الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de MILA

Centre Universitaire

Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie — Département de Mathématiques et Informatique

Une introduction à la théorie des distributions (Deuxième Partie)

BOUDJEDAA BADREDINE

(COURS DE MASTER MATHS)

Année Universitaire : 2018/2019

Table des matières

Cette deuxième partie du cours de la théorie des distributions complète d'une manière exhaustive les notions déjà données dans le polycopié édité sous le titre "Une Introduction à la Théorie des Distributions" sur la page elearning de l'université Med Saddik Ben Yahia - Jijel au lien suivant : "http ://elearning.univ-jijel.dz/elearning/pluginfile.php/4625/mod_resource/content/10/Cours-Distributions-Boudjedaa.pdf". On aborde, dans cette deuxième partie, des notions telles que le produit tensoriel, le produit de convolution des distributions et on définit l'espace de Schwartz ainsi que les distributions tempérées. On termine enfin par définir et donner les propriétés essentielles de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

On estime que toutes les notions données dans la première partie ou la deuxième partie de ce cours constituent un outil essentiel et fondamental, aux étudiants de Master de mathématiques appliquées et aux étudiants des sciences physiques, qui leur permettra de poursuivre leurs études sans difficulté là où ils doivent utiliser des notions de la théorie des distributions.

Le lecteur intéressé par plus de détails sur les distributions pourra consulter l'une des références ci-après, qui sont les principales références de ce cours :

1- L SCHWARTZ , Théorie des Distributions. Hermann, 1966, Paris.

2- L SCHWARTZ, Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, 1983, Paris.

3- V. VLADIMIROV, Distributions en Physique Mathématique. Edition Mir, 1979, Moscou.

4- C ZUILY, Eléments de Distributions et d'Equations aux Dérivées Partielles. Dunod, 2002, Paris.

5- C ZUILY, Problems in Distributions and Partial Differential Equations. Hermann, 1988, Paris.

6- R S PATHAK, A Course in Distribution Theory and Applications. Alpha Science, 2001, UK.

7- F HIRSCH - G LACOMBE, Eléments d'Analyse Fonctionnelle. Dunod, 1999, Paris.

Notations

Fixons d'abord quelques notations qu'on utilisera tout le long de ce cours.

- Si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note : $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

- Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note aussi : $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$

  et $ax = (ax_1, ..., ax_n)$, $a \in \mathbb{R}$.

- Un élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est appelé multi-indice :

  Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ (la longueur de α)

  et $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$ et pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$.

- Pour $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$ on note $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_1 \leq \beta_1, ..., \alpha_n \leq \beta_n$. On pose aussi :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!}.$$

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on écrit : $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}...(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$.

- Pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $C(\Omega)$ où $C^0(\Omega)$ (resp. $C^1(\Omega)$) l'espace des fonctions continues (resp. continûment différentiables) sur Ω à valeurs réelles ou complexes. Si $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,$ on pose $C^k(\Omega) = \left\{ u \in C^{k-1}(\Omega) : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), \quad i = 1, ..., n \right\}$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.

- Pour $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ désigne l'espace des "classes" de fonctions f p-intégrables sur Ω (un ouvert de $\mathbb{R}^n$). $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f(x)|^p \, dx.$$

- Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des "classes" de fonctions f mesurables sur Ω qui sont essentiellement bornées supérieurement sur Ω. $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega ess\, |f(x)| = \inf \{c \ / \quad |f(x)| \leq c \ \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

Chapitre 1

PRODUIT TENSORIEL ET PRODUIT DE CONVOLUTION DES

DISTRIBUTIONS

Dans toute la suite il est préférable que le lecteur soit familiarisé avec les notations et les notions déjà données dans la première partie de ce cours.

1.1 Produit tensoriel des distributions

Soient $\Omega_1,\ \Omega_2$ deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^{n_1},\ \mathbb{R}^{n_2}$.

Définition $1-1$

Pour $u_j \in C^0(\Omega_j),\ j=1,\ 2$, on définit la fonction $u_1 \otimes u_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par

$$(u_1 \otimes u_2)(x,\ y) = u_1(x)u_2(y) \quad , \quad \forall (x,\ y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \ ; \tag{1.1}$$

que l'on lit " u_1 tensoriel u_2".

Alors $u_1 \otimes u_2 \in C^0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et pour $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$ on a

$$\langle u_1 \otimes u_2\ ,\ \varphi \rangle = \iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} u_1(x)u_2(y)\varphi(x,\ y)dxdy \tag{1.2}$$

d'après le théorème de $Fubini$ on peut déduire que

$$\begin{aligned}\langle u_1 \otimes u_2 \ , \ \varphi\rangle &= \int\limits_{\Omega_1} u_1(x) \left(\int\limits_{\Omega_2} u_2(y)\varphi(x, \ y)dy \right) dx \\ &= \langle u_1 \ , \ \langle u_2 \ , \ \varphi(x, \ .)\rangle\rangle \,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

En particulier si $\varphi(x, \ y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ où $\varphi_j \in D(\Omega_j), \ j = 1, \ 2$, on aura alors :

$$\langle u_1 \otimes u_2 \ , \ \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle = \langle u_1 \ , \ \varphi_1\rangle \langle u_2 \ , \ \varphi_2\rangle \,. \tag{1.4}$$

On peut, donc, généraliser cette opération aux distributions.

Théorème $\mathbf{1-1}$ ($Définition$)

Soit $f_j \in D'(\Omega_j), \ j = 1, \ 2$. Il existe une unique distribution $f \in D'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que, pour toute fonction $\varphi_j \in D(\Omega_j) \ \ j = 1, \ 2$, on ait

$$\langle f \ , \ \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle = \langle f_1 \ , \ \varphi_1\rangle \langle f_2 \ , \ \varphi_2\rangle \,. \tag{1.5}$$

De plus, pour $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$ on a

$$\langle f \ , \ \varphi\rangle = \langle f_1 \ , \ \langle f_2 \ , \ \varphi(x, \ .)\rangle\rangle = \langle f_2 \ , \ \langle f_1 \ , \ \varphi(., \ y)\rangle\rangle \,. \tag{1.6}$$

Si $f_j \in \mathcal{E}'(\Omega_j), \ j = 1, \ 2$, on a les mêmes formules pour $\varphi \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

On note ainsi $f = f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1$ et f s'appelle le produit tensoriel des distributions f_1 et f_2.

Exemples ($et\ remarques$)

(i) Soit $a_j \in \Omega_j, \ j = 1, \ 2$ et $f_j = \delta(x_j - a_j), \ j = 1, \ 2$, alors $f_1 \otimes f_2 = \delta(x - a)$ où $a = (a_1 \ , \ a_2)$.

(ii) Si $\quad f_1 \in D'(\Omega_1)$ et $\quad f_2 \in D'(\Omega_2)$ alors on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f_1 \otimes f_2) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_k}) \otimes f_2 \ , \ \ \forall k, \ k = \overline{1, n_1} \ ; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_l}(f_1 \otimes f_2) = f_1 \otimes (\frac{\partial f_2}{\partial y_l}) \ , \ \ \forall l, \ l = \overline{1, n_2} \ . \tag{1.8}$$

Par exemple, si $H(t)$ désigne la fonction de $Heaviside$ sur $\mathbb{R}$, alors pour $x = (x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}(H(x_1) \otimes H(x_2) \otimes ... \otimes H(x_n)) = \delta_{x_1} \otimes \delta_{x_2} \otimes ... \otimes \delta_{x_n} = \delta(x). \tag{1.9}$$

(iii) Soit $\ f \in D'(\Omega_1)$ et $\ g \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$. Soit $\chi \in D(\Omega_2), \ \ \chi = 1$ dans un voisinage du support de g. Alors pour $\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$ on a $\langle f \otimes g, \ \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \ \chi\varphi \rangle$.

En effet

$$\langle f \otimes g, \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \langle g \ , \ \varphi(x, \ .) \rangle \rangle = \langle f \ , \ \langle g \ , \ \chi\varphi(x, \ .) \rangle \rangle = \langle f \otimes g, \ \chi\varphi \rangle \ . \tag{1.10}$$

Ceci montre que l'on peut prolonger $\ f \otimes g \ $ aux fonctions $\ \varphi \in C^{\infty}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telles que $\chi\varphi \in D(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Enonçons maintenant un résultat de densité.

Lemme $\mathbf{1-1}$ (*Densité*)

L'espace des fonctions de la forme

$$\varphi(x, \ y) = \sum_{j=1}^{p} \psi_j \otimes \theta_j(x, \ y) = \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x)\theta_j(y) \tag{1.11}$$

où $\ \psi_j(x) \in D(\mathbb{R}^{n_1})$ et $\ \theta_j(y) \in D(\mathbb{R}^{n_2})$, est dense dans $D(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$.

Le produit tensoriel des distributions possède quelques propriétés intéressantes.

Propriété 1 (*Commutativité*)

Le produit tensoriel de deux distributions est commutatif, i.e. pour $f \in D'(\mathbb{R}^{n_1})$ et $g \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$ on a

$$f \otimes g = g \otimes f \ . \tag{1.12}$$

Propriété 2 (*Associativité*)

Pour $f(x) \in D'(\mathbb{R}^{n_1})$, $g(y) \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$ et $h(z) \in D'(\mathbb{R}^{n_3})$ on a

$$f\ (x) \otimes [g(y) \otimes h(z)] = [f(x) \otimes g(y)] \otimes h(z). \tag{1.13}$$

Propriété 3 (*Continuité*)

Si $f_k \longrightarrow f$ dans $D'(\mathbb{R}^{n_1})$, quand $k \to +\infty$, et $g \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$, alors

$$f_k \otimes g \longrightarrow f \otimes g \text{ ,quand } k \to +\infty \text{ , dans } D'(\mathbb{R}^{n_1+n_2}). \tag{1.14}$$

Propriété 4 (*Support*)

Soient $f(x) \in D'(\mathbb{R}^{n_1})$ et $g(y) \in D'(\mathbb{R}^{n_2})$ alors

$$supp(f \otimes g) = supp(f) \times supp(g). \tag{1.15}$$

1.2 Produit de convolution des distributions

Le produit de convolution de deux fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}^n$, est défini par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \tag{1.16}$$

qui n'a de sens que si l'intégrale (1.16) existe. Par le changement de variable $z = x - y$

il s'ensuit que

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-z)g(z)dz = (g*f)(x)\ , \qquad (1.17)$$

c'est-à-dire que le produit de convolution, s'il existe, est par définition commutatif.

Si on suppose de plus que f et g sont continues et que l'une d'elles est à support compact alors le produit de convolution $f*g$ existe et est continu, donc il représente une distribution et on a

$$\begin{aligned}
\langle f*g,\ \varphi\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f*g(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \varphi\in D(\mathbb{R}^n) \qquad (1.18)\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right]\varphi(x)dx\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(x)dx\right]dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+y)dx\right]dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy\\
&= \langle f(x), \langle g(y),\ \varphi(x+y)\rangle\rangle\\
&= \langle f(x)\otimes g(y),\ \varphi(x+y)\rangle\,. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Ce qui motive la définition de la convolution de deux distributions f et g par

$$\langle f*g,\ \varphi\rangle = \langle f(x)\otimes g(y),\ \varphi(x+y)\rangle = \langle f(x), \langle g(y),\ \varphi(x+y)\rangle\rangle \quad , \ \varphi\in D(\mathbb{R}^n). \quad (1.20)$$

Mais ici il faut remarquer que cette définition peut ne pas avoir de sens (n'est pas toujours valable) car le support de $\varphi(x+y)$ n'est pas borné. En effet si le support de $\varphi(x)$ est contenu dans

$$\{x \in \mathbb{R}^n \diagup \ |x| \leq a \ , \ a > 0\}$$

alors le support de $\varphi(x+y)$ est contenu dans la bande infinie

$$\{(x, \ y) \diagup \ |x+y| \leq a \ , \ a > 0\} \subset \{(x, \ y) \diagup \ |x_i + y_i| \leq a \ , \ i = 1, \ 2, ..., n\} \, .$$

Donc on peut donner un sens à la définition (1.20) si on suppose que l'une des deux distributions est à support compact. En effet puisque on sait que

$$supp(f \ \otimes g) = supp(f \ ) \times supp(g)$$

alors $supp(f \ \otimes g) \cap supp(\varphi(x+y))$ est un borné pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Par exemple si

$$supp(\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \diagup \ |x| \leq a \ , \ a > 0\} \quad \text{et} \quad supp(f \ ) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \diagup \ |x| \leq b \ , \ b > 0\}$$

alors
$$\begin{aligned}[supp(f \ ) \times supp(g)] \cap supp(\varphi(x+y)) &= \{(x, \ y) \diagup \ |x| \leq b \ , \ |x+y| \leq a \ \} \\ &\subset \{(x, \ y) \diagup \ |x_i| \leq b \ , \ |x_i + y_i| \leq a \ \ , \ \ i = 1, \ 2, ..., n\}\end{aligned}$$

qui est bien un borné.

Alors si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ et soit $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$, $\chi(x) = 1$ dans un voisinage du support de f et égale à zéro à l'extérieur d'un voisinage plus large. Alors $\theta(x, \ y) = \chi(x)\varphi(x+y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$, pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\langle f * g, \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \langle g \ , \ \chi(x)\varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle f \ , \ \chi(x) \langle g \ , \ \varphi(x+y) \rangle \rangle \tag{1.21}$$

puisque la valeur de la distribution f dépend de la valeur de la fonction-test φ au voisinage du support de la distribution et n'est pas altérée par un changement de valeurs de φ à l'extérieur de tout voisinage du support de f, c'est-à-dire la définition (1.21) est indépendante du choix de $\chi(x)$ et donc on peut écrire

$$\langle f * g,\ \varphi\rangle\ :\ = \langle f\ ,\ \langle g\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle\,. \tag{1.22}$$

Donc on a le résultat suivant :

Théorème $1-2$

Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in D'(\mathbb{R}^n)$, alors le produit de convolution $f * g$ donné par (1.22) est une distribution de $D'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

Pour $\theta(x,\ y)$ et $\chi(x)$, définies plus haut, on a

$$\langle f * g,\ \varphi\rangle = \langle f\ \otimes g\ ,\ \theta(x,\ y)\rangle\quad,\ \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{1.23}$$

Puisque le produit tensoriel est une distribution alors le produit de convolution $f * g$ est une application linéaire sur $D(\mathbb{R}^n)$, et il ne reste qu'à montrer que $f * g$ est une application continue sur $D(\mathbb{R}^n)$. Soit $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $D(\mathbb{R}^n)$ alors la suite $\theta_k(x,\ y) = \chi(x)\varphi_k(x+y)$ est une suite de $D(\mathbb{R}^{2n})$ qui converge vers zéro dans $D(\mathbb{R}^{2n})$, d'où

$$\langle f * g,\ \varphi_k\rangle = \langle f\ \otimes g\ ,\ \theta_k(x,\ y)\rangle \to 0\ ,\ k \to +\infty\ ; \tag{1.24}$$

i.e. $f * g$ est application continue sur $D(\mathbb{R}^n)$ et donc $f * g \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple

Montrons que

$$\delta * f = f * \delta = f \tag{1.25}$$

où δ est la distribution delta de *Dirac*.

En effet puisque δ est à support compact alors le produit de convolution $\delta * f$ a bien un sens pour tout $f \in D'(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ alors d'après la définition (1.22)

$$\langle \delta * f,\ \varphi \rangle\ = \langle \delta(x),\ \langle f(y)\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle =\ \langle f(y)\ ,\ \varphi(y)\rangle\ \ ; \tag{1.26}$$

de même on a

$$\langle f * \delta,\ \varphi \rangle\ = \langle f(x),\ \langle \delta(y)\ ,\ \varphi(x+y)\rangle\rangle =\ \langle f(x)\ ,\ \varphi(x)\rangle\,. \tag{1.27}$$

La convolution possède aussi quelques propriétés semblables à celles du produit tensoriel.

<u>**Propriété 1**</u> (*Commutativité*)

Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ le produit de convolution de f et g, $f * g$, est commutatif i.e.

$$f * g = g * f. \tag{1.28}$$

<u>**Propriété 2**</u> (*Support*)

Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ alors

$$supp(f\ * g) \subset supp(f\ ) + supp(g). \tag{1.29}$$

<u>**Propriété 3**</u> (*Associativité*)

Pour f, g et h $\in D'(\mathbb{R}^n)$ telles que deux d'entre elles au moins sont à support compact. Alors

$$f\ * [g * h] = [f * g] * h. \tag{1.30}$$

<u>**Propriété 4**</u> (*Dérivation*)

Si la convolution $f * g$ existe alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$D^\alpha\,(f * g) = D^\alpha(f) * g = f * D^\alpha(g). \tag{1.31}$$

Propriété 5 (*Continuité*)

Dans certains cas la convolution est un opérateur continu. Le théorème suivant donne deux cas.

Théorème $1-3$

(i) Soient $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $D'(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers g, quand $k \to +\infty$, dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f * g_k \to f * g \text{ , quand } k \to +\infty, \text{ dans } D'(\mathbb{R}^n). \tag{1.32}$$

(ii) Soient $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $D'(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans un compact K qui converge vers g dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f * g_k \to f * g \text{ , quand } k \to +\infty, \text{ dans } D'(\mathbb{R}^n). \tag{1.33}$$

1.2.1 Régularisation des distributions

La convolution $f * \varphi$ d'une distribution $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ avec une fonction-test $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ transforme cette distribution en une fonction de classe C^∞. Ce procédé est appelé "Régularisation des distributions".

Enonçons d'abord quelques résultats qu'on utilisera par la suite.

Lemme $1-2$

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $\lambda \in I$, soit une fonction $x \mapsto \varphi(x, \lambda)$ appartenant à $D(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et supposons que cette fonction vérifie :

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall \ell = 0, 1, ..., m$, la fonction $(x, \lambda) \mapsto D_x^\alpha D_\lambda^\ell \varphi(x, \lambda)$ existe et est continue sur $\Omega \times I$.

(ii) $\forall \lambda_0 \in I$, $\exists\ \delta > 0$, $\exists\ \mathbf{K} \subset \Omega$ compact tels que $supp(D_\lambda^\ell \varphi(x, \lambda) \subset \mathbf{K}$, pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \delta\ ,\ \lambda_0 + \delta]$ et tout $\ell = 0, 1, ..., m$.

Alors pour tout $f \in D'(\Omega)$, la fonction $G(\lambda) = \langle f(x)\ ,\ \varphi(x,\ \lambda)\rangle$ est de classe C^m sur I et on a

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\ell} G(\lambda) = \left\langle f(x)\ ,\ D_{\lambda}^{\ell}\varphi(x,\ \lambda)\right\rangle,\ \ell = 0,\ 1, ...,\ m,\ \forall\lambda \in I. \tag{1.34}$$

Remarque 1 − 1

Dans le cas où f est à support compact la condition (ii) n'est pas nécessaire.

Corollaire 1 − 1

Soient Θ un ouvert de $\mathbb{R}^{n_1}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n_2}$, φ un élément de $D(\Theta \times \Omega)$ et $f \in D'(\Omega)$. Alors

$$\left\langle f(x)\ ,\ \int_{\Theta} \varphi(t,\ x)dt \right\rangle = \int_{\Theta} \langle f(x)\ ,\ \varphi(t,\ x)\rangle\, dt. \tag{1.35}$$

Théorème 1 − 4

Soient $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$, alors $f * \psi$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et on a

$$f * \psi(x) = \langle f(y)\ ,\ \psi(x-y)\rangle \tag{1.36}$$

Preuve

D'après le *lemme* 1 − 2 $\langle f(y)\ ,\ \psi(x-y)\rangle$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Montrons maintenant la relation (1.36). En effet

$$\langle f * \psi\ ,\ \varphi\rangle = \langle f(y),\ \langle \psi(z)\ ,\ \varphi(z+y)\rangle\rangle,\quad \text{pour } \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\ ; \tag{1.37}$$

alors

$$\langle f * \psi\ ,\ \varphi\rangle = \left\langle f(y),\ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\ \varphi(z+y)dz \right\rangle = \left\langle f(y),\ \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)\ \varphi(x)dx \right\rangle, \tag{1.38}$$

comme la fonction $(x,\ y) \mapsto \psi(x-y)\ \varphi(x)$ est une fonction de $D(\mathbb{R}^{2n})$, on peut appliquer le *corollaire* $1-1$ et on en déduit alors

$$\langle f * \psi\ ,\ \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle f(y),\ \psi(x-y)\ \varphi(x) \rangle\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle f(y),\ \psi(x-y) \rangle\ \ \varphi(x) dx$$
$$= \langle \langle f(y),\ \psi(x-y) \rangle\ \ ,\ \varphi(x) \rangle\,. \tag{1.39}$$

Maintenant on est en mesure de démontrer le résultat de densité suivant :

Théorème $1-5$

$D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

Il faut montrer que pour toute distribution $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ il existe une suite de fonctions-test $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

Soit

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}) & \text{si} \quad |x| < 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases} \quad , \tag{1.40}$$

qui est bien une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ et soit aussi

$$\eta_k(x) = \frac{k^n \rho(kx)}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx}\ . \tag{1.41}$$

Il est facile de vérifier que la suite $\{\eta_k(x)\}$ est une suite de fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers δ (delta de *Dirac*) dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Donc si $f \in D'(\mathbb{R}^n)$, la suite $\{f * \eta_k\}$, des régularisations de f, est dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par continuité de la convolution (**Théorème $1-3$**) elle converge vers $f * \delta = f$, , quand $k \to +\infty$, dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

Puisque les $f * \eta_k$ ne sont pas à support borné, on choisit alors $\psi(x)$ une fonction de $D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$, $\psi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$ et on définit :

$$f_k(x) = \psi(\frac{x}{k}) \, [f * \eta_k(x)] \quad , \quad k = 1,\ 2, ... \tag{1.42}$$

qui sont des fonctions à support compact de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i.e. de $D(\mathbb{R}^n)$.

En considérant les $\eta_k(x)$ comme étant des distributions dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ avec les supports contenus dans $|x| \leq \frac{1}{k}$, alors pour toute fonction-test φ on a $\psi(\frac{x}{k})\varphi(x) = \varphi(x)$ pour k assez grand.

Donc

$$\begin{aligned} \langle f_k(x)\ ,\ \varphi(x) \rangle &= \left\langle \psi(\frac{x}{k}) \, [f * \eta_k(x)]\ ,\ \varphi(x) \right\rangle = \left\langle f * \eta_k(x)\ ,\ \psi(\frac{x}{k})\varphi(x) \right\rangle \\ &= \langle f * \eta_k(x)\ ,\ \varphi(x) \rangle \quad \text{pour } k \text{ assez grand ,} \end{aligned} \tag{1.43}$$

et alors $\quad \langle f_k(x)\ ,\ \varphi(x) \rangle \to \langle f * \delta(x)\ ,\ \varphi(x) \rangle = \langle f(x)\ ,\ \varphi(x) \rangle$ quand $k \to +\infty$.

1.2.2 Application aux équations différentielles linéaires

L'une des plus importantes utilisations de la théorie de la convolution est de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante

$$P(D)u = f \tag{1.44}$$

où $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et f est une distribution donnée.

On sait qu'une distribution E telle que $P(D)E = \delta$ est appelée solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D)$. Donc si E est connue, une solution de l'équation (1.44) est donnée par $E * f$, bien sûr si ce produit de convolution existe. On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 1 − 6</u>

Soit $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ et E une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D)$. Supposons que $E * f$ existe. Alors $u_0 = E * f$ est solution de l'équation (1.44). Si u est une autre solution de l'équation (1.44) alors $u = u_0 + v$ où v est solution de l'équation homogène

$$P(D)v = 0. \tag{1.45}$$

<u>Preuve</u>

En utilisant les propriétés de la convolution on a :

$$P(D)u_0 = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (E * f) = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha (E) \right] * f = \delta * f = f \ , \tag{1.46}$$

donc $u_0 = E * f$ est solution de l'équation (1.44). En plus pour toute autre solution u de l'équation (1.44) on a

$$P(D)(u - u_0) = 0. \tag{1.47}$$

1.3 Exercices

<u>Exercice 1</u>

Soit $a(x)$ $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Montrer que

$$a(x) \left[f(x) \otimes g(y) \right] = \left[a(x) f(x) \otimes g(y) \right]$$

où $f(x) \in D'(\mathbb{R}^m)$, $g(y) \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 2

Montrer que pour $f(x) \in D'(\mathbb{R}^m)$, $g(y) \in D'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$(f \otimes g)(x+h\ ,\ y) = [f(x+h) \otimes g(y)] \quad .$$

Exercice 3

Soit $f(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $g(y) \in D'(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$x^k(f * g) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (x^j f) * (x^{k-j} g) \quad .$$

Exercice 4

Soit $f(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $g(y) \in D'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ on a

$$e^{a.x}(f * g) = (e^{a.x} f) * (e^{a.x} g) \quad .$$

Exercice 5

Soit pour $k \geq 2$

$$E_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H\ (x) \quad ,$$

1) Montrer que E_k est une solution de l'équation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} E = H\ (x) \quad .$$

2) Déduire une solution élémentaire de $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$ i.e. une solution de l'équation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k E = \delta \quad ; \quad \text{où} \ \ \delta \text{ est la distribution delta de Dirac sur } \mathbb{R}.$$

(Ind : $x^p \delta^{(q)} = 0 \quad$ si $\ p > q$).

3) Donner une solution de l'équation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k E = f \ \ ; \ \text{où } f \text{ est la distribution à support compact sur } \mathbb{R}.$$

Chapitre 2

DISTRIBUTIONS TEMPEREES ET TRANSFORMATION DE FOURIER

Les distributions tempérées sont des généralisations des fonctions L^p, elles sont "bonnes" pour l'étude de la transformation de $Fourier$. Ce sont des fonctionnelles linéaires continues définies sur l'espace $\mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$ (espace de $Schwartz$) des fonctions C^∞ à décroissance rapide à l'infini. L'espace $\mathcal{S}'\ (\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées, le dual topologique de $\mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$, est un espace intermédiaire entre l'espace $\mathcal{E}'\ (\mathbb{R}^n)$ et l'espace $D'(\mathbb{R}^n)$ qui possède des propriétés très intéressantes qui ne sont pas vérifiées par d'autres espaces de distributions, en particulier l'invariance de cet espace par la transformation de $Fourier$.

2.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition $2-1$

L'espace de $Schwartz$, qu'on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, est l'espace de toutes les fonctions φ appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{2.1}$$

Remarque 2 − 1

1- l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2- Il est facile de voir que $\varphi(x) = e^{-a|x|^2}$, $a > 0$, est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mais la fonction $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+|x|^2}$ n'est pas un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2 − 1

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ muni de la famille des semi-normes

$$\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right| < +\infty \quad , \quad \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n \tag{2.2}$$

est un espace vectoriel métrisable et complet.

La convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ peut être caractérisée par

Proposition 2 − 1

Une suite de fonctions $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ $(\mathbb{R}^n)$ est dite convergente dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers zéro, quand $k \to +\infty$, si $\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi_k) \to 0$ quand $k \to +\infty$, $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$; ou encore une suite $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers φ, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si la suite $\{\varphi_k - \varphi\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans vers zéro, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Le lemme suivant donne une autre condition équivalente à la condition (2.1) donnée dans la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 2 − 1

Une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfait la relation (2.1) (i.e. φ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) si et seulement si

$$\tau_{m,\ \beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} D^\beta \varphi \right| < +\infty \quad , \forall m \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{2.3}$$

Preuve

Rappelons d'abord que $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ et notons que

$$|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}| = |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} ... |x_n|^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad |x_i| \leq |x| \ ,\ i = 1,\ 2, ..., n. \tag{2.4}$$

Alors il est facile de vérifier que

$$|x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}...|x_n|^{\alpha_n} \le |x|^{|\alpha|} \le \left(1+|x|^2\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} \le \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \quad , \; \forall\alpha, \; |\alpha| \le m. \tag{2.5}$$

Ainsi, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie la relation (2.3) alors φ verifie aussi la relation (2.1).

Réciproquement, supposons que φ vérifie la condition (2.1). Puisque on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|x|^{2k} = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\left(x_1^2\right)^{\alpha_1}\left(x_2^2\right)^{\alpha_2}...\left(x_n^2\right)^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}|x^\alpha|^2 \tag{2.6}$$

alors, pour $m \in \mathbb{N}$ on aura

$$\left(1+|x|^2\right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}|x|^{2k} = \sum_{k=0}^m\sum_{|\alpha|=k}\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}|x^\alpha|^2 \tag{2.7}$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^m\sum_{|\alpha|=k}\left[\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}\right]^{\frac{1}{2}}|x^\alpha|\right)^2 \tag{2.8}$$

et donc

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \le \sum_{k=0}^m\sum_{|\alpha|=k}\left[\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}\right]^{\frac{1}{2}}|x^\alpha| \tag{2.9}$$

par conséquent

$$\tau_{m,\,\beta}(\varphi) \le \sum_{k=0}^m\sum_{|\alpha|=k}\left[\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}\right]^{\frac{1}{2}}\gamma_{\alpha,\,\beta}(\varphi)\ . \tag{2.10}$$

Des résultats précédents il est facile de démontrer ces propriétés élémentaires.

Propriété 1

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, les applications

$$\varphi \hookrightarrow x^\alpha\varphi \qquad \text{et} \qquad \varphi \hookrightarrow D^\alpha\varphi$$

sont des applications linéaires et continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors , $x^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, car $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $x^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $x^\alpha\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et en plus si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta \in \mathbb{N}^n \tag{2.11}$$

alors d'après la formunle de *Leibniz*, on peut déduire qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta (x^\alpha \varphi(x))\right| < C_0 \sum_{\beta-\alpha\leq\nu\leq\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^{\sigma+\alpha+\nu-\beta} D^\nu \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta\ \in \mathbb{N}^n, \tag{2.12}$$

donc $x^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

La linéarité de l'application $\varphi \hookrightarrow x^\alpha\varphi$ est évidente et de la relation précédente (2.12) il est facile de vérifier que si $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quand $k \to 0$, alors $x^\alpha\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quand $k \to 0$, *i.e.* la continuité de l'application $\varphi \hookrightarrow x^\alpha\varphi$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

De même si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $D^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, car $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $D^\alpha\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et de plus si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta \in \mathbb{N}^n \tag{2.13}$$

alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta (D^\alpha \varphi(x))\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^{\beta+\alpha} \varphi(x))\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta\ \in \mathbb{N}^n, \tag{2.14}$$

donc $D^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

De même la linéarité de l'application $\varphi \hookrightarrow D^\alpha\varphi$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est évidente et la continuité se déduit directement de la relation (2.14).

Propriété 2

Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En effet, si $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors d'après la formunle de *Leibniz*, on peut déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta(\varphi_1(x)\ \varphi_2(x))\right| < C_1 \sum_{\nu\leq\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\nu \varphi_1(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^{\beta-\nu}\varphi_2(x)\right| < +\infty \quad ,\ \forall\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{N}^n, \tag{2.15}$$

c'est-à-dire $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Propriété 3

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)\quad ,\ 1 \leq p \leq +\infty$.

En effet, la première inclusion est évidente i.e. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, car si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\Bbbk = supp\ \varphi$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| = \sup_{x\in\Bbbk} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad ,\ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n\ , \tag{2.16}$$

car $\Bbbk$ est compact et la fonction $x^\alpha D^\beta\varphi(x)$ est de classe C^∞, $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$, et donc $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)\quad ,\ 1 \leq p \leq +\infty$. Il est assez clair que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ car si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad ,\ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{2.17}$$

Ainsi pour $|\alpha| = |\beta| = 0$ on a $\sup\limits_x |\varphi(x)| < +\infty$ c'est-à-dire que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Si $1 \leq p < +\infty$ et si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p\, dx \leq \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\right]^{p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \varphi(x)\right| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}} \quad < +\infty \tag{2.18}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq n+1$ et donc $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dans la suite nous donnerons quelques propriétés de l'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aussi importantes que les précédentes, que nous énoncerons sous forme de théorèmes.

Théorème $\mathbf{2-2}$

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec injection continue.

Preuve

Il faut démontrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ il existe une suite $\{\varphi_k\}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\rho(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\rho(x) = 1 \;\text{ si }\; |x| \leq 1 \;,\quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad\text{et}\quad \rho(x) = 0 \quad\text{si}\quad |x| \geq 2\;. \tag{2.19}$$

Alors pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $k = 1,\ 2, ...,$ on définit

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\rho(\frac{x}{k}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left|x^\alpha\left[D^\beta\varphi_k(x) - D^\beta\varphi(x)\right]\right| &= \left|x^\alpha\left[D^\beta\varphi(x)\rho(\frac{x}{k}) - D^\beta\varphi(x)\right]\right| \\ &= \left|x^\alpha D^\beta\left[\varphi(x)\left(1-\rho(\frac{x}{k})\right)\right]\right| \\ &= \left|x^\alpha \sum_{\nu\leq\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \nu\end{pmatrix} D^{\beta-\nu}\varphi(x) D^\nu\left(1-\rho(\frac{x}{k})\right)\right|. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Remarquons d'abord que

$$0 \leq 1-\rho(x) \;\leq |x|^2$$

car

$$1-\rho(x) = 0 \quad\text{si}\quad |x| \leq 1 \quad\text{et que}\quad 0 \leq 1-\rho(x) \;\leq 1 \quad\text{si}\quad |x| > 1,$$

c'est-à-dire que $0 \leq 1-\rho(\frac{x}{k}) \leq \frac{|x|^2}{k^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi donc pour tous les multi-indices $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right) \right| \leq \frac{1}{k^2} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left|x\right|^2 D^\beta \varphi \right| . \tag{2.21}$$

Sachant que pour tout multi-indice $\nu \in \mathbb{N}^n, |\nu| \geq 1$:

$$D^\nu (1 - \rho(\frac{x}{k})) = k^{-|\nu|} \rho^{(\nu)}(\frac{x}{k}) \to 0 \quad \text{quand } k \to +\infty \tag{2.22}$$

uniformément pour tout x dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ car

$$\left| D^\nu \left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right) \right| \leq k^{-|\nu|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| D^\nu \rho(\frac{x}{k}) \right| = k^{-|\nu|} \sup_{|x|\leq 2} \left| \rho^{(\nu)}(x) \right| \to 0 \ \text{ quand } k \to +\infty. \tag{2.23}$$

Alors

$$\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi_k - \varphi) \leq \frac{1}{k^2} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left|x\right|^2 D^\beta \varphi \right| + \sum_{\substack{\nu\leq\beta \\ |\nu|\geq 1}} \binom{\beta}{\nu} \gamma_{\alpha,\ \beta-\nu}(\varphi) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| D^\nu \left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right) \right| \to 0 \text{ quand } k \to +\infty. \tag{2.24}$$

D'où la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Montrons aussi que l'injection de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue i.e il faut montrer que la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En effet soit $\{\varphi_k\}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,alors toutes les fonctions $\varphi_k(x)$ s'annulent en dehors d'un domaine borné $|x| = R > 1$; et donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \varphi_k(x) \right| \leq R^{|\alpha|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| D^\beta \varphi_k(x) \right| \to 0 \ \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{2.25}$$

C'est-à-dire que la suite $\{\varphi_k\}$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2 – 3

L'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec injection continue.

Preuve

On sait déjà que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui implique que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ car on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Il reste à démontrer que l'injection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est continue. Soit $\{\varphi_k\}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ montrons qu'elle converge vers zéro dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Alors pour tout compact $\Bbbk \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$\sup_{\Bbbk} \left|D^\beta \varphi_k(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} D^\beta \varphi_k(x)\right| \to 0 \text{ lorsque } k \to +\infty \tag{2.26}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$, ce qui implique la convergence de $\{\varphi_k\}$ vers zéro dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2 – 4

L'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$ avec injection continue.

Preuve

On sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, et puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $1 \leq p < +\infty$.

Montrer que l'injection est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. Soit $\{\varphi_k\}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ montrons qu'elle converge vers zéro dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En effet d'après l'inégalité (2.18) on a

$$\|\varphi_k\|_p^p \leq C \ \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)|\right]^{p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \varphi_k(x)\right| \to 0 \ \ \text{, lorsque } k \to +\infty \ , \quad (2.27)$$

où $C = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n+1$.

2.2 L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition $2-2$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, où la continuité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est définie de la même manière que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, et les éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sont appelés les distributions tempérées.

Donc une application linéaire $f \ : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, \ \exists C > 0 \ : |\langle f \ ; \ \varphi\rangle| \ \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq l}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \qquad (2.28)$$

La convergence des suites dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est définie de la même manière que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition $2-3$

Une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est dite convergente vers f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\langle f_k \ , \ \varphi\rangle \to \langle f \ \ , \ \varphi\rangle$, $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quand $k \to \infty$.

Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\langle f \ \ , \ \varphi\rangle$ est bien définie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Il est assez clair que ça définit une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et puisque la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc $\langle f \ \ , \ \varphi_k\rangle \to 0$ quand $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i.e. f est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et par suite $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

De même si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors $\langle f \ ; \ \varphi \rangle$ est bien définie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et puisque la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et alors $\langle f \ , \ \varphi_k \rangle \to 0$ quand $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ce qu'on peut exprimer par le théorème suivant :

Théorème 2 − 5

On a les inclusions suivantes

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

et que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2 − 2

On peut voir par exemple que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace propre de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i.e. que l'inclusion de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est stricte.

En effet soit la série $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{k^2}\delta(t-k)$ qui est une série convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et qui définit une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, mais elle ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{k^2}\varphi(k) \tag{2.29}$$

puisque φ est à support compact et donc la série ne posséde qu'un nombre fini de termes. D'autre part, si on prend $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors la série (2.29) ne converge pas et donc $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Proposition 2 − 2

$L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, est un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

En effet tout élément $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$|\langle f \ \ , \ \varphi\rangle| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad (\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \text{ ; inégalité de } H\ddot{o}lder) , \tag{2.30}$$

car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$. En plus, d'après l'injection continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ i.e. si la suite $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors elle converge vers zéro dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ et d'après l'inégalité (2.30) on a $\langle f \ \ , \ \varphi_k\rangle \to 0$ quand $k \to \infty$. Alors f est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemples

(i) Tout polynôme $P(x) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, définit une distribution tempérée par :

$$\langle f \ \ , \ \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En effet

$$\begin{aligned} |\langle f \ \ , \ \varphi\rangle| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x)\varphi(x)dx\right| &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha\varphi(x)|\, dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} |\varphi(x)|\, dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha| \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx\right] \tau_{m+2n,\ 0}(\varphi) < \infty \end{aligned} \tag{2.31}$$

La continuité de f résulte de l'inégalité précédente (2.31), et la linéarité est évidente.

(ii) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)|\right] < \infty \tag{2.32}$$

une telle fonction s'appelle une fonction à croissance lente à l'infini ou fonction tempérée.

Cette fonction définit une distribution tempérée, en effet

$$\langle f \ , \ \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\langle f \ , \ \varphi\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)| (1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} |\varphi(x)| \, dx \quad , \ m \in \mathbb{N} \ , \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)|\right] \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{m}{2}+n} |\varphi(x)| (1+|x|^2)^{-n} dx \ , \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)|\right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx\right] \ \tau_{m+2n,\ 0}(\varphi). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité on peut facilement voir que f est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Toute dérivée au sens des distributions d'une fonction tempérée continue est encore une distribution tempérée. En effet, pour $g = D^\alpha f$, où f est une fontion tempérée, alors

$$\langle g \ , \ \varphi\rangle = (-1)^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad , \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

et la conclusion résulte de l'exemple précédent.

(iv) La fonction $f(x) = e^x \cos(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, n'est pas une fonction tempérée mais elle définit une distribution tempérée.

En effet, il est facile de voir qu'il n'existe pas un $m \in \mathbb{N}$ tel que $|x|^{-m} e^x \cos(e^x)$ soit bornée quand $x \to +\infty$.

Mais pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \cos(e^x)\varphi(x)dx\right| == \left|[\sin(e^x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)\varphi'(x)dx\right| ;$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x)\varphi'(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|^2)\,|\varphi'(x)|\,(1+|x|^2)^{-1}dx \quad ;$$

$$\leq \pi \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[(1+|x|^2)\,|\varphi'(x)|\right] \ , \qquad (2.34)$$

ce qui définit une distribution tempérée.

2.3 La transformation de *Fourier* dans l'espace $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$

Définition 2 – 4

La transformée de *Fourier* d'une fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\hat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\varphi(x)dx \ , \ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{où} \quad x\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k\xi_k. \qquad (2.35)$$

Il est clair que

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\,dx \ = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \ , \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \ , \qquad (2.36)$$

c'est-à-dire que $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De plus, si $\{\xi_k\}$est une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers ξ, alors

$$|\hat{\varphi}(\xi_k) - \hat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\exp(-ix\xi_k) - \exp(-ix\xi)|\,|\varphi(x)|\,dx \ . \qquad (2.37)$$

D'après le théorème de la convergence dominée de *Lebesgue*, le second membre de l'inégalité de (2.37) converge vers zéro quand $k \to +\infty$, et donc $\hat{\varphi}(\xi)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. En conclusion la transformée de *Fourier* d'une fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est une une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$.

En général, $\hat{\varphi}$ n'est pas intégrable. Par exemple la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \ ; \\ \\ 0 & \text{sinon} \qquad ; \end{cases}$$

alors $\hat{\varphi}(\xi) = 2\dfrac{\sin \xi}{\xi} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Mais si $\hat{\varphi}$ est intégrable on peut exprimer φ en fonction de $\hat{\varphi}$ par la formule de *Fourier* inverse

$$\varphi(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}\right)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \ , \ x \in \mathbb{R}^n \quad . \tag{2.38}$$

Quand f et $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a aussi $f \ \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, car $\hat{\varphi}$ est une fonction bornée et de plus on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\varphi(\xi)d\xi \right) dx \ , \tag{2.39}$$

d'après le théorème de $Fubini$ on aura donc

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)f(x)dx \right) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi) \ d\xi \tag{2.40}$$

qui est appelée formule de $Parseval$ de la transformée de *Fourier*.

Une autre formule qui se déduit directement de la formule précédente (2.40) est

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(-x)dx \ ; \tag{2.41}$$

d'où on aura immédiatement

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.42}$$

De la définition de la transformation de *Fourier* et des relations précédentes il est facile de déduire les propriétés suivantes.

Propriété 1 Si φ et $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(x) = (2\pi)^{-n} \left(\mathcal{F}\check{\varphi}(\xi)\right)(x) \quad , \quad \text{où} \quad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi). \tag{2.43}$$

Propriété 2 Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors

$$D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha \varphi)(\xi) = ((\widehat{-ix)^\alpha} \varphi)(\xi) \quad , \quad \text{où} \quad D_\xi^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} ... \partial \xi_n^{\alpha_n}} \quad . \tag{2.44}$$

Propriété 3 Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $D_x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour α un multi-indice de $\mathbb{N}^n$ alors

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi)(\xi) = \widehat{(D_x^\alpha \varphi)}(\xi) = (i\xi)^\alpha \ \hat{\varphi}(\xi) = , \quad \text{où} \quad D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \quad . \tag{2.45}$$

2.4 La transformation de *Fourier* dans l'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Pour pouvoir étendre la transformation de *Fourier* aux distributions tempérées on va d'abord l'étudier dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ alors on définira la transformée de *Fourier* d'une fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la même relation (2.35) i.e.

$$\hat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\varphi(x)dx \ , \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.46}$$

Le résultat suivant est très particulier et très intéressant, qui est une caractérisation très spéciale de la transformation de *Fourier* sur l'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2 − 5

La transformation de *Fourier* $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \text{identité de } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve

Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ envoient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{F}^{-1}\varphi = (2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\left(\check{\varphi}\right)$, alors il suffit de le faire pour $\mathcal{F}$.

Tout d'abord, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet pour tout x fixé de $\mathbb{R}^n$ la fonction $\xi \mapsto \exp(-ix\xi)\varphi(x)$ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\left|D_\xi^\beta\left(\exp(-ix\xi)\varphi(x)\right)\right| = \left|(-ix)^\beta \exp(-ix\xi)\varphi(x)\right| = \left|x^\beta\varphi(x)\right| \in L^1(\mathbb{R}^n)\ , \tag{2.47}$$

et par suite $D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi)$ pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$ i.e. $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)(-ix)^\beta\varphi(x)dx. \tag{2.48}$$

Par des intégrations par parties successives on peut facilement montrer que pour α et $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$(i\xi)^\alpha\, D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)D_x^\alpha\left((-ix)^\beta\varphi(x)\right)dx\ , \tag{2.49}$$

on déduit alors que

$$\left|\xi^\alpha D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D_x^\alpha\left(x^\beta\varphi(x)\right)\right| dx < +\infty\ ,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.50}$$

Ce qui prouve que $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et d'après la formule de *Leibniz* l'application $\varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La linéarité est évidente par définition de la transformation de *Fourier*.

De même d'après les propriétés de la transformation de *Fourier*, données plus haut sur l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$, on sait que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right) = \varphi = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\varphi\right) \quad ,$$

ce qui prouve que l'application $\mathcal{F}$ est injective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (resp. $\mathcal{F}^{-1}$).

Remarque $2-3$

Puisque pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, on sait que $x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $D_x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, alors la transformation de *Fourier* dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ possède les mêmes propriétés que dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2.5 La transformation de *Fourier* dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

D'après la formule de *Parseval* (2.40) on sait que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\ d\xi \ , \tag{2.51}$$

par l'utilisation de cette relation (2.51) on est bien motivé pour définir la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée. S'il n'y a pas d'inconvénient on notera par $\mathcal{F}f = \hat{f}$ la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée f.

Définition $2-5$ (*Théorème*)

Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformée de *Fourier* de f , notée $\mathcal{F}f$ où $\hat{f}$, est la forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle \mathcal{F}f \ , \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle \quad , \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ ; \tag{2.52}$$

et $\mathcal{F}f$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e. $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

En effet, la linéarité de $\mathcal{F}f$ se déduit de la linéarité de f et de la linéarité de transformation de *Fourier* sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La continuité est une conséquence de la continuité de f sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $\exists C > 0$ et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle \mathcal{F}f\ ,\ \varphi \rangle| = |\langle f\ ,\ \mathcal{F}\varphi\ \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq l}} \gamma_{\alpha,\ \beta}(\mathcal{F}\varphi)\ ,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.53}$$

Comme la transformation de *Fourier* $\mathcal{F}$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors chaque semi-norme $\gamma_{\alpha,\ \beta}(\mathcal{F}\varphi)$ est majorée par des semi-normes de φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d'où la continuité de $\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

De la définition précédente on est en mesure d'énoncer un théorème analogue au théorème 2-5, qui concerne la transformation de *Fourier* pour les distributions tempérées.

Théorème $2-6$

La transformation de *Fourier* $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue sur les suites de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\ f = f\quad ,\quad \forall\ f \in\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Preuve

Cela résulte de la définition (2.52). En effet

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\ f = f\ \text{ pour tout } f \in\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ ,$$

car

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f\ ,\ \varphi \right\rangle = \left\langle f\ ,\ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi\ \right\rangle = \langle f\ ,\ \varphi\ \rangle\quad ,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ ;$$

de même

$$\left\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f\ ,\ \varphi \right\rangle = \left\langle f\ ,\ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\ \right\rangle = \langle f\ ,\ \varphi\ \rangle\quad ,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Donc $\mathcal{F}$ est bijective. Ensuite, si $f_k \to f$, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\langle \mathcal{F} f_k \ , \ \varphi \rangle = \langle f_k \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle \to \langle f \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle = \langle \mathcal{F} f \ , \ \varphi \ \rangle , \ \text{quand } k \to +\infty,$$

i.e. $\mathcal{F} f_k \ \to \mathcal{F} f$, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De la même manière on démontre que $\mathcal{F}^{-1}$ est continue sur les suites de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple

Soit $g = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} g_k \ \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle \mathcal{F} g \ , \ \varphi \rangle = \langle g \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle = \lim_{m \to +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} g_k \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \right\rangle = \lim_{m \to +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \mathcal{F} g_k \ , \ \varphi \ \right\rangle , \tag{2.54}$$

et donc $\quad \mathcal{F} g = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F} g_k$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui n'est pas vrai dans le sens classique.

2.5.1 Propriétés de la transformation de *Fourier* dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Les propriétés suivantes sont vérifiées dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et elles sont similaires à celles données dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Propriété 1 (Dérivation de la transformée de *Fourier*)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$D_\xi^\alpha \mathcal{F}\left[f\right](\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha \ f)(\xi) = (\widehat{(-ix)^\alpha} \ f)(\xi) \quad , \quad \text{où} \quad D_\xi^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} ... \partial \xi_n^{\alpha_n}}. \tag{2.55}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} \left\langle D_\xi^\alpha \mathcal{F}\left[f\right](\xi) \ , \ \varphi(\xi) \right\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \left\langle \mathcal{F}\left[f\right](\xi), \ D_\xi^\alpha \varphi(\xi) \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f(x) \ , \ \mathcal{F}\left[D_\xi^\alpha \varphi(\xi)\right](x) \right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \left\langle f(x) \ , \ (ix)^\alpha \mathcal{F}\left[\varphi\right](x) \right\rangle = \left\langle (-ix)^\alpha f(x) \ , \ \mathcal{F}\left[\varphi\right](x) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}\left[(-ix)^\alpha f(x)\right](\xi) \ , \ \varphi(\xi) \right\rangle . \end{aligned} \tag{2.56}$$

En prenant $f = 1$ il est facile de voir que

$$\mathcal{F}\left[x^{\alpha}\right](\xi) = (i)^{|\alpha|} D_{\xi}^{\alpha}\mathcal{F}\left[1\right](\xi) = (2\pi)^{n}(i)^{|\alpha|} D_{\xi}^{\alpha}\delta(\xi). \tag{2.57}$$

<u>**Propriété 2**</u> (La transformée de *Fourier* de la dérivée)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\mathcal{F}\left[D_x^{\alpha} f\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}\mathcal{F}\left[f\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}\hat{f}(\xi) \quad , \quad \text{où} \quad D_x^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{2.58}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left[D_x^{\alpha} f\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle &= \left\langle D_x^{\alpha} f\ (x),\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle f(x)\ ,\ D_x^{\alpha}\mathcal{F}\left[\varphi\right](x)\right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\left\langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[(-i\xi)^{\alpha}\varphi\right](x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ (i\xi)^{\alpha}\varphi(\xi)\right\rangle \\ &= \left\langle (i\xi)^{\alpha}\mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle. \end{aligned}\tag{2.59}$$

Si on prend $f = \delta$ on aura

$$\mathcal{F}\left[D_x^{\alpha}\delta\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}\mathcal{F}\left[\delta\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}. \tag{2.60}$$

<u>**Propriété 3**</u> (La transformée de *Fourier* d'une translatée)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}\left[f(x - x_0)\right](\xi) = \exp(-ix_0\xi)\ \mathcal{F}\left[f\right](\xi), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.61}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left[f(x - x_0)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle &= \left\langle f\ (x - x_0),\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)\right\rangle = \left\langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi)\right](x + x_0)\right\rangle \\ &= \left\langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\exp(-ix_0\xi)\varphi\right](x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ \exp(-ix_0\xi)\varphi(\xi)\right\rangle \\ &= \left\langle \exp(-ix_0\xi)\mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle. \end{aligned}\tag{2.62}$$

Propriété 4 (La translatée d'une transformée de *Fourier*)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}\left[f\right](\xi - \xi_0) = \mathcal{F}\left[\exp(ix\xi_0) f\right](\xi), \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.63}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\left[f\right](\xi - \xi_0)\ ,\ \varphi(\xi) \rangle &= \langle \mathcal{F}\left[f\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi + \xi_0) \rangle = \langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi + \xi_0)\right](x) \rangle \\ &= \langle f(x)\ ,\ \exp(ix\xi_0) \mathcal{F}\left[\varphi\right](x) \rangle = \langle \exp(ix\xi_0) f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\varphi\right](x) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}\left[\exp(ix\xi_0) f\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi) \rangle . \end{aligned} \tag{2.64}$$

Exemple

En utilisant la définition de la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée (2.52) et les propriétés précédentes on peut facilement voir que

$$(i) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}\left[\delta(x-a)\right](\xi) = \exp(-ia\xi)\ , \quad \xi\ \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ a \in \mathbb{R}^n \quad , \\ \text{et} \\ \mathcal{F}\left[(\exp(iax)\right](\xi) = (2\pi)^n \delta(\xi - a), \quad \xi\ \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ a \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$(ii) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}\left[D_x^\alpha \delta(x-a)\right](\xi) = (i\xi)^\alpha \exp(-ia\xi)\ , \ \xi\ \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ \alpha \in \mathbb{N}^n, \\ \text{et} \\ \mathcal{F}[(-ix)^\alpha \exp(iax)](\xi) = (2\pi)^n D_\xi^\alpha \delta(\xi - a),\ \xi\ \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{cases}$$

Montrons d'abord (i). En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\left[\delta(x-a)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi) \rangle &= \langle \delta(x-a),\ (\mathcal{F}\varphi)(x) \rangle \\ &= \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ia\xi} \varphi(\xi) d\xi = \left\langle\ e^{-ia\xi}\ ,\ \varphi(\xi) \right\rangle\ , \end{aligned} \tag{2.65}$$

d'où $\mathcal{F}\left[\delta(x-a)\right](\xi) = \exp(-ia\xi)$ et donc pour $a = 0$ on aura $\mathcal{F}\left[\delta\right] = 1$.

Par application de $\mathcal{F}^{-1}$ on peut voir que

$$\delta(x-a) = \mathcal{F}^{-1}\left[\exp(-ia\xi)\right] = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\left[(\exp(-ia\xi))\check{}\right] = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\left[(\exp(ia\xi)\right] \ , \quad (2.66)$$

d'où $\mathcal{F}\left[(\exp(iax)\right](\xi) = (2\pi)^n\delta(\xi-a)$ et donc pour $a = 0$ on aura $\mathcal{F}\left[1\right] = (2\pi)^n \ \delta$.

Montrons maintenant (ii). En effet pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left[D_x^\alpha\delta(x-a)\right](\xi) \ , \ \varphi(\xi)\right\rangle &= \left\langle D_x^\alpha\delta(x-a), \ (\mathcal{F}\varphi)(x)\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle\delta(x-a), \ D_x^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(x)\right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \ D_x^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(a) = (-1)^{|\alpha|} \ \mathcal{F}\left[(-i\xi)^\alpha\varphi\right](a) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi)\varphi(\xi)d\xi = \left\langle (i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi), \ \varphi(\xi)\right\rangle . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Par l'utilisation de la transformation de *Fourier* inverse on déduit facilement que

$$\begin{aligned} D_x^\alpha\delta(x-a) &= \mathcal{F}^{-1}\left[(i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi)\right](x) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}[((i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi))\check{}](x) \\ &= (2\pi)^{-n}\mathcal{F}[(-i\xi)^\alpha\exp(ia\xi)](x) \end{aligned} \quad (2.68)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}[(-ix)^\alpha\exp(iax)] = (2\pi)^n D_\xi^\alpha\delta(\xi-a). \quad (2.69)$$

2.5.2 Théorème de convolution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Ce qu'on entend par théorème de convolution c'est la relation

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad (2.70)$$

qui a un rôle important dans la théorie de la transformation de *Fourier*, en particulier dans ses applications aux équations différentielles.

La relation (2.70) est vérifiée par exemple quand f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ce qu'on peut voir par utilisation du théorème de *Fubini* comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f*g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\,(f*g)\,(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(x-y)\xi)\exp(-iy\xi)f(y)g(x-y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-iy\xi)\left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(x-y)\xi)g(x-y)dx\right] f(y)dy \\
&= \hat{g}(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-iy\xi)f(y)dy = \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \qquad (2.71)
\end{aligned}$$

Ainsi par application de la transformation de *Fourier* inverse on peut facilement conclure que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à chaque fois que f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De la même manière on peut facilement vérifier que pour f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}^{-1}[f*g] = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}[f]\mathcal{F}^{-1}[g] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \qquad (2.72)$$

On sait aussi, d'après le chapitre 1, que le produit de convolution de deux distributions quelconques peut ne pas être défini et que si l'une au moins des deux distributions est à support compact, i.e. appartient à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, leur produit de convolution aura un sens et définit une distribution dans un sens bien précis.

Soient maintenant $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et en utilisant la même définition (1.22) du chapitre 1, pour le produit de convolution, on définit le produit de convolution $f * g$ comme étant la fonctionnelle donnée par

$$\langle f*g \ ,\ \varphi\rangle = \langle f(x) \ ,\ \psi(x)\rangle \qquad (2.73)$$

où

$$\psi(x) = \langle g(y) \ ,\ \varphi(x+y)\rangle\ ,\quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \qquad (2.74)$$

c'est-à-dire

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(x+y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\varphi(y)dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \check{g}(x-y)\varphi(y)dy = (\varphi * \check{g})(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2.75}$$

ce qui montre que la relation (2.73) est bien définie.

Il est bien clair que le produit de convolution $f * g$, pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, défini par la relation (2.73) est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour montrer la continuité, on prend une suite $\{\varphi_k\}_k$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\psi_k(x) = (\varphi_k * \check{g})(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[\varphi_k * \check{g}])(x)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[\varphi_k]\mathcal{F}[\check{g}])(x) \to 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2.76}$$

par continuité de la transformation de *Fourier* et de la transformation de *Fourier* inverse dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Donc $\langle f * g \ , \ \varphi_k\rangle = \langle f(x) \ , \ \psi_k(x)\rangle \to 0$ quand $k \to +\infty$. Ainsi $f*g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, i.e. une distribution tempérée.

Enonçons maintenant le théorème de convolution pour les distributions.

Théorème 2 − 7 (*Théorème de convolution*)

Soient $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]. \tag{2.77}$$

Preuve

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f * g] \ , \ \varphi\rangle &= \langle f * g \ , \ \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle f(x) \ \ , \ \langle g(y) \ , \ \mathcal{F}[\varphi](x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle f(x) \ \ , \ \mathcal{F}[\varphi] * \check{g}\rangle \, . \end{aligned} \tag{2.78}$$

En utilisant la relation (2.70), le théorème de convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et la formule d'inversion on aura

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi] * \check{g} &= \mathcal{F}[\varphi] * \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}[\check{g}]\right) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}[\varphi] * \mathcal{F}(\mathcal{F}[g]) \\ &= (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[\varphi] * \mathcal{F}(\mathcal{F}[g]))\right] = \mathcal{F}[\varphi\mathcal{F}[g]] \ \ , \end{aligned} \tag{2.79}$$

et donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f * g] \ , \ \varphi\rangle &= \langle f(x) \ \ , \ \mathcal{F}[\varphi\mathcal{F}[g]]\rangle = \langle \mathcal{F}[f] \ \ , \ \varphi\mathcal{F}[g]\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[f] \ \mathcal{F}[g] \ \ , \ \varphi\rangle \, . \end{aligned} \tag{2.80}$$

2.6 Exercices

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}, \ a > 0$. Calculer les transformeés de *Fourier* des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq \dfrac{a}{2} \\ \\ 0 & si \quad |x| > \dfrac{a}{2} \end{cases}$; 2) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a} & si \quad |x| \leq a \\ \\ 0 & si \quad |x| > a \end{cases}$;

3) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si \quad x \geq 0 \\ & \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$; 4) $f(x) = e^{-a|x|}$; 5) $f(x) = e^{-ax^2}$.

Exercice 2

Soit f une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$.

1) Montrer que la transformée de *Fourier* de f peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \hat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f_{paire}(x)\ \cos(\omega x)\ dx \ - \ 2i\int_0^{+\infty} f_{impaire}(x)\ \sin(\omega x)\ dx\ ,$$

où $f_{paire}(x)$ désigne une fonction paire et $f_{impaire}(x)$ désigne une fonction impaire.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la transformée de *Fourier* d'une fonction réelle soit réelle.

3) Montrer que si f est une fonction paire, alors

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \hat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\ dx\ ;$$

et que si f est une fonction impaire, alors

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \hat{f}(\omega) = -\ 2i\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\omega x)\ dx.$$

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions données par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ 0 & si \quad |x| > \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad ; \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si \quad |x| \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad |x| > 1 \end{cases} .$$

1) Calculer la transformée de *Fourier* de la fonction f .

2) Montrer que

$$g^{'}(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2}).$$

3) Calculer la transformée de *Fourier* de $g^{'}(x)$ et en déduire celle de $g(x)$.

4) Sachant que le produit de convolution $(f * f)(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Calculer la transformée de *Fourier* de $(f * f)(x)$ et déterminer $(f * f)(x)$.

Exercice 4

En utilisant la transformée de *Fourier* :

1) Déterminer la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \quad a > 0$$

avec la condition initiale : $u(x,0) = \varphi(x)$. $\left[Ind : \ \mathcal{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \right]$.

2) Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy \quad ,$$

où g et k sont des fonctions connues ainsi que leurs transformées de *Fourier* respectives $\hat{g}$ et $\hat{k}$.

Exercice 5

On rappelle qu'une distribution $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ est dite homogène de degré $\lambda \in \mathbb{R}$ si

$$\langle f \ , \ \varphi_t \rangle = t^{-(n+\lambda)} \langle f \ , \ \varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \ , \ \forall t > 0 \quad (\text{où } \varphi_t(x) = \varphi(tx)).$$

Montrer que la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée homogène de degré λ est homogène de degré $-n-\lambda$.

Exercice 6

Une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est dite paire (resp. impaire) si

$$\langle f \ , \ \check{\varphi} \rangle = \langle f \ , \ \varphi \rangle \quad (\ resp. \ - \langle f \ , \ \varphi \rangle\ ) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ où } \check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Montrer que si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire) alors sa transformée de *Fourier* est paire (resp. impaire).

Exercice 7

1) Calculer la transformée de *Fourier* de la distribution $f = VP(\frac{1}{x})$ et en déduire la transformée de *Fourier* de la distribution $H(x)$, *i.e* $\mathcal{F}\ H(x)$, et sa transformée de *Fourier* inverse, $\mathcal{F}^{-1}H(x)$, où $H(x)$ est la fonction de *Heaviside* :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases} .$$

2) En utilisant l'identité

$$|x| = xH(x) - xH(-x) .$$

Calculer la transformée de *Fourier* de $|x|$, *i.e* $\mathcal{F}\,|x|$ et en déduire $\mathcal{F}\left(Pf\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 8

Soit la fonction signe sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{Si}\,gn\ (x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases} .$$

Montrer que :

$$(i)\quad \frac{d}{dx}\mathrm{Si}\,gn\ (x) = 2\delta \quad ;$$
$$(ii)\ \mathcal{F}(\mathrm{Si}\,gn\ (x)\ ) = -2i\ VP(\frac{1}{x}).$$