الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées

Equations différentielles stochastiques

Préparé par : Saida Bireche.
Miyada Chebta.

Soutenue devant le jury

Amiour Moufida	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Président
Bouzekria Fahima	MAA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Bourourou Siham	MCB	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire :2021/2022

Remerciements

Nos remerciements vont tout premièrement à *Allah* le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donné pour terminer ce travail.

Nous remercions notre promoteur **Bouzekria Fahima** pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d 'encouragements.

Nous aimerons exprimer nos gratitudes aux êtres les plus chers aux mondes Nos Parents pour tous les effort et sacrifices qu'il ont entrepris afin de nous voir réussir et pour l'éducation qu'ils nous ont prodigué

Nous exprimons nos remerciements aux membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.

Merci à Tous

DEDICACE

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A mes chères parents,

ma mère **«Massika »** et mon père **«Massoud »**

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragement

A mes chers frere

A mes oncle, mes tantes

A mon fiancé **« Fares »**

A tous mes amis

A ma belle binôme **« Miyada »**

A tous les amis de promotion de master mathematique 2021/2022

s ans oublier tout les professeurs et les enseignements .

Saida

DEDICACE

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail :

A mes chères parents,

ma mère **«Fatma »** et mon père **«Djemal»**

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragement

A mes chères fréres et ma sœur et son mari et le poussin de la famille **« Mahdi »**

Je remercie particulièrement mon cher frère **«Mahmoud»**

A mes oncles, mes tantes

A tous mes amis

A ma belle binôme **« Saida »**

A tous les amis de promotion de master 2 mathematique 2021/2022

S on oublier tout les professeurs et les enseignements

Miyada

Table des matières

Introduction

Les mathématiques nanciéres sont devenues de nos jours un outil incontournable dans un monde où largent prend une place prépondérante dans les affaires. Tout commence en 1827 avec le botaniste Robert Brown qui décrit le mouvement continu inhabituel et chaotique de très petites particules immergées dans un liquide. Plus tard en 1900, dans sa thèse intitulée Théorie de la spéculation, Louis Bachelier introduit lutilisation en nance du mouvement brownien. Plusieurs progrès suivront dont les plus notables sont ceux de Norbert Wiener qui donne un formalisme mathématique au mouvement brownien et ceux de Kiyosi Itô dans la théorie des processus stochastiques.
Tous ces résultats seront utilisés par Black et Scholes qui publieront en 1973 une analyse sur les options européennes The Pricing of Options and Corporate liabilites.
C'est la naissance du modèle de Black Scholes qui favorisera lessor de lingénierie nancière.
Les équations différentielles stochastiques sont de plus en plus utilisées dans différents domaines tels que les nances, an par exemple de modéliser lévolution de cours de bourses (exemple du mouvement brownien géométrique dans le modéle de Black-Scholes), la dynamique des populations, an de modéliser la localisation ou la taille de la population d'une espéce donnée, la physique (mécaniquedes uides, géophysique,. . .), Notre intérêt se portera plus précisément sur la simulation nu-

mérique de processus aléa- toires et celle du mouvement Brownien géométrique dans le modéle de Black-Scholes à temps continu, devenu la référence en termes de modèle dévaluation des produits dérivés. Il a eu un impact majeur sur les méthodes utilisées. Ce mémoire sera organisé comme suit :
Le premier chapitre Commencera avec la définition d'un espace probabilisé $(\omega, \mathcal{F}, P)$, des probabilités conditionnelles, des variables aléatoires et de leurs lois, de la notion d'indépendance.
On étudie des phénomènes qui dépendent du temps, on s'intéressera donc aux suites de variables aléatoires et on montrera les deux théorèmes limites fondamentaux :
- la loi forte des grands nombres.
- le théorème limite central.

Dans le deuxième chapitre sera consacré aux rappels de base concernant les processus stochastiques. On donnera les principales propriétés du mouvement brownien, Après avoir présenter quelques résultats importants relatifs à l'intégrale stochastique, on verra comment il peut être mise en ûvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques. Dans le dernier chapitre, on présentera les équations différentielles stochastiques. On commence par en donner une motivations en tant que généralisation des équations différentielles ordinaires dans un contexte d'incertitude présentée par un bruit aléatoire. On citera ensuite le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS. On étudiera ensuite les propriétés de la solution d'une EDS. On introduit les solutions d'EDS appelées diffusion ainsi que des outils importants pour leur étude. Ensuite on définira c'est quoi une solution faible d'une EDS. On terminera ce chapitre par une section qui étudiera les connexions entre les EDS et les EDP et un plus un exemple

Chapitre 1

Espaces probabilisés

Pour définir un espace probabilisé, on a besoin d'un espace Ω appelé univers qui représente lors de la modélisation d'une expérience, l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

1.0.1 Tribus

On définit ensuite la tribu des événements $\mathcal{F}$ que représente "ce que l'observateur peut voir" les éléments de $\mathcal{F}$ sont donc des parties de Ω si l'observateur peut voir si A est réalisé, il peut voir si A^c l'est. De même si A et B appartiennent à $\mathcal{F}$, $A \cup B \in \mathcal{F}$ (A ou B réalisés), $(A \cap B)$ (A et B réalisés). Plus généralement, si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$.

Définition 1.0.1.

Un partie $\mathcal{F}$ de $P(\Omega)$ est une tribu ou σ - algébre si :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *Pour tout $A \in \mathcal{F}, A^c \in \mathcal{F}$.*
3. *Pour tout suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$.*

Propriétés 1.0.1.

Une intersection quelconque de tribus est une tribu. On peut donc parler de tribu *engendrée par partie $\mathcal{C}$ de $P(\Omega)$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c'est aussi l'intersection de toutes les contenant $\mathcal{C}$. On la note $\sigma(\mathcal{C})$.*

Tribu produit

Soit $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espace probabilisés. On définit sur l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ une tribu $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{F}_n$, appelée tribu produit c'est par définition la tribu engendrée par lés pavés mesurables $A_1 \times ... \times A_n$ où $A_i \in \mathcal{F}_i$.

1.0.2 Probabilité

Pour quantifier le hasard, on associe à chaque élément A de $\mathcal{F}$ une nombre réel compris entre 0 et 1, sa probabilité, notée $P(A)$.

Définition 1.0.2.
Une application P de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si elle vérifie.

1) $P(\Omega)$.

2) Pour toute suite $(A_n)_{n\geq 0}$ d'éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{F}$,

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triple $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé espace probabilisé ou espace de probabilité .

Propriétés 1.0.2.

1) $P(\emptyset) = 0$.

2) Pour tout événement A :

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

.

3) Croissance : si $A \subset B$ sont deux événements, alors $P(A) \leq P(B)$.

4) Sous-additivité : pour tout famille $(A_1), ..., (A_n)$ d'événements :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

5) Pour tout suite croissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'événements $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A_n))$ est la limite de la suit croissante $(P(A_n))_{n\geq 0}$.

6) Pour tout suite décroissante $(A_n)_{n\geq 0}$ d'événements $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty}(A_n))$ est la limite de la suite décroissante $(P(A_n))_{n\geq 0}$.

1.1 Espaces probabilisés finis

On suppose Ω fini et $\mathcal{F}$=$P(\Omega)$. Si $\Omega = (\{\omega_1, ..., \omega_n\})$, on note $p_i = P\{(\omega_i)\}$. On a alors :

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, ..., n. \\ p_1+, ..., +p_n = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Réciproquement, pour tout n-uplet $(p_1, ..., p_n)$ de réel vérifiant (1.1) il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifiant $P(\{\omega_i\}) = p_i$. Cette probabilité est donnée par :

$$P(A) = \sum_{i \backslash w_i \in A} p_i \text{ pour tout } A \subset \Omega$$

Cette propriété se généralise immédiatement au cas où Ω est infini dénombrable.

1.2 Construction d'espaces probabilisés généraux

Les problèmes précédents ne faisaient intervenir que des espaces probabilisés finis, dont la construction ne posait pas de problème théorique. Ces espaces ne permettent malheureusement pas d'étudier des phénomène faisant intervenir des suites infinies d'événements. Il faut alors recourir à des théorèmes plus profonds de *la théorie de la mesure pour construire le modèle probabiliste. Cette théorèmes sont de deux type : théorèmes d'unicité, qui assurent en particulier que de probabilités qui coincident sur une certaine classe d'événements simples coincident sur toute la tribu des événements théorèmes d'existence, qui permettent de prolonger une probabilité définie sur une certaine classe d'événements en une probabilité définie sur toute la tribu des événements. Il existe plusieurs variantes des théorèmes d'unicité. Ceux-ci sont connus sous le terme générique de théorème des classes monotones. Nous en citerons essentiellement un,que nous utiliserons à plusieurs reprises.*

Théorème 1.2.1.
Soit $\mathcal{C}$ une partie de $P(\Omega)$ stable par intersection finie et $\mathcal{A}$ une famille de partie de Ω contenant $\mathcal{C}$ et vérifiant les trois propriétés :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Pour toute suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.*
3. *Pour toute couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{A}$ vérifiant $A \subset B$, $B \setminus A$ appartient à $\mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ contient la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.

Théorème d'extension de Carathéodory

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$. Alors P s'étend de manière unique en une probabilité sur la tribu $\sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.

1.3 Probabilité conditionnelles

La notion de probabilité conditionnelle apparait lorsqu'on connait un résultat partiel de l'expérience.

Exemple 1.3.1.
Supposons qu'une usine construise des objets de deux types A et B, et que ces

objets peuvent ou non être de bonne qualité, propriété notée Q. On estime expérimentalement la probabilité $P(C)$ qu'un objet produit possède une propriété C par la fréquence

$$(f_C) = \frac{N_C}{N}$$

d'objets possédant cette propriété parmi tous ceux produits, où N_C est le nombre de tels objets et N le nombre total d'objets produits.
Si on se restreint à la sous-population des objets de type A, la probabilité qu'un objet tiré au hasard dans cette sous-population soit de bonne qualité est estimé par :

$$f_{Q\setminus A} = \frac{N_{A\cap Q}}{N_A} = \frac{\frac{N_{A\cap Q}}{N}}{\frac{N_A}{N}} = \frac{f_{A\cap Q}}{f_A}$$

Ceci amène à définir la probabilité conditionnelle $P(Q\setminus A)$ de Q sachant A comme le quotient $\frac{P(Q\cap A)}{P(A)}$.

Définition 1.3.1.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$ tel que

$$P(A) > 0.$$

Pour tout $B \in \mathcal{F}$ on définit :

$$P(B\setminus A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}.$$

Ce nombre est appelé probabilité conditionnelle de B sachant A
La proposition suivant justifie cette terminologie .

Proposition 1.3.1.
Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$. L'application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ donnée par

$$B \mapsto P(B\setminus A)$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.4 Indépendance de tribus et d'événements

Supposons que l'on ait deux événements A et B tels que la réalisation de A n'induise rien sur la réalisation de B, On a alors $P(B \backslash A) = P(B)$ ou $P(B \cap A) = P(A)P(B)$.

Définition 1.4.1.

Deux événements A et B d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont dits indépendants si :

$$P(B \cap A) = P(A)P(B).$$

Proposition 1.4.1.

Soient A et B de événements et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les tribus engendrées par ces événements, i.e : $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. A et B sont indépendants si et seulement si pour tout $C \in \mathcal{A}$ et tout $D \in \mathcal{B}$, on a :

$$P(C \cap D) = P(C)P(D).$$

Définition 1.4.2.

Une famille $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ de parties $\mathcal{F}$ est dite indépendante si pour tout partie finie J de I et tout famille $(B_i)_{i \in J}$ d'événements telle que $B_i \in \mathcal{B}$ pour tout i, on a

$$P(\bigcap_{i \in J} B_i) = \prod_{i \in J} P(B_i).$$

Remarque 1.4.1.

Une famille finie $(\mathcal{B}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est indépendant si et seulement si pour tout famille $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $B_i \in \mathcal{B}_i$ pour tout i, on a :

$$P(\bigcap_{1 \leq i \leq n} B_i) = \prod_{1 \leq i \leq n} P(B_i).$$

Définition 1.4.3.

Les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants si les tribus $(\sigma(A_i))_{i \in I}$ engendrées par ces événements le sont

Propriétés 1.4.1.

Les événements $(A_i)_{i\in I}$ *sont indépendants si et seulement si pour tout partie finie* J *de* I *on a*

$$P(\bigcap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Propriétés 1.4.2.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace probabilisé et* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux parties de* $\mathcal{F}$ *stables par intersection finie. On suppose* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *indépendantes. Les tribus* $\sigma(\mathcal{C})$ *et* $\sigma(\mathcal{C}')$ *engendrées par ces parties sont alors indépendantes.*

1.5 Convergences probabilistes

Les variables aléatoires X_n *sont des applications de* Ω *vers* $\mathbb{R}$, *et pour des applications, le mode de convergence le plus naturel est celui de la convergence pour chaque* $\omega \in \Omega$ *de la suite de réels* $X_n(\omega)$ *vers le réel* $X(\omega)$.

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_n(\omega) \to X(\omega), \quad n \to +\infty.$$

Il s'agit de la convergence simple d'une suite d'applications vue en analyse. Malheureusement, en probabilité, ce type de convergence est trop restrictif, on ne peut raisonnablement demander à tous les $X_n(\omega)$ *de converger (i.e. pour tous les* $\omega \in \Omega$ *). Par contre, il est plus raisonnable de demander que l'ensemble des* ω *pour lesquels ça n'arrive pas soit de probabilité nulle (ou au moins petite). Ceci nous amène aux notions de convergences presque sûre et en probabilité.*

Définition 1.5.1.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires et* X *une variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *On dit que Xn converge presque sûrement (p.s.) vers* X *si l'ensemble des* ω *tels que* $X_n(\omega)$ *converge vers* $X(\omega)$ *a pour probabilité* 1, *c'est à dire :*

$$P(\omega \in \Omega \backslash X_n(\omega)) \to X(\omega) = 1.$$

On la note $X_n \overset{p.s}{\to} X$.

Rappelons qu'un évènement de probabilité 1 *n'est pas nécessairement égale à tout l'espace* Ω.

Il peut même y avoir une infinité d'éléments dans son complémentaire. Seulement, ce complémentaire est (du point de vue de la probabilité P*) négligeable.*

Dans la convergence presque sûre, si on se $\xi > 0$*, le rang* n_0 *à partir duquel* $X_n(\omega)$ *est à moins de* ξ *de* $X(\omega)$ *dépend à la fois de* ξ *et de* ω : $n_0 = n_0(\xi, \omega)$.

Généralement, on ne sait pas comment $n_0(\xi, \omega)$ *dépend de* ω*. De ce fait la convergence presque sûre est essentiellement une convergence théorique.*

Par exemple, si on suppose que Xn est une v.a. dont la réalisation dépend de n *épreuves répétées, savoir que Xn converge presque sûrement vers* X *ne permet pas de prédire un nombre (non aléatoire, c'est à dire qui ne dépend pas de* ω*)* n *d'épreuves à partir duquel* $\mid X_n(\omega) - X(\omega) \mid \leq \xi$ *si ce n'est pour presque tous les* ω*, même pour* 99% *ou* 95% *d'entre eux.*

Or cette question a une grande importance pratique pour le statisticien. C'est l'une des raisons de l'introduction de la convergence en probabilité qui permet de répondre à cette question lorsque l'on connaît la vitesse de convergence selon ce mode.

Définition 1.5.2. *(Convergence en probabilité)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires et* X *une v.a. définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

On dit que X_n *converge en probabilité vers* X *si :*

$$\forall \xi > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P(\mid X_n - X \mid \geq \xi) = 0.$$

On la note $X_n \overset{P}{\to} X$.

Remarque 1.5.1.

Il faut bien comprendre que quand X_n *converge en probabilité vers* X*, il est toujours* *possible que pour certain $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega)$ s'écarte de $X(\omega)$ même quand n est grand. Mais, c'est de moins en moins probable, c'est à dire que cela arrive pour peu de $\omega \in \Omega$: la probabilité que X_n soit distant de plus de $\xi > 0$ de X est de plus en plus faible.*

Proposition 1.5.1.

La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

Propriétés 1.5.1.

Soit X_n convergeant presque surement vers X. L'évènement

$$\Omega^{'} = \left\{\omega \in \Omega, \quad \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$$

est de probabilité 1. Fixons $\xi > 0$, et définissons

$$\Omega^{'}_{\xi} = \{\omega \in \Omega, \quad \exists m_0 = m_0(\omega), \quad \forall n \geq m_0, \quad | X_n(\omega) - X(\omega) |< \xi\}.$$

Il est clair que $\Omega^{'} \subset \Omega^{'}_{\xi}$ et donc $P(\Omega^{'}_{\xi}) = 1$.

Par traduction des opérateurs logiques $\forall$ et $\exists$ en opérateur ensemblistes $\cap$, $\cup$, on exprime facilement :

$$\Omega^{'}_{\xi} = \bigcup_{m_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m_0} \{\omega \in \Omega, \quad | X_n(\omega) - X(\omega) |< \xi\}.$$

Posons

$$A_k = \{\omega \in \Omega, \quad \forall n \geq k \mid X_n(\omega) - X(\omega) |< \xi\} = \bigcap_{n\geq k} \{\omega \in \Omega, \quad | X_n(\omega) - X(\omega) |< \xi\}.$$

Il est clair que la suite d'ensembles $(A_k)_{k\in}$ est croissante ($A_k \subset A_{k+1}$) pour l'inclusion et de réunion $\Omega^{'}_{\xi}$. Par continuité monotone de P, on a

$$\lim_{k\to+\infty} P(A_k) = P(\bigcup_k A_k) = P(\Omega^{'}_{\xi}) = 1.$$

D'oû $\forall \eta > 0, \exists k \geq k_0$, tel que pour $\exists k \geq k_0$, $P(A_k) \geq 1 - \eta$. En particulier, la traduction de $P(A_k) \geq 1 - \eta$ donne :

$$\forall n \geq k_0, \quad P(| X_n - X |< \xi) > 1 - \eta.$$

Ce qui justifie la convergence en probabilité de X_n vers X.

Remarque 1.5.2.
La réciproque n'est pas vraie. Cependant, si X_n converge vers X en probabilité, on peut montrer qu'il existe une sous-suite de X_n qui converge presque sûrement vers X.

Chapitre 2

Introduction au calcul stochastique

2.1 Processus stochastique

Un processus stochastique est un modéle mathématique qui permet de décrire le comportement, a tout moment aprés l'instant initial (par exemple $t_0 = 0$), d'un phénomène aléatoire. Nous précisons cette notion dans la définition suivante.

Définition 2.1.1.
Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\geq 0}$ indexée par un paramètre $t \geq 0$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ξ) appelé espace détat. La vriable X_t donne l'état à l'instant t.

Remarque 2.1.1.
La filtration$(\mathcal{F}_t)$ définie par

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, \quad s \leq t), \quad t \geq 0$$

s'appelle la filtration naturelle du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et on la note par $(\mathcal{F}_t^X)$.
L'interprétation de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ est que $\mathcal{F}_t^X$ contient toutes les informations sur les variables aléatoires $(X_s)_{s\leq t}$.

Définition 2.1.2.
Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ si

pour tout t, X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable.*
Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Définition 2.1.3.
On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est continu (ou à trajectoires continues) si les trajectoires* $t \to X_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* ω *.*

Définition 2.1.4.
1) Un processus est dit càdlàg (continu à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche pour presque tout ω*.*
2) Un processus est dit càglàd (continu à gauche et pourvu de limite à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limites à droite pour presque tout ω*.*

Définition 2.1.5.
Un processus stochastique est prévisible si et seulement si l'application $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *est mesurable par rapport à la tribu des ensembles prévisibles.*
1) On dit que deux processus $(X)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *sont égaux à une modification près si* $X_t = Y_t$ *p.s.* $\forall t$*.*
2) Deux processus sont égaux en loi, et on écrit $X \overset{loi}{=} Y$ *, si pour tout* $(t_1, t_2, ..., t_n)$ *et pour tout n les vecteurs*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \quad et \quad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}).$$

ont même loi.

Définition 2.1.6.
Soit $T > 0$ *Une fonction continue* $a : [0, T] \to \mathbb{R}$ *telle que* $a(0) = 0$ *est dite à variation finie s'il existe une mesure signée (i e. différence de deux mesures positives finies)* μ *telle que* $a(t) = \mu([0, t])$ *pour tout* $t \in [0, T]$ *.*

Définition 2.1.7.

Un processus à variation nie $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie .*

Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est appelé processus croissant si de plus ces trajectoires sont croissantes.*

2.1.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu.

Définition 2.1.8.

Soit X *une variable aléatoire (intégrable) définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $\mathcal{G}$ *est sous tribu de* $\mathcal{F}$ *.*

L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X\backslash\mathcal{G})$ *de* X *par rapport à* $\mathcal{G}$ *est l'unique variable aléatoire telle que :*

i) $\mathbb{E}(X\backslash\mathcal{G})$ *est* $\mathcal{G}$ *-mesurable.*

ii)

$$\int\limits_A \mathbb{E}(X\backslash\mathcal{G})dP = \int\limits_A XdP, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

C'est aussi l'unique (à une égalité presque sûrement près) variable $\mathcal{G}$ *-mesurable telle que*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\backslash\mathcal{G})Y) = \mathbb{E}(XY)$$

pour toute variable Y*,* $\mathcal{G}$*-mesurable.*

Il en résulte que si X *est de carré intégrable,* $\mathbb{E}(X\backslash\mathcal{G})$ *est la projection de* X *sur l'espace des variables aléatoires* $\mathcal{G}$ *mesurables et de carré intégrable, cest-à-dire la variable aléatoire* $\mathcal{G}$ *-mesurable qui minimise* $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ *parmi les variables aléatoires* $\mathcal{G}$ *-mesurable.*

Propriétés 2.1.1.

1) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$ *.*

2) $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$*, si* X *et* $\mathcal{G}$ *-mesurable.*

3) $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, *si* Y *et* $\mathcal{G}$ *-mesurable.*

4) $\mathbb{E}(aX + Y \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$, *si* X *et* Y *sont intégrables.*

5) si $X \geq 0$, *alors* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$.

6) si $\mathcal{H}$ *est un sous tribu de* $\mathcal{G}$, *alors* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$. .

Proposition 2.1.1. *(Inégalité de Jensen)*
Soit X *une variable aléatoire de* L^1, *soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe.*
Alors on a :

$$\varphi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X) \mid \mathcal{G})$$

2.1.2 Les processus Gaussiens

Dans cette partie nous allons rappeler quelques notions et résultats pour une classe importante de processus stochastiques, les processus gaussiens.

Définition 2.1.9.
Un processus $(X_t)_{t\in i}$ *est un processus gaussien si pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $(t_1, ..., t_n) \in I^n$, *le vecteur aléatoire* $(X_{t_1}...X_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*
Nous savons que la loi d'un vecteur aléatoire gaussien est caractérisée par sa moyenne et sa matrice de covariance. La proposition suivante énonce le réesultat analogue pour un processus gaussien.

Proposition 2.1.2.
La loi d'un processus gaussien $(X_t)_{t\in i}$ *est caracterisée par sa fonction moyenne*

$$\begin{array}{cccc} m_x & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \to & E(X_t) \end{array}$$

et par sa fonction de covariance.

$$\begin{array}{cccc} \Gamma_x & : & I \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (s,t) & \to & (X_s, X_t) \end{array}$$

2.1.3 Processus stationnaire

Un processus stochastique $(X_t)_{t\leq 0}$ est stationnaire si pour tout entier n et pour tous réels $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < \infty$, et pour tout h les variables aléatoires $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h})$ ont même loi.

2.1.4 Processus de Markov

En probabilité un processus stochastique vérifie la propriété de Markov si et seule- ment si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donné les états passés et l'état présent, ne dépend en fait que de l'état présent et non pas des états passés (absence de « mémoire »). Un processus qui possède cette propriété est appelé processus de Markov. Pour de tels processus, la meilleure prévision qu'on puisse faire du futur, connaissant le passé et le présent, est identique à la meilleure prévision qu'on puisse faire du futur, connaissant uniquement le présent, si on connait le présent, la connaissance du passé n'apporte pas d'information supplémentaire utile pour la prédiction du futur.

2.2 Mouvement Brownien

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur cet espace à valeurs réelles.

Définition 2.2.1.
Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien (standard)si
1) $P(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement brownien issu de lorigine).
2) $\forall s \leq t$, $B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne centrée, de variance $(t-s)$.(stationnarité des accroissements du mouvement brownien).
3) $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq, ..., \leq t_n$ les variables $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t-1} - B_{t_0}$, B_{t_0} sont indépendantes, ou bien sous forme équivalente : Soit $s \leq t$. La variable $B_t - B_s$ est indépendante de la tribu $\sigma(B_u, u \leq s)$.

2.2.1 Mouvement brownien multidimensionnel

Définition 2.2.2.
Soit $B_t(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, ..., B_t^{(n)})^T$ un processus n-dimensionnel On dit que B est un mouvement brownien n-dimensionnel si les processus $(B^{(i)}, i \leq n)$ sont des mouvements browniens indépendants.

2.2.2 Temps d'atteinte

Définition 2.2.3.
Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est le processus défini par $X_t = \mu t + B_t$, avec $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard,

$$T_a^\mu = \inf t \geq 0, \quad X_t = a$$

est appelé temps datteinte de a.

2.2.3 Mouvement brownien géométrique

Proposition 2.2.1.
Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel, μ et σ deux constantes. Le processus

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\}$$

est appelé mouvement brownien géométrique. Ce processus est aussi appelé processus "log-normale". En efet, dans ce cas

$$\log X_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t + \log X_0$$

suit une loi normale.

Proposition 2.2.2.
Si $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, alors
i) Le processus $\tilde{B}$ défini par $\tilde{B}_t = -B_t$ est un mouvement brownien.
ii) Le processus $\hat{B}$ défini par $\hat{B}_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un mouvement brownien (Propriété

de scaling).
iii) Le processus $\bar{B}$ *défini par* $\bar{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}, \quad \forall t > 0, \quad \bar{B}_0$. *est un mouvement brownien.*

2.3 Intégrale stochastique

Le but de l'intégrale stochastique est de donner un sens à des équations de la forme

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t) + g(X,t)\frac{dW_t}{dt}.$$

Par exemple, si $f = 0$ *et* $g = 1$, *on devrait retrouver* $X_t = X_0 + W_t$, *décrivant le mouvement suramorti d'une particule Brownienne. Le problème est que, comme nous lavons mentionné, les trajectoires du processus de Wiener ne sont pas différentiables, ni même à variations bornées. Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, on interprête une solution de l'équation différentielle comme une solution de l'équation intégrale :*

$$X_t = X_0 + \int f(x)ds + \int g(x)dW_s.$$

C'est à la deuxième intégrale qu'il s'agit de donner un sens mathématique si $s \rightarrow g(X_S)$ *était différentiable, on pourrait le faire à l'aide d'une intégration par parties, mais ce n'est en général pas le cas. Il a donné une autre défnition de l'intégrale stochastique, qui s'applique à une classe beaucoup plus vaste d'intégrants (et donne le même résultat que l'intégration par parties dans le cas différentiable).*

2.3.1 Intégrale de Wiener

Dans cette partie, on considère l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+)$ *muni de la norme*

$$||f||_2 = \left(\int_0^\infty f^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit f une fonction en escalier, de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1} 1_{]t_{i-1},t_i[}.$$

On pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s = \sum_{i=1}^{i=n} f_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

La variable

$$I(f) \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} f(s)dB_s.$$

est une variable gaussienne despérance nulle et de variance

$$\int_0^{+\infty} f(s)^2 ds.$$

$I(f)$ est appelé intégrale de Wiener.

Propriétés 2.3.1.

1) Linéarité de l'intégrale de Wiener.

$$I(f+g) = I(f) + I(g).$$

2) Si f et g sont des fonctions en escalier, alors on a

$$\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds.$$

Cas général

On montre en analyse que, si $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$, il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier qui converge (dans $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$) vers f, c'est-à-dire qui vérifie que

$$\int_0^{\infty} |f_n - f|^2(x)dx \to 0.$$

Dans ce cas, la suite (f_n) *est de Cauchy dans* $L^2(\mathbb{R}_+, dt)$

La suite de variables aléatoires

$$F_n = \int_0^{+\infty} f(s)dB_s.$$

est aussi une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ *(en effet* $||F_n - F_m||_2 = ||f_n - f_m||_2 \to 0$ *) , donc convergente. Notons que la limite dépend de* f *et non de la suite* (f_n) *.*

on pose

$$\int_0^{+\infty} f(s)dB_s \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s)dB_s$$

la limite étant prise dans $L^2(\Omega)$ *.*

On dit que $\int_0^{+\infty} f(s)dB_s$ *est l'intégrale stochastique (ou intégrale de Wiener) de* f *par apport à* B*.*

Théorème 2.3.1.

Si f *est une fonction de classe* C^1*, alors*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f^{'}(s)dB_s.$$

2.3.2 Intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et un mouvement brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$ *sur cet espace, muni de la filtration naturelle du* $(B_t)_{t\geq 0}$*.*

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir

$$\int_0^{\infty} \theta_s dB_s$$

pour des processus stochastiques θ

.

Définition 2.3.1.

On dit q'un processus θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une subdivision de réel

$$0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \quad j \in \mathbb{N}$$

et une suite de variables aléatoires θ_j telle que θ_j est $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurable et appartenant à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}[$, on a :

$$\theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) 1_{[t_j,t_{j+1}[}(s).$$

On définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

On a :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s \right) = 0 \quad et \quad Var\left(\int_0^\infty \theta_s dB_s \right) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty {\theta_s}^2 dB_s \right).$$

Notons que si $t \geq 0$, alors

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t}).$$

ce qui établit la continuité de l'application

$$t \to \int_0^t \theta_s dB_s.$$

2.4 Calcul d'Itô

On considère un $\mathcal{F}$ mouvement Brownien standard W défini sur lespace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, un horizon de temps $[0, T]$ où $T > 0$.

2.4.1 Processus dItô

Définition 2.4.1.

Un processus $(X_t)_{t\leq 0}$ *est un processus d'Itô si*

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s dS + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

est un processus adapté tel que $\int_0^t \mid \mu_s \mid ds$ *existe (au sens de Lebesgue) p.s. pour tout* t*, et* σ *un processus appartenant à* Λ *.*

Intégrale par rapport à un processus d'Itô

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus d'Itô de différentielle*

$$X_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t.$$

On note (sous réserve de conditions d'intégrabilité)

$$\int_0^t \theta_s dX_s \stackrel{def}{=} \int_0^t \theta_s \mu_s dS + \int_0^t \theta_s \sigma_s dB_S.$$

Formule dItô

X *processus d'Itô, avec* $dX_t = b_t dt + s_t dW_t$*, et* $g \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$*. Alors,* $Y_t = g(t, X_t)$ *est un processus d'Itô et*

$$dY_t = \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} (dX_t)^2.$$

avec

$(dX_t)^2 = dX_t.dX_t, \qquad dt.dt = 0, \qquad dt.dW_t = dW_t.dt = 0, \qquad \text{et } dW_t.dW_t = dt.$

On peut encore écrire

$$dY_t = \left(\frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} W_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, X_t)}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right) + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial X_t} \sigma dW_t.$$

Formule d'intégration par parties

Soit X_1 et X_2 deux processus d'Itô.

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt + G_1 dW_t. \\ dX_2 = F_2 dt + G_2 dW_t. \end{cases}$$

Alors le produit X_1, X_2 est un processus d'Itô et

$$d(X_1X_2) = X_2dX_1 + X_1dX_2 + dX_1dX_2$$

L'expression dX_1 dX_2 est le terme correctif d'Itô. L'intégration de la égale du produit d'Itô donne la formule d'intégration par parties.

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques (E.D.S)

3.1 Définition

On rappelle dans cette chapitre quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques (EDS) à coefficients aléatoires par rapport à mouvement brownien.

Définition 3.1.1.
Une équation différentielle stochastique sur $\mathbb{R}^d$ *de coefficient de dérive* b *et de diffusion* σ *est donnée sous la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad , \forall t \in [0, T] \\ X_0 = \xi \end{cases} \tag{3.1}$$

où

1) T *est un réel strictement positif.*

2) $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ *sont deux fonctions boréliennes.*

3) $(W_t)_t \geq 0$ *un mouvement brownien standard sur* $\mathbb{R}^d$ *défini sur un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.

4) ξ *est une variable aléatoire quelconque indépendante du M.B appartient* $\mathbb{R}^n$.

Nous allons préciser les notions d'existence et d'unicité des solutions d'une E.D.S.

Définition 3.1.2. *(Solution forte d'E.D.S) :*
Une solution forte de l'EDS (3.1) est un processus vectoriel $X = (X^1 ... X^n)$ *progressif tel que l'on ait :*

$$\int_0^t \mid (b(t, X_t)) \mid ds + \int_0^t \mid (\sigma(t, X_t)) \mid^2 dW_s < \infty \quad P - ps \quad \forall 0 \leq t \in T.$$

et que les relations

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mid (b(u, X_u)) \mid ds + \int_0^t \mid (\sigma(u, X_u)) \mid dW_u < \infty \quad P - ps \quad \forall 0 \leq t \in T.$$

i.e.

$$X_t{}^i = X_0{}^i + \int_0^t b_i(u, X_u)du + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{ij}(u, X_u) dW_i^j < \infty \quad P - ps \quad \forall 0 \leq t \in T \quad , 1 \leq i \leq n.$$

soient vraies p.s.

Définition 3.1.3. *(Solution faible d'EDS) :*
Une solution faible de (3.1) est la donnée d'un triplet $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $(\mathcal{F}_t)$ *où :*

1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est un espace de probabilité et* $(\mathcal{F}_t)$ *est une filtration de cet espace.*

2) W est un mouvement brownien de dimension d tel que (W_t) est une martingale relativement a la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

3) X est un processus adapté a la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

4) On a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mid (b(u, X_u)) \mid ds + \int_0^t \mid (\sigma(u, X_u)) \mid dW_u \leq \infty \quad P\!-\!ps \quad \forall 0 \leq t \in T.$$

On dira alors que le couple (W_t, X_t) est une solution faible de (3.1).
Il est clair, par définition, une solution forte est aussi une solution faible.

Définition 3.1.4.
L'équation différentielle stochastique (3.1) est dit bien posée si, pour toute condition initiale $\xi \in \mathbb{R}^n$, elle admet une solution faible qui est unique dans le sens de la loi de probabilité.

Définition 3.1.5. *1) On dira qu'il y a unicité forte pour l'équation si, pour toutes solutions X_t et Y_t, on a :*

$$P[X_t = Y_t \forall t \in [0, T]] = 1.$$

2) On dit qu'il y a unicité faible (ou en loi) des solutions de (3.1) si deux solutions faibles ont toujours même loi i.e, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, étant données deux solutions $({W^1}_t, X_t)$ et $({W^2}_t; Y_t)$ de (3.1) telles que ${X^i}_0 = \xi$, $i = 1, 2$ les processus $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ ont même loi.

3) On dit qu'il y a unicité trajectoire des solutions de (3.1) si, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, étant données deux solutions (W_t, X_t) et (W_t, Y_t) de (3.1) telles ${X^i}_0 = \xi, i = 1, 2$ on a $X_t = Y_t$ p.s.

3.2 Existence et unicité de solutions (E.D.S)

Nous donnons d'abord un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions un peu restrictives sur les coefficients b et σ.

Théorème 3.2.1.
Supposons que les coefficients b et σ satisfont les deux conditions suivantes : On suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0, X; Y \in \mathbb{R}^n$.
H1) Condition de Lipschitz :

$$\mid b(t,X) - b(t,Y) \mid + \mid \sigma(t,X) - \sigma(t,Y) \mid \leq K \mid X - Y \mid .$$

H2) Condition de croissance linéaire :

$$\mid b(t,X) \mid \leq K(1+ \mid X \mid), \quad \mid \sigma(t,X) \mid \leq K(1+ \mid X \mid).$$

Alors EDS (3.1) admet, pour toute condition initiale ξ de carrée intégrable ($\mathbb{E}(\mid \xi \mid^2) < \infty$), une solution forte $(X_t)_{t\in[0,T]}$, presque sûrement continue. Cette solution est unique, de plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \mid {X_t}^2 \mid \right) < \infty.$$

Pour démontrer l'unicité, on utilise le lemme de Gronwall :

Lemme : Gronwall

Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R} \quad g(t) \leq a \exp bt$

Preuve 3.2.1.

On pose

$$G(t) = a + b \int_0^t g(s)ds.$$

alors $g(t) \leq G(t)$ *:Si* g *est continue,* G *est une fonction dérivable et*

$$(e^{-bt}G(t))' = -be^{-bt}G(t) + e^{-bt}G(t)' = -be^{-bt}G(t) + be^{-tb}g(t) \leq 0.$$

donc

$$e^{-bt}g(t) \leq e^{-bt}G(t) \leq G(0) = a$$

Si g *est seulement mesurable bornée,* G *est continue et vérifie*

$$G(t) = a + b \int_0^t g(s)ds \leq a + b \int_0^t G(s)ds$$

donc la même conclusion est vraie.

Noter que l'espace vectoriel $\mathcal{X}_T$ *muni de la norme* $\| \ \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \mid {X_t}^2 \mid) \ \|$ *est complet, où :*

$\mathcal{X}_T = \{(X_t, t \in [0,T])$ *processus continu et adapté à* $(\mathcal{F}_t)$ *tel que* $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \mid {X_t}^2 \mid) < +\infty$ *\}* ■

Preuve de l'unicité

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$: Considérons les deux processus (X_t) et (Y_t).

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s))dW_s$$

$Y_t = \xi + \int\limits_0^t b(s, Y_s)ds + \int\limits_0^t \sigma(s, Y_s))dW_s$

On va montrer que $X_t = Y_t$ P - p.s Ce qui revient à montrer que :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}(X_t - Y_t)^2\right] = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

Alors

$$\mid X_t - Y_t \mid^2 = \mid \int\limits_0^t b(s, X_s)ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s)dW_s - \int\limits_0^t b(s, Y_s)ds - \int\limits_0^t \sigma(s, Y_s)dW_s \mid^2$$

$$= \mid \int\limits_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds + \int\limits_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))dW_s \mid^2$$

$$= 2[\mid \int\limits_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds \mid^2 + \mid \int\limits_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))dW_s \mid^2]$$

Comme $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ pour $0 \leq t \leq r \leq T$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t - Y_t \mid^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq T} [\mid \int\limits_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds \mid^2 + \mid \int\limits_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))dW_s \mid^2]$$

En utilisant l'inégalité de Doob

$$. \quad \mathrm{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t - Y_t \mid^2) \leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \int\limits_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds \mid^2\right] + \mathbb{E}\left[\mid \int\limits_0^t (\sigma(\underset{\leq}{s}, X_s) - \sigma(s, Y_s))dW_s \mid^2\right]$$

$$2\mathbb{E}|\int_0^t (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds|^2\Big] + 2\times 4\mathbb{E}\Big[|\int_0^t (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))dW_s|^2\Big]$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} | X_t - Y_t|^2) \le 2T\mathbb{E}\Big[|\int_0^T (b(s,X_s)-b(s,Y_s))ds|^2\Big] + 8\mathbb{E}\Big[|\int_0^T (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))dW_s|^2\Big]$$

$$\le (8\vee 2T)\mathbb{E}\Big[\int_0^T | (b(s,X_s)-b(s,Y_s))|^2 ds + \int_0^T | (\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))|^2 dW_s\Big].$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitzienne en espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on obtient, pour tout $r \in [0,T]$

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} | X_t - Y_t|^2) \le (8\vee 2T)K^2\mathbb{E}\Big[\int_0^T | X_t - Y_t|^2 ds]$$

$$\le C(T,K)\mathbb{E}\Big[\int_0^T | X_t - Y_t|^2 ds\Big]$$

$$\le C(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\Big(| X_t - Y_t|^2\Big)ds$$

$$\le C(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\Big(\sup | X_t - Y_t|^2\Big)ds.$$

Donc

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} | X_t - Y_t|^2\Big) \le C(T,K)\int_0^T \mathbb{E}_{r\le s}\Big(\sup | X_t - Y_t|^2\Big)ds.$$

Le lemme de Gronwall permet d'écrire

$$\mathbb{E}_{0\le t\le T}\Big(\sup | X_t - Y_t|^2\Big) \le 0e^{c(T,k)T} = 0$$

Donc

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} | X_t - Y_t|^2\Big) = 0 \Rightarrow \sup_{0\le t\le T} | X_t - Y_t|^2 = 0$$

D'où

l'unicité forte $\square$

Existence de la Solution

Pour démontrer l'existence d'une solution X de l'EDS (3.1) on utilise la méthode des approximations successives dite "méthode d'itération de Picard". On définit par récurrence une suite de processus (X^n)

$$\begin{cases} \mathrm{X}_t^0 = \xi \\ \mathrm{X}_t^1 = \xi + \int\limits_0^t b(s,\xi)ds + \int\limits_0^t \sigma(s,\xi)dW_s \\ . \\ . \\ . \\ \mathrm{X}_t^{n+1} = \xi + \int\limits_0^t b(s,X_s^n)ds + \int\limits_0^t \sigma(s,X_s^n)dW_s. \end{cases}$$

Par récurrence pour chaque n , X_t^n est continu et adapte, donc le processus $\sigma(t,X_t^n)$ l'est aussi. Fixons $T>0$ et raisonnons sur $[0,T]$, nous vérifions d'abord par récurrence sur n que

$$\exists C_n : \forall t \in [0,T] \quad \mathbb{E}[(X_t^n)^2] \leq C_n. \tag{3.2}$$

Pour $n=0$, il n'y a rien a montrer.
Supposons a présent que ceci est vrai a l'ordre $n-1$ et vérifions que cela reste vrai a l'ordre n.
$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t \sigma(s,X_t^{n-1})^2 ds\right] < \infty$ ce qui de coule de la croissance linéaire et de l'hypothèse de récurrence.
En utilisant encore la croissance linéaire, on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[(X_t^n)^2 \leq & 3\Big(\xi^2 + \mathbb{E}\Big[(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dW_s)^2\Big]\Big) \\
\leq & 3\Big(\xi^2 + t\mathbb{E}\Big[\int_0^t (b(s, X_s^{n-1}))^2 ds\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^t (\sigma(s, X_s^{n-1}))^2 dW_s\Big]\Big) \\
\leq & 3\Big(\xi^2 + t\mathbb{E}\Big[\int_0^t (K + K \mid X_s^{n-1} \mid)^2 ds\Big] + \mathbb{E}\Big[\int_0^t (K + K \mid X_s^{n-1} \mid)^2 dW_s\Big]\Big) \\
\leq & 3\Big(\xi^2 + (t+1)\mathbb{E}\Big[\int_0^t (K + K \mid X_s^{n-1} \mid)^2 ds\Big]\Big) \\
\leq & 3\xi^2 + 3(t+1)\mathbb{E}\Big[\int_0^t (2K^2 + 2(K \mid X_s^{n-1} \mid^2) ds\Big] \\
\leq & 3\xi^2 + 6T(t+T)(K^2 + 4C_{n-1}) = C_n.
\end{aligned}$$

La majoration (3.2) et l'hypothèse de croissance linéaire sur σ entrainent que la martingale locale $(\int_0^t \sigma(s, X_s^n)dW_s)$ est une vraie martingale bornée dans L^2 pour tout n . On utilisera ceci pour majorer par récurrence

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n|^2\Big]$$

O na :

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dW_s$$

D'où :

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n|^2\Big] \leq 2\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq t} |\int_0^s (b(u,X_u^n) - b(u,X_u^{n-1})du|^2 + \sup_{0\leq s\leq t} |\int_0^s (\sigma(u,X_u^n) - \sigma(u,X$$

$$\leq 2\Bigg(\mathbb{E}\Big[\int_0^t (\mid b(u,X_u^n) - b(u,X_u^{n-1}) \mid)du)^2\Big] + 4\mathbb{E}\Big[(\int_0^t (\mid \sigma(u,X_u^n) - \sigma(u,X_u^{n-1}) \mid$$

$$)dW_u^2\Big]\Bigg)$$

$$\leq 2\Bigg(T\mathbb{E}\Big[\int_0^t (b(u,X_u^n) - b(u,X_u^{n-1}))^2 du\Big] + 4\mathbb{E}\Big[\int_0^t (\sigma(u,X_u^n) - \sigma(u,X_u^{n-1}))^2 dW_u\Big]\Bigg)$$

$$\leq 2(T+4)K^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \mid X_t^n - X_t^{n-1} \mid^2 du\Big]$$

$$\leq C_T\mathbb{E}\Big[\int_0^t \sup_{0\leq r\leq u} \mid X_r^n - X_r^{n-1} \mid^2 du\Big]$$

Avec $C_T = 2(T+4)K^2$, posons

$$g_n(u) = \sup 0 \leq r \leq u \mid X_r^n - X_r^{n-1} \mid^2 .$$

Ainsi on vient de montrer que

$$g_{n+1}(t) \leq C_T \int_0^t g_u(u)du. \tag{3.3}$$

D'autre part, $\forall n$, g_n est bornée sur [0, T].

En effet, pour n ≥ 0 :

$$g_u(x) \leq 2(T+4)K^2\mathbb{E}\Big[\int_0^t \mid X_t^n - X_t^{n-1} \mid^2 du\Big]$$
$$\leq \mathbb{E}\Big[\int_0^t \mid 2(X_t^n)^2 - 2(X_t^{n-1})^2 \mid^2 du\Big]$$
$$\leq 4T(T+4)(C_n^2 + C_{n-1}^2).$$

$g_0(t) = \xi^2$ qu'on appelle $C_T^{'}$. Une récurrence simple sur (3,3) donne :

$g_n(t) \leq C_T^{'}(C_T)^n \frac{t^n}{n}$.

Et, en vertu du critère de D'alémbért, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Comme la norme de L_1 est dominée par la norme de L^2, on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid\Big] < \infty.$$

Le théorème de la convergence monotone nous permet de dire que

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid\Big] < \infty.$$

Ce qui entraine que p.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid .$$

Mais si n,$m \in N$ avec $n < m$:

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^m - X_t^n \mid \leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{k+1} - X_t^k \mid < \infty \to 0.$$

quand n,$m \to \infty$

Par suite, p.s. la suite $(\mathrm{X}_t^n, 0 \leq t \leq T)_n$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $X = (X_t)_{t\geq 0}$ qui est continu et adapte. En effet, on vérifie par récurrence que chaque processus X_n est adapte par rapport a la filtration canonique de B, et donc X l'est aussi. On a P $.p.s.$

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^m - X_s^n \mid &= \lim_{m\to+\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^m - X_s^n \mid \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^k - X_s^{k-1} \mid .\end{aligned}$$

En introduisant la norme L^2, on trouve que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s^m - X_s^n \mid^2 \Big] \leq \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(T)^{\frac{1}{2}} \Big)^2 \to 0, \quad k\to\infty$$

et on en déduit que

$$\int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \sigma(s,X_s^n)dW_s.$$

dans L^2

$$\int_0^t b(s,X_s)dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t b(s,X_s^n)dW_s.$$

En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t \sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s^n)dW_s\Big)^2\Big] &= \mathbb{E}\Big(\int_0^t \sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s^n)dW_s\Big) \\ &\leq \mathbb{E}\Big(K^2 \int_0^t \mid X_s - X_s^n \mid^2 ds\Big) \\ &\leq T^2K^2\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq s\leq T} \mid X_s - X_s^n \mid^2 \Big] \to 0.\end{aligned}$$

et on procède de la même manière pour b. En passant à la limite dans l'équation de récurrence pour X_n, on trouve que X est une solution (forte) sur $[0,T]$. $\square$

3.3 Equations différentielles stochastiques Neutre

Définition 3.3.1.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *un espace de probabilité muni d'une filtration* $\mathcal{F}_t$, $(W_t)_{t\geq 0}$ *un* F_t *mouvement brownien d-dimensionnel. On appelle équations différentielles stochastiques Neutre (E.D.S.N) n-dimensionnel l'équation se écrire sous la forme suivant :*

$$d[X(t) - D(X_t)] = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad \forall t_0 \leq t \leq T. \tag{3.4}$$

Avec pour tout $\tau > 0$ *et* $0 \leq t_0 < T < \infty$ *on a :*

$$D : \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

$$f : [t_0, T] \times \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

$$g : [t_0, T] \times \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times d}$$

Avec la définition d'Itô, pour tout $t_0 \leq t \leq T$ *l'équation différentielle stochastique (3.4) écrire sous la forme suivant :*

$$X(t) - D(X_t) = X(t_0) - D(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} f(s, X_s)ds + \int_{t_0}^{t} g(s, X_s)dW_s \tag{3.5}$$

Avec le condition initialle

$$X_{t_0} = \xi = \xi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0 \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T, 0]; \mathbb{R}^n) \tag{3.6}$$

où : ξ *est* $\mathcal{F}_{t_0}$ *mesurable et* $\xi \in \mathcal{C}([-\mathcal{T}, 0])$ *ils variété stochastique et* $\mathbb{E}(\mid \xi \mid^2) < \infty$.

Définition 3.3.2.

Si l'équation (3.4) a la solution $X(t) \equiv 0$ *correspondant à la valeur initiale* $\xi = 0$. *Cette solution est appelée solution triviale ou position d'équilibre.*

Définition 3.3.3.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *un espace de probabilité muni d'une filtration* $\mathcal{F}_t$, $(W_t)_{t\geq 0}$ *un*

$\mathcal{F}$ mouvement brownien d-dimensionnel. On appelle une équations différentielles stochastiques Neutre avec retard (E.D.S.N) l'équation s'écrire sous la forme :

$$d[X(t) - \tilde{D}(X(t-\tau))] = F(t, X(t), X(t-\tau))dt + G(t), X(t), X(t-\tau)dW_t \quad \forall t \in [t_0, t]. \tag{3.7}$$

Avec :

$$F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$G : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d}$$

$$\tilde{D} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Si on définie $f(t;\varphi) = F(t, \varphi(0), \varphi(-\tau))$, $g(t,\varphi) = G(t, \varphi(0), \varphi(-\tau))$ et $D(\varphi) = \tilde{D}(\varphi(-\tau))$ pour $\varphi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_n)$ et $t \in [t_0; T]$, alors l'équation (3.7) on peut écrire comme l'équation (3.4)

3.4 Stabilité des équations différentielles stochastiques

En 1892 Lypunov introduit le concépte de stabilité d'un système dynamique. Il définie la stabilité comme insensibilité de l'état du système à de petits changements dans l'état initial ou les paramètres du système. Pour une étable système, les trajectoires qui sont "processus l'une de l'autre à un instant spécifique devraient donc rester proches l'un de l'autre à tous les instants ultérieurs. Pour rendre la théorie de stabilité stochastique plus compréhensible. Dans cette section on pareille de quelques types de stabilité de solutions d'équations différentielles stochastiques (E.D.S) (3.1) à la valeur initiale ξ.

3.4.1 Stabilité en probabilité

Définition 3.4.1.

1) La solution triviale de l'équation (E.D.S) (3.1) *est dite stable en probabilité ou stochastique ment stable pour* $t \geq 0$ *si pour tout* $\xi > 0$ *on a :*

$$\lim_{\xi \to 0} P\left\{\sup_{t\geq 0} \mid X(t) \mid\right\} = 0.$$

2) On dit que la solution triviale est asymptotiquement stochastique ment stable si elle est stochastique ment stable et :

$$\lim_{\xi \to 0} P\left\{\sup_{t\to\infty} \mid X(t) \mid = 0\right\} = 1$$

3) On dit que la solution triviale est asymptotiquement stochastique ment stable dans le large s'il est stochastique ment stable et pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T,0];\mathbb{R})$

on a :

$$P\left\{\lim_{t\to\infty} X(t) = 0\right\} = 1.$$

Définition 3.4.2.

La solution triviale de équation (E.D.S) (3.1) *est dite presque sûrement exponentiellement stable si :*

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{1}{t} e^{|X_t|} < 0$$

pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T,0],\mathbb{R})$.

3.4.2 Stabilité du p^{em} moment

Définition 3.4.3.

Soit $p \geq 2$ on dit la solution de (E.D.S) (3.1) est stable du p^{em} moment si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tq :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\geq 0} \mid X(t) \mid\right) \quad \mid \xi \mid < \delta.$$

Définition 3.4.4.

Soit $p \geq 2$ on dit la solution de (E.D.S) (3.1) *est asymptotiquement stable du p^{em} moment si stable du p^{em} moment et pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T,0],\mathbb{R})$ on a :*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left(\sup_{t\geq T} \mid X(t) \mid\right) = 0.$$

3.4.3 Stabilité exponentielle du p^{em} moment

Définition 3.4.5.

La solution triviale de l'équation (E.D.S) (3.1) *est dite exponentiellement stable du p^{em} moment s'il existe deux constantes positives λ et C telle que :*

$$\mathbb{E} \mid X_t \mid^p \leq C \mid X_0 \mid^p e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0.$$

pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T,0];\mathbb{R})$.
Si $p = 2$ cette solution est dite exponentiellement stable de moyenne carré.

Théorème 3.4.1.

On supposons que les conditions (H_1) *et* (H_2) *détiennent. Alors, l'équation* (3.8) *est asymptotiquement stable du moyenne carré si*

$$4M_g^2[\mid (-\mathcal{A}^{-\beta}) \mid^2 + V(\alpha,\beta)\left(\frac{\Gamma^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right) + 4\alpha^p M^p L_1^2[L^2 + L'] < 1$$

où :$V(\alpha,\beta) = \alpha^2\Gamma^2_{1+\beta}C^2_{1-\beta} \mid \Gamma_{1+\alpha\beta}$ *lorsque $g \equiv 0$, $\quad p = 2$ se réduit que la forme*

$$\begin{cases} {}^cD_0^\alpha[X(t) + g(t, x(t-\tau(t)))] = \mathbf{A}X(t) + f(t, x(t-\tau(t))) + \sigma(t, x(t-\tau(t)) + \frac{dW}{dt} \quad t \geq 0 \\ X_0 = \xi(0) \in \mathbf{B}([m(0),0], H). \end{cases} \tag{3.8}$$

Exemple

Considérons l'équation différentielle partielle fractionnée stochastique non linéaire avec retard infini sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{c}D[u(t,y) + \hat{g}(t,u(t-\tau,y))] = \frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2} + \hat{f}(t,u(t-\tau,y)) + \hat{\sigma}(t,u(t-\tau),y)\frac{dW}{dt} \\ \text{u(t, 0)} = \text{u(t, } \pi) = 0 \\ \text{u(t, y)} = \phi(t,y) \quad y \in [0;\pi], t \leq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

et où $W(t)$ désigne un processus de Wiener cylindrique standard et un mouvement brownien un-dimensionne standard, pour écrire le système (3.9) à la forme (3.8), on considère l'espace $H = K = L^2[0,\Pi]$, on définie l'opérateur $\mathcal{A}(\mathcal{R}) \to \mathcal{R}$: , on considère l'espace $H = K = L^2[0,\Pi]$, on définie l'opérateur $\mathcal{D}(A) \subset H \to H$ avec $\mathcal{A}w = w''$ dans le domaine $\mathcal{D}(A) = \{w \in X$;w ,$'$ est absolument continue $w'' \in X$, $w(0) = w(\pi) = 0$ $\mathcal{A}w = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(w, w_n)w_n$, $w \in \mathcal{D}(A)$
où $w_n(s) = \sqrt{2}\sin(ns)$, $n = 1, 2, ...$est l'ensemble orthogonal de vecteurs propres de $\mathcal{A}$. On sait que $\mathcal{A}$ un générateur de semi-groupe analytique compact $\mathcal{S}(t)$, $t \geq 0$ dans X et

$$\mathcal{S}(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}(w, w_n)w_n.$$

Il est bien connu que $\mathcal{S}(t) \leq e^{-\Pi^2 t}$, on prend $p = 2$, $M = 1$ on peut obtenir l'inégalité

$$4[|\ (-\mathcal{A}^{-\beta})\ |^2 + V(\alpha,\beta)(\frac{\pi^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}) + \alpha^2 L_1^2(L^2 + L')] < 1.$$

. De plus, si on suppose que des conditions appropriées de $\hat{g}$, $\hat{f}$ et $\hat{\sigma}$ pour vérifier les hypothèses de Théorème (3.4.1), on peut conclure que la solution milde de (3.9) est asymptotiquement stable du moyenne carré.

Conclusion

Le formalisme de la dérivation fractionnaire consiste á généraliser la notion de la dérivation aux ordres non entiers. L'étude de quelques phénomène en sciences physiques et en sciences pour l'ingénieur ont fait apparaître l'intégration d'ordre un demi dans les équations de Chaleur. Dès lors, les développements ont été nombreux et différentes définitions de la dérivation non entier ont été établies.
Nous avons utilisé le calcul stochastique pour démontrer l'existence, l'unicité, et la stabilité asymptotique de la solution.

Bibliographie

[1] Abi ayad. I, *Introduction aux équations différentielles stochastiques*, Mémoire Master, Université Aboubkr belkaid-Tlemcen 2012.

[2] Bao. J, Hou. Z and Yuan. C, *"Stabilité in distribution of mild solution to stochastique* partial différentielle équations", Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 138, no. 6, pp.2169-2180, 2010.

[3] Belhout Ali, *Équation différentielle stochastique et Application*, Mémoire Master UNIVERSITÉ DE MHAMED BOUGUERRA Boumerdes 2017

[4] Benchohra. M, Graef. J. R and Hamani. S, *"Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations"*, Appl. Anal. 8, 851-863, 7-2008.

[5] J.Berton, *Calcul stochastique*, M2 mathématiques, Université de Rennes 1, 2014.

[6] Bouleau. N, *Processus stochastiques et applications, Hermann, éditeurs des sciences et des arts*, numéro d'édition 6406, imprimeire Barnéoud, France, 9-2004.

[7] Chang. Y.-K,Zhao. Z.-H, N'Guérékata. G. M and Ma. R, *"Stepanov-like almost automorphy for stochastic processes and applications to stochastic differential equations,"* Nonlinear Analysis : Real World Applications, vol. 12, no. 2, pp. 1130-1139, 2011.

[8] Chen. H, *"Impulsive-integral inequality and exponential stability for stochastic partial differential equations with delays"* ,Statistics and Probability Letters, vol. 80, no. 1, pp. 50-56, 2010.

[9] Diethelm. K and Freed. A. D, *On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, In Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties* (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J.Werther, Eds), pp 217-224, Springer- Verlag, Heidelberg, 1999.

[10] El-Borai. M. M, Moustafa. O. L and Ahmed. H. M, *"Asymptotic stability of some stochastic evolution equations "* Applied Mathematics and Computation, vol. 144, no. 2-3, pp. 273-286, 2003.

[11] J.F.Le Gall, *Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, 2013.

[12] Ishak. D, Abdelouaheb. A and Ahcene. D,*"Stability by krasnoselskii's theorem in totally nonlinear neutral differential eguations "* Opuscula Math. 33, no. 2 pp.255- 272, 2013.

[13] Leulmi. S, *Inference statistique dans les modeles lineaires a temps continu Applications* aux modèles carma, Mémoire Magistere, Université mentouri cnstantine, 2008- 2011.

[14] Milstein. G. N. and Nevelson. M. B, *Stochastic stability of differential equations* Second Edition,Moscow, 3- 2011.

[15] Zhou.Y, and Jiao.F, *"Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations"* Computers and Mathematics with Applications, vol. 59, no. 3, pp. 1063- 1077, 2010.

Résumé

Dans le présent travail, nous avons exposé les différentes définitions et propriétés

de la dérivée d'ordre fractionnaire, les définitions et les conditions d'existence

et de stabilité de solution des équations différentielles stochastiques. Comme application, nous avons donné une étude sur l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique

d'une équation différentielle stochastique neutre d'ordre fractionnaire avec retard infini.

Mots clés :

Mouvement brownien, équation différentielle stochastique d'ordre fractionnaire, processus stochastique, processus d'Itô, stabilité.

Abstract :

In the present work we have described the different definitions and properties of the fractional derivative, the definition and the conditions of the existence and stability of the stochastic fractional differential equations. As an application, we have given a study on the existence, unicity and asymptotic stability of a nonlinear stochastic fractional differential equation with infinite.

Keywords :

Brownian motion, fractional order stochastic differential equation, , stochastic processes, Ito processes, mild solutions, stability.

ملخص:

في العمل الحالي، كشفنا عن مختلف التعريفات والخصائص لمشتق الترتيب الكسري، وتعريفات وشروط وجود واستقرار حل المعادلات التفاضلية العشوائية. كتطبيق لمعادلة، قدمنا دراسة عن وجود ووحدانية، واستقرار مقاربات تفاضلية عشوائية لترتيب كسور مع تأخير لانهائي.

الكلمات المفتاحية :

الحركة البروانية ، المعادلات التفاضلية العشوائية لترتيب الكسري، العملية العشوائية، العملية، الاستقرار.