

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Etude des systèmes dynamiques à temps discrets

Préparé par :

➤ **Sonya Dib**

Soutenu devant le jury

Labeled Boudjema	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Meskine Habiba	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Boudjerida Nadjet	M.A.A	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examineur

Année universitaire :2021/2022



DÉDICACE

Avec beaucoup de plaisir et de cœur, je dédie ce travail à :

*À ma chère mère **SABIMA***

Tu m'as donné la vie, la tendresse et le courage de réussir, je ne peux t'exprimer mon amour et ma gratitude .

*À mon cher Père **SALEH***

L'épaule solide , l'œil attentif compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect.

*À mes frère : **LOTFI , OUSSAMA , RADWANE .***

*À mes chère sœurs : **CHAHRAZED** et **HAYET***

Pour leur aide et leur encouragement pour moi dans les moments difficile .

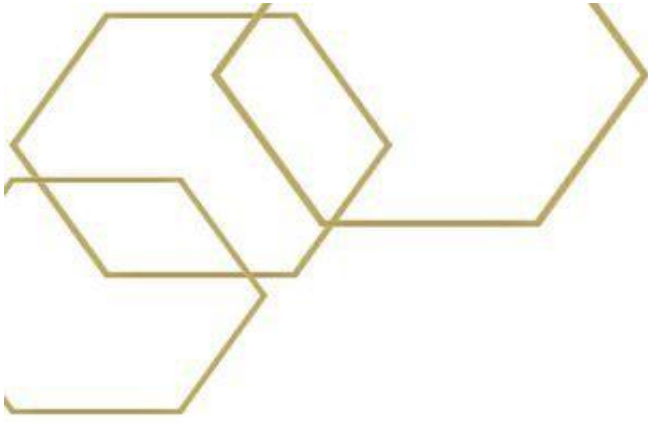
A tout les membres de **ma famille** et tout personne qui port le nom **DIB** , je suis heureux et fier de vous avoir comme famille .

*À mes amis **GHADA , HALA , SOFYA , MADIHA , WAFI , BOUCHRA ,***

NIAMA et **AMEL**

Pour tout les bons moments que nous avons partagés ensemble
graduation merci d'exister.





REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** qui m'a donné la force, la patience, la facilitation et la volonté d'accomplir ce modeste travail .

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma gratitude à **MES CHERS PARENTS** pour le grand soutien et les encouragements qu'ils m'ont apportés .

Un merci spécial à mon encadreur Madame **MESKINE HABIBA** pour m'avoir encadré, dirigé, aidé et conseillé tout au long du travail .

Je tiens également à adresser mes sincères remerciements aux membres du jury du journal **BOUDJERIDA NADJET** et **LABED BOUDJEMAA** qui m'ont fait l'honneur d'avoir accepté d'évaluer ce travail, d'en prendre soin et de l'enrichir par leurs propositions.

A tous mes **professeurs** des dernières années .

J'adresse mes remerciements à toute ma **famille** et mes **amis** .

à toutes les personnes **PROCHES** et **LOINTAINES** pour leurs encouragements et leur soutien constants et à tous ceux qui ont contribué directement et indirectement à la réalisation de ce travail .



SONYA





Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les systèmes dynamiques à l'état discret .
au départ Nous avons présenté les notions principales et les théorèmes essentiels des
systèmes dynamiques , puis nous avons abordé les concepts généraux sur les
systèmes dynamiques discrets et quelques concepts à l'étude (points fixes, points
périodiques, stabilité, bifurcations . . .) .

Ensuite, nous avons présenté une étude sur le système chaotique et ses
caractéristiques, ainsi que sur les attractions chaotiques .

Enfin, comme application de ces concepts, nous avons étudié deux systèmes
dynamiques discrets du premier degré (la fonction logistique) , et du second degré qui
est le système de Lozi , dans lequel nous avons étudié les points fixes, les points
périodiques, la stabilité et la bifurcation .

Les Mots Clés : : système dynamique discret , bifurcation, stabilité, chaos, attracteurs .

Abstract

In this thesis, we study discrete-state dynamical systems.

at the start We presented the main notions and the essential theorems of dynamical systems, then we approached the general concepts on discrete dynamical systems and some concepts to be studied (fixed points, periodic points, stability, bifurcations, etc.) .

Then, we presented a study on the chaotic system and its characteristics, as well as on the chaotic attractions.

Finally, as an application of these concepts, we studied two discrete dynamic systems of the first degree (the logistic function), and of the second degree which is the Lozi system, in which we studied the fixed points, the periodic points, the stability and bifurcation .

Key words : discrete dynamic system , bifurcation , stability , chaos , attractors .

الملخص :

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الأنظمة الديناميكية في الحالة المتقطعة. أولاً قدمنا المفاهيم و النظريات الرئيسية و أساسيات الأنظمة الديناميكية، بعدها تطرقنا لمفاهيم عامة حول الأنظمة الديناميكية المتقطعة و بعض المفاهيم المخصصة للدراسة (النقاط الثابتة، النقاط الدورية، الاستقرار، التشعبات...). ثانياً قدمنا مفاهيم عامة عن النظام الفوضوي و خصائصه وكذا عوامل الجذب الفوضوية. أخيراً و كتطبيق لهذه المفاهيم قمنا بدراسة نظامين ديناميين منفصلين من الدرجة الأولى وهو التطبيق اللوجستي ومن الدرجة الثانية وهو نظام لوزي وفيه درسنا النقاط الثابتة، النقاط الدورية، الاستقرار و التشعب.

الكلمات المفتاحية: النظام الديناميكي المتقطع، التشعب، الاستقرار، الفوضى، الجاذب.

Table des matières

Résumé	5
Table des figures	10
Introduction Générale	1
1 <i>Systèmes dynamiques á temps discret</i>	3
1.1 <i>système dynamique</i>	3
1.1.1 <i>Système dynamique continu</i>	4
1.1.2 <i>Système dynamique discret</i>	4
1.1.3 <i>Système autonomes et non autonomes</i>	4
1.1.4 <i>Comportement des système dynamique</i>	5
1.1.5 <i>Attracteurs et bassin d'attraction</i>	7
1.2 <i>systèmes dynamiques discrets linéaires</i>	10
1.2.1 <i>point fixe</i>	10
1.2.2 <i>Stabilité du point fixe</i>	11
1.3 <i>système dynamique discrets non linéaire</i>	13
1.3.1 <i>point fixe</i>	14
1.3.2 <i>Stabilité du point fixe</i>	15
1.3.3 <i>Notion d'orbite</i>	19
1.3.4 <i>Étude graphique des systèmes dynamique</i>	20
1.3.5 <i>Points Périodiques et P-Cycles</i>	23
1.3.6 <i>Stabilité des point périodique</i>	25
1.3.7 <i>Bifurcation</i>	27
2 <i>Système chaotique</i>	30
2.1 <i>Définition du chaos</i>	30
2.1.1 <i>Chaos dans le sens de Devaney</i>	31
2.2 <i>Caractéristique du chaos</i>	32

2.2.1	Sensibilité aux conditions initiales	32
2.2.2	Exposants de Lyapunov	32
2.2.3	Dimension fractale	35
2.2.4	Attracteur chaotique	37
2.3	<i>Scénarios chaotiques</i>	38
2.3.1	Doublements de période	38
2.3.2	L'intermittence vers le chaos	38
2.3.3	La quasi-périodicité	38
3	<i>Application de Système dynamique discret</i>	41
3.1	système dynamique discret de dimension 1 (l'application logistique) . .	41
3.1.1	Les points fixes	42
3.1.2	stabilité des points fixes	42
3.1.3	Les points périodique	43
3.1.4	stabilité des points Périodique	44
3.1.5	diagramme de bifurcation	45
3.1.6	Exposant de lyapunov	46
3.1.7	L'attracteur	47
3.2	système dynamique discret de dimension 2(Le Système de Lozi)	47
3.2.1	Les points fixes	48
3.2.2	La stabilité	49
3.2.3	Exposants de Lyapunov	52
3.2.4	Diagrammes de bifurcation	53
3.2.5	Attracteur de Lozi	54
	Conclusion générale	56
	Bibliographie	57

Table des figures

1	bismilah	4
1.1	Représentation du flot	7
1.2	Attracteurs réguliers	9
1.3	Attracteurs étranges de Hénon	9
1.4	Point fixe stable	11
1.5	Point fixe localement asymptotiquement stable	11
1.6	Point fixe globalement asymptotiquement stable	12
1.7	Point fixe instable	12
1.8	Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1 - x)$	15
1.9	Point fixe instable	17
1.10	Point fixe asymptotiquement stable	17
1.11	Point fixe semi-stable à gauche	18
1.12	Point fixe semi-stable à droite	18
1.13	L'orbite du système $x_k = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: premier pas	20
1.14	L'orbite du système $x_k = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: deuxième pas	21
1.15	Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1 - x)$	22
1.16	Le portrait de phases d'un système dynamique non-linéaire	23
1.17	Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1 - x)$	24
1.18	Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2	27
1.19	Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b = 0.3$	27
1.20	Diagramme de bifurcation de l'équation logistique	28
1.21	diagramme de bifurcation nœud-col (ou pli)	28
1.22	Diagramme de bifurcation de doublement de période	29
1.23	Diagramme de bifurcation transcritique	29
2.1	Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique	32
2.2	Attracteur de Hénone	37
2.3	Scénarios de transition par doublement de période	38

2.4	Attracteur de Hénon	39
2.5	Attracteur de Hénon-Heiles	40
3.1	Le graphe de fonction logistique pour $a = 3.8$	42
3.2	Représentation graphique des itérations de la fonction logistique pour $a = 3.8282$ et $x_0 = 0.1$	43
3.3	Diagramme de bifurcation de la fonction logistique sur l'intervalle $2 \leq$ $a \leq 4$	45
3.4	Variation d'exposants de Liapunov de la fonction Logistique.	46
3.5	Attracteur chaotique de la fonction logistique pour $a = 4$	47
3.6	Stabilisation de point P_1	51
3.7	Stabilisation de point P_2	52
3.8	la variation des exposants de Lyapunov pour l'application de Lozi	53
3.9	Diagramme de bifurcation de la carte de Lozi pour $b = 0.1$	53
3.10	Attracteur de Lozi pour $a = 1.55$	54
3.11	Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$	55

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps et d'étudier leur comportement, ils nous aident non seulement à mieux comprendre le monde qui nous entoure, mais aussi développés et spécialisés au cours du XIX^e siècle et ils sont utilisés dans beaucoup de disciplines scientifiques par exemple : La biologie, économie, médecine, géophysique, météorologie ...

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton depuis 1665, où l'étude de ces phénomènes et processus doit permettre la possibilité de prédire et de réguler le comportement du système afin d'obtenir les résultats souhaités. Pour développer un modèle, il faut d'abord définir les valeurs qui évoluent dans le temps, les états du système, puis il faut trouver des états mathématiques qui décrivent leur évolution. En général, ce sont des équations différentielles (si le temps est continu) ou aux différences finies (si le temps du modèle est discret).

Les systèmes dynamiques ont différents comportements convergents avec différentes valeurs de leurs paramètres (tendre vers un équilibre, un cycle...) tel qu'il existe certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système change d'un état spécifique à un autre (par exemple du système était un équilibre et devient un cycle). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation.

Il existe plusieurs systèmes présentant ce comportement ils sont dits chaotiques, ils sont régis par des lois déterministes dépendent d'un ou de plusieurs paramètres et leur évolution dans le temps est imprévisible. Ces systèmes ne répètent jamais leur comportement et sont très sensibles aux conditions initiales.

Les systèmes dynamiques sont définis en deux catégories : les systèmes dynamiques continus, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires, et les systèmes dynamiques discrets, qui sont définis comme des itérations de mappage d'un espace métrique à lui-même.

Dans ce mémoire nous étudions souvent les systèmes dynamiques discrets.

Nous avons divisé le mémoire en introduction générale et trois chapitres organisés comme suite :

le premier chapitre : est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons quelques notions importantes sur les systèmes dynamiques (système dynamique, système autonomes et non-autonomes, espace des phases, flot,...). Les deuxième et troisième sections sont consacrées à la notion de base sur les systèmes dynamiques discrets linéaires et non linéaires.

Le deuxième chapitre : est consacré à l'étude des systèmes dynamiques chaotiques. nous donnons quelques définitions de chaos , les différentes propriétés mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, et aussi quelques exemples.

En fin Le troisième chapitre : est consacré à l'étude d'un système dynamique discret de dimension un (la fonction logistique) , et de dimension deux (le système de Lozi) : Chercher les points fixes et les points périodiques et étude de comportement de ce système .

Chapitre 1

Systemes dynamiques á temps discret

1.1 *systeme dynamique*

Un systeme dynamique est un ensemble mecanique, physique, economique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'etat (ensemble de grandeurs suffisant á qualifier le systeme) evolue en fonction du temps. L'etude de l'evolution d'un systeme necessite donc la connaissance :

- de son etat initial, c'est-á-dire son etat á l'instant t_0 .
- de sa loi d'evolution . [1]

Définition 1.1.1. [2] *Un systeme dynamique d'écrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamique et statique, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statique encore appelée paramétré du systeme sont fixe .*

Définition 1.1.2. [17] *Un systeme dynamique est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$, qui possède la propriété, pour tout $x \in X$ et $t, s \in T$:*

$$\begin{cases} f(x, 0) = x \\ f(f(x, t), s) = f(x, t + s) \end{cases}$$

On distingue deux grandes catégories de systemes dynamiques : les systemes á temps continu et les systemes á temps discret . si $T = \mathbb{R}^+$ ou \mathbb{R} , le systeme est dit á temps continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , le systeme est dit á temps discret.

1.1.1 Système dynamique continu

Dans le cas continu un système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme [3] :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_t = f(x, t, \mu). \quad (1.1)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}^r$ où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

Exemple 1.1.1. Le système de Lorenz est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Où x, y, z sont les variables d'état du système, σ, r et b sont des paramètres réels. L'espace de phase est \mathbb{R}^3 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^3 .

1.1.2 Système dynamique discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme [3] :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^r, \quad k = 1, 2, 3... \quad (1.2)$$

Où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ indique la dynamique du système en temps discret.

Exemple 1.1.2. L'application de Hénon :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où a et b sont des paramètres réels. L'espace de phase est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.1.3 Système autonomes et non autonomes

Définition 1.1.3. [18] Un système différentielle est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t , Dans ce cas on l'écrira :

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.

Exemple 1.1.3. Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{3+t}.$$

Cette équation est non autonome.

Remarque 1.1.1. [18] On peut aussi utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non autonome en système autonome.

En effet, la non autonomie se traduit par une équation de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t, \mu).$$

Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, la forme ce qui rehabilite la forme :

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'équation supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Exemple 1.1.4. Soit le système non-autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2t \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

On pose $x_3 = t$, alors $\dot{x}_3 = 1$, donc le système autonome est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases}$$

1.1.4 Comportement des système dynamique

Le comportement dynamique du système à un instant donné est lié à l'évolution d'un certain nombre de variables d'état qui le caractérisent .

• **Espace de phase**

L'espace des phases est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont les axes sont les variables dynamiques du système, et trajectoire de phases toute courbe dans cet espace représentative d'une évolution du système. Cette représentation graphique rend plus aisé d'évaluer la stabilité et la complexité d'un système dynamique. Ce peut être un espace vectoriel, une variété différentielle ou un fibré vectoriel, un espace mesurable...

• **Espace d'état**

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées qui doivent être fournies pour la description complète du système, cet espace peut être discret ou continu.

• **Flot**

soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) , \quad x \in \mathbb{U}^n \subset \mathbb{R}^n \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^r \quad (1.3)$$

Définition 1.1.4. [28] Soit $x(x_0, t)$, $x_0 \in \mathbb{U}$, une solution du système avec la condition initiale $x(0) = x_0$.

On appelle flot de l'équation (1.3), l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{U} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x_0 &\mapsto \phi_t(x_0) = x(x_0, t) \end{aligned}$$

Autrement dit, étant donné un point (matériel) en x de l'espace des phases, le flot du système permet de préciser la position $\phi_t(x)$ du point après un déplacement d'une durée t .

Proposition 1.1.1. [4] $\phi_t(x_0)$ possède les propriétés suivantes :

- $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r .
- $\phi_0(x_0) = x_0$
- $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.



FIGURE 1.1 – Représentation du flot

- **Trajectoire (orbites)**

Soit $x_0 \in \mathbb{U}$ une condition initiale et $x(x_0, t)$ la solution de (1.3). L'ensemble des points $\{x(x_0, t)/t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectoire (orbite) dans l'espace d'état passant au point x_0 à l'instant initial ($t = 0$). [5] Et on note :

$$\gamma_{x_0} = \{ (x_0, t)/t \in \mathbb{R} \}.$$

Remarque 1.1.2. [5]

- Deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initiale :

$$\forall t, \phi(x_1, t) = \phi(x_2, t) \implies x_1 = x_2$$

- La trajectoire d'un système dynamique autonome ne dépend que de l'état initiale.

- **Portrait de phase**

Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système. [18]

1.1.5 Attracteurs et bassin d'attraction

Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phases qui attirent un grand nombre de solutions issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs et ensembles attractants.

Définition 1.1.5. [15] (ensemble invariant)

Un sous ensemble A de l'espace des phases \mathbb{R}^n , A est dit invariant (resp : positivement invariant) par un flot ϕ , si pour tout t dans \mathbb{R} (resp : $[0, +\infty]$), $\phi_t(A)$ est incluse dans A .

Définition 1.1.6. [18] (*ensemble attractant*)

Un ensemble invariant fermé A est un ensemble attractant s'il existe un voisinage U tel que :

$$\begin{cases} f(U) \subset U \\ \forall x \in U, f^{(n)}(x) \rightarrow A, \text{ pour } n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

• **Attracteurs**

un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

★ Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On suppose que A est invariant par le flot : $\phi_t(A) \subset A$ pour tout t . A est dite stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $\phi_t(x_0) = x(x_0, t)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus :

$$\bigcap_{t>0} \phi_t(V) = A$$

S'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur. [24]

• **Bassin d'attraction**

L'orsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t<0} \phi_t(A)$$

C'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent vers A .
est appelé bassin d'attraction de A . [26]

Les types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1) **Attracteurs réguliers** : [2]

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

a) **point fixe** : c'est l'attracteur le plus simple, il est représenté par un point dans l'espace des phases.

b) **cycle limite périodique** : C'est une trajectoire fermée qui attire toutes les trajectoires proches.

c) **Attracteur quasi périodique (tore)** : C'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un

toire et remplir sa surface de manière dense et finira par se refermer sur elle même au bout d'un temps infini.

La figure suivant représente les différents types d'attracteurs réguliers.

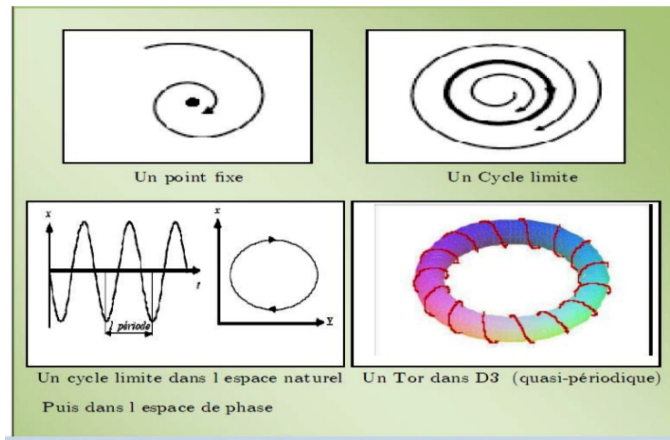


FIGURE 1.2 – Attracteurs réguliers

2) Attracteurs étranges : [2]

Ce sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques.

- Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nulle.
- La dimension d de l'attracteur est fractale (non entier), pour un système continue autonome $2 < d < n$, avec n la dimension de l'espace des phases.
- Sensibilité au conditions initiales (deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre).

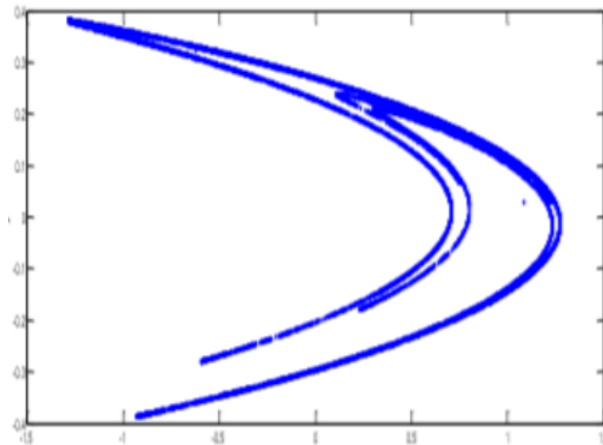


FIGURE 1.3 – Attracteurs étranges de Hénon

1.2 systèmes dynamiques discrets linéaires

Définition 1.2.1. [16] Un système dynamique discret linéaire est définie par une équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k + b \\ x_0 \text{ donne} \end{cases} ; \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

où :

- $a, b \in \mathbb{R}$: sont des constantes.
- $x_k \in \mathbb{R}$: variable d'état.
- x_0 : valeur initiale.

1.2.1 point fixe

La notion de point d'équilibre est centrale dans l'étude de la dynamique de tout système physique. Dans de nombreuses applications en biologie, économie, physique, ingénierie, . . . ect, il est souhaitable que tous les états (solutions) d'un système donné tendent à son état d'équilibre (point d'équilibre).

Définition 1.2.2. [16] le point fixe d'un système dynamique $x_{k+1} = f(x_k)$ est $x^* \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x^*) = x^*$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction dérivable . C'est à dire x^* est invariant sous f . [20]

- Parfois, ces points sont appelés aussi points **stationnaires** ou point **d'équilibre**.

Existence et unicité du point fixe

On suppose que le système (1.4) est a l'état d'équilibre [16] i.e : $x^* = ax^* + b$

- pour $a \neq 1$ on a : $x^* = \frac{b}{1-a}$ Donc il existe un unique point fixe.
- pour $a = 1$ et $b = 0$, on a : $\forall t \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k$. C-à-d toute condition initiale est un point fixe.
- pour $a = 1$ et $b \neq 0$, le point fixe n'existe pas .

Finalement, on déduit que :

$$x^* = \begin{cases} \frac{b}{1-a} & ; a \neq 1 \\ x_0 & ; a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Proposition 1.2.1. [17] Le point fixe d'un système dynamique $x_{k+1} = ax_k + b$ existe si et seulement si $a \neq 1$ ou ($a = 1$ et $b = 0$).

Proposition 1.2.2. [16] Le point fixe d'un système dynamique $x_{k+1} = ax_k + b$ est unique si et seulement si $a \neq 1$.

1.2.2 Stabilité du point fixe

Définition 1.2.3. [17] On dit que le point x^* d'un système dynamique $x_{k+1} = f(x_k)$ (où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable), et pour la conditions initiale x_0 est stable si :

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x_0 - x^*| < \delta \implies |f(x_0) - x^*| < \xi \quad \forall t \in \mathbb{N}^*$$

Autrement dit, toutes les orbites qui commencent près du point x^* restent dans un voisinage de ce point.

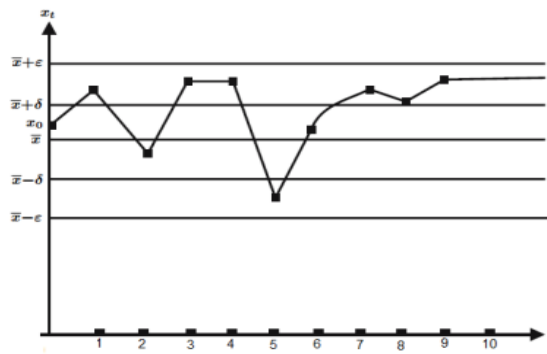


FIGURE 1.4 – Point fixe stable

Définition 1.2.4. [17] On dit que le point fixe x^* est localement asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $V_\xi(x^*)$ un voisinage de x^* ($V_\xi(x^*) = \{y : |x^* - y| < \xi\}$) tel que $\forall x_0 \in V$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k = x^*.$$

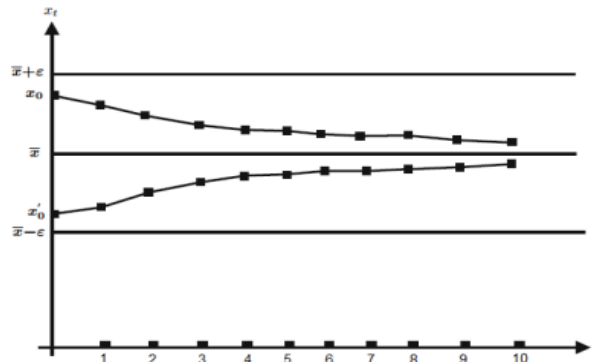


FIGURE 1.5 – Point fixe localement asymptotiquement stable

Définition 1.2.5. [17] On dit que Le point fixe x^* est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k = x^*, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

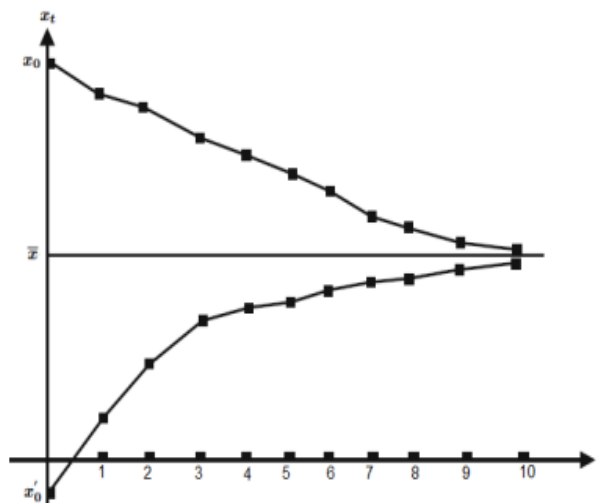


FIGURE 1.6 – Point fixe globalement asymptotiquement stable

Remarque 1.2.1. [16] La stabilité globale d'un point fixe implique l'unicité du point fixe et la stabilité locale implique l'unicité local du point fixe.

Définition 1.2.6. [17] Un point fixe s'appelle instable s'il existe un $\xi > 0$ tel que $\forall r > 0$ il existe un $x_0 \in V_r(x^*)$ et il existe un $t \in \mathbb{N}$ tels que $|f^t(x_0) - x^*| > \xi$

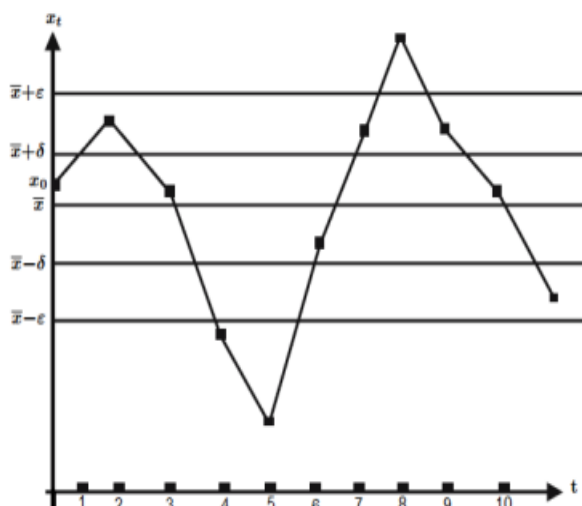


FIGURE 1.7 – Point fixe instable

- Cela signifie que pour tout voisinage du point fixe x^* il existe une orbite qui, en commençant dans ce voisinage s'éloigne du point x^* .

1.3 système dynamique discrets non linéaire

Définition 1.3.1. [16] Un système dynamique discret non linéaire de dimension 1 est définie par équation aux différences suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k) \\ x_0 \text{ donne} \end{cases} ; \quad k \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

où : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable , et $x_k \in \mathbb{R}$ est le variable d'état.

Définition 1.3.2. [25] Un système dynamique discret de dimension 2 est décrit par deux équations :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k)) \\ x_2(k+1) = f_2(x_1(k), x_2(k)) \end{cases}$$

Définition 1.3.3. [25] les Systèmes dynamiques discrets d'ordre supérieur sont décrits par des équations aux différences finies d'ordre $r \geq 2$ autonomes ou non :

$$x_{k+r} = f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+r-1}) ; k \geq 0 \quad (1.6)$$

Il existe une procédure simple qui permet de transformer en un système d'ordre 1 tout système dynamique d'ordre supérieur. Pour cela il suffit de définir un nouvel espace de phase formé des vecteurs de la forme :

$$y_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+r-1} \end{pmatrix}$$

La dimension de cet espace sera mr . Dans cet espace on définit l'application $g : \mathbb{R}^{mr} \rightarrow \mathbb{R}^{mr}$ par la formule :

$$g(y) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ \vdots \\ g_r(y) \end{pmatrix}$$

$$g_k(y) = \begin{pmatrix} g_{k.m+1}(y) \\ g_{k.m+2}(y) \\ \vdots \\ g_{k.m+m}(y) \end{pmatrix}$$

tel que $k = 1, \dots, r - 1$. Alors l'équation (1.5) est équivalente à l'équation suivante pour y_k :

$$y_{k+1} = g(y_k)$$

Dans certains cas (surtout linéaires) cette transformation permet d'appliquer aux systèmes d'ordre supérieur, les mêmes méthodes d'analyse qu'aux système d'ordre 1.

1.3.1 point fixe

Un point x^* est un point fixe du système (1.5) (ou de l'application f) si :

$$f(x^*) = x^*$$

Exemple 1.3.1. .

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = 3x(1 - x)$$

Les point fixe de f vérifie :

$$f(x) = x \implies 3x(1 - x) = x \implies 3x - 3x^2 = x$$

$$\implies -3x^2 + 2x = 0$$

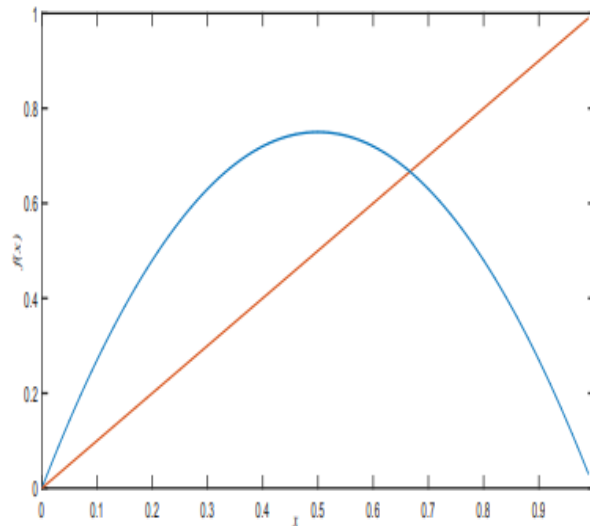
$$\implies x(-3x + 2) = 0$$

donc :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Les point fixe sont : $\{ \frac{2}{3}, 0 \}$

Graphiquement est comme le montre la figure suivant :


 FIGURE 1.8 – Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1 - x)$.

1.3.2 Stabilité du point fixe

Il n'est pas facile de trouver des solutions de systèmes non linéaires. Souvent, ces solutions ne fournissent pas suffisamment d'informations sur les facteurs qui contrôlent la stabilité du système.

Par conséquent, nous avons besoin de méthodes analytiques pour faciliter l'étude du comportement de ce système non linéaire. L'approximation linéaire du système non linéaire est l'un des moyens les plus efficaces d'étudier la stabilité des systèmes non linéaires.

Méthode de linéarisation [17]

Le développement de Taylor d'ordre 1 de $f(x_k) = x_{k+1}$ au voisinage x^* est :

$$x_{k+1} = f(x_k) = f(x^*) + f'(x^*)(x_k - x^*) + \theta(x_k - x^*).$$

Donc :

$$x_{k+1} \simeq f'(x^*)x_k + f(x^*) - f'(x^*)x^* = ax_k + b$$

où : $a = f'(x^*)$ et $b = f(x^*) - f'(x^*)x^*$.

Alors, on obtient une approximation linéaire de (1.5) au voisinage du point fixe par le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction f .

- Nous pouvons utiliser les résultats de stabilité du système linéaire pour étudier la stabilité du système non linéaire. Étant donné que le système linéaire n'approche du comportement du système non linéaire que dans un voisinage suffisamment petite

d'un point fixe, l'analyse globale du système linéarisé ne donne qu'une analyse locale du système dynamique non linéaire.

Proposition 1.3.1. . [17]

- Le point d'équilibre x^* de (1.5) est localement asymptotiquement stable (attractif) ssi $|f'(x^*)| < 1$.
- Le point d'équilibre x^* de (1.5) est instable (répulsif) ssi $|f'(x^*)| > 1$.

Exemple 1.3.2. Considérons la fonction :

$$f(x, a, b) = ax^3 - bx$$

▲ point fixe :

$$\begin{aligned} f(x, a, b) = x &\implies ax^3 - bx = x \\ &\implies ax^3 - (b + 1)x = 0 \\ &\implies x(ax^2 - (b + 1)) = 0 \\ &\implies x = 0 \quad \text{ou} \quad ax^2 - b - 1 = 0 \\ &\implies x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{b + 1}{a} \end{aligned}$$

Donc les points fixes sont : $x^* = \{0, \pm \sqrt{\frac{b + 1}{a}}\}$

▲ La dérivée de la fonction $f(x)$ est :

$$f'(x) = 3ax^2 - b$$

- La dérivée calculée au point $x^* = 0$ est : $f'(0) = -b$.

D'après la proposition (1.3.1) on a :

- Si $|b| < 1$, x^* est un point attractif.
- Si $|b| > 1$, x^* est un point répulsif.
- La dérivée calculée au point $x^* = \pm \sqrt{\frac{b + 1}{a}}$ est : $f'(x^*) = 2b + 3$.

donc :

- Si $|2b + 3| < 1$, x^* est un point attractif.
- Si $|2b + 3| > 1$, x^* est un point répulsif

Remarque 1.3.1. [17] La stabilité du système non linéaire à proximité d'un point fixe x^* ne peut être étudiée à partir du système linéarisé si $|f'(x^*)| = 1$. À savoir, tout changement

infinitésimal dans la dérivée au point x^* entraîne un changement dans la nature du système dynamique.

• **Stabilité du point fixe non hyperbolique**

Définition 1.3.4. [16] Un point fixe x^* de (1.5) est dit hyperbolique si on a $|f'(x^*)| \neq 1$.

Dans le cas au $|f'(x^*)| = 1$, c-à-d x^* non hyperbolique. on peut utiliser les théorèmes suivants pour étudier la stabilité du point fixe :

Théorème 1.3.1. [16] Soit x^* un point fixe de système (1.5) avec $f \in C^3$ et $f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) = 0$ alors :

- si $f'''(x^*) > 0$ alors x^* est instable .
- si $f'''(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable .

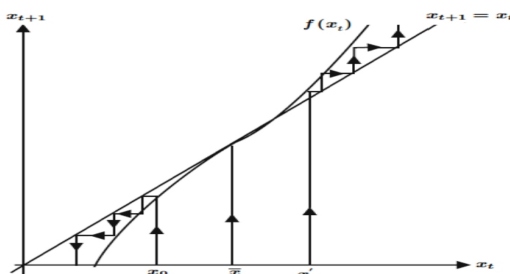


FIGURE 1.9 – Point fixe instable

Exemple 1.3.3. Soit le système dynamique $x_{k+1} = x_k^3 + x_k$. on a :

$$f(x^*) = x^* \iff x^{*3} + x^* = x^* \iff x^* = 0$$

Alors, l'unique point fixe de ce système est $x^* = 0$

D'autre part on a : $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=6>0$.

Donc d'après le théorème (1.3.1) on déduit que le point fixe $x^* = 0$ est instable.

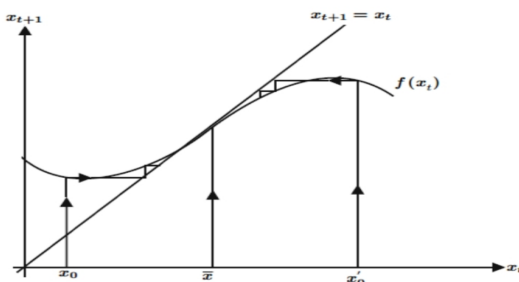


FIGURE 1.10 – Point fixe asymptotiquement stable

Exemple 1.3.4. Soit le système dyanmique $x_{k+1} = -x_k^3 + x_k$. On a :

$$f(x^*) = x^* \iff x^* = 0$$

Alors, l'unique point fixe de ce système est $x^* = 0$.

D'autre part on a : $f'(0)=1$; $f''(0)=0$; $f'''(0)=-6<0$.

Donc d'après le théorème (1.3.1) on déduit que le point fixe $x^* = 0$ est asymptotiquement stable.

Théorème 1.3.2. [16] Soit x^* est un point fixe de le système (1.5) avec $f \in C^2$, si $f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) \neq 0$ alors : x^* est instable

- si $f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) > 0$, on dit que x^* est un point fixe semi-stable à gauche.

- si $f'(x^*) = 1$ et $f''(x^*) < 0$, on dit que x^* est un point fixe semi-stable à droite.

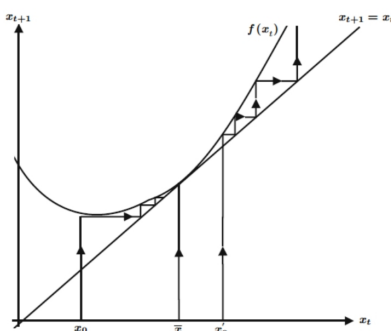


FIGURE 1.11 – Point fixe semi-stable à gauche

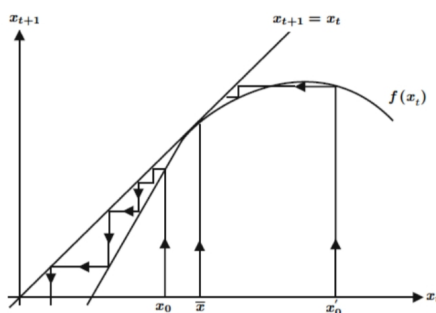


FIGURE 1.12 – Point fixe semi-stable à droite

Définition 1.3.5. [16] La dérivée Schwartzienne d'une fonction $f \in C^3$ est définie par :

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Notons que si $f'(x) = -1$, alors :

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2$$

Théorème 1.3.3. [16] Si x^* est un point fixe de le système (1.5) avec $f \in C^3$, si $f'(x^*) = -1$ alors :

- Si $Sf(x^*) > 0$ alors x^* est instable.
- Si $Sf(x^*) < 0$ alors x^* est localement asymptotiquement stable .

Exemple 1.3.5. Soit le système dyanamique $x_{k+1} = x_k^2 + 3x_k$. on a :

$$f(x^*) = x^* \iff x^{*2} + 3x^* = x^* \iff x^* = 0 \text{ ou } x^* = -2$$

Alors, les points fixes de ce système sont : $x^* = 0$ et $x^* = -2$

D'autre part on a $f'(0) = 3 > 1$ Donc d'après la proposition (1.3.1) le point fixe $x^* = 0$ est instable .

et on a $f'(-2) = -1$ et $Sf(-2) = -6 < 0$.

D'après le théorème (1.3.3) on déduit que le point fixe $x^* = -2$ est asymptotiquement stable.

1.3.3 Notion d'orbite

Nous allons étudier dans la suite seulement les systèmes d'ordre 1.

Définition 1.3.6. [25] Étant donné le point initial x_0 , on appelle orbite (ou trajectoire) du système (1.5) la suite :

$$\theta(x_0) = \{x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_{k+1} = f(x_k), \dots\}$$

Exemple 1.3.6. Soit un (SDD) en dimension 1 défini par la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, +\infty]$

Prenons pour condition initiale $x_0 = \frac{1}{2}$.

L'orbite correspondante est :

$$x_0 = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4},$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{16},$$

Remarquons que $x_k = f(x_{k-1}) = f^{(k)}(x_0) = (\frac{1}{2})^{2^k} \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$.

Prenons un autre point initial, $x_0 = 2$. Alors :

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = f(x_0) = 4,$$

$$x_2 = f(x_1) = 16,$$

Dans ce cas , $x_k = f(x_{k-1}) = f^{(k)}(x_0) = (2)^{2^k} \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$

Et enfin, si l'on choisit pour point initial $x_0 = 1$ on voit que :

$$\theta(x_0) = \{1, 1, \dots, x_k = (1)^{2^k}, \dots\}$$

1.3.4 Étude graphique des systèmes dynamique

• Système dynamique discret de dimension 1

Soit un SDD de dimension 1 défini par une fonction : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x(0) = x_0, x_{n+1} = f(x_n)$

On peut visualiser sur le plan (x, y) l'évolution d'une orbite $\theta(x_0)$ en utilisant le graphe de la fonction f et la droite $y = x$.

Prenons par exemple la fonction :

$$f(x) = 4.5x - 3.5x^2$$

Nous allons représenter l'orbite qui commence dans le point $x_0 = 0.2$.

- Traçons d'abord le graphe de la fonction f et la droite $y = x$.

- Sur le plan (x, y) l'orbite commence dans le point $(x_0, 0)$ Nous traçons maintenant une ligne verticale du point $(x_0, 0)$ jusqu'au graphe de la fonction $f(x)$. Le point d'intersection est exactement le point (x_0, x_1) avec $x_1 = f(x_0)$. voir la figure suivant :

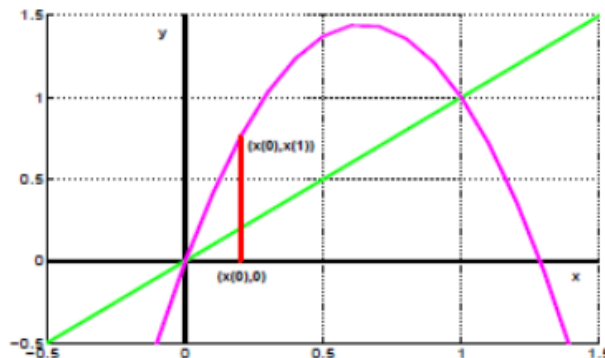


FIGURE 1.13 – L'orbite du système $x_k = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: premier pas

-Ensuite, nous traçons une ligne horizontale à partir du point (x_0, x_1) jusqu'au point (x_1, x_1) d'intersection avec la droite $y = x$.

-A partir de ce point nous traçons encore une ligne verticale vers le graphe de la fonction $f(x)$ pour trouver le point suivant $x_2 = f(x_1)$, voir la figure suivant :

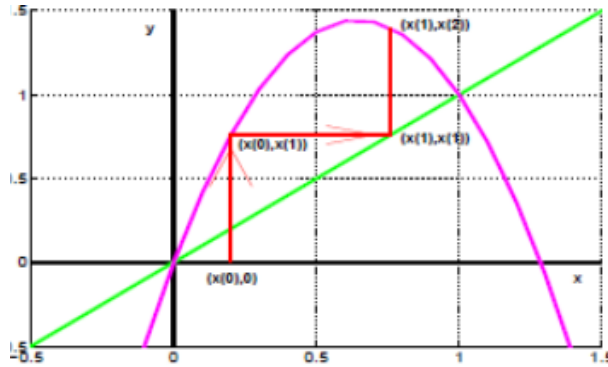


FIGURE 1.14 – L'orbite du système $x_k = 4.5x_k - 3.5x_k^2$: deuxième pas

-En continuant ainsi nous pouvons suivre l'évolution de l'orbite sur autant de points que nous le voulons.

Cette représentation graphique des systèmes est particulièrement utile parce qu'elle permet de voir clairement les point fixes (ce sont les point d'intersection du graphe de la fonction f et de l'orbite $y = x$). [3]

★ autre exemple

lorsque l'orbite $\theta(x_0)$ converge vers un point fixe x^* , le diagramme qui démarre à partir du point $(x_0, 0)$ sera une séquence de vertical et horizontal segments en spirale vers (x^*, x^*) . Cette situation est illustrée dans la figure suivant par un diagramme de l'application logistique :

$$f(x) = 2.9x(1 - x)$$

Le point fixé de f est $x^* = \frac{19}{29}$ et la condition initiale est $x_0 = 0.1$.

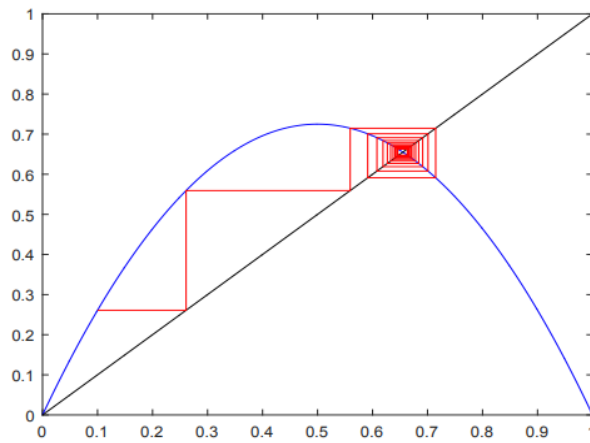


FIGURE 1.15 – Le diagramme cobweb du système dynamique $f(x) = 2.9x(1 - x)$.

• Système dynamique discret de dimension 2

Écrit par deux équations :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k)) \\ x_2(k+1) = f_2(x_1(k), x_2(k)) \end{cases}$$

Pour étudier ces système on utilise souvent des portrait de phases.

Pour tracer le portrait de phases d'un système dynamique défini par l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

on choisit sur le plan une grille de points (x_1, x_2) assez dense et l'on trace dans chaque point la direction du départ de l'orbite qui commence dans ce point.

Cette direction pour un point initial :

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

est défini par le vecteur :

$$x_1 - x_0 = f(x_0) - x_0$$

Cela donne un aperçu (voir la figure suivant) de toutes les orbites possibles du système.

Si l'on s'intéresse à une orbite particulière, on peut la retrouver sur le portrait de phases, en suivant les directions du champ de vecteurs tracées à partir du point initial de l'orbite.

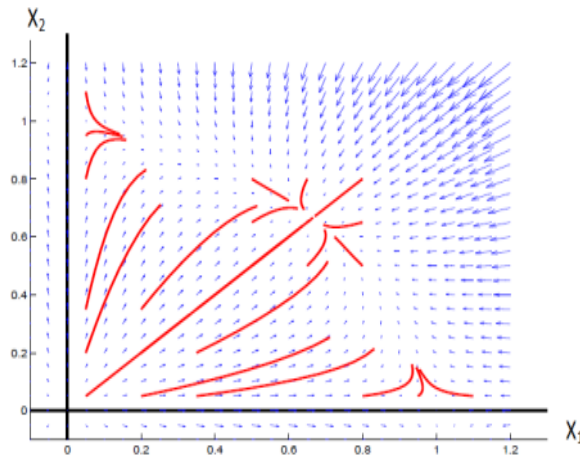


FIGURE 1.16 – Le portrait de phases d'un système dynamique non-linéaire.

On peut observer à l'aide d'un portrait de phases les points fixes du système. Ce sont les points tels que $f(x^*) = x^*$. Donc, le vecteur de direction du portrait de phases doit être nul dans un point fixe. Le comportement des orbites du système autour d'un point fixe est important. Le portrait de phases nous permet une première analyse qualitative de ce comportement. Sur la figure précédant sont tracées quelques orbites commençant dans des points proches des points fixes.

Sur un portrait de phases on peut également apercevoir des orbites périodiques, si le système en a. Dans ce cas, on peut distinguer des courbes closes formées par un groupe de vecteurs de directions. [3]

1.3.5 Points Périodiques et P-Cycles

Définition 1.3.7. [2] *S'il existe $p \geq 1$, tel que $f^p(x) = x$, on dit que x est un point périodique de période p*

Définition 1.3.8. [2] *Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un p -cycle), si :*

$$f(x_k) = x_{k+1} \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots, p-2 \text{ et } f(x_{p-1}) = x_p = x_0$$

p étant le plus petit entier supérieur ou égale à 1 possédant cette propriété. On dira que tout point du cycle est p -périodique.

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour f^p , Où $f^p(x_k) = x_k$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ et n'est pas un point fixe pour f^l si $l < p$ (l, p sont des entiers).

Remarque 1.3.2. .

◦ Tout point fixe, étant point périodique de période $p = 1$. [7]

Exemple 1.3.7. la paire $\{x_0^*, x_1^*\}$ est un cycle d'ordre 2 si et seulement si x_0^* et x_1^* sont des point d'équilibre de f^2 mais pas de f .

Exemple 1.3.8. Soit le système dynamique gouverné par l'application logistique $f(x) = ax(1 - x)$ ($0 < a \leq 4$). Les points 2-périodiques sont solutions du système :

$$\begin{cases} f^2(x) = x, \\ f(x) \neq x. \end{cases}$$

Si $2 < a \leq 4$ ce système à deux solutions :

$$x_1 = \frac{a + 1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}$$

en particulier , pour $a = 3.4$ alors les deux points périodique sont :

$$x_1 = \frac{4.4 + \sqrt{1.76}}{6.8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4.4 - \sqrt{1.76}}{6.8}$$

donc

$$x_1 = 0.84 \quad \text{et} \quad x_2 = 0.45$$

Grappiquement les points d'un cycle de période 2 sont l'intersection entre le graphe de $f^2 = f \circ f$ et la droit $y = x$ tel que $f(x) \neq x$ comme le montre la figure suivant :

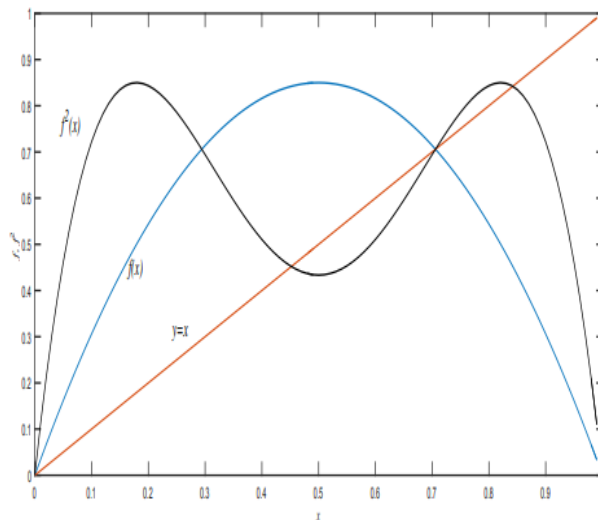


FIGURE 1.17 – Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1 - x)$.

1.3.6 Stabilité des point périodique

Définition 1.3.9. [3] Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définissant un SDD d'ordre 1, et soit $\theta(x_0) = \{x(0) = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ une orbite périodique de période p de ce système.

On dit que cette orbite est attractive (stable) (ou répulsive (instable)) si chacun de ses point est un point fixe attractif (resp : un point répulsif) de l'application $f^p(x)$.

En dimension un, si $\{x(0) = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ est un cycle d'ordre p , les dérivées $(f^p)'(x_k)$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ sont égales. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$\begin{aligned} f^p(x_0) &= (f \circ f \circ f \dots \circ f)(x_0) \\ &= (f^{p-1} \circ f)(x_0) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (f^p)'(x_0) &= (f^{p-1} \circ f)'(x_0) \\ &= (f^{p-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= (f^{p-2} \circ f)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &= (f^{p-2})'(f^2(x_0)) \cdot f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \\ &\quad \vdots \\ &= f'(x_{p-1}) \cdot f'(x_{p-2}) \cdots f'(x_1) \cdot f'(x_0) \\ &= \prod_{k=0}^{p-1} f'(x_k). \end{aligned}$$

Mais $x_0 = x_p$. On en déduit que cette valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées $(f^p)'(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, p-1$:

$$S = (f^p)'(x_0) = (f^p)'(x_1) = \dots = (f^p)'(x_{p-1}) = \prod_{k=0}^{p-1} f'(x_k)$$

Cette valeur commune S est appelée le multiplicateur du cycle $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$, qui est détermine le type du cycle (l'orbite $\theta(x_0)$). [17]

Théorème 1.3.4. [2] Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le cycle $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ est :

1. Attractif (ou stable) si $|S| < 1$.
2. Répulsif si $|S| > 1$.
3. Indifférent si $|S| = 1$.
4. Super-attractif (ou super stable) $|S| = 0$.

Exemple 1.3.9. Soit $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

Le point 0 est 3-périodique car : $f(0) = 1; f(1) = 2; f(2) = 0$.

on a : $f'(0) = \frac{5}{2}, f'(1) = \frac{-1}{2}, f'(2) = \frac{-7}{2}$.

donc d'après le théorème (1.3.4) :

$$(f^3)'(0) = f'(0)f'(1)f'(2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-7}{2} = \frac{35}{8} > 1$$

Alors, 0 est point 3-périodique **répulsif**.

Exemple 1.3.10. trouver l'exemple (1.3.8) précédent et on appliquons le théorème (1.3.4).

-La dérivé de la fonction $f(x)$ est : $f'(x) = a - 2ax = a(1 - 2x)$

pour $a = 3.4, x_1 = 0.84, x_2 = 0.45$ on a :

$$f'(x) = 3.4(1 - 2x)$$

$$f'(x_1) = -2.312, f'(x_2) = 0.34$$

Alors :

$$|(f^2)'(x_0)| = |f'(x_1).f'(x_2)| = 0.79 < 1$$

L'orbite est donc **attractive**.

▷ Nature des singularités

pour caractériser la nature des points fixes et orbites (singularités), on introduit la notion des multiplicateurs caractéristiques :

1. Si la dimension de la récurrence $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe x^* est

$$S = f'(x^*) \text{ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre } q, (x_1, x_2, \dots, x_q) \text{ est } S = \prod_{k=1}^q f'(x_k)$$

- Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|S| < 1$ et répulsif si $|S| > 1$.

2. Si $p > 1$, les multiplicateur $S_k (k = 1, \dots, k)$ d'un point fixe x^* sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $f(x^*)$ ou d'un cycle d'ordre k sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $f^p(x_i)$ qui notées $\sigma_k, k=1, \dots, n$.

• si σ_k sont des réels donc : [27]

◦ si $|\sigma_k| < 1, \forall k = 1, \dots, n$; il s'agit d'un noeud attractif, donc stable.

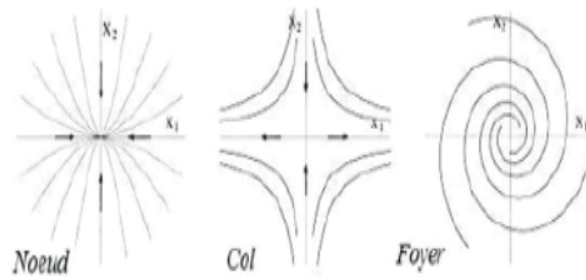
◦ si $|\sigma_k| > 1, \forall k = 1, 2, \dots, n$; il s'agit d'un noeud répulsif, donc instable.

◦ si $\exists k, m, 1 \leq k \leq n; 1 \leq m \leq n$ tel que $|\sigma_k| < 1, |\sigma_m| > 1$ il s'agit d'un noeud col donc instable.

• si σ_k sont complexe donc :

◦ si $|\sigma_k| < 1, \forall k = 1, \dots, n$; il s'agit d'un foyer attractif, donc stable.

◦ si $|\sigma_i| > 1, \forall k = 1, \dots, n$; il s'agit d'un foyer répulsif, donc instable.


 FIGURE 1.18 – Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

1.3.7 Bifurcation

Soit le système dynamique non-linéaire suivant :

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu) \quad (1.7)$$

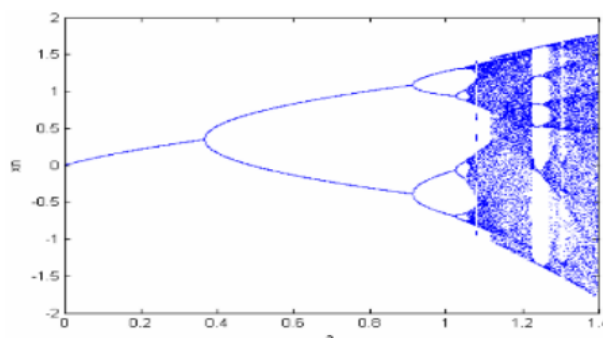
D'où $x_k \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Définition 1.3.10. Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_f du système (1.7) lorsqu'on modifie le paramètre de contrôle μ , c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. [13]

Définition 1.3.11. Une diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur la quelle sont représentés tous les points de bifurcation. [13]

Exemple 1.3.11. (Diagramme de bifurcation du système de Hénon)
le système de Hénon écrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$


 FIGURE 1.19 – Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b = 0.3$

Exemple 1.3.12. (Diagramme de bifurcation de l'équation logistique)

l'équation logistique décrit par :

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k)$$

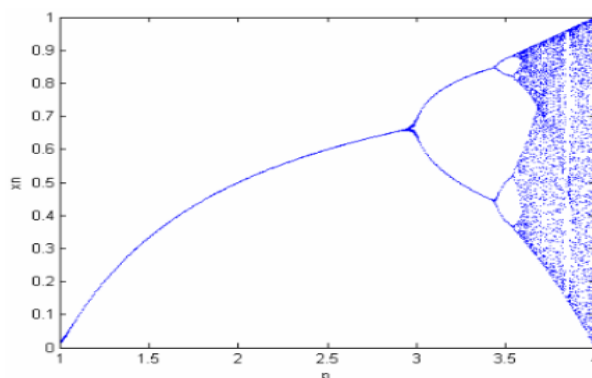


FIGURE 1.20 – Diagramme de bifurcation de l'équation logistique

Types de Bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcations selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions $f(x_k, \mu)$. Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation [19,21,22] Parmi différents types de bifurcation, pour les systèmes dynamique discret, on trouve : [13]

1) Bifurcation de type noeud-col (ou tangente, ou pli) : [13] Cette bifurcation on se produit lorsque l'une des deux valeurs propres de $Df(x_k, \mu)$ est égale à +1. Sur le diagramme des bifurcation on observe, dans ce cas une courbe de points fixe continue tangente à la ligne droit vertical.

Deux point d'équilibre existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation plus aucun équilibre n'existent.

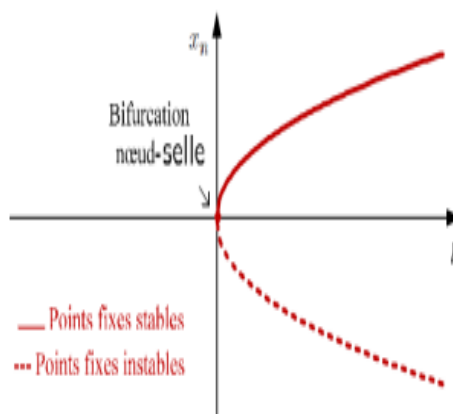


FIGURE 1.21 – diagramme de bifurcation noeud-col (ou pli)

2) **Bifurcation flip ou doublement de période** : [13] Cette bifurcation a lieu lorsque l'une des deux valeurs propres de $Df(x_k, \mu)$ est égale à -1 . Un point fixe stable d'ordre 1, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

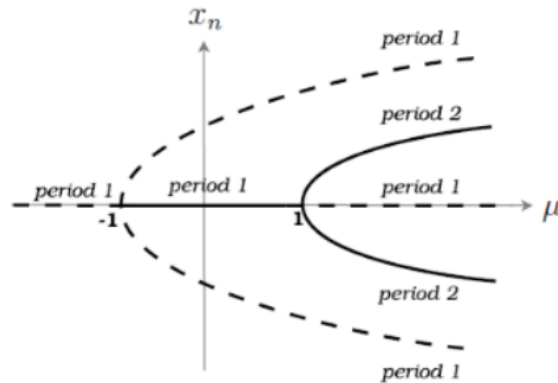


FIGURE 1.22 – Diagramme de bifurcation de doublement de période.

3) **Bifurcation transcritique** : [13] Sur le diagramme de bifurcation on cela se traduit par deux branches différentes de points fixes qui se croissent en un point et par le changement de stabilité des deux branches au passage par le point d'intersection.

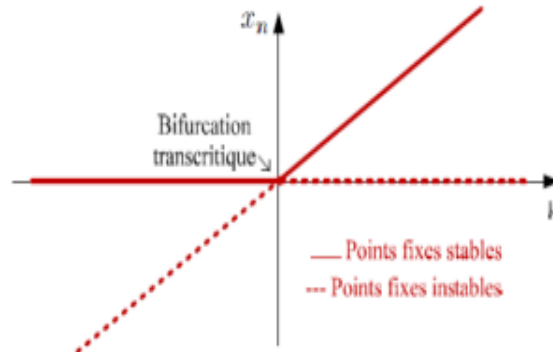


FIGURE 1.23 – Diagramme de bifurcation transcritique

4) **Bifurcation de Neimark-Saker** : [13] Cette bifurcation se produit lorsque $Df(x_k, \mu)$ possède deux valeurs propres complexes égales à $\exp\{\pm i\theta\}$.

Chapitre 2

Systeme chaotique

Dans l'usage courant, le "chaos" signifie "un état de désordre". mais dans la théorie du chaos, il est lié à l'imprévisibilité et à l'impossibilité de prédire le développement à long terme car l'état final dépend fortement de l'état initial.

La théorie du chaos étudie le comportement d'un système dynamique très sensible aux conditions initiales.

2.1 Définition du chaos

Bien qu'il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, on pourrait dire que c'est un phénomène qui peut apparaître dans les systèmes dynamiques déterministes non linéaires caractérisés par une évolution qui semble aléatoire et un aspect fondamental d'instabilité appelé sensibilité aux conditions initiales, ce qui le rend imprédictible en pratique à long terme. [8]

Les Propriétés de ces système dynamique est :

- * **La non linéarité** : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- * **Le déterminisme** : un système chaotique a des règle fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.
- * **La sensibilité** : le système manifeste une haute sensibilité aux changements de conditions.
- * **L'imprévisible** : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- * **L'irrégularité** : ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques "ordre dans le désordre" plus simplement. [9]

2.1.1 Chaos dans le sens de Devaney

Soit \mathcal{S} un ensemble dans l'espace topologique \mathbb{R} et soit f^p la fonction définie par :

$$f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

A savoir que :

$$f^p = f(f^{p-1}), p = 1, 2, \dots$$

et

$$f^0 = \mathbb{I}$$

Soit $x^* \in \mathcal{S}$, ce dernier est appelé point périodique de période p s'il satisfait :

$$f^p(x^*) = x^*, \text{ mais } x^* \neq f^k(x^*) \text{ pour } 1 < k < p$$

Si $p = 1$ alors le point x^* est appelé un point fixe [9].

Théorème 2.1.1. (Théorème de Devaney) : [9] Une fonction $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est chaotique si :

- La fonction f est sensible aux conditions initiales, dans le sens que pour tout $x \in \mathcal{S}$ et au voisinage U de x dans \mathcal{S} , il existe un $\delta > 0$, tel que :

$$|f^p(x) - f^p(y)| > \delta$$

pour un point $y \in U$ et pour $p \geq 0$.

- La fonction f est topologiquement transitive dans le sens que pour toute paire de sous-ensembles ouverts $U, V \subset \mathcal{S}$, il existe un nombre entier $p > 0$ tel que :

$$f^p(U) \cap V \neq \emptyset$$

- Les points périodiques de la fonction f sont denses dans \mathcal{S} .

Remarque 2.1.1. [18] Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y égale à X . Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence des points $\{y_n\}$ qui convergent vers x .

Les applications de la théorie du chaos

La théorie du chaos est appliquée dans beaucoup de disciplines scientifiques : médecine (analyse du rythme cardiaque, détection de cancer de sein, détecter les cas de

schizophrénie), biologie (analyse de population, consommation du CO₂ d'une forêt), communication électroniques, métamatériaux... etc.

En mathématiques, La théorie du chaos décrit le comportement de certains systèmes dynamiques déterministes (c'est-à-dire : l'existence d'une condition initiales, l'existence et l'unicité de la solution).

2.2 Caractéristique du chaos

2.2.1 Sensibilité aux conditions initiales

Cette propriété a été observée pour la première fois par E.Lorenz sur son modèle le météorologique. Elle est connue sous le nom populaire d'effet papillon. La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique, puisque la plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables. [10]

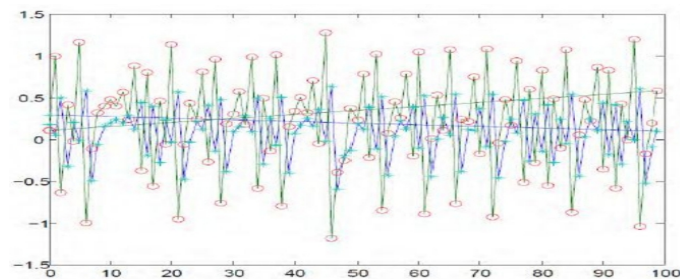


FIGURE 2.1 – Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique

2.2.2 Exposants de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique.

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide, C'est pourquoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence ou convergence, Cette vitesse s'appelle l'exposant Lyapunov qui caractérise le taux de séparation de deux trajectoires très proches.

Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et

ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions : [11, 12]

1. Au moins l'un deux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
2. Au moins l'un deux est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
3. A somme de tous les exposants est négative pour expliquer qu'un système chaotique et dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd de l'énergie.

La valeur du plus grand exposant de Lyapounov quantifie le degré de chaos du système. mais le fait que les trois conditions énoncées ci dessus soient réunies ne suffit pas à conclure qu'un système est chaotique. Il demeure indispensable de confronter les résultats du calcul des exposants de Lyapunov avec ceux fournis par d'autres outils d'analyse non-linéaire.

• **Calcul des exposants de lyapunov**

- **Cas d'une application discrète unidimensionnelle**

Considérons un système dynamique discret par une application suivant :

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

tel que : f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$, et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel qu' après k itérations on a : [18]

$$\varepsilon \exp(k\lambda) \cong |f^k(x_0 + \varepsilon) - f^k(x_0)|$$

d'ou

$$k\lambda \cong \ln \frac{|f^k(x_0 + \varepsilon) - f^k(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda &\cong \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k(x_0)}{df^{k-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{k-1}(x_0)}{df^{k-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{d(x_0)} \right| \\ &\cong \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df(x_{k-1})}{d(x_{k-1})} \cdot \frac{df(x_{k-2})}{d(x_{k-2})} \cdots \frac{df(x_0)}{d(x_0)} \right| \end{aligned}$$

$$\cong \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{d(x_i)} \right|$$

finalement pour $k \rightarrow \infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)|$$

avec $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{d(x_i)}$

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence de deux trajectoires distinctes, à partir de deux condition initiales très proches.

- ◇ Si $\lambda > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- ◇ Si $\lambda < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x^*$ tel que x^* est le point d'équilibre, il faut que : $\lambda = \ln |f'(x^*)|$

-Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n :

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Un système n dimensionnelle possède n exposants de Lyapunov $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$; chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système.

Pour le calcul de l'exposant de Lyapunov, nous partons d'un point initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Pour caractériser le comportement infinitésimal autour du point x_k par la première matrice dérivée $Df(x_i)$: [20]

$$Df(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_i^1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_i^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_i^1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_i^n} \end{pmatrix}$$

Notons : $Df(x_{k-1}) \dots Df(x_0) = \prod_{i=1}^k J(x_i)$, avec : $J_0 = Df(x_0)$ par $J^k(x_i)$, est la matrice jacobienne de f^k au point x_0 ; $\sigma_1(f^k(x)) \dots \sigma_n(f^k(x))$ les valeurs propres de $J^k(x_i)$. on définit alors Les n exposant de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln |\sigma_i(f^k(x_0))|, i = 1, 2, \dots, n$$

-Pour le point d'équilibre x^* la formule précédant devient :

$$\lambda_i = \ln |\sigma_i(x^*)|, i = 1, 2, \dots, n$$

Types d'attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Les différents types d'attracteur d'un système de dimension n en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représenté dans le tableau suivant : [2]

Attracteur	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
cercle	$\lambda_1 = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
K-Tore	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0; \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique	$\lambda_1 > 0; \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

TABLE 2.1 – Attracteurs et exposants de Lyapunov

2.2.3 Dimension fractale

Il existe plusieurs formule pour le calcul de la dimension fractale (dimension de capacité, dimension d'information, dimension de corrélation,...) pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

•Dimension de Hausdorff

La définition d'une dimension non entière la plus connue et la plus utilisée théoriquement est la dimension de Hausdorff.

Soit M un ensemble de R^n recouvert par des ensembles A_i de petits diamètres c'est-à-dire : [20]

$$M \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i, 0 < |A_i| \leq \varepsilon$$

On définit la mesure de Hausdorff d-dimensionnel par :

$$\mu_d(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |A_i^d|, |A_i| \leq \varepsilon \right\}$$

La dimension de Hausdorff de l'ensemble M est le réel d_H tel que :

$$\mu_d(M) = \begin{cases} 0, & \text{si } d > d_H \\ +\infty, & \text{si } d < d_H \end{cases}$$

Définition 2.2.1. On définit la dimension de Hausdorff par :

$$\begin{aligned} d_H(M) &= \sup\{d, \mu_d(M) = +\infty\} \\ &= \inf\{d, \mu_d(M) = 0\} \end{aligned}$$

La dimension de Hausdorff existe toujours. C'est une propriété qui la différencie des autres dimensions fractales. Le calcul numérique de d_H est délicat, parce qu'il est difficile de trouver le recouvrement minimal pour une méthode de calcul [10]

• **Dimension de Lyapunov**

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$, les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

Alors la dimension de Lyapunov D_L définie par **Karlan et Yorke** est donnée [10] par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

• **Dimension de Kaplan-Yorke**

Soit j_0 un entier positif tel que : [18]

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0$$

On définit alors la dimension de Kaplan-Yorke par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

2.2.4 Attracteur chaotique

L'attracteur étrange (chaotique) est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. D'une manière spécifique et unique, il est appelé étrange en raison de l'étrangeté de ce comportement.

L'attracteur étrange se caractérise par :

- Sensibilité aux conditions initiales (ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est aperiodique ; deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
- La dimension de l'attracteur est fractale et non entière (ce qui justifie l'adjectif étrange).
- L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

Définition 2.2.2. *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans U vérifiant les propriétés suivantes :*

- **Attraction** : *U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U ; est entièrement dans U : toute orbite de ce type doit et reste aussi proche de A que l'on veut.*
- **Sensibilité** : *les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.*
- **Fractal** : *A est un objet fractal.*
- **Mélange** : *pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point. [10]*

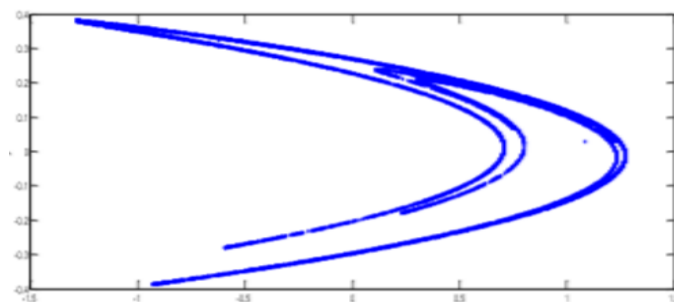


FIGURE 2.2 – Attracteur de Hénon

2.3 Scénarios chaotiques

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

2.3.1 Doublements de période

Ce scénario a été observé dans les années 60 par **R.May** en dynamique des populations sur l'application logistique. Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourche. A mesure que la contrainte augmente, la période de l'oscillateur est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, . . . , etc. Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système est chaotique. [13]

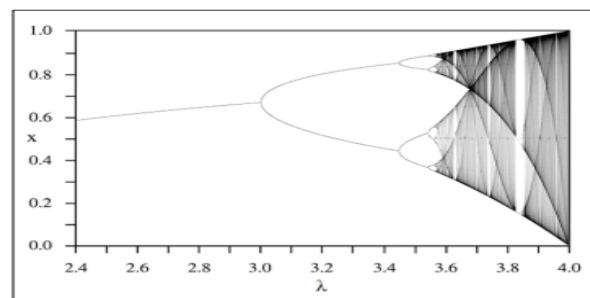


FIGURE 2.3 – Scénarios de transition par doublement de période

2.3.2 L'intermittence vers le chaos

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées chaotiques. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement le chaos apparaît. [2]

2.3.3 La quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens** 1971. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau paramètre et il apparaît une troisième fréquence, Dans lequel

un comportement devient chaotique par l'apparition successive de trois fréquences incommensurables. [13]

• Exemples des systèmes chaotiques

Il existe plusieurs systèmes chaotiques qui sont utilisés pour générer les signaux chaotiques comme les systèmes chaotiques discret, nous pouvons citer les systèmes de Hénon, Hénon-Heiles, Lozi, la fonction logistique, . . . ,etc [8]

a. Système de Hénon

Ce système est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien **Michel Hénon**. L'intérêt de ce modèle est l'étude de certaines propriétés d'une section de Poincaré de l'attracteur de Lorenz par l'introduction d'itérations dans le plan.

il est présenté par des équations suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} \quad (2.1)$$

tel que $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ Représente le vecteur d'état.

Pour les valeurs $a=1.4$ et $b=0.3$ le système présente un comportement chaotique

Les conditions initiales prises sont $x_0 = 0.1, y_0 = 0$.

Pour d'autres valeurs de a et b , il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique [8]

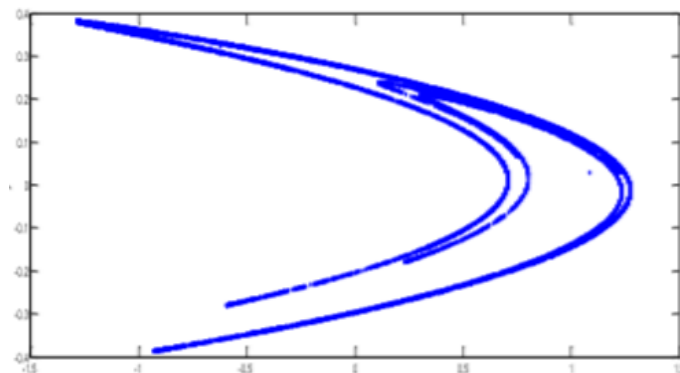


FIGURE 2.4 – Attracteur de Hénon

b. Système de Hénon-Heiles ou Hénon modifié

Il est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - y_k^2 - bz_k \\ y_{k+1} = x_k \\ z_{k+1} = y_k \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour avoir un comportement chaotique, les paramètres du système sont donnés comme suit : $a = 1.76$ et $b = 0.1$ et les conditions initiales du système :

$x_0 = 0.1, y_0 = 0.1, z_0 = 0.1$ [8]

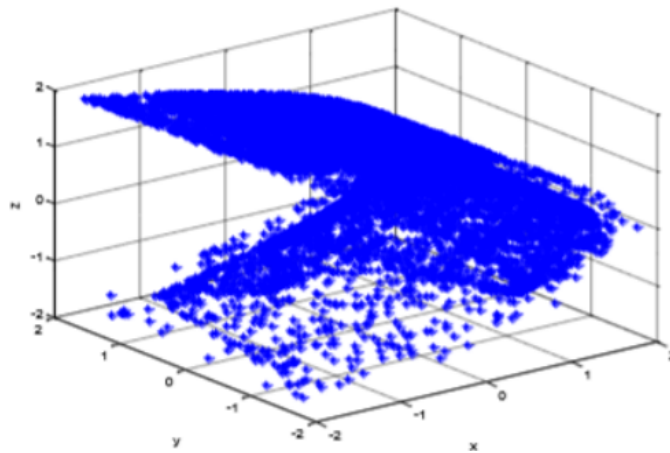


FIGURE 2.5 – Attracteur de Hénon-Heiles

Chapitre 3

Application de Système dynamique discret

Les systèmes chaotiques discrets sont plus importants que les systèmes continus, dans lesquels de nombreux modèles mathématiques sont définis pour les phénomènes biologiques, les réactions chimiques, les processus physiques, et les systèmes économiques... Dans ce chapitre, nous présenterons et étudierons deux systèmes chaotiques discrets de dimension un (l'application logistique) et de dimension deux (L'application de Lozi).

3.1 système dynamique discret de dimension 1 (l'application logistique)

L'équation logistique a été proposée par le biologiste May en 1979 pour représenter de manière très simplifiée l'évolution annuelle d'une population d'insectes .

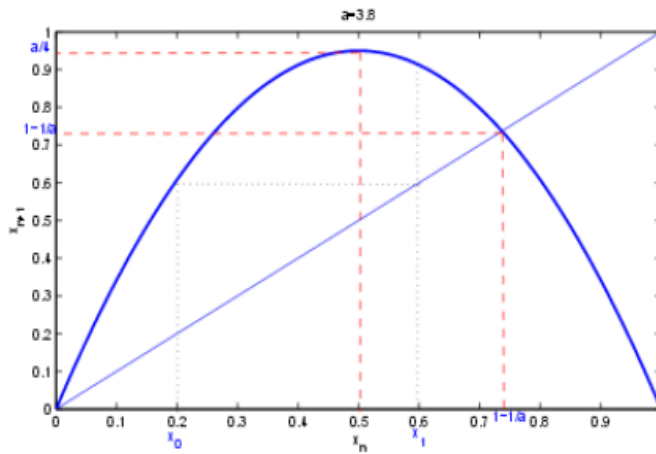
L'application logistique ou quadratique est une suite simple, mais dont la récurrence est non linéaire. est une application définie de $[0,1]$ dans lui-même, sa relation de récurrence est donnée par : [27]

$$x_{k+1} = f(x_k) = ax_k(1 - x_k).$$

tel que : $a \in [0, 4]$; $x_k \in [0, 1]$ où $k = 0, 1, 2, \dots$ qui dénote le temps discret .

et x_k représente le pourcentage de population par rapport à une certaine valeur maximale de référence .

Le graphe de f pour $a=3.8$ est donné comme suivant :


 FIGURE 3.1 – Le graphe de fonction logistique pour $a = 3.8$

Notre étude se limite à trouver des points fixes et des points périodiques et à déterminer la stabilité et tracer un diagramme de bifurcation .

3.1.1 Les points fixes

Pour trouver des points fixes (les points de période un), il faut résoudre l'équation suivante :

$$f(x) = ax(1 - x) = x \implies (a - 1)x - ax^2 = 0 \implies x((a - 1) - ax) = 0$$

$$\implies \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \frac{a-1}{a} ; a \neq 0 \end{cases}$$

3.1.2 stabilité des points fixes

pour étudier la stabilité de point fixe, on utilise les données de la proposition (1.3.1) et le théorème (1.3.2) :

la dérivé de la fonction $f(x)$ est :

$$f'(x) = a(1 - 2x) \quad 0 < a \leq 4$$

- pour $x^* = 0$ on a :

• $|f'(0)| = |a|$ donc :

- si $0 < a < 1$ alors $x_1^* = 0$ est attractif (stable) .
- si $a > 1$ alors $x_1^* = 0$ est répulsif (instable).
- si $a = 1$ on a :

$$f''(x) = -2a \implies f''(0) = -2a$$

et comme $a=1$ donc $f''(0) = -2 < 0$ en déduit que $x_1^* = 0$ est un point fixe semi-stable à droit .

- pour $x^* = \frac{a-1}{a}$ on a :

• $|f'(\frac{a-1}{a})| = |2 - a|$ donc :

x_2^* est attractif pour :

$$|f'(x_2^*)| < 1$$

$$\implies |2 - a| < 1$$

$$\implies -1 < 2 - a < 1$$

$$\implies 1 < a < 3$$

◦ si $1 < a < 3$ alors $x_2^* = \frac{a-1}{a}$ est attractif .

◦ si $a < 1$ ou $a > 3$ alors $x_2^* = \frac{a-1}{a}$ est répulsif .

◦ si $a=1$ ou $a=3$; $f''(\frac{a-1}{a}) < 0$ donc $x_2^* = \frac{a-1}{a}$ est un point fixe semi-stable à droit .

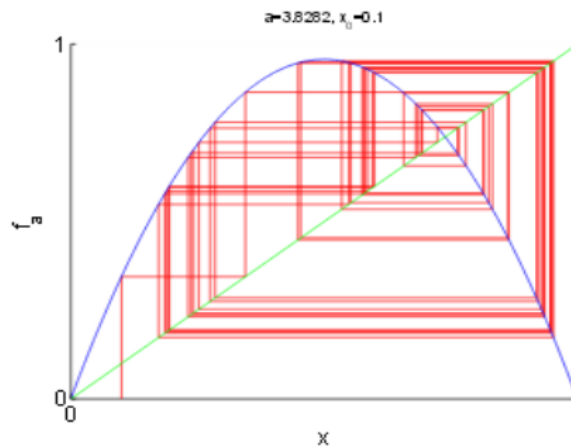


FIGURE 3.2 – Représentation graphique des itérations de la fonction logistique pour $a = 3.8282$ et $x_0 = 0.1$

3.1.3 Les points périodique

Les points 2 - périodiques de l'équation logistique sont les solutions du système :

$$\begin{cases} f^2(x) = x, \\ f(x) \neq x. \end{cases}$$

$$f^2(x) = x \implies f(f(x)) = x$$

$$\implies a(ax(1-x))(1-ax(1-x)) = x$$

$$\implies a^2x(1-x)(1-ax(1-x)) = x$$

Les points que nous recherchons sont donc racines d'un polynôme de degré 4 :

$$a^3x^4 - 2a^3x^3 + a^2(1+a)x^2 - (a^2-1)x = 0$$

◦ Nous connaissons déjà deux de ses racines : ce sont les deux points fixe.

on a :

$$a^3x^4 - 2a^3x^3 + a^2(1+a)x^2 - (a^2-1)x = 0 \iff (ax^2 - (a-1)x)(a^2x^2 - (a^2+a)x + a + 1) = 0$$

les solutions de l'équation :

$$ax^2 - (a-1)x = 0$$

sont les deux point fixe $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{a-1}{a}$, que nous annulons .

Donc les point périodique que nous cherchons sont solutions réelles de l'équation :

$$a^2x^2 - (a^2+a)x + a + 1 = 0$$

$$\Delta = a^2(a^2 - 2a - 3)$$

- $\Delta > 0$ pour $a > 3$ alors il y a deux points périodique distincts.
- $\Delta < 0$ pour $a < 3$ alors il n'y a pas des point périodique .
- $\Delta = 0$ pour $a = 3$ alors il y a un seul point périodique qui coïncide avec l'un des point fixes.

- Nous savons que quand $3 < a < 4$ ce système a deux solution :

$$x_3 = \frac{a+1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \text{ et } x_4 = \frac{a+1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}$$

Qui sont les points Périodique de période 2.

3.1.4 stabilité des points Périodique

Pour étudier la stabilité des pionts périodique précédent de l'équation logistique on Appliquons le théorème (1.3.4) .

La dérivé de la fonction $f(x)$ est : $f'(x) = a - 2ax = a(1 - 2x)$

$$f'(x_3^*) = a - 2a\left(\frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}\right) = -(1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3})$$

$$f'(x_4^*) = a - 2a\left(\frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}\right) = -(1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3})$$

$$\begin{aligned} S = f'(x_3^*) \cdot f'(x_4^*) &= (1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3})(1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}) \\ &= -a^2 + 2a + 4 \end{aligned}$$

l'orbite est stable si :

$$\begin{aligned} |f'(x_3^*) \cdot f'(x_4^*)| &< 1 \\ \implies | -a^2 + 2a + 4 | &< 1 \\ \implies -1 < -a^2 + 2a + 4 &< 1 \end{aligned}$$

- Si $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ le cycle est stable et attractif .
- Si $a > 1 + \sqrt{6}$ le cycle n'est plus stable est un cycle d'ordre 4 apparait puis le système devient chaotique . [27]

3.1.5 diagramme de bifurcation

un diagramme de bifurcation indique les valeurs visités ou approchés asymptotiquement (points fixes, orbites périodiques ou attracteurs chaotiques) d'un système en fonction d'un paramètre de bifurcation .

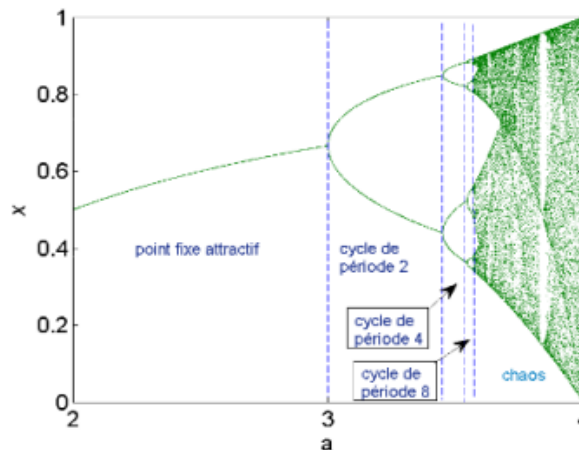


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique sur l'intervalle $2 \leq a \leq 4$.

- Pour $2 < a < b_1$ la suite à un comportement simple étant donné la présence d'un seul point fixe x_2^* , et les chemins itératifs sont attirés vers ce point .
- Pour $b_1 < a < b_2$ le point fixe x_2^* perde sa stabilité et est formé un cycle stable de

- période 2 .
- Pour $b_2 < a < b_3$ le cycle de période 2 devient instable et un cycle stable de période 4 est créée .
- Pour $b_3 < a < b_4$ le cycle de période 4 perde sa stabilité et est formé un cycle stable de période 8 .
- le long de l'intervalle $b_4 < a < 4$ l'application est chaotique .
- o tel que : b_1, b_2, b_3, b_4 sont les points de bifurcation .

3.1.6 Exposant de Lyapunov

pour déterminer si la fonction logistique chaotique ou non, nous utilisons l'exposant de Lyapunov .

Nous choisisons quelque valeur de a et calculés les exposants de Lyapunov de la fonction logistique avec une valeur initial $x_0 = 0.1$

par exemple, l'exposant de Lyapunov au point fixe est donnée par : $\lambda = \ln |f'(x^*)|$

on a : $f'(x) = a - 2ax$

donc : $|f'(\frac{a-1}{a})| = |a - 2a(\frac{a-1}{a})| = -a + 2$

pour $a = 2.1$, $\lambda = \ln |f'(\frac{a-1}{a})| = \ln 0.1 \cong -2.3024$

pour $a = 4$, $\lambda = \ln |f'(\frac{a-1}{a})| = \ln 2 \cong 0.69314$.

donc l'attracteur dans ce cas est chaotique .

voir le tableau suivant pour autre cas : [18]

a	0.5	1	2.1	3	3.5	3.8282	4
Exposants de Lyapunov	-0.6932	-0.0003	-2.3024	-0.0002	-0.8719	0.26315	0.69316

TABLE 3.1 – les exposants de Liapunov de la fonction logistique pour des valeurs de a

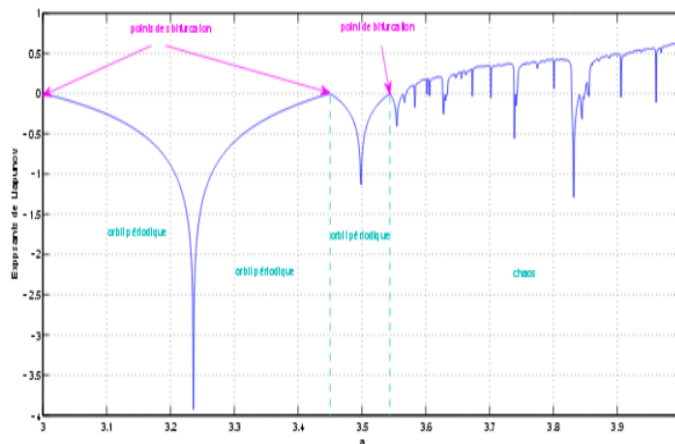


FIGURE 3.4 – Variation d'exposants de Liapunov de la fonction Logistique.

3.1.7 L'attracteur

L'attracteur chaotique de l'application logistique pour la valeur numérique $a=4$ est comme suivant :

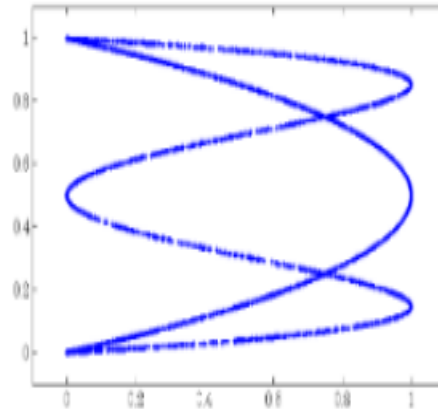


FIGURE 3.5 – Attracteur chaotique de la fonction logistique pour $a = 4$

3.2 système dynamique discret de dimension 2 (Le Système de Lozi)

En 1978, René Lozi a introduit un système bidimensionnel ayant des équations et des attracteurs semblent pareils à ceux du système célèbre précité de Hénon .

Dans le but de simplifier l'application de Hénon, René Lozi propose l'application $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui est présentée par les équations suivantes : [18,27]

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - a|x_k| \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} \quad (3.1)$$

avec a et b étant deux paramètres réels, et k le nombre d'itérations.

- La seule différence entre ces deux systèmes est que le terme non-linéaire x^2 du système de Hénon est remplacé par $|x|$ dans le système de Lozi qui fait de ce système une application non différentielle .
- Cette modification de l'application de Hénon est linéaire pour $x > 0$, $x < 0$.
- Si $a = 0$, l'application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours $a \neq 0$.

3.2.1 Les points fixes

Pour déterminer les points fixes on pose :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \\ y_{k+1} = y_k \end{cases}$$

si $x > 0$, on obtient :

$$\begin{cases} y + 1 - ax = x & (*) \\ bx = y & (**) \end{cases}$$

on Remplace l'équation (**) dans l'équation (*) :

$$bx + 1 - ax = x \implies (1 + a - b)x = 1 \implies x = \frac{1}{(1 + a - b)} \text{ si } b < 1 + a.$$

puis Remplacer x dans (**) on trouve :

$$y = \frac{b}{(1 + a - b)} \text{ si } b < 1 + a.$$

si $x < 0$, on obtient :

$$\begin{cases} y + 1 - a(-x) = x & (*) \\ bx = y & (**) \end{cases}$$

On remplace l'équation (**) dans l'équation (*) :

$$bx + 1 + ax = x \implies (1 - a - b)x = 1 \implies x = \frac{1}{(1 - a - b)} \text{ si } b > 1 - a.$$

puis Remplacer x dans (**) on trouve :

$$y = \frac{b}{(1 - a - b)} \text{ si } b > 1 - a.$$

◦ Nous concluons donc que :

Pour $x > 0$, il y a une seul point d'équilibre $P_1(x, y) = \left(\frac{1}{1 + a - b}, \frac{b}{1 + a - b} \right)$ si $b < 1 + a$

Pour $x < 0$, il y a une autre point d'équilibre $P_2(x, y) = \left(\frac{1}{1 - a - b}, \frac{b}{1 - a - b} \right)$ si $b > 1 - a$

3.2.2 La stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité local des ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice Jacobienne : [18]

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

et $\det(J - \sigma I_2)$ est donnée par :

$$\det(J - \sigma I_2) = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sign}(x) - \sigma & 1 \\ b & -\sigma \end{vmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\sigma) = (-\sigma)(-a \operatorname{sign}(x) - \sigma) - b$$

- **La stabilité au point** $P_1(x, y) = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b} \right)$

La matrice jacobienne au point P_1 (pour $x > 0$) est :

$$J_p(x, y) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donc

$$\det(J_p - \sigma I_2) = \begin{vmatrix} -a - \sigma & 1 \\ b & -\sigma \end{vmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donnée par :

$$\sigma^2 + a\sigma - b$$

$$\Delta = a^2 + 4b$$

Si $b > -\frac{a^2}{4}$ alors $\Delta > 0$, donc la matrice (3.2) a deux valeurs propres réelles :

$$\sigma_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

Si $b < -\frac{a^2}{4}$ alors $\Delta < 0$, donc la matrice (3.2) a deux valeurs propres complexes :

$$\sigma_1 = \frac{-a}{2} + i \frac{\sqrt{-a^2 - 4b}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{-a}{2} - i \frac{\sqrt{-a^2 - 4b}}{2}$$

La stabilité du point fixe P_1 est résumée dans la proposition suivant : [18]

Proposition 3.2.1. .

1) cas $a > 0$:

- pour $b + \frac{a^2}{2} - 1 > 0$ on a :

- Si $b > 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1| < 1$ et $|\sigma_2| > 1$, alors le point fixe p_1 est un **point selle** (ou **col**).

- Si $b < 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1|, |\sigma_2| > 1$, alors le point fixe p_1 est un **noeud instable**.

- pour $b + \frac{a^2}{2} - 1 < 0$ on a :

- Si $b < 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1| < 1$ et $|\sigma_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud stable**.

- Si $b > 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1|, |\sigma_2| < 1$, alors le point fixe P_1 est un **col**.

2) cas $a < 0$ on a :

- Si $b + \frac{a^2}{2} - 1 > 0$ et $b < 1 - a$, $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1|, |\sigma_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud instable**.

- Si $b + \frac{a^2}{2} - 1 < 0$ et $b < 1 - a$, $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1|, |\sigma_2| < 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud stable**.

- Les valeurs propres complexe sont de module inférieur à 1 si $b > -1$, alors le point fixe

P_1 est un *foyer stable*.

- Les valeurs propres complexe sont de module supérieur à 1 si $b < -1$, alors le point fixe P_1 est un *foyer instable*.

La figure suivante illustre la stabilisation de point P_1 :

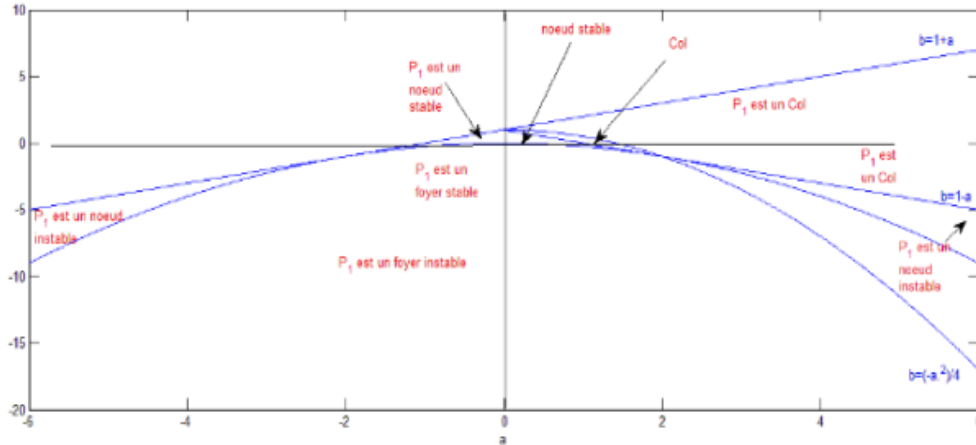


FIGURE 3.6 – Stabilisation de point P_1

La stabilité au point $P_2(x, y) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b} \right)$

La matrice Jacobienne au point P_2 est :

$$J_N(x, y) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

donc

$$\det(J_N - \sigma I_2) = \begin{vmatrix} a - \sigma & 1 \\ b & -\sigma \end{vmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est le suivant :

$$\sigma^2 - a\sigma - b$$

$$\Delta = a^2 + 4b$$

Dans la région où P_2 existe ou $b > \frac{-a^2}{4}$ donc $\Delta > 0$, alors la matrice (3.3) a deux valeurs propres réelles :

$$\sigma_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

La stabilité du point fixe P_2 est résumée dans la proposition suivant :

Proposition 3.2.2. . [18]

1) cas $a > 0$ et $b > 1 - a$ on a :

- Si $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1|, |\sigma_2| > 1$, alors le point fixe p_2 est un **noeud instable**.
- Si $b > 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1| > 1, |\sigma_2| < 1$, alors le point fixe p_2 est un **point selle ou col**.

2) cas $a < 0$ et $b > 1 - a$ on a :

- Si $b > 1 + a$ les valeurs propres $|\sigma_1| < 1, |\sigma_2| > 1$, alors le point fixe p_2 est un **point selle**.
- La figure suivante illustre la stabilisation de point P_2 :

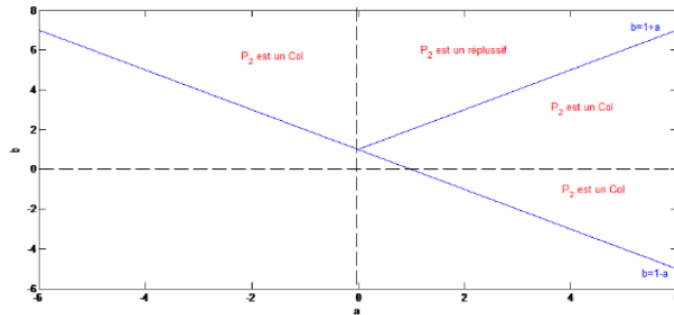


FIGURE 3.7 – Stabilisation de point P_2

3.2.3 Exposants de Lyapunov

-Pour le point d'équilibre x^* les exposants de lyapunov est donnée comme suivant :

$$\lambda_i = \ln |\sigma_i(x^*)|, i = 1, 2, \dots, n$$

comme les valeurs propre de la matrice jacobienne (au point d'équilibre) :

$$\sigma_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

donc Pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov : [18] $\lambda_1 = 0.69314$ qui est positif, $\lambda_2 = -1.204$. On vérifie bien cependant que la somme de ces exposants est strictement négative, donc l'attracteur est chaotique .

La figure suivant représente la variation des exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi.

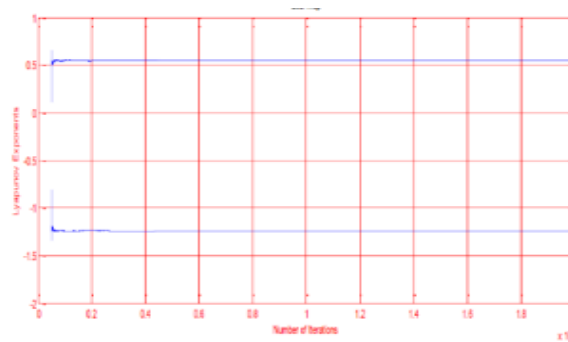


FIGURE 3.8 – la variation des exposants de Lyapunov pour l'application de Lozi

3.2.4 Diagrammes de bifurcation

on sait que :

- Les exposants de Lyapunov d'une orbite périodique attractive sont négatifs.
- si au moins un des l'exposants de Lyapunov d'un point périodique est égale a zéro alors il est bifurquer.
- si au moins l'un des exposants de Lyapunov est positif, le système devient chaotique.

Pour $b = 0.1$ et $0.8 < a < 1.8$ nous pouvons voir les différentes bifurcations du système de Lozi comme le montre la figure suivant :

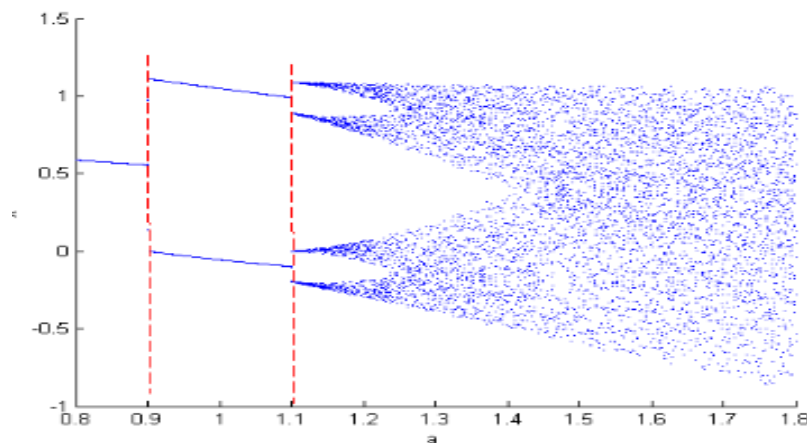


FIGURE 3.9 – Diagramme de bifurcation de la carte de Lozi pour $b = 0.1$.

- Si $0.8 < a < 0.9$ les iterations convergent vers un point fixe.
- **La première bifurcation** est au point $a = 0.9$ d'un point fixe à un cycle de période 2 .
- Si $0.9 < a < 1.1$ les iteration convergent vers un cycle stable de période 2.
- **La deuxième bifurcation** se produit au point $a = 1.1$ d'un cycle stable de période 2 vers un cycle stable de période 4 .
- Si $1.1 < a < 1.8$ on ne distingue plus les cycles : le système est chaotique.

3.2.5 Attracteur de Lozi

Dimension de l'attracteur de Lozi

Pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov : $\lambda_1 = 0.69314$, $\lambda_2 = -1.204$. alors la dimension de Lyapunov est égale à :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

Alors :

$$D_L = 1 + \frac{0.69314}{|-1.204|} = 1.5757$$

○ Pour déterminer la structure de l'attracteur de Lozi, on peut faire un agrandissement d'une région de l'attracteur et on observe que la structure se répète. Pour les paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.5$ la suite de points itérés par l'application de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par : [18]

● pour $a = 1.55$ montre un attracteur la structure en zigzag dans l'espace des phases à la suite de la destruction de l'attracteur régulier.

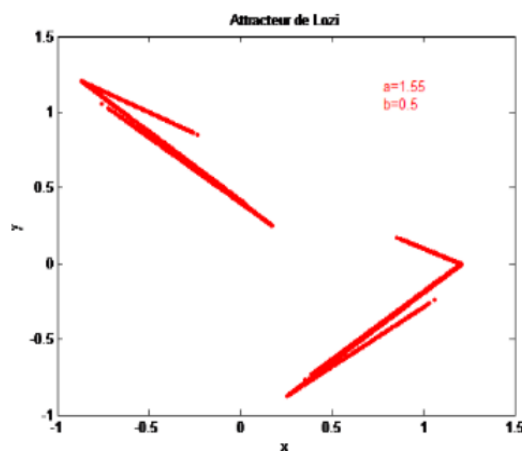


FIGURE 3.10 – Attracteur de Lozi pour $a = 1.55$

- pour $a = 1.7$ l'attracteur étrange est apparente. Cette structure en forme de V.

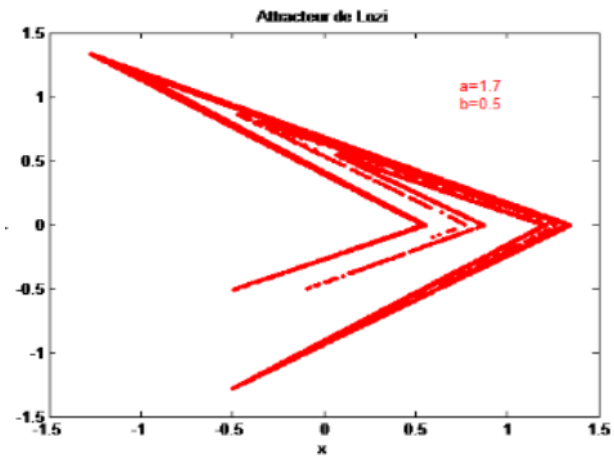


FIGURE 3.11 – Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$

Conclusion Générale

Le but de ce mémoire est d'étudier la bifurcation et chaos des systèmes dynamiques discret. En particulier, la fonction l'ogistique et le système de Lozi, Nous avons présenté tous les points essentiels concernant ces systèmes, tel que les définitions et leur caractéristiques et au final nous avons conclu que malgré la complexité de ces systèmes, leur étude et leur réalisation n'est pas impossible.

Nous avons divisé notre travail en trois chapitre :

Dans le **premier chapitre** nous avons présenté des définitions et notions générales de système dynamique comme : les systèmes dynamiques à temps continu et à temps discret, les système autonome et non autonome, le flot, les trajectoire... Puis nous avons approfondi les systèmes dynamiques et étudié les systèmes dynamiques discrets linéaires et non linéaires, les points fixes, points périodiques et leur stabilité, et la bifurcation .

Dans le **deuxième chapitre** nous avons donné quelque définitions et les caractéristiques les plus importantes d'un système chaotique, et aussi quelque exemple sur elle.

dans le **dernière chapitre** du travail, nous avons étudier le chaos dans un système dynamique discret, de premier ordre et la deuxième ordre, autonome, à variables réelles et est la fonction l'ogistique et le système de Lozi, nous avons étudier la stabilité de leur points fixes, les bifurcations, et finalement discute la route vers le chaos de ces système, avec quelque attracteurs chaotiques.

Bibliographie

- [1] J.L.Pac, Systèmes dynamiques, 2e édition, 5 rue Laromiguière, 75005 Paris 2012–2016.
- [2] I. Talbi, Système dynamique non linéaire et phénomène de chaos. *Mémoire de magistère*. Univ. Mentouri. Constantine 1, (2010).
- [3] A.Désilles, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret, (2003).
- [4] H. Dang-Vu et C. Delcarte. Bifurcations et chaos : Introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. *Ellipses*. (2000).
- [5] I. Ameer. Contrôle, chaotification et Hyperchaotification des systèmes dynamiques. *Mémoire de magistère*. Univ. Mentouri. Constantine 1, (2007).
- [6] H.Laib, A.Boumelit, Sur la synchronisation de deux systèmes chaotiques, *Mémoire de master*, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, 2016/2017.
- [7] G.C.Layek. Au Introduction to Dynamical systems and chaos. Springer. University of Burdwan, West Bengal India, (2015).
- [8] E. Goncalvés Da Silva, Introduction aux système dynamiques et Chaos. École d'ingénieur, Institut Polytechnique de Grenoble Cours de l'institut National Polytechnique de Grenoble, (2004).
- [9] A. Boukabou. Méthodes de controle des systemes chaotique d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : contribuion a l'élaboration de nouvelle approches. Thèse de Doctorat. *Univ. Constantine*, (2006).
- [10] T. Hamaizia, Système dynamique et chaos " application a l'optimisation a l'aide l'algorithme chaotique ", *Thèse de Doctorat*. Univ. Mentouri. Constantine 1, (2013).
- [11] HONGRE, L. SAILHAC, P. ALEXANDRESCU, M. et DUBOIS, J. "Nonlinear and multifractals approaches of the geomagnetic field," *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 1999, 110, 157–190.

- [12] ROSENSTEIN, M. COLLINS, J. et DE LUCA, C. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets. *Physica* 1993, D 65, 117–134.
- [13] A. Ouannas. Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets. *Thèse de Doctorat* Univ. Mentouri. Constantine 1, (2015).
- [14] G.Zaibi, Sécurisation par dynamiques des réseaux locaux sans fil au niveau de la couche MAC, *thèse de Doctorat de l'université de Toulouse*, (2012).
- [15] T. Menacer. Synchronisation des systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. *Thèse de Doctorat*, Univ. Mentouri. Constantine 1, (2014).
- [16] S.Masri, Systèmes dynamiques discrets, *Mémoire de master*, Université Mohamed Khider, Biskra, (2019).
- [17] H.Bouilfane, Étude des systèmes dynamiques à temps discrets, *Mémoire de master*, Université Larbi Ben M'hidi Oum El-Bouaghi, (2019).
- [18] R. Djenhi, A. Makouf, Introduction à la théorie des systèmes dynamiques discrets, *Mémoire de master*, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, 2016/2017.
- [19] T-Y. Li and J.A. Yorke, Period 3 implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), 985–992.
- [20] N.H. Houama, Contrôle du chaos d'un système dynamique discret, *Mémoire de master*, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, (2019).
- [21] F.R. Marotto, Snap-back repellers imply chaos in R^n , *J. Math. Analysis and Appl.* **63**, (1978), 199–223.
- [22] H. Sedaghat, Périodicité and convergence for $x_{n+1} = |x_n - x_{n-1}|$ *J. Math. Analysis and Appl.* **291**, (2004), 31–39.
- [23] I. Louza, R.Zerrouki, Étude de la dynamique d'un modèle financier continu, *Mémoire de master*, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, (2015).
- [24] M.Tidjani, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, *Magistère en mathématiques*, université Mentouri Constantine, (2014).
- [25] A. Djamaa, I. Bounehal, Étude de la dynamique d'un modèle financier discret, *Mémoire de master*, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, (2015).
- [26] A. Arama, F. Loucif, Etude de la dynamique d'un modèle écologique, *Mémoire de master*, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, (2015).
- [27] CH. Kharkhache, S. Chaibi, Le Chaos dans les systèmes dynamiques, *Mémoire de master*, Université Larbi Tébessi - Tébessa, (2019).
- [28] I. Louza, R. Zerrouki, Etude de la dynamique d'un modèle financier continu, *Mémoire de master*, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, (2016).

