leq r} z(r,\frac{1}{f})\log\frac{r}{|\beta|} \\
&= \log|f(0)| + \sum_{0<|\alpha|\leq r} z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|} - \sum_{0<|\beta|\leq r} z(r,\frac{1}{f})\log\frac{r}{|\beta|}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\log|f|(r) = \sum_{0<|\alpha|\leq r}\left\{z(r,f) - z(r,\frac{1}{f})\right\}\log\frac{r}{|\alpha|}.$$

■

## 2.3 Fonction de Nevanlinna

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0, R))$). Pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. r $\in ]0, R[$), notons par $Z(r, f)$ la fonction de comptage des zéros de $f$ dans le disque $D^{+}(0, r)$, comptés avec leurs multiplicités.
On pose,

$$Z(r, f) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq r \\ \omega_{\alpha}(f) > 0}} \omega_{\alpha}(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

On a aussi,

$$\overline{Z}(r, f) = \sum_{|\alpha| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha|},$$

la fonction de comptage des zéros de $f$ dans le disque $D^{+}(0, r)$ sans prendre en compte les multiplicités.
De la même manière, notons par $N(r, f)$ la fonction de comptage des pôles de $f$ dans le disque $D^{+}(0, r)$, comptés avec leurs multiplicités, on pose

$$N(r, f) = - \sum_{\substack{|\alpha| \leq r \\ \omega_{\alpha}(f) < 0}} \omega_{\alpha}(f) \log \frac{r}{|\alpha|} = z(r, \frac{1}{f}).$$

Et

$$\overline{N}(r, f) = \overline{Z}(r, \frac{1}{f}).$$

Pour $x > 0$, on pose $\log^{+} x = \max(0, \log x)$, telle que $x > 0$ et log est une fonction logarithmique réelle. On définit pour $r \in ]0, R[$,

$$m(r, f) = \log^{+} |f|(r) = \max(0, \log |f|(r)),$$

la fonction de compensation.
En fin, on définit la fonction de Nevanlinna (appelée aussi la fonction caractéristique de $f$), quand $f$ n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

**Remarque 2.3.1.** *Remarquons que les fonctions $m(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$ ne changent pas à une constante près, si on change l'origine. Par conséquent, si une fonction $f$ admet*

*un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions $m(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$.*
*Tout au long de ce chapitre, on supposera que la fonction $f$ intervenant dans les fonctions $m(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$), et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$).*

Par les notations précédentes, on peut reécrire Théorème 2.2.1 sous la forme,

**Théorème 2.3.1.** *Soit $R > 0$, et soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors*

$$\log|f|(r) = Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)|, \tag{2.2}$$

*pour tout $r \in ]0,+\infty[$ (resp.$r \in ]0,R[$).*

**Corollaire 2.3.1.** *[8], [9]*
*Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in ]0,R[$, on a*

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) + O(1).$$

**Preuve.**

D'après le Théorème 2.3.1, nous avons

$$\log|f(0)| = N(r,f) - Z(r,f) + \log|f|(r).$$

Puisque $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| &= N(r,f) - Z(r,f) + \log^+|f|(r) - \log^+|\frac{1}{f}|(r),\\
&= N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) + m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}),\\
&= N(r,f) + m(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) - m(r,\frac{1}{f}),\\
&= T(r,f) - T(r,\frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

■

**Proposition 2.3.1.** *[9]*
*Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) non identiquement nulle et n'ayant ni*

*zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$), nous avons*
*(i)* $N(r, f + g) \leq N(r, f) + N(r, g) + O(1)$,
*(ii)* $N(r, fg) \leq N(r, f) + N(r, g) + O(1)$.

**Preuve.**

Les inégalités (*i*) et (*ii*) sont vérifiés puisque l'ordre de multiplicité de pôles de $f + g$ (ou $fg$) au point $x$ est au plus égal à la somme d'ordre de multiplicité de pôles de f et g au point $x$. D'où

$$\begin{aligned} Z(r, \frac{1}{f+g}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}), \\ Z(r, \frac{1}{fg}) &\leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}). \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.3.2.** *[9]*
*Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) et $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$), on a*
*(i)* $m(r, f + g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\}$,
*(ii)* $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$,
*(iii)* $m(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g)$,
*(iv)* $m(r, af) = m(r, f) + O(1)$.

**Preuve.**

Puisque $|.|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique et grâce à la croissance de la fonction logarithmique on enduit sans difficulté (*i*), (*iii*) et (*iv*).
Si $|f|(r) > |a|$, pour $r$ assez grand (resp. Assez proche de $R$), on a

$$|f - a|(r) = \max\{|f|(r), |a|\} = |f|(r),$$

d'où

$$m(r, f - a) = m(r, f).$$

Alors que, si $|f|(r) \leq |a|$, on a

$$|f - a|(r) \leq \max\{|f|(r), |a|\} \leq |a|,$$

ce qui entraine

$$|m(r, f - a) - m(r, f)| \leq \max\{m(r, f - a), m(r, f)\} \leq |a|,$$

et ainsi $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$, d'où $(ii)$.

On donne une autre définition de la fonction caractéristique de Nevanlinna. ■

**Théorème 2.3.3.** *[14]*
*Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0, r))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$), on a*

$$T(r, f) = \max\{Z(r, f) + \log|f(0)|, N(r, f)\}.$$

**Corollaire 2.3.2.** *[14]*
*Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^{-}(0, R))$) non nulle. Alors pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$), on a*

$$T(r, f) = Z(r, f) + O(1).$$

*De plus, il existe $\rho \in ]0, +\infty[$ (resp. $\rho \in ]0, R[$) tel que pour $b \neq f(0)$, on a pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$ )*

$$Z(r, f) = Z(r, f - b).$$

**Théorème 2.3.4.** *Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0, R))$) non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in ]0, +\infty[$ (resp. $r \in ]0, R[$)*
*$(i)$ $T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$,*
*$(ii)$ $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$,*
*De plus, si $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{A}(D^{-}(0, R))$, on a*
*$(iii)$ $T(r, f + g) \leq \max\{T(r, f), T(r, g)\} + O(1)$.*

**Preuve.**

$(i)$ Puisque

$$m(r, f + g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + O(1),$$

et

$$N(r, f + g) \leq N(r, f) + N(r, g) + O(1),$$

on déduit que

$$\begin{aligned} m(r, f+g) + N(r, f+g) &\leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + N(r, f) + N(r, g) + O(1), \\ &\leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g) + O(1). \end{aligned}$$

D'où $T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g + O(1))$.
($ii$) De même, on déduit que

$$m(r, fg) + N(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g) + O(1).$$

D'où $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.
($iii$) Puisque $N(r, f) = N(r, g) = 0$, l'inégalité est immédiate. ■

**Proposition 2.3.2.** *[9]*
*Soient $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ et $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ tels que $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq a$ et $f(0) \neq \infty$. Pour $r \in ]0, R[$ on a*
*($i$) $T(r, af) = T(r, f) + O(1)$,*
*($ii$) $T(r, f - a) = T(r, f) + O(1)$.*

**Preuve.**

Puisque

$$N(r, f) = N(r, af) = N(r, f - a),$$

$$m(r, f - a) = m(r, f) + O(1), \text{ et } m(r, af) = m(r, f) + O(1),$$

alors

$$T(r, af) = T(r, f) + O(1),$$

et

$$T(r, f - a) = T(r, f) + O(1).$$

■

## 2.4 Théorème fondamental de Nevanlinna

**Théorème 2.4.1.** *[9]*

*Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0,R))$) et $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$ tels que $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq a$ et $f(0) \neq \infty$. Pour tout $r \in ]0,+\infty[$ (resp. $r \in ]0,R[$), on a*

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1). \tag{2.3}$$

**Preuve.**

La démonstration est facile, elle découle de Corollaire 2.3.1 et la propriété (*ii*) du Proposition 2.3.2. ■

**Notation.**

*Soit $\phi$, $\varphi$ et $\psi$ trois fonctions réelles définies dans un intervalle $I = ]0,+\infty[$ (resp. $I = ]0,R[$) et soit $r \in I$. S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\phi(r) \leq \psi(r) + c\varphi(r)$, on écrira simplement $\phi(r) \leq \psi(r) + O(\varphi(r))$. Si $|\phi(r) - \psi(r)|$ est bornée par une fonction de la forme $c\varphi(r)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + O(\varphi(r))$. Si $\lim\limits_{r\to+\infty} |\phi(r) - \psi(r)| = 0$ (resp. $\lim\limits_{r\to R} |\phi(r) - \psi(r)| = 0$), on écrira $\phi(r) = \psi(r) + o(\varphi(r))$.*

**Exemple 2.4.1.**

(1) *Soit $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$. Alors $Z(r,P) = \deg P \log r + O(1)$, pour tout $r \in ]0,+\infty[$. En effet, soit $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ l'ensemble des zéros de $P$ où $t \leq q$, et soient $s_1, \ldots, s_t$ les ordres de multiplicité respectifs. Supposons $A = \max\limits_{1\leq j\leq t} |\gamma_j|$. Si $r \in ]0,R[$, on a*

$$\begin{aligned} Z(r,P) &= \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{r}{|\gamma|_j} = \sum_{j=1}^{t} \log \frac{r}{A} + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\gamma|_j} \\ &= \sum_{j=1}^{t} s_j (\log r - \log A) + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\gamma|_j}. \end{aligned}$$

*Mais $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j = q$ et $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j (\log \frac{A}{|\gamma|_j} - \log A) = O(1)$. Par conséquent*

$$Z(r,P) = q \log r + O(1) = \deg P \log r + O(1).$$

(2) *Soient $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ et $Q(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} b_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ deux polynômes premiers entre eux. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$. Alors*

$$T(r,F) = \deg F \log r + O(1), \ \textit{pour } r \textit{ assez grand dans } ]0,+\infty[.$$

*En effet, soit* $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ *et soit* $\{\beta_j\}_{j\in J}$ *l'ensemble de zéros de* $P$ *et* $Q$ *respectivement. Supposons* $B = \sup_{i,j}\{|\gamma_i|, |\beta_j|\}$. *D'après l'exemple précédent, pour* $r \in ]B,+\infty[$*, on a*

$$Z(r,P) = \deg P \log r + O(1) \ \textit{et} \ Z(r,Q) = \deg Q \log r + O(1).$$

*Par conséquent*

$$\begin{aligned} T(r,F) &= \max\{Z(r,P) + \log|P(0)|, Z(r,Q)\} \\ &= \max\{\deg P, \deg Q\} \log r + O(1), \end{aligned}$$

*où par définition,* $\max\{\deg P, \deg Q\} = \deg F$.

**Proposition 2.4.1.** *[9]*
*Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *n'ayant ni zéro ni pôle en 0. On a les équivalences suivantes,*
$(i)$ $f$ *est constante* $\Leftrightarrow T(r,f) = o(\log r), r \to +\infty$,
$(ii)$ $f \in \mathbb{K}(x) \Leftrightarrow T(r,f) = O(\log r), r \to +\infty$,
$(iii)$ $f$ *est non constante* $\Leftrightarrow$ *il existe* $c \in \mathbb{R}$ *et* $A > 0$ *tel que*

$$T(r,f) \geq \log r + c, \ \textit{pour } r > A.$$

**Corollaire 2.4.1.** *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors* $f \notin \mathbb{K}(x)$ *si et seulement si*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = +\infty.$$

**Proposition 2.4.2.** *[9]*
*Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *(resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$*) telle que* $f^{(k)}(k \in \mathbb{N})$ *n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors*
$(i)$ $N(r,f^{(k)}) = N(r,f) + k\overline{N}(r,f)$,
$(ii)$ $Z(r,f^{(k)}) \leq Z(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1)$,
$(iii)$ $T(r,f^{(k)}) \leq T(r,f) + k\overline{N}(r,f) \leq (k+1)T(r,f)$.

# CHAPITRE 3

# ÉTUDE DU COMPORTEMENT DE LA SOLUTION MÉROMORPHE DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement des solutions méromorphes de certaines équations aux différences, en utilisant les notions classiques de la théorie de Nevanlinna présentées dans le deuxième chapitre.

## 3.1 Équations aux différences

Nous considérons l'équation aux différence de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(x+i) = h(x), \tag{3.1}$$

où $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ tels que $g_0(x)g_s(x) \not\equiv 0$.
Soient $T(r) = \max\{T(r, g_0), ..., T(r, g_s), T(r, h)\}$ et $M(r) = \max\limits_{0 \leq i \leq s}\{|g_i|(r)\}$.
Dans ce qui suit, le but est d'étudier la croissance de la fonction méromorphe $y = f(x)$ qui est une solution de l'équation 3.1, en fonction de celle des coefficients $g_0, ..., g_s, h$.

D'abord, nous démontrons quelques lemmes.

**Lemme 3.1.1.** *[6]*
*Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et soit $\alpha, \zeta \in \mathbb{K}$. Alors $\zeta$ est un pôle de $f$ d'ordre $l$ si et seulement si $\zeta - \alpha$ est un pôle de $f(x+\alpha)$ d'ordre $l$.*

**Preuve.**
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et soit $\zeta$ un pôle de$f$ d'ordre $l$, on a alors

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-\zeta)^l} \text{ où } g(\zeta) \neq 0.$$

D'autre part, nous avons

$$f(x+\alpha) = \frac{g(x+\alpha)}{(x+\alpha-\zeta)^l} = \frac{g(x+\alpha)}{(x-(\zeta-\alpha))^l} = \frac{h(x)}{(x-(\zeta-\alpha))^l}, \text{ où } h(x) = g(x+\alpha).$$

De plus, $h(\zeta-\alpha) = g(\zeta-\alpha+\alpha) = g(\zeta) \neq 0$. Donc, on déduit que $\zeta - \alpha$ est un pôle de $f(x+\alpha)$ d'ordre $l$. ■

Dans ce qui suit, on note $\tau$ la fonction définie tous $x \in \mathbb{K}$ par $\tau(x) = x+1$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $\tau^k = \tau \circ ... \circ \tau$ est obtenu en appliquant $k$ fois la fonction $\tau$. Nous convenons que $\tau^0 = Id$, où $Id$ et la fonction identité de $\mathbb{K}$.
Certaines propriétés de ces opérateurs sont résumés dans le lemme suivant.

**Lemme 3.1.2.** *[6]*
*Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}$, nous avons*
*(i) $|f \circ \tau^k|(r) = |f|(r)$,*
*(ii) $m(r, f \circ \tau^k) = m(r, f)$,*
*(iii) $N(r, f \circ \tau^k) = N(r, f) + O(1)$,*
*(iv) $T(r, f \circ \tau^k) = T(r, f) + O(1)$.*

**Lemme 3.1.3.** *[6]*
*Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et soit $\Delta f = f \circ \tau - f$. Pour tout $r > 0$, on a*

$$|\Delta(f)|(r) \leq \frac{|f|(r)}{r}.$$

**Preuve.**

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ définie par $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Donc, on a

$$\Delta(f)(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k (x+1)^{n-1-k}.$$

Ainsi, pour $r > 1$, on a

$$|\Delta(f)|(r) \leq \max_{n\geq 1}\{|a_n| r^{n-1}\} \leq \frac{|f|(r)}{r}.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, donc $f(x) = \frac{\zeta(x)}{\xi(x)}$ où $\xi, \zeta \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Nous avons

$$\Delta(f)(x) = \frac{\Delta(\zeta)(x)\xi(x) - \zeta(x)\Delta(\xi)(x)}{\xi(x)\xi(x+1)}.$$

Il suit que

$$|\Delta(f)(r)| = \frac{|\Delta(\zeta)\xi - \zeta\Delta(\xi)|(r)}{|\xi|(r)|\xi(x+1)|(r)} \leq \frac{|\zeta|(r)\xi(r)}{r|\xi|(r)^2} = \frac{|f|(r)}{r}.$$

■

**Proposition 3.1.1.** *[6]*
*Soient les fonctions $g_0, ..., g_s, h$ dans l'équation* (3.1) *méromorphes avec un nombre fini de pôles. Alors, si $f$ est une solution méromorphe de cette équation, on a*

$$N(r, f) \leq \min_{0\leq i\leq s} Z(r, g_i) + O(\log r),\ r \to +\infty.$$

**Preuve.**

Soient $j \in \{0, .., s\}$ et $\alpha$ un pôle de $f$. Alors $\beta = \alpha - j$ est un pôle de $f \circ \tau^j$ tel que $\omega_\alpha(f) = \omega_\beta(f \circ \tau^j)$. Nous avons

$$-\omega_\alpha(f) \leq \omega_\beta(g_j). \tag{3.2}$$

En effet, supposons que $-\omega_\alpha(f) > \omega_\beta(g_j)$. Il suite que $\omega_\beta(g_j) + \omega_\beta(f \circ \tau^j) < 0$. puisque on a, d'après l'équation (3.1),

$$g_j(x)(f \circ \tau^j)(x) = h(x) - \sum_{i\neq j} g_i(x)(f \circ \tau^i)(x),$$

il en résulte qu'il existe un entier $k \in \{0,\dots,s\}\backslash\{j\}$ tel que $\omega_\beta(g_k)+\omega_\beta(f\circ\tau^k) \leq \omega_\beta(g_j)+\omega_\beta(f\circ\tau^j)$. Comme $k \neq j$, on a $\omega_\beta(f\circ\tau^k) \geq 0$ et donc $\omega_\beta(g_k) \leq \omega_\beta(g_j)+\omega_\beta(f\circ\tau^j) < 0$, ceci une contradiction car $\beta$ n'est pas un pôle de $g_k$.
De (3.2), on déduit que

$$N(r,f) \leq Z(r,g_j) + O(\log r),\ r \to +\infty \ pour\ tout\ j = 0,\dots,s$$

et en fin, $N(r,f) \leq \min\limits_{0\leq j\leq s} Z(r,g_i) + O(\log r),\ r \to +\infty.$
Ceci termine la preuve de la proposition. ■

**Remarque 3.1.1.**
*Il résulte de la proposition ci-dessus que l'une des fonctions $g_i$, $(i = 0,\dots,s)$ est rationnelle, alors la fonction $f$ a un nombre fini de pôles.*

**Proposition 3.1.2.** *[6]*
*Soient les fonctions $g_0,\dots,g_s$, $h$ dans l'équation* (3.1) *sont méromorphe. Supposons qu'il existe une constante C > 0 tel que $|\sum\limits_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r)$. Alors toute solution méromorphe $f$ de cette équation satisfait, $|f|(r) \leq \frac{|h|(r)}{CM(r)}$.*

**Preuve.**
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (3.1). Alors on a

$$g_0(x) + \sum_{i=1}^{s} g_i(x)\frac{f(x+i)}{f(x)} = \frac{h(x)}{f(x)}. \tag{3.3}$$

En utilisant le Lemme 3.1.3, nous montrons que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = 1$. Il suite que, pour tout $i \in \{0,\dots,s\}$, on a $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x+i)}{f(x)} = 1$.
Donc, par (3.3), on a

$$g_0(x) + \sum_{i=1}^{s} g_i(x)(\varepsilon_i(x)+1) = \frac{h(x)}{f(x)},$$

où $\varepsilon_i(x)$ sont des fonctions méromorphes telle que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \varepsilon_i(x) = 0$, i.e,

$$\sum_{i=1}^{s} g_i(x) + \sum_{i=0}^{s} g_i(x)\varepsilon_i(x) = \frac{h(x)}{f(x)}.$$

Pour $r > 0$ assez grand et pour $i = 1, ..., s$, nous avons $|\varepsilon_i|(r) < C$. Il en résulte que

$$|\sum_{i=1}^{s} g_i(x)\varepsilon_i(x)|(r) < C \max_{1\leq i\leq s}|g_i|(r) \leq C \max_{0\leq i\leq s}|g_i|(r) = CM(r).$$

Par hypothèse, on a $|\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r)$, on déduit que

$$|\frac{h}{f}|(r) = |\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r).$$

■

**Théorème 3.1.1.** *[6]*
*Supposons que chacune des fonctions $g_0, ..., g_s$, $h$ dans l'équation* (3.1) *a un nombre fini de pôles. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ tel que, pour $r > 0$ assez grand on a, $|\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r)$. Alors toute solution méromorphe $f$ de l'équation* (3.1) *vérifie*

$$T(r, f) \leq T(r, h) + \min_{0\leq i\leq s} T(r, g_i) + O(\log r) \leq 2T(r) + O(\log r),\ r \to \infty.$$

La preuve du Théorème 3.1.1 est basée sur les propositions précidentes.

**Preuve.**

Par la Proposition 3.1.1, nous avons

$$N(r, f) \leq \min_{0\leq i\leq s} Z(r, g_i) + O(\log r),\ r \to +\infty,$$

i.e,

$$N(r, f) \leq \min_{0\leq i\leq s} N(r, \frac{1}{g_i}) + O(\log r),\ r \to +\infty. \tag{3.4}$$

D'autre part, par la propositon 3.1.2, pour $r > 0$, on a $|f|(r) \leq \frac{|h|(r)}{CM(r)}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \log|f|(r) &\leq \log|h|(r) - \max_{0\leq i\leq s}\{\log|g_i|(r)\} - \log C, \\ &= \log|h|(r) + \min_{0\leq i\leq s}\left\{\log\frac{1}{|g_i|(r)}\right\} - \log C. \end{aligned}$$

Donc
$$\log^+ |f|(r) \le \log^+ |h|(r) + \min_{0\le i\le s}\left\{\log^+ \frac{1}{|g_i|(r)}\right\} + O(1),\ r \to +\infty. \tag{3.5}$$

Enfin, par les relation (3.4) et (3.5), on obtient que, pour $r \to +\infty$,

$$\begin{aligned} T(r,f) = N(r,f) + \log^+ |f|(r) &\le \log^+ |h|(r) + \min_{0\le i\le s}\left(N\left(r,\frac{1}{g_i}\right) + \log^+ \frac{1}{|g_i|(r)}\right) + O(\log r), \\ &\le log^+|h|(r) + \min_{0\le i\le s}\left\{T\left(r,\frac{1}{g_i}\right)\right\} + O(\log r), \\ &\le log^+|h|(r) + \min_{0\le i\le s}\{T(r,g_i)\} + O(\log r), \\ &\le T(r,h) + \min_{0\le i\le s}\{T(r,g_i)\} + O(\log r), \\ &\le 2T(r) + O(\log r). \end{aligned}$$

Donc le Théorème 3.1.1 est prouvé.

Le résultat suivant correspond à une situation particulière où les conditions du Théorème 3.1.1 sont réalisées. ■

**Corollaire 3.1.1.** *[6]*
*Soient les fonctions $g_0, ..., g_s$, $h$ dans l'équation* (3.1) *sont méromorphes avec un nombre fini de pôles. Supposons qu'il existe un entier $\ell$, $0 \le \ell \le s$, tel que $|g_\ell|(r) > \max_{0\le i\le s,\ i\ne\ell}\{|g_i|(r)\}$. Alors toute solution méromorphe de l'équation* (3.1) *vérifié*

$$T(r,f) \le T(r,h) + \min_{0\le i\le s}\{T(r,g_i)\} + O(\log r) \le 2T(r) + O(\log r),\ r \to +\infty.$$

**Preuve.**
Nous avons, pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} |\sum_{i=0}^{s} g_i - g_\ell|(r) &= |\sum_{i=0,\ i\ne\ell}^{s} g_i|(r) \\ &\le \max_{0\le i\le s,\ i\ne\ell} |g_i|(r) < |g_\ell|(r). \end{aligned}$$

Et par suite,
$$|\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) = |g_\ell|(r) \ge \max_{0\le i\le s}\{|g_i|(r)\} := M(r).$$

Donc, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (3.1), d'après le Théorème 3.1.1, on a le résultat. ■

Comme conséquence immédiate, nous avons

**Définition 3.1.1.**
*On appelle ordre de croissance d'une fonction méromorphe $f(x)$ et on note $\rho(f)$ la quantité définie par*

$$\rho(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

*En particulier, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, on a*

$$\rho(f) = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log(\log |f|(r))}{\log r}.$$

*Pour plus de détailes sur l'ordre de croissance voir [7].*

**Corollaire 3.1.2.** *[6]*
*Sous l'hypothèse du Théorème 3.1.1, soit $\kappa = \max\{\rho(h),\ \rho(g_0), ...,\ \rho(g_s)\}$. Alors toute solution méromorphe $f$ de l'équation* (3.1) *satisfait $\rho(f) \leq \kappa$.*

**Preuve.**

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (3.1), d'après le Théorème 3.1.1, on a,

$$T(r, f) \leq 2T(r) + O(\log r), \quad r \to +\infty.$$

Et par suite, pour un certain $r_0 > 0$ et pour un certain $C > 0$, on a

$$T(r, f) \leq CT(r) \log r, \quad \textit{pour } r \geq r_0,$$

donc, $T(r, f) \leq C \max\{T(r, h),\ T(r, g_0),\ ...,\ T(r, g_s)\} \log r$. Par conséquent, pour $r \geq r_0$, on a

$$\log(T(r, f)) \leq \log C + \max\{\log(T(r, h)),\ \log(T(r, g_0)),\ ...,\ \log(T(r, g_s))\} + \log(\log r).$$

Et donc, pour $r \geq r_0$, on a

$$\frac{\log(T(r, f))}{\log r} \leq \frac{\log C}{\log r} + \max\left\{\frac{\log(T(r, h))}{\log r},\ \frac{\log(T(r, g_0))}{\log r},\ ...,\ \frac{\log(T(r, g_s))}{\log r}\right\} + \frac{\log(\log r)}{\log r}.$$

Et par suite,
puisque $\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(\log r)}{\log r} = 0$, nous avons

$$\rho(f) \le \max\{\rho(h), \rho(g_0), \ldots, \rho(g_s)\} = \kappa.$$

■

Plus particulièrement, nous avons

**Corollaire 3.1.3.** *[6]*
*S'il existe un entier $\ell$, $0 \le \ell \le s$, tel que $|g_\ell|(r) > \max_{0\le i\le s,\ i\ne\ell} \{|g_i|(r)\}$, alors pour toute solution méromorphe $f$ de l'équation* (3.1) *nous avons, $\rho(f) \le \max\{\rho(h), \rho(g_\ell)\}$.*

**Preuve.**

D'après le Corollaire 3.1.1 , pour toute solution méromorphe $f$ de l'équation (3.1), on a

$$T(r, f) \le 2T(r) + O(\log r), \quad r \to +\infty,$$

et par suite

$$\rho(f) \le \max\{\rho(h), \rho(g_0), \ldots, \rho(g_s)\}.$$

D'autre part, par hypothèse, on a pour $r > 0$ assez grand, $|g_\ell|(r) > \max_{0\le i\le s,\ i\ne\ell} \{|g_i|(r)\}$, donc

$$\frac{\log(\log |g_\ell|(r))}{\log r} > \max_{0\le i\le s,\ i\ne\ell} \left\{ \frac{\log(\log |g_i|(r))}{\log r} \right\}.$$

On déduit que, $\rho(g_\ell) > \max_{0\le i\le s,\ i\ne\ell} \rho(g_i)$. D'où $\rho(f) \le \max\{\rho(h), \rho(g_\ell)\}$. ■

**Remarque 3.1.2.**
*Les résultats ce-dessus sont faux dans le cas complexe. En effet, par exemple, Yik-Man Chiang et Shao-Ji Feng ([11]) prouvés que, si $h, g_0, \ldots, g_s \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et s'il existe un entier unique $\ell$, $0 \le \ell \le s$, tel que $\rho(g_\ell) = \kappa = \max_{0\le i\le s} \{\rho(g_i)\}$, alors, pour toute solution méromorphe (dans $\mathbb{C}$) de l'équation* (3.1)*, nous avons $\rho(f) \ge \kappa + 1$.*

Nous énonçons maintenant quelques résultats liés à la situation où les coefficients de l'équation (3.1) sont des fonctions rationnelles, nous donnons d'abord une définition.

**Définition 3.1.2.**

*Si $P(x)$, $Q(x)$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[x]$ sans zéros communs, on appelle degré de la fonction rationnelle $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ et notons par* $\deg R(x)$ *le nombre*

$$\deg R(x) = \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}.$$

**Corollaire 3.1.4.** *[6]*

*Nous considérons l'équation*

$$\sum_{i=0}^{s} R_i(x)y(x+i) = R(x), \tag{3.6}$$

*où $R(x), R_0(x), ..., R_s(x)$ sont des éléments de $\mathbb{K}(x)$ tel que $R_0(x)R_s(x) \not\equiv 0$. Si* $\deg\left(\sum\limits_{i=0}^{s} R_i\right) = \max\limits_{0\leq i\leq s} \deg R_i$*, alors toute solution méromorphe $f$ de cette équation est une fonction rationnelle telle que,* $\deg f(x) \leq \max\limits_{0\leq i\leq s}\{degR_i(x),\ degR(x)\}$.

**Preuve.**

Puisque $R(x), R_0(x), ..., R_s(x)$ sont des fonctions rationnelles, il existe $\gamma > 0$, $\gamma_i > 0$ $(i = 0, ..., s)$ de telle sorte que, pour $r > 0$,

$$|\sum_{i=0}^{s} R_i|(r) = \gamma r^{\deg(\sum\limits_{i=0}^{s} R_i)} \; et \; |R_i|(r) = \gamma_i r^{\deg R_i}.$$

Posons $\lambda = \max\limits_{0\leq i\leq s} \gamma_i$, donc on a

$$\max_{0\leq i\leq s} |R_i|(r) = \max_{0\leq i\leq s}\{\gamma_i r^{\deg R_i}\} \leq \lambda r^{\max\{\deg R_i\}} = \lambda r^{\deg(\sum\limits_{i=0}^{s} R_i)} = \frac{\lambda}{\gamma}|\sum_{i=0}^{s} R_i|(r).$$

Il en résulte que

$$|\sum_{i=0}^{s} R_i|(r) \geq C \max_{0\leq i\leq s} |R_i|(r), \; avec \; C = \frac{\gamma}{\lambda} > 0.$$

En utilisant le Théorème 3.1.1, nous obtenons que, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une solution de l'équation (3.6),

$$\begin{aligned} T(r, f) &\leq 2 \max_{0 \leq i \leq s}\{T(r, R_i), T(r, R)\} + O(\log r) \\ &= O(\log r), \ \textit{quand } r \to +\infty. \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathbb{K}(x)$. D'autre part, pour $r$ assez grand nous avons

$$T(r, f) \leq 2 \max_{0 \leq i \leq s}\{T(r, R_i), T(r, R)\} + O(\log r).$$

Donc, $(\deg f) \log r + O(1) \leq \max_{0 \leq i \leq s}\{(degR_i) \log r + O(1),\ (degR) \log r + O(1)\}$.
Par conséquent, pour $r > 0$ assez grand, on a

$$\deg f(x) \leq \max_{0 \leq i \leq s}\{degR_i(x),\ degR(x)).$$

■

Le Corollaire 3.1.4 est faux dans $\mathbb{C}$. En effet, nous avons l'exemple suivant.

**Exemple 3.1.1.** *Dans $\mathbb{C}$, l'équation aux différence*

$$f(x) - \frac{x+1}{xe} f(x+1) = \frac{1}{x}\left(\frac{e-1}{e}\right),$$

*vérifier toutes les conditions ci-dessus, mais a une solution méromorphe transcendante $g(x) = \frac{e^x+1}{x}$.*

**Corollaire 3.1.5.** *[6]*
*Soit L un corps algébriquement clôs de caractéristique nulle.*
*Considérons l'équation*

$$\sum_{i=0}^{s} R_i(x) y(x+i) = R(x),$$

*où, $R(x), R_0(x), ..., R_s(x)$ sont des fonctions rationnelles dans L tel que $R_0(x)R_s(x) \not\equiv 0$. Si $\deg\left(\sum_{i=0}^{s} R_i\right) = \max_{0 \leq i \leq s}\{degR_i\}$, alors toute solution $f \in L(x)$ de l'équation (3.7) satisfait*

$$\deg f(x) \leq \max_{0 \leq i \leq s}\{degR_i(x),\ degR(x)\}.$$

**Preuve.**

$L$ muni de la valeur absolue triviale définie par,

$$|x| = \begin{cases} 0 & si \quad x \quad = 0 \\ 1 & si \quad x \quad \neq 0. \end{cases}$$

est un corps ultramétrique algébriquement clôs. De plus, nous avons

$$\mathcal{A}(L) = L[x] \; et \; \mathcal{M}(L) = L[x].$$

Nous appliquons alors le Corrolaire 3.1.4, nous obtenons que

$$\deg f(x) \leq \max_{0 \leq i \leq s}\{degR_i(x),\ degR(x)\}.$$

■

# BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Aihara, Introduction to p-adic Analysis. Research reports of the Nevanalinna theory and its applications II. Nippon Institute of Technology, 1998.

[2] Y. Amice, Les nombres p-adiques. Presses Universitaire de France(1975).

[3] J.P. Bézivin, Dynamique des fractions rationnels p-adiques. Cours DEA de Mathématiques, Univsité de CAEN. 23 mai 2005.

[4] J.P. Bézivin, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, Aequationes Mathematica, 43(2-3)(1992),p. 159-176.

[5] N. Boudjrida, A. Boutabaa and Medjerab, On some utrametric q-difference equations, Bulletin des sciences mathmatiques, **137**(2013), p. 177-188.

[6] S. Bourourou, Résolution de certaines classes d'équations fonctionnelles aux q-différences et aux différences dans l'espace des fonctions méromorphes p-adiques. Thèse de Doctorat, Université de Jijel. 2016.

[7] A. Boussaf, A. Boutabaa and A. Escassut, Growth of p-adic entire functions and applications. Houston J. Math. 40,3 p 715-736,(2014).

[8] A. Boutabaa, Application de la théorie Nevanlinna p-adique. Collectanea Mathematica 42,1 p 75-93,(1991).

[9] A. Boutabaa, Théorie de Nevanlinna p-adique. Manuscripta Math. 67, p. 251-269 (1990).

[10] A. Boutabaa and A.Escassut. Applications of the p- adic Nevanlinna theory to functional equation. Annales de l'Institut Fourier, T.50(3),p751-766 (2000).

[11] YM. Chiang, SJ. Feng, On the nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane, Ramanujan J, **16** (2008), p. 105-129.

[12] B. Diarra, Analyse p-adique. Cours DEA-Algèbre commutative FAST-Université du Mali. Décembre 1999-Mars 2000.

[13] A.Escassut, Analytic Elements in p-adic Analysis. Word Scientific Publishing (1995).

[14] A.O.F. Jacqueline, Distribution de valeurs des fonctions méromorphes ultramétriques, Application de la théorie de Nevanlinna. Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal.

[15] S.Katok, Real and p-adic analysis. Cours notes for Math 497 C, Mass program, Fall 2000 ( 2001).

[16] A.Robert, A course in p-adic Analysis. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198 (2000).

# CONCLUSION

Le domaine des équations fonctionnelles a suscité l'intérêt des mathématicien p-adicien en abordant les mêmes questions que celle du cas complexe en employant les techniques de la théorie de Nevanlinna p-adique, basée à son tour sur la notion de la fonction caractéristique p-adique. En particulier, ils étudient le comportement des solutions, dans le cas où elle existe de ces équations. On insiste surtout sur l'étude de la solution méromorphe en général et de la solution entière en particulier. Les caractéristiques de la solution dépend particulièrement de la nature des coefficients de ces équations.

## RÉSUMÉ

On s'intéresse dans ce mémoire à l'étude du comportement de la solution méromorphe, dans un corps ultramétrique et algébriquement clôs, de certains équations aux différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i\,(x)y(x+i) = h(x),$$

où h(x), $g_0$(x), . . . ,$g_s$(x) $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes. On a utilisé la version ultramétrique de la théorie de Nevanlinna pour montrer que le comportement de la solution méromorphe ultramétrique d'une telle équation dépond essentiellement de la nature des coefficients de cette équation.



**Mots.clés :** p-dique, corps ultramétrique, théorème ultramétrique de Nevanlinna, solutions méromorphes, équation aux différence.



## ABSTRACT

We focus in this work to the behavior of meromorphic solution, in a ultrametric allgebraical closed field, of some difference equation of the form

$$\sum_{i=0}^{s} g_i\,(x)y(x+i) = h(x),$$

or h(x), $g_0$(x), . . . ,$g_s$(x) $(s \geq 1)$ meromorphic functions. We used the ultrametric version of Nevanlinna theorem to show that the behavior of the ultrametric meromorphic solution of such equation depends essentially on the nature of the coefficients of this equation.



**Keywords :** p-adic, ultramétric field, ultramétric Nevanlinna theorem, meromorphic solution, difference equation.



## ملخص

نهتم في هذه المذكرة بدراسة سلوك الحلول المرومورفية، في حقل أولترمتري و مغلق جبريا، لبعض المعادلات الفرقية من الشكل

$$\sum_{i=0}^{s} g_i\,(x)y(x+i) = h(x),$$

حيث$(s \geq 1)$ *h(x), $g_0$(x), . . . ,$g_s$(x)* *هي دوال ميرومورفية* حيث قمنا باستخدام

الصيغة الاولترمترية من نظرية نيفانلينا من أجل إظهار أن سلوك الحلول المرومورفية الأولترمترية لهاته المعادلة تعتمد أساسا على طبيعة معاملاتها.



**الكلمات المفتاحية** : بأديك، مجال أولترمتري، نظرية نيفانلينا، حلول مرومورفية، معادلات فرقية.