الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques appliquées

Variation sur les systèmes d'équations aux différences autonomes

Préparé par : Marwa Boudraa
Wissam Teniba

Soutenue devant le jury

Smail Kaouache	MCB	C. U. Abd Elhafid Boussouf, Mila	Président
Yacine Halim	MCA	C. U. Abd Elhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Nouressadat Touafek	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Examinateur

Année universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENTS

Au nom d'Allah le Très Miséricordieux, le Tout Miséricordieux.

Nous remercions d'abord et avant tout Allah qui nous a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Un remerciement particulier à notre encadreur ***Mr. Yacine Halim****, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.*

Nous remercions également les membres du jury, monsieur ***Smail Kaouache*** *et monsieur* ***Nouressadat Touafek*** *d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.*

Nous tenons à remercier tous les enseignants de centre universitaire de Mila en générale et l'équipe enseignantes de l'institut des sciences et de téchnologie.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Wissam et Marwa

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À qui toujours presente à mes coté avec sa tendresse et son amour, celle qui a beaucoup sacrifié pour mon bonheur et ma réussite la joi de ma vie **chère mère**.

À mon cher père **Douadi**, source de force et de courage.

À mon deuxième père, mon seul frère **Issam** et sa famille.

Aux cœurs purs, aux fleurs de ma vie, mes sœurs : **Selma, Rima, Sarah** et ses enfants que Dieu les Protège.

À mes beaux-frères : **Ammar, Noureddine et Hamza**.

À ceux que j'aimais et aimais mes chers amis et copines qui sont occupe une place dans ma vie qui se sont tenus à mes côtés avec leur cœur chacun en son nom.

À mes chères tantes : **Fairouz, Samiaa, Wahiba** et leurs familles.

À mon binôme **Marwa** qui je la souhaite une vie plaine de joie de bonheur et de prospérité.

À tous ceux qui me connaissent.

Wissam

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À ma chère mère ***Khadidja****, l'exemple de ma vie.*

À mon cher père ***Douadi****, source de force et de courage.*

À mes frères et mes sœurs :

Safa*,* ***Mohamed Rida****,* ***Takwa*** *et* ***Sadjed****.*

À mon binôme ***Wissam*** *qui je la souhaite une vie pleine de bonheur et de prospérité.*

À tous les membres de ma famille.

À tous les amis et collègues.

Marwa

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est la recherche des formules explicites pour la solution de deux équations et de deux systèmes d'équations aux différences non linéaires d'ordre deux.

Nous donnons dans le premier chapitre les définitions principaux de la théorie d'équations aux différences, de plus nous étudions la suite de Pell.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons les formes explicites des solutions de deux équations aux différences non linéaires d'ordre deux en fonction des nombres de Pell généralisés.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnons les formes explicites des solutions du deux systèmes d'équations aux différences d'ordre deux avec leur solutions sont donnés en terme des nombres de Pell généralisés.

Mots-clés : Équations aux différences, systèmes d'équations aux différences, stabilité, nombres de Pell généralisés, forme de solution.

ABSTRACT

The purpose of this work is the search for explicit formulas of the solutions of two second-order nonlinear difference equations and a two systems of nonlinear difference equations.

In the first chapter, we give the definitions of difference equations theory. Moreover, we study the Pell sequence.

In the second chapter, we give the explicit form of the solutions of a two second-order nonlinear difference equations in terms of generalized Pell sequence.

Finally, in the last chapter, we give the explicit form of the solutions of a two systems of second-order nonlinear difference equations with their solutions are given in terms of generalized Pell sequence.

Keywords : Difference equations, systems of difference equations, stability, generalized Pell numbers, form of solution.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو البحث عن الصيغ الصريحة لحل معادلتي فروق من الدرجة الثانية و جملة معادلتي فروق غير خطية من الدرجة الثانية.

نقدم في الفصل الأول بعض التعاريف و النظريات الرئيسية المتعلقة بنظرية معادلات الفروق بالإضافة إلى دراسة متتالية بال.

في الفصل الثاني، نعطي الشكل الصريح لحلول معادلتي فروق غير خطية من الدرجة الثانية بدلالة أعداد بال المعممة.

في الفصل الأخير، نعطي الشكل الصريح لحلول جملة معادلتي فروق غير خطية من الدرجة الثانية بدلالة أعداد بال المعممة.

الكلمات الأساسية : معادلات الفروق، جمل معادلات الفروق، الاستقرار، أعداد بال المعممة، الحل العام.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **1**

1 Quelques préliminaires et les suites de Pell **4**

1.1 Quelques préliminaires 4

1.1.1 Équations aux différences linéaires 4

1.1.2 Équations aux différences non linéaires 6

1.1.3 A propos de la stabilité 7

1.1.4 Stabilité par la linéarisation 8

1.1.5 Systèmes d'équations aux différences non linéaires 9

1.1.6 A propose de la stabilité 11

1.2 Les suites de Pell 14

1.2.1 Résolution de la suite de Pell 15

1.2.2 La suite de Pell-Lucas 17

1.2.3 Quelques propriétés des nombres de Pell 18

1.2.4 La suite de Pell généralisée 28

2 La solution de deux équations aux différences non linéaires d'ordre deux en termes des nombres de Pell généralisés **38**

2.1 Forme de solution de l'équation $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n(x_{n-1}-2)-1}$ 39

2.2 Stabilité globale de solution de l'équation (2.1) 46
2.3 Forme de solution de l'équation $x_{n+1} = \dfrac{-1}{x_n(x_{n-1}+2)-1}$ 49
2.4 Stabilité globale de solution de l'équation (2.2) 51

3 La solution de deux systèmes d'équations aux différences non linéaires 55

3.1 Forme de solution du système (3.1) 56
3.2 Stabilité globale des solutions du système (3.1) 64
3.3 Exemple numérique 67
3.4 Forme de solution du système (3.2) 68
3.5 Stabilité globale de solution du système (3.2) 73
3.6 Exemple numérique 76

Conclusion 79

Bibliographie 80

INTRODUCTION

L'objectif principal de ce mémoire est la recherche des formules explicites pour la solution de deux équations et de deux systèmes d'équations aux différences non linéaires d'ordre deux.

Les équations aux différences sont à la base de l'analyse appliquée depuis L. Euler (1707 - 1783), P. L. Tchebycheff (1821 - 1894) et A. A. Markov (1856 - 1922). En réalité, le concept de récurrence, qui est la base de ce genre d'équations, est apparu depuis l'époque de De Moivre (1667-1754).

Une équation aux différences est une équation, dont l'inconnue est une suite, qui relie plusieurs termes d'une même suite. Elles revêtent une importance particulière dans plusieurs domaines et disciplines scientifiques, ceci par leurs champs d'applications avait connu une diversité qui touche des domaines comme : l'économie, la biologie, la théorie des probabilités, l'écologie, . . . , etc.

D'une part, elles sont utilisées pour la simulation des équations différentielles

ordinaires ou aux dérivées partielles, dans l'analyse numérique pour la résolution des équations à l'aide des suites, avec la recherche de la valeur approchée de la solution par exemple le schéma numérique d'Euler ou de Runge-Kutta.
D'autre part, elles sont utilisées en modélisation des phénomènes de la vie réelle, car la plupart des mesures de l'évolution des variables temporelles étant discrètes.

Plus important encore, les équations aux différences linéaires sont des sujets de la théorie des équations aux différences bien comprises, car elles se basent principalement sur les propriétés de l'algèbre linéaire qui offrent des méthodes simples pour résoudre ces équations, contrairement à la théorie des équations aux différences non linéaires restent un sujet difficile pour les mathématiciens, car il n'existe pas une méthode sy-thématique pour trouver une forme explicite pour la solution.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Après l'introduction on a :

Dans le premier chapitre, nous avons divisé le travail en deux parties, la première partie, nous avons donnés des définitions et résultats généraux sur les équations et les systèmes d'équations aux déférences, la deuxième partie est dédiée à l'étude de la suite de Pell.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à donner la forme explicite des solutions de deux équations aux différences non linéaires d'ordre deux suivantes :

$$x_{n+1} = \frac{\pm 1}{x_n(x_{n-1} \mp 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

avec les valeurs initiales x_{-1}, x_0 sont des valeures réelles arbitraires.
Et donner la relation entre ses solutions et les nombres de Pell généralisés.

Dans le dernier chapitre, nous donnons la forme fermée des solutions de deux systèmes d'équations aux déférences non linéaires d'ordre deux suivantes :

$$x_{n+1} = \frac{\pm 1}{y_n(x_{n-1} \mp 2) - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{\pm 1}{x_n(y_{n-1} \mp 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

avec les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 sont des valeures réelles arbitraires.

Enfin, nous avons donné la conclusion de ce travail.

CHAPITRE 1

QUELQUES PRÉLIMINAIRES ET LES SUITES DE PELL

1.1 Quelques préliminaires

Dans cette section, nous allons donner quelques définitions de base et des résultats généraux concernant les équations, les systèmes d'équations aux différences et la stabilité de ces dernières, ainsi que quelques théorèmes qui nous seront utiles pour la suite de notre mémoire. Dans toute la suite, on définit l'ensemble $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$ par l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

1.1.1 Équations aux différences linéaires

Définition 1.1.1 *([6])*

- *L'équation*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)x_n = g(n), \tag{1.1}$$

avec, $p_0(n) = 1$, $p_1(n)$, $p_2(n), \ldots, p_k(n)$, *et* $g(n)$ *sont des fonctions définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}$, *s'appelle* ***équation aux différences linéaire*** *d'ordre k dés que* $p_k(n) \neq 0$.

- *En générale on associé* **k** *conditions initiales avec l'équation* (1.1)

$$x_{n_0} = c_1,\ x_{n_0+1} = c_2,\ \ldots,\ x_{n_0+k-1} = c_k, \tag{1.2}$$

avec $c_i, i = 1, \ldots, k$ *sont des constantes réelles ou complexes.*

- *Si* $g(n) = 0$, *l'équation* (1.1) *est dite* ***homogène*** *et elle s'écrit comme suit*

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)x_n = 0. \tag{1.3}$$

- *Si les fonctions* $p_k(n)$, $\forall n \geq n_0$ *sont constantes, l'équation* (1.1) *est dite* ***autonome***.

Définition 1.1.2 *([6])*
Une suite $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ *est dite* ***solution*** *de l'équation* (1.1) *avec les conditions initiales* (1.2) *si elle satisfait la relation* (1.1).

Théorème 1.1.1 *([6])*
L'équation (1.1) *avec les conditions initiales* (1.2) *admet une et une seule solution.*

Théorème 1.1.2 *([6])*
L'ensemble S des solution de l'équation aux différences homogène (1.3) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension k.*

Définition 1.1.3 *([6])*
Un ensemble de k solutions libres de l'équation aux différences (1.3) *est dit* ***ensemble fondamental*** *des solutions.*

Théorème 1.1.3 *([6])(**Théorème fondamental**)*
Si $p_k(n) \neq 0, \ \forall n \geq n_0$, l'équation aux différences linéaire homogène (1.3) *admet un ensemble fondamental des solutions.*

Théorème 1.1.4 *([6])*
Soit l'équation linéaire homogène autonome

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \cdots + p_k x_n = 0. \tag{1.4}$$

La solution générale de l'équation (1.4) *s'écrit :*

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, \quad c_{i,j} \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

où

- *Le paramètre $r \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes du polynôme caractéristique définie par :*
$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i}. \tag{1.6}$$
- *Le paramètre λ_i désigne une racine du polynôme caractéristique* (1.6).
- *Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i.*
- *Les coefficients $c_{i,j}$ sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.*

1.1.2 Équations aux différences non linéaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I^{k+1} \to I$ est une fonction définie.

Définition 1.1.4 *([6])*
Une équations aux différences d'ordre $(k+1)$

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.7}$$

avec les conditions initiales $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{n-k} \in I$*, est dite non linéaire si n'est pas de la forme* (1.1).

Définition 1.1.5 *([6])*
Un point $\bar{x} \in I$ *est un point d'équilibre de l'équation* (1.7) *si*

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}),$$

autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \quad \forall n \geq -k.$$

Définition 1.1.6 *([6])*
Une solution $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *de l'équation* (1.7) *est dite* ***éventuellement périodique*** *de période* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$ *si*

$$\exists N \geq -k \quad x_{n+p} = x_n, \quad \forall n \geq N.$$

Si $N = -k$*, on dit que* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *est* ***périodique*** *de période* $\boldsymbol{p}$*.*

Définition 1.1.7 *([6])*
Un intervalle $J \subseteq I$ *est dit intervalle invariant pour l'équation* (1.7) *si*

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.1.3 A propos de la stabilité

Définition 1.1.8 *([6])*
Soit $\bar{x}$ *un point d'équilibre de l'équation* (1.7).

1) $\bar{x}$ *est dit* ***localement stable*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0 \in I : |x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \delta,$$

alors

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \quad \forall n \geq -k.$$

2) *$\bar{x}$ est dit **localement asymptotiquement stable** si*

- *$\bar{x}$ est localement stable,*
- $\exists \xi > 0,\ \forall x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I : \quad |x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \xi$, *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}.$$

3) *$\bar{x}$ est dit **globalement attractif** si*

$$\forall x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I, \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}.$$

4) *$\bar{x}$ est dit **globalement asymptotiquement stable** si*

- *$\bar{x}$ est localement stable,*
- *$\bar{x}$ est globalement attractif.*

5) *Le point $\bar{x}$ est dit **instable** s'il n'est pas localement stable.*

Définition 1.1.9 *([6])*
Soit f une fonction continument différentiable.
*On appelle **équation aux différences linéaire associée** à l'équation* (1.7) *autour de $\bar{x}$ l'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k}, \tag{1.8}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}), \quad i = 0, \dots, k,$$

et

$$\begin{array}{rccl} f: & I^{k+1} & \longrightarrow & I \\ & (u_0, u_1, \dots, u_k) & \longmapsto & f(u_0, u_1, \dots, u_k). \end{array}$$

1.1.4 Stabilité par la linéarisation

Théorème 1.1.5 *([6])*

- *Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert* $|\lambda| < 1$, *alors le point d'équilibre* $\bar{x}$ *de l'équation* (1.7) *est* ***asymptotiquement stable****.*

- *Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre* $\bar{x}$ *de l'équation* (1.7) *est* ***instable****.*

Théorème 1.1.6 ***(Théorème de Clark,[4])***
Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique du point d'équilibre $\bar{x}$ *de l'équation* (1.7) *est*

$$|p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| < 1.$$

1.1.5 Systèmes d'équations aux différences non linéaires

Soient $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., $f^{(p)}$ des fonctions continûment différentiables, tel que

$$f^{(i)} : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1} \to I_i^{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

où I_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ sont des intervalles réels.
Considérons le système de p équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} &= f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right), \\ x_{n+1}^{(2)} &= f^{(2)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right), \\ &\vdots \\ x_{n+1}^{(p)} &= f^{(p)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right), \end{cases} \tag{1.9}$$

où $n, k \in \mathbb{N}_0$, $\left(x_{-k}^{(i)}, x_{-k+1}^{(i)}, \ldots, x_0^{(i)}\right) \in I_i^{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$. Définissons la fonction

$$H : I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1} \to I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1}$$

par

$$H(w) = \left(f_0^{(1)}(w), f_1^{(1)}(w), \ldots, f_k^{(1)}(w), f_0^{(2)}(w), f_1^{(2)}(w), \ldots, f_k^{(2)}(w), \ldots, f_0^{(p)}(w), f_1^{(p)}(w), \ldots, f_k^{(p)}(w)\right),$$

avec

$$w = \left(u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_k^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, \ldots, u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_k^{(p)}\right)^T,$$

$$f_0^{(i)}(w) = f^{(i)}(w), f_1^{(i)}(w) = u_0^{(i)}, \ldots, f_k^{(i)}(w) = u_{k-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Posons,

$$w_n = \left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right)^T.$$

Ainsi, le système (1.9) est équivalent au système

$$w_{n+1} = H(w_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.10}$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl}
x_{n+1}^{(1)} & = & f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\
x_n^{(1)} & = & x_n^{(1)} \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(1)} & = & x_{n-k+1}^{(1)}, \\
x_{n+1}^{(2)} & = & f^{(2)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\
x_n^{(2)} & = & x_n^{(2)} \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(2)} & = & x_{n-k+1}^{(2)} \\
 & \vdots & \\
x_{n+1}^{(p)} & = & f^{(p)}\left(x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)}, \ldots, x_{n-k}^{(1)}, x_n^{(2)}, x_{n-1}^{(2)}, \ldots, x_{n-k}^{(2)}, \ldots, x_n^{(p)}, x_{n-1}^{(p)}, \ldots, x_{n-k}^{(p)}\right) \\
x_n^{(p)} & = & x_n^{(p)} \\
 & \vdots & \\
x_{n-k+1}^{(p)} & = & x_{n-k+1}^{(p)}
\end{array}\right. .$$

Définition 1.1.10 ***(Point d'équilibre)***

1) *Un point* $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1}$ *est dit point d'équilibre de* (1.9) *si*

$$\begin{cases} \overline{x^{(1)}} &= f^{(1)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\ \overline{x^{(2)}} &= f^{(2)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right), \\ &\vdots \\ \overline{x^{(p)}} &= f^{(p)}\left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right). \end{cases}$$

Autrement dit $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}})$ *est une solution de* (1.9).

2) *Un point* $\overline{w} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1}$ *est point d'équilibre du système* (1.10) *si*

$$\overline{w} = H(\overline{w}).$$

1.1.6 A propose de la stabilité

Définition 1.1.11 *([6])*

Soient $\overline{w}$ *un point d'équilibre du système* (1.10) *et* $\|.\|$ *une norme, par exemple la norme euclidienne.*

1) *Le point d'équilibre* $\overline{w}$ *est dit* ***stable*** *(ou* ***localement stable****) si pour chaque* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, *tel que* $\|w_0 - \overline{w}\| < \delta$ *implique* $\|w_n - \overline{w}\| < \varepsilon$ *pour* $n \geq 0$.

2) *Le point d'équilibre* $\overline{w}$ *est dit* ***asymptotiquement stable*** *s'il est stable et s'il existe* $\gamma > 0$, *tel que* $\|w_0 - \overline{w}\| < \gamma$ *implique* $\|w_n - \overline{w}\| \to 0, \; n \to +\infty$.

3) *Le point d'équilibre* $\overline{w}$ *est dit* ***globalement attractif*** *(respectivement* ***globalement attractif*** de *bassin d'attraction l'ensemble* $G \subseteq I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1}$) *si pour chaque* $\overline{w}_0$ *(respectivement pour chaque* $w_0 \in G$)

$$\|w_n - \overline{w}\| \to 0, \; n \to +\infty.$$

4) *Le point d'équilibre* $\overline{w}$ *est dit* ***globalement asymptotiquement stable*** *si*

- *Le point d'équilibre $\overline{w}$ est **stable**,*

- *Le point d'équilibre $\overline{w}$ est **globalement attractif**.*

5) *Le point d'équilibre $\overline{w}$ est dit **instable** s'il n'est pas **localement stable**.*

Remarque 1.1.7 *([6])*
Il est clair que $(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1}$ *est dit point d'équilibre de* (1.9) *si et seulement si* $\overline{w} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right) \in I_1^{k+1} \times I_2^{k+1} \times \cdots \times I_p^{k+1}$ *est un point d'équilibre du système* (1.10).

Définition 1.1.12 ***(système linéaire associé)***
Le système linéaire associé au système (1.10) *autour du point d'équilibre*
$\overline{w} = \left(\overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(1)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}}, \overline{x^{(2)}}, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}, \overline{x^{(p)}}, \ldots, \overline{x^{(p)}}\right)$ *est donné par :*

$$w_{n+1} = Aw_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.11}$$

avec A est la matrice Jacobienne de la fonction H au point d'équilibre $\overline{w}$, donnée par :

$$A = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(2)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_0^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_1^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(1)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(2)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_0^{(p)}} & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_1^{(p)}} & \cdots & \frac{\partial f_k^{(p)}}{\partial u_k^{(p)}}
\end{pmatrix},$$

tel que

$$f_j^{(i)} = f_j^{(i)}(\overline{w}), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Théorème 1.1.8 ***(Stabilité par linéarisation, [6])***

1) *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unité ouvert (c'est-à-dire $|\lambda| < 1$), alors le point d'équilibre $\overline{w}$ du système* (1.10) *est* ***asymptotiquement stable****.*

2) *Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne A a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{w}$ du système* (1.10) *est* ***instable****.*

1.2 Les suites de Pell

La suite de Pell est la suite d'entiers $\{P_n\}_{n\geq 0}$ définie par une relation de récurrence linéaire, où chaque terme représente la somme de deux fois le précédent et une fois l'autre d'avant, avec des conditions initiales $P_0 = 0$ et $P_1 = 1$.
Le nom des nombres de Pell proviennent de l'attribution erronée par Leonhard Euler de l'équation et des nombres qui en dérivent à John Pell. Les nombres de Pell peuvent

FIGURE 1.1 – John Pell(1611-1685).

être calculés au moyen d'une relation de récurrence similaire à celle des nombres de Fibonacci. Il en résulte une suite dans laquelle le rapport entre deux termes consécutifs converge vers le **nombre d'argent** ou proportion d'argent ($1+\sqrt{2} \simeq 2.414213562373...$). En plus d'être utilisé pour approximer la racine carrée de deux, les nombres de Pell peuvent être utilisés pour trouver des nombres triangulaires carrés, pour construire des approximations entières du triangle isocèle droit et pour résoudre certains problèmes d'énumération combinatoire.

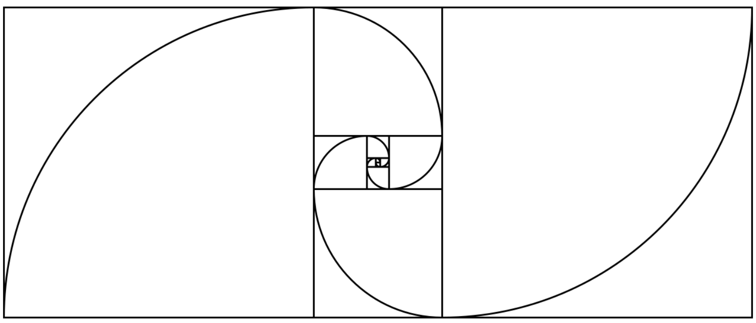

FIGURE 1.2 – La spirale de Pell.

Définition 1.2.1

La suite de Pell est la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *telle que* $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ *et*

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.12}$$

Les termes de cette suite sont appelés ***les nombres de Pell****.*

Alors les termes de la suite de Pell d'ordre deux sont :

$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, \ldots, etc.$

1.2.1 Résolution de la suite de Pell

Soit la suite de Pell définie par (1.12).

Remarque 1.2.1

La suite (1.12) *est une équation aux différences linéaire homogène autonome d'ordre 2.*

– L'équation caractéristique de (1.12) est :

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0. \tag{1.13}$$

Les solutions de (1.13) sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \sqrt{2}, \quad (\textit{nombre d'argents}) \\ \lambda_2 &= 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

– La solution générale de l'équation (1.12) est sous la forme :

$$P_n = C_1\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + C_2\left(1 - \sqrt{2}\right)^n.$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

donc

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}. \tag{1.14}$$

Définition 1.2.2

La formule (1.14) *est dite la formule de Binet.*

Autrement dit

$$P_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}, \tag{1.15}$$

avec

$$a = 1+\sqrt{2}, \quad b = 1-\sqrt{2}.$$

Corollaire 1.2.1

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *la suite de Pell et* P_n *le n-ème nombre de Pell. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = a,$$

où ***a*** *est le nombre d'argents.*

Preuve.

On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n\left(a - b\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)},$$

puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = a.$$

■

1.2.2 La suite de Pell-Lucas

La suite de Pell-Lucas est la suite d'entiers $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ définie par une relation de récurrence linéaire, où chaque terme représente la somme de deux fois le précédent et une fois l'autre d'avant, avec des conditions initiales $Q_0 = Q_1 = 2$.
Le rapport entre deux termes consécutifs converge vers le nombre d'argents.

Définition 1.2.3
La suite de Pell-Lucas est la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *telle que* $Q_0 = Q_1 = 2$ *et*

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.16}$$

Les termes de cette suite sont appelés ***les nombres de Pell-Lucas****.*

Alors les termes de la suite de Pell-Lucas d'ordre deux sont :
$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, 16238, 39202, 94642, \ldots, etc.$

Résolution de la suite de Pell-Lucas

Soit la suite de Pell-Lucas définie par (1.16) .

Remarque 1.2.2
La suite (1.16) *est une équation aux différences linéaire homogène autonome d'ordre 2.*

– L'équation caractéristique de (1.16) est :

$$\psi^2 - 2\psi - 1 = 0. \tag{1.17}$$

Les solutions de (1.17) sont :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 1+\sqrt{2},\\ \psi_2 &= 1-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

– La solution générale de l'équation (1.16) est sous la forme :

$$Q_n = C_1\psi_1^n + C_2\psi_2^n.$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient

$$C_1 = C_2 = 1,$$

donc

$$Q_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n. \tag{1.18}$$

Définition 1.2.4
On appelle la formule

$$Q_n = a^n + b^n, \tag{1.19}$$

la formule de Binet de la suite de Pell-Lucas, avec

$$a = 1+\sqrt{2}, \quad b = 1-\sqrt{2}.$$

1.2.3 Quelques propriétés des nombres de Pell

Proposition 1.2.1
Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Pell. Donc on a les identités suivantes :

1) L'identité de Cassini : *Pour $n \in \mathbb{N}$*

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n. \tag{1.20}$$

2) L'identité d'ocagne : *Pour* $n, m \in \mathbb{N}$

$$P_{m+n}P_{n+1} - P_{n+m+1}P_n = (-1)^n P_m. \tag{1.21}$$

3) L'identité de Catalan : *Pour* $n, m \in \mathbb{N}$

$$P_n^2 - P_{n+m}P_{n-m} = (-1)^{n-m} P_m^2. \tag{1.22}$$

4) L'identité de Johnson : *Pour* k, l, n, m *et* $r \in \mathbb{N}$ *tels que* $k + l = m + n$,

$$P_k P_l - P_m P_n = (-1)^r \left(P_{k-r}P_{l-r} - P_{m-r}P_{n-r}\right). \tag{1.23}$$

Preuve.

On a $\quad P_n = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}, \quad$ avec $\quad a = 1 + \sqrt{2}, \quad b = 1 - \sqrt{2}.$

1) ***L'identité de Cassini :*** Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 &= \left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}\right)\left(\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}\right) - \left(\frac{a^n - b^n}{a - b}\right)^2, \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n} + b^{2n} - a^{n+1}b^{n-1} - a^{n-1}b^{n+1} - a^{2n} - b^{2n} + 2(ab)^n\right), \\
&= \frac{(ab)^n}{(a-b)^2}\left(2 - ab^{-1} - ba^{-1}\right),
\end{aligned}$$

puisque $\quad 2 - ab^{-1} - ba^{-1} = (a-b)^2$, et $(ab)^n = (-1)^n$, alors

$$\begin{aligned}
P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 &= \frac{(-1)^n}{(a-b)^2}(a-b)^2, \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

2) ***L'identité d'ocagne :*** Soient $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_{n+m}P_{n+1} - P_{n+m+1}P_n &= \left(\frac{a^{n+m} - b^{n+m}}{a-b}\right)\left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right) - \left(\frac{a^{n+m+1} - b^{n+m+1}}{a-b}\right)\left(\frac{a^{n} - b^{n}}{a-b}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n+m+1} - a^{m+n}b^{n+1} - a^{n+1}b^{n+m} + b^{2n+m+1} - a^{2n+m+1} - b^{2n+m+1}\right. \\
&+ \left. a^{n+m+1}b^n + a^n b^{n+m+1}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(-a^{n+1}b^{n+m} - a^{m+n}b^{n+1} + a^{n+m+1}b^n + a^n b^{n+m+1}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
P_{n+m}P_{n+1} - P_{n+m+1}P_n &= \frac{a-b}{(a-b)^2}\left(a^{n+m}b^n - a^n b^{n+m}\right), \\
&= \frac{(ab)^n}{a-b}\left(a^m - b^m\right), \\
&= (-1)^n\left(\frac{a^m - b^m}{a-b}\right), \\
&= (-1)^n P_m.
\end{aligned}$$

3) ***L'identité de Catalan :*** Soient $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_n^2 - P_{n+m}P_{n-m} &= \left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right)^2 - \left(\frac{a^{n+m} - b^{n+m}}{a-b}\right)\left(\frac{a^{n-m} - b^{n-m}}{a-b}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n} + b^{2n} - 2(ab)^n - a^{2n} - b^{2n} + a^{n+m}b^{n-m} + a^{n-m}b^{n+m}\right), \\
&= \frac{(ab)^n}{(a-b)^2}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m + \left(\frac{b}{a}\right)^m - 2\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
P_n^2 - P_{n+m}P_{n-m} &= \frac{(ab)^n}{(ab)^m}\left(\frac{a^{2m} + b^{2m} - 2(ab)^m}{(a-b)^2}\right), \\
&= (-1)^{n-m}\left(\frac{a^m - b^m}{a-b}\right)^2, \\
&= (-1)^{n-m} P_m^2.
\end{aligned}$$

4) ***L'identité de Johnson :*** Soient k, l, n, m et $r \in \mathbb{N}$ tels que $k+l=m+n$,

$$\begin{aligned}
P_kP_l - P_mP_n &= \left(\frac{a^k-b^k}{a-b}\right)\left(\frac{a^l-b^l}{a-b}\right) - \left(\frac{a^m-b^m}{a-b}\right)\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right),\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{k+l} - a^kb^l - a^lb^k + b^{k+l} - a^{m+n} + a^mb^n + a^nb^m - b^{m+n}\right),\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(-a^kb^l - a^lb^k + a^mb^n + a^nb^m\right).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
(-1)^r\left(P_{k-r}P_{l-r} - P_{m-r}P_{n-r}\right) &= (-1)^r\left(\left(\frac{a^{k-r}-b^{k-r}}{a-b}\right)\left(\frac{a^{l-r}-b^{l-r}}{a-b}\right) - \left(\frac{a^{m-r}-b^{m-r}}{a-b}\right)\left(\frac{a^{n-r}-b^{n-r}}{a-b}\right)\right),\\
&= \frac{(ab)^r}{(a-b)^2}\left(a^{k+l-2r} + b^{k+l-2r} - a^{k-r}b^{l-r} - a^{l-r}b^{k-r} - a^{m+n-2r} - b^{m+n-2r}\right.\\
&+ \left. a^{m-r}b^{n-r} + a^{n-r}b^{m-r}\right),\\
&= \frac{(ab)^r}{(a-b)^2}\left(-a^{k-r}b^{l-r} - a^{l-r}b^{k-r} + a^{m-r}b^{n-r} + a^{n-r}b^{m-r}\right),\\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(-a^kb^l - a^lb^k + a^mb^n + a^nb^m\right),\\
&= P_kP_l - P_mP_n.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.2 *([2])*

Soient $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Pell et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Pell-Lucas, donc

1) *Pour $n, m \in \mathbb{N}$*

$$P_mP_{n+1} + P_{m-1}P_n = P_{m+n}. \tag{1.24}$$

2) *Pour $n, m \in \mathbb{N}$*

$$P_mP_{n+1} - P_{m+1}P_n = (-1)^nP_{m-n}. \tag{1.25}$$

3) *Pour $n \in \mathbb{N}$*

$$P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{2n+1}. \tag{1.26}$$

4) *Pour $n \in \mathbb{N}$*

$$P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 = 2P_{2n}. \tag{1.27}$$

5) *Pour* $n \in \mathbb{N}$

$$2P_{n+1}P_n - 2P_n^2 = P_{2n}. \tag{1.28}$$

6) *Pour* $n \in \mathbb{N}$

$$P_n^2 + P_{n+3}^2 = 5P_{2n+3}. \tag{1.29}$$

7) *Pour* $n \in \mathbb{N}$

$$P_{2n+1} + P_{2n} = 2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - (-1)^n. \tag{1.30}$$

8) *Pour* $n \in \mathbb{N}$

$$P_n^2 + P_{n-1}P_{n+1} = \frac{Q_n^2}{4}. \tag{1.31}$$

9) *Pour* $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+1} + P_{n-1} = Q_n. \tag{1.32}$$

10) *Pour* $n \in \mathbb{N}$

$$P_nQ_n = P_{2n}. \tag{1.33}$$

Preuve.

On a

$$P_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}, \quad Q_n = a^n + b^n,$$

avec

$$a = 1 + \sqrt{2}, \quad b = 1 - \sqrt{2}.$$

1) Soient $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_mP_{n+1} + P_{m-1}P_n &= \left(\frac{a^m - b^m}{a-b}\right)\left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right) + \left(\frac{a^{m-1} - b^{m-1}}{a-b}\right)\left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{m+n+1} + b^{m+n+1} - a^{n+1}b^m - a^mb^{n+1} + a^{m+n-1}\right. \\
&+ \left. b^{m+n-1} - a^nb^{m-1} - a^{m-1}b^n\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{m+n}\left(a + a^{-1}\right) + b^{m+n}\left(b + b^{-1}\right) - a^nb^m\left(a + b^{-1}\right)\right. \\
&- \left. a^mb^n\left(b + a^{-1}\right)\right),
\end{aligned}$$

comme $\quad a-b=(a+a^{-1})=-(b+b^{-1}) \quad$ et $\quad a+b^{-1}=b+a^{-1}=0,$

alors

$$\begin{aligned}
P_mP_{n+1}+P_{m-1}P_n &= \frac{a-b}{(a-b)^2}\left(a^{m+n}-b^{m+n}\right), \\
&= \frac{a^{m+n}-b^{m+n}}{a-b}, \\
&= P_{m+n}.
\end{aligned}$$

2) Soient $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_mP_{n+1}-P_{m+1}P_n &= \left(\frac{a^m-b^m}{a-b}\right)\left(\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\right)-\left(\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}\right)\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\Big(a^{m+n+1}-a^mb^{n+1}-b^ma^{n+1}+b^{n+m+1} \\
&- a^{m+n+1}-a^{m+1}b^n-a^nb^{m+1}+b^{m+n+1}\Big), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{m+1}b^n+a^nb^{m+1}-a^mb^{n+1}-b^ma^{n+1}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
P_mP_{n+1}-P_{m+1}P_n &= \frac{a-b}{(a-b)^2}\left(a^mb^n-a^nb^m\right), \\
&= \frac{(ab)^n}{a-b}(a^{m-n}-b^{m-n}), \\
&= (-1)^n\left(\frac{a^{m-n}-b^{m-n}}{a-b}\right), \\
&= (-1)^n P_{m-n}.
\end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_n^2+P_{n+1}^2 &= \frac{1}{(a-b)^2}\left((a^n-b^n)^2+(a^{n+1}-b^{n+1})^2\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n}+b^{2n}-2(ab)^n+a^{2n+2}+b^{2n+2}-2(ab)^{n+1}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$P_n^2 + P_{n+1}^2 = \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n+1}(a^{-1}+a) + b^{2n+1}(b^{-1}+b) - 2(ab)^n(ab+1)\right),$$

et comme $\quad a^{-1}+a = -(b^{-1}+b) = a-b,$

alors

$$\begin{aligned} P_n^2 + P_{n+1}^2 &= \frac{(a-b)}{(a-b)^2}\left(a^{2n+1} - b^{2n+1}\right), \\ &= \left(\frac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{a-b}\right), \\ &= P_{2n+1}. \end{aligned}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 &= \left(\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\right)^2 - \left(\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right)^2, \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n+2} + b^{2n+2} - 2\,(ab)^{n+1} - a^{2n-2} - b^{2n-2} + 2\,(ab)^{n-1}\right), \\ &= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n}\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) + b^{2n}\left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right) - 2(ab)^n\left(\frac{1}{ab} - ab\right)\right), \end{aligned}$$

comme $\quad a^2 - \frac{1}{a^2} = -\left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right) = 2(a-b) \quad$ et $\quad \frac{1}{ab} - ab = 0,$

alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 &= 2\frac{(a-b)}{(a-b)^2}\left(a^{2n} - b^{2n}\right), \\ &= 2\left(\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a-b}\right), \\ &= 2P_{2n}. \end{aligned}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 2P_{n+1}P_n - 2P_n^2 &= 2\left(\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\right)\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right) - 2\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right)^2, \\ &= \frac{2}{(a-b)^2}\left(a^{2n+1} + b^{2n+1} - a^{n+1}b^n - a^n b^{n+1} - a^{2n} - b^{2n} + 2(ab)^n\right), \end{aligned}$$

donc

$$2P_{n+1}P_n - 2P_n^2 \quad = \quad \frac{2}{(a-b)^2}\left(a^{2n}(a-1) + b^{2n}(a-1) - (ab)^n(a+b-2)\right),$$

et comme $\quad (a-1) = -(b-1) = \sqrt{2}, \quad$ et $\quad a+b-2=0,$

alors

$$\begin{aligned}
2P_{n+1}P_n - 2P_n^2 &= \frac{(a-b)}{(a-b)^2}\left(a^{2n} - b^{2n}\right), \\
&= \left(\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a-b}\right), \\
&= P_{2n}.
\end{aligned}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_n^2 + P_{n+3}^2 &= \left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{a-b}\right)^2, \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n} + b^{2n} - 2(ab)^n + a^{2n+6} + b^{2n+6} - 2(ab)^{n+3}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n+3}\left(\frac{1}{a^3} + a^3\right) + b^{2n+3}\left(\frac{1}{b^3} + b^3\right) - 2(ab)^n\left(1 + (ab)^3\right)\right),
\end{aligned}$$

comme $\quad \frac{1}{a^3} + a^3 = -(\frac{1}{b^3} + b^3) = 5(a-b) \quad$ et $\quad 1 + (ab)^3 = 0,$

alors

$$\begin{aligned}
P_n^2 + P_{n+3}^2 &= 5\frac{(a-b)}{(a-b)^2}\left(a^{2n+3} - b^{2n+3}\right), \\
&= 5\left(\frac{a^{2n+3} - b^{2n+3}}{a-b}\right), \\
&= 5P_{2n+3}.
\end{aligned}$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - (-1)^n &= 2\left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right)^2 - 2\left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right)^2 - (ab)^n, \\
&= \frac{2}{(a-b)^2}\left(a^{2n+2} + b^{2n+2} - 2(ab)^{n+1} - a^{2n} - b^{2n} + 2(ab)^n\right) - (ab)^n\,, \\
&= \frac{2}{(a-b)^2}\left(a^{2n+1}a + b^{2n+1}b - a^{2n} - b^{2n} + 2(ab)^n(1-ab)\right) - (ab)^n\,,
\end{aligned}$$

comme $\quad \dfrac{4}{(a-b)^2}(ab)^n(1-ab) - (ab)^n = 0,$

alors

$$\begin{aligned}
2P_{n+1}^2 - 2P_n^2 - (-1)^n &= \frac{2}{(a-b)^2}\left(a^{2n+1}a + b^{2n+1}b - a^{2n} - b^{2n}\right), \\
&= \frac{2}{(a-b)^2}\left((a-1)(a^{2n+1} + a^{2n}) + (b-1)(b^{2n+1} + b^{2n})\right), \\
&= \frac{(a-b)}{(a-b)^2}\left(a^{2n+1} - b^{2n+1} + a^{2n} - b^{2n}\right), \\
&= \left(\frac{a^{2n+1} - b^{2n+1}}{a-b}\right) + \left(\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a-b}\right), \\
&= P_{2n+1} + P_{2n}.
\end{aligned}$$

8) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P_n^2 + P_{n-1}P_{n+1} &= \left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}\right)\left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(a^{2n} + b^{2n} - 2(ab)^n + a^{2n} + b^{2n} - a^{n-1}b^{n+1} - a^{n+1}b^{n-1}\right), \\
&= \frac{1}{(a-b)^2}\left(2a^{2n} + 2b^{2n} - (ab)^n(2 + a^{-1}b + ab^{-1})\right),
\end{aligned}$$

comme $\quad 2 + a^{-1}b + ab^{-1} = -4,$

alors

$$\begin{aligned} P_n^2 + P_{n-1}P_{n+1} &= \frac{2}{(a-b)^2}\left(a^{2n} + b^{2n} + 2(ab)^n\right), \\ &= \frac{(a^n + b^n)^2}{4}, \\ &= \frac{Q_n^2}{4}. \end{aligned}$$

9) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P_{n+1} + P_{n-1} &= \left(\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}\right) + \left(\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}\right), \\ &= \frac{1}{a-b}\left(a^n\left(a + \frac{1}{a}\right) - b^n\left(b + \frac{1}{b}\right)\right), \end{aligned}$$

comme $\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = -\left(b + \dfrac{1}{b}\right) = a - b,$
alors

$$P_{n+1} + P_{n-1} = \frac{a-b}{a-b}\,(a^n + b^n) = a^n + b^n = Q_n.$$

10) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_nQ_n = \left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right)(a^n + b^n) = \frac{a^{2n} - b^{2n}}{a-b} = P_{2n}.$$

■

Maintenant, nous donnons quelques informations sur les nombres de Pell généralisés.

1.2.4 La suite de Pell généralisée

Définition 1.2.5
La suite de Pell généralisée (d'ordre trois) est la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *telle que* $P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ P_2 = 2$ *et*

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.34}$$

Les termes de cette suite sont appelés les nombres de Pell généralisés.

Alors les termes de la suite de Pell généralisée sont :

$$0, 1, 2, 5, 13, 33, 84, 214, 545, 1388, 3535, 9003, 22929, 58396, \ldots, etc.$$

En outre, il peut être étendu la suite de Pell généralisée des indices négatifs comme

$$P_{-n} = -P_{-(n-1)} - 2P_{-(n-2)} + P_{-(n-3)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.35}$$

Alors les termes de la suite de Pell généralisée des indices négatifs sont :

$$0, 0, 1, -1, -1, 4, -3, -6, 16, -7, -31, 61, -6, -147, \ldots, etc.$$

Résolution de la suite de Pell généralisée

Remarque 1.2.3
La suite (1.34) *est une équation aux différences linéaire homogène autonome d'ordre 3.*

L'équation caractéristique de (1.34) est :

$$x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0. \tag{1.36}$$

On utilise le changement de variable : $x = z + \frac{2}{3}$.
Donc l'équation (1.36) équivaux à

$$z^3 - \frac{7}{3}z - \frac{61}{27} = 0. \tag{1.37}$$

Dans le lemme suivant, nous rappelons la méthode de Cardan qui permette de trouver les solutions de l'équation (1.37).

Lemme 1.2.1 ***(Méthode de Cardan)***
Soit l'équation de troisième degré

$$z^3 + pz + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}. \tag{1.38}$$

Soit $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$.
Si $\Delta < 0$*, l'équation* (1.38) *possède alors une solution réelle et deux complexes données par :*

$$\begin{aligned} z_0 &= A + B, \\ z_1 &= \omega A + \omega^2 B, \\ z_2 &= \omega^2 A + \omega B, \end{aligned}$$

avec

$$A = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2}}, \quad B = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2}}, \quad \omega = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)/2.$$

Soit maintenant l'équation caractéristique (1.37).
D'après le lemme (1.2.1), on trouve

$$p = -\frac{7}{3}, \quad q = -\frac{61}{27},$$

$$\Delta = -87, \quad A = \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad B = \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Alors, il existe une solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées sont :

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ z_1 &= \omega\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega^2\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ z_2 &= \omega^2\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation (1.36) sont :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \beta &= \frac{2}{3} + \omega\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega^2\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \gamma &= \frac{2}{3} + \omega^2\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

avec

$$\omega = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)/2.$$

Notez que nous avons les identités ([11]) suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 2, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma &= -1, \\ \alpha\beta\gamma &= 1. \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation (1.34) est sous la forme :

$$P_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n.$$

Pour trouver c_1, c_2 et c_3, on utilise les conditions initiales ($P_0 = 0$, $P_1 = 1$, $P_2 = 2$), c'est-à-dire,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 & = & 0, \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma & = & 1, \\ c_1\alpha^2 + c_2\beta^2 + c_3\gamma^2 & = & 2. \end{cases} \tag{1.39}$$

On écrit le système sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \gamma \\ 2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}} = \frac{-\left(\gamma^2 - \beta^2\right) + 2\left(\gamma - \beta\right)}{\left(\beta\gamma^2 - \gamma\beta^2\right) - \alpha\left(\gamma^2 - \beta^2\right) + \alpha^2\left(\gamma - \beta\right)} = \frac{\left(\gamma - \beta\right)\left(2 - (\gamma + \beta)\right)}{\left(\gamma - \beta\right)\left(\beta\gamma - \alpha(\gamma + \beta) + \alpha^2\right)}, \\ &= \frac{\alpha}{\left(\alpha - \beta\right)\left(\alpha - \gamma\right)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & 2 & \gamma^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}} = \frac{-\left(\gamma^2-\alpha^2\right)+2\left(\gamma-\alpha\right)}{\left(\alpha\gamma^2-\alpha^2\gamma\right)-\beta\left(\gamma^2-\alpha^2\right)+\beta^2\left(\gamma-\beta\right)} = \frac{\left(\gamma-\alpha\right)\left(2-\left(\alpha+\gamma\right)\right)}{\left(\gamma-\alpha\right)\left(\alpha\gamma-\beta(\alpha+\gamma)+\beta^2\right)}, \\ &= \frac{\beta}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta-\gamma\right)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}} = \frac{-\left(\beta^2-\alpha^2\right)+2\left(\beta-\alpha\right)}{\left(\alpha\beta^2-\beta\alpha^2\right)-\gamma\left(\beta^2-\alpha^2\right)+\gamma^2\left(\beta-\alpha\right)} = \frac{\left(\beta-\alpha\right)\left(2-\left(\alpha+\beta\right)\right)}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2\right)}, \\ &= \frac{\gamma}{\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)}. \end{aligned}$$

La solution de (1.34) est :

$$P_n = \frac{\alpha^{n+1}}{\left(\alpha-\beta\right)\left(\alpha-\gamma\right)} + \frac{\beta^{n+1}}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta-\gamma\right)} + \frac{\gamma^{n+1}}{\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)}, \tag{1.40}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \beta &= \frac{2}{3} + \omega\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega^2\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \gamma &= \frac{2}{3} + \omega^2\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Définition 1.2.6

La formule (1.40) *est dite la formule de Binet de la suite de Pell généralisée.*

Résolution de la suite de Pell généralisée d'indice négatif

Remarque 1.2.4

La suite (1.35) *est une équation aux différences linéaire homogène autonome d'ordre 3.*

L'équation caractéristique de (1.35) est :

$$x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0. \tag{1.41}$$

On utilise le changement de variable : $x = z - \frac{1}{3}$.
Donc l'équation (1.41) équivaux à

$$z^3 + \frac{5}{3}z - \frac{43}{27} = 0. \tag{1.42}$$

D'après le lemme (1.2.1), on trouve

$$p = \frac{5}{3}, \quad q = -\frac{43}{27},$$

$$\Delta = -87, \quad A = \left(\frac{43}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad B = \left(\frac{43}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Alors, il existe une solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées sont :

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \left(\frac{43}{54}+\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{43}{54}-\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},\\
z_1 &= \omega\left(\frac{43}{54}+\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}+\omega^2\left(\frac{43}{54}-\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},\\
z_2 &= \omega^2\left(\frac{43}{54}+\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}+\omega\left(\frac{43}{54}-\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, les solutions de l'équation (1.41) sont :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{3}+\left(\frac{43}{54}+\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{43}{54}-\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},\\
x_2 &= -\frac{1}{3}+\omega\left(\frac{43}{54}+\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}+\omega^2\left(\frac{43}{54}-\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},\\
x_3 &= -\frac{1}{3}+\omega^2\left(\frac{43}{54}+\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}+\omega\left(\frac{43}{54}-\sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$

On remarque que

$$x_1=\frac{1}{\alpha},\ x_2=\frac{1}{\beta}\quad et\quad x_3=\frac{1}{\gamma},$$

avec α, β et γ sont les solutions de l'équation (1.36).

Donc, la solution générale de l'équation (1.35) est sous la forme :

$$P_{-n}=c_1\alpha^{-n}+c_2\beta^{-n}+c_3\gamma^{-n}.$$

Pour trouver c_1, c_2 et c_3, on utilise les conditions initiales ($P_{-2} = 1$, $P_{-1} = 0$, $P_0 = 0$), c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2}c_1 + \dfrac{1}{\beta^2}c_2 + \dfrac{1}{\gamma^2}c_3 & = & 1, \\ \dfrac{1}{\alpha}c_1 + \dfrac{1}{\beta}c_2 + \dfrac{1}{\gamma}c_3 & = & 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 & = & 0. \end{cases} \tag{1.43}$$

On écrit le système sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha^2} & \dfrac{1}{\beta^2} & \dfrac{1}{\gamma^2} \\ \dfrac{1}{\alpha} & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{1}{\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{\beta^2} & \dfrac{1}{\gamma^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{1}{\gamma} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\alpha^2} & \dfrac{1}{\beta^2} & \dfrac{1}{\gamma^2} \\ \dfrac{1}{\alpha} & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{1}{\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma}\right)}{\dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma}\right) - \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{\beta^2} - \dfrac{1}{\gamma^2}\right) + \left(\dfrac{1}{\beta^2\gamma} - \dfrac{1}{\beta\gamma^2}\right)},$$

donc

$$c_1 = \frac{\left(\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma}\right)}{\left(\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\right) + \dfrac{1}{\beta\gamma}\right)} = \frac{\alpha^2\beta\gamma}{\alpha^2 - \alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma} = \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}.$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 1 & \frac{1}{\gamma^2} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\beta^2} & \frac{1}{\gamma^2} \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)}{\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right) - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \left(\frac{1}{\alpha^2\gamma} - \frac{1}{\alpha\gamma^2}\right)},$$

donc

$$c_2 = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{1}{\alpha\gamma}\right)} = \frac{\beta^2\alpha\gamma}{\beta^2 - \beta(\alpha+\gamma) + \alpha\gamma} = \frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}.$$

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\beta^2} & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\beta^2} & \frac{1}{\gamma^2} \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}{\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) + \left(\frac{1}{\alpha^2\beta} - \frac{1}{\alpha\beta^2}\right)},$$

donc

$$c_3 = \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\alpha\beta}\right)} = \frac{\gamma^2\alpha\beta}{\gamma^2 - \gamma(\alpha+\beta) + \alpha\beta} = \frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

La solution de (1.35) est :

$$P_{-n} = \frac{\alpha^{-n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{-n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{-n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \tag{1.44}$$

avec

$$\alpha = \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\beta = \frac{2}{3} + \omega\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega^2\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\gamma = \frac{2}{3} + \omega^2\left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \omega\left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

Définition 1.2.7

La formule (1.44) *est dite la formule de Binet de la suite de Pell généralisée d'indice négatif.*

CHAPITRE 2

LA SOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRES D'ORDRE DEUX EN TERMES DES NOMBRES DE PELL GÉNÉRALISÉS

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la recherche de la solution de deux équations aux différences non linéaires d'ordre deux suivantes :

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n(x_{n-1} - 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{x_n(x_{n-1} + 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

avec les conditions initiales x_{-1}, x_0 sont des nombres réels et les solutions sont données en termes des nombres de Pell généralisés.
Nous rappelons que P_{-n} est le n-ème nombre de Pell généralisé d'indice négatif, qui vérifie la relation de récurrence

$$P_{-n} = -P_{-(n-1)} - 2P_{-(n-2)} + P_{-(n-3)}, \quad P_0 = P_1 = 0 \quad et \quad P_2 = 1.$$

2.1 Forme de solution de l'équation $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n(x_{n-1}-2)-1}$

Pour trouver la forme des solutions de l'équation (2.1) nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.1
On considère l'équation aux différences linéaire

$$z_{n+1} + z_n + 2z_{n-1} - z_{n-2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.3}$$

avec les valeurs initiales z_{-1}, z_0 et $z_1 \in \mathbb{R}$.
Alors toutes les solutions de l'équation (2.3) *écrites sous la forme*

$$z_n = P_{-n}z_{-1} + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})z_0 + P_{-(n+1)}z_1. \tag{2.4}$$

Preuve.
L'équation caractéristique de l'équation (2.3) est l'équation (1.41) avec les solutions α^{-1}, β^{-1} et γ^{-1} tel que les trois solutions vérifions les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 2, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma &= -1, \\ \alpha\beta\gamma &= 1. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (2.3) est donnée par :

$$z_n = c_1\alpha^{-n} + c_2\beta^{-n} + c_3\gamma^{-n}. \tag{2.5}$$

Pour trouver c_1 , c_2 et c_3, on utilise les conditions initiales z_{-1}, z_0 et z_1, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 &= z_{-1}, \\ c_1 + c_2 + c_3 &= z_0, \\ \dfrac{1}{\alpha}c_1 + \dfrac{1}{\beta}c_2 + \dfrac{1}{\gamma}c_3 &= z_1. \end{cases}$$

On va écrit le système sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{\alpha} & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{-1} \\ z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\begin{vmatrix} z_{-1} & \beta & \gamma \\ z_0 & 1 & 1 \\ z_1 & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{1}{\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{\alpha} & \dfrac{1}{\beta} & \dfrac{1}{\gamma} \end{vmatrix}} = \frac{z_{-1}\left(\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{\beta}\right) - z_0\left(\dfrac{\beta}{\gamma} - \dfrac{\gamma}{\beta}\right) + z_1(\beta - \gamma)}{\alpha\left(\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{\beta}\right) - \left(\dfrac{\beta}{\gamma} - \dfrac{\gamma}{\beta}\right) + \dfrac{1}{\alpha}(\beta - \gamma)}, \\ &= z_{-1}\frac{\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{\beta}}{\left(\dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\alpha - (\beta + \gamma) + \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\right)} - z_0\frac{\dfrac{\beta}{\gamma} - \dfrac{\gamma}{\beta}}{\left(\dfrac{\beta}{\gamma} - \dfrac{\gamma}{\beta}\right)\left(\dfrac{\alpha}{\beta + \gamma} - 1 + \dfrac{\beta\gamma}{\alpha(\beta + \gamma)}\right)} \\ &+ z_1\frac{\beta - \gamma}{(\beta - \gamma)\left(\dfrac{\alpha}{\beta\gamma} - \dfrac{(\beta + \gamma)}{\beta\gamma} + \dfrac{1}{\alpha}\right)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
c_1 &= z_{-1}\frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma} - z_0\frac{\alpha(\gamma+\beta)}{\alpha^2-\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma} + z_1\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2-\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma},\\
&= z_{-1}\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - z_0\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + z_1\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \quad \textit{car}: \alpha\beta\gamma = 1.
\end{aligned}$$

On a

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma,$$

et comme

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = -1, \quad \textit{alors} \quad \alpha\beta+\alpha\gamma = -(1+\beta\gamma).$$

D'autre part on a

$$\alpha\beta\gamma = 1 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha} = \beta\gamma.$$

Donc

$$\alpha(\beta+\gamma) = -(1+\beta\gamma) = -\left(1+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Alors

$$c_1 = z_{-1}\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + z_0\frac{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + z_1\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

De même

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & z_{-1} & \gamma \\ 1 & z_0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & z_1 & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}} = \frac{z_{-1}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right) - z_0\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right) + z_1(\alpha-\gamma)}{\beta\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right) - \left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}(\alpha-\gamma)},$$

donc

$$\begin{aligned}
c_2 &= z_{-1}\frac{\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\alpha}}{\left(\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-(\alpha+\gamma)+\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}\right)}-z_0\frac{\dfrac{\alpha}{\gamma}-\dfrac{\gamma}{\alpha}}{\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}-\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)\left(\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}-1+\dfrac{\alpha\gamma}{\beta(\alpha+\gamma)}\right)}\\
&+ z_1\frac{\alpha-\gamma}{(\alpha-\gamma)\left(\dfrac{\beta}{\alpha\gamma}-\dfrac{(\alpha+\gamma)}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\beta}\right)},\\
&= z_{-1}\frac{\beta}{\beta^2-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma}-z_0\frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\beta^2-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma}+z_1\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta^2-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma},
\end{aligned}$$

$$= z_{-1}\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}-z_0\frac{\beta(\alpha+\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+z_1\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

on a

$$\beta(\alpha+\gamma)=\alpha\beta+\beta\gamma,$$

et comme

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-1 \quad \textit{alors} \quad \alpha\beta+\beta\gamma=-(1+\alpha\gamma).$$

D'autre part on a

$$\alpha\beta\gamma=1 \Longrightarrow \frac{1}{\beta}=\alpha\gamma.$$

Donc

$$\beta(\alpha+\gamma) \;=\; -(1+\alpha\gamma)=-\left(1+\frac{1}{\beta}\right).$$

Alors

$$c_2 \;=\; z_{-1}\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+z_0\frac{\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+z_1\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}.$$

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & z_{-1} \\ 1 & 1 & z_0 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{vmatrix}} = \frac{z_{-1}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) - z_0\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right) + z_1(\beta-\alpha)}{\gamma\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) - \left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{\gamma}(\beta-\alpha)}, \\
&= z_{-1}\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma-(\beta+\alpha)+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)} - z_0\frac{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}}{\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma}{\beta+\alpha}-1+\frac{\alpha\beta}{\gamma(\beta+\alpha)}\right)} \\
&+ z_1\frac{\beta-\alpha}{(\beta-\alpha)\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}-\frac{(\beta+\alpha)}{\alpha\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)}, \\
&= z_{-1}\frac{\gamma}{\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta} - z_0\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta} + z_1\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta}, \\
&= z_{-1}\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} - z_0\frac{\gamma(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + z_1\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \quad \textit{car} : \alpha\beta\gamma = 1.
\end{aligned}
$$

On a

$$\gamma(\alpha+\beta) = \alpha\gamma + \beta\gamma,$$

et comme

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1, \quad \textit{alors} \quad \beta\gamma + \alpha\gamma = -(1+\alpha\beta).$$

D'autre part on a

$$\alpha\beta\gamma = 1 \Longrightarrow \frac{1}{\gamma} = \alpha\beta.$$

Donc

$$\gamma(\alpha+\beta) \;=\; -(1+\alpha\beta) = -\left(1+\frac{1}{\gamma}\right).$$

Alors

$$c_3 = z_{-1}\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + z_0\frac{\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + z_1\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

On remplace c_1, c_2 et c_3 dans (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
z_n &= \left(z_{-1}\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + z_0\frac{\left(1+\alpha^{-1}\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + z_1\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right)\alpha^{-n}\\
&+ \left(z_{-1}\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + z_0\frac{\left(1+\beta^{-1}\right)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + z_1\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\right)\beta^{-n}\\
&+ \left(z_{-1}\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + z_0\frac{\left(1+\gamma^{-1}\right)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + z_1\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)\gamma^{-n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\alpha^{-n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{-n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{-n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)z_{-1}\\
&+ \left(\frac{\alpha^{-n}\left(1+\alpha^{-1}\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{-n}\left(1+\beta^{-1}\right)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{-n}\left(1+\gamma^{-1}\right)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)z_0\\
&+ \left(\frac{\alpha^{-n}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{-n}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{-n}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)z_1.
\end{aligned}$$

D'après la formule (1.44), on obtient

$$z_n = P_{-n}z_{-1} + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})z_0 + P_{-(n+1)}z_1.$$

■

Pour trouver la forme des solutions de l'équation (2.1), on considère le changement de variable suivant :

$$x_n = \frac{z_n}{z_{n+1}},$$

alors

$$\frac{z_{n+1}}{z_{n+2}} = \frac{1}{\frac{z_n}{z_{n+1}}\left(\frac{z_{n-1}}{z_n}-2\right)-1} = \frac{z_{n+1}z_n}{z_n z_{n-1}-2z_n^2-z_{n+1}z_n} = \frac{z_{n+1}}{z_{n-1}-2z_n-z_{n+1}}.$$

Donc l'équation (2.1) devient

$$z_{n+2} = -z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}. \tag{2.6}$$

L'équation (2.6) est sous la forme de l'équation (2.3), alors d'après le Lemme (2.1.1) sa solution est sous la forme (2.4), c'est-à-dire,

$$z_n = P_{-n}z_{-1} + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})z_0 + P_{-(n+1)}z_1,$$

tel que P_{-n} est le n-ème nombre de Pell généralisé d'indice négatif et z_{-1}, z_0 et z_1 sont des nombres réels.
Alors

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{z_n}{z_{n+1}}, \\ &= \frac{P_{-n}z_{-1} + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})z_0 + P_{-(n+1)}z_1}{P_{-(n+1)}z_{-1} + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})z_0 + P_{-(n+2)}z_1}, \\ &= \frac{P_{-n}\left(\frac{z_{-1}}{z_1}\right) + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})\left(\frac{z_0}{z_1}\right) + P_{-(n+1)}}{P_{-(n+1)}\left(\frac{z_{-1}}{z_1}\right) + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})\left(\frac{z_0}{z_1}\right) + P_{-(n+2)}}, \\ &= \frac{P_{-n}\left(\frac{z_{-1}}{z_0}\frac{z_0}{z_1}\right) + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})\left(\frac{z_0}{z_1}\right) + P_{-(n+1)}}{P_{-(n+1)}\left(\frac{z_{-1}}{z_0}\frac{z_0}{z_1}\right) + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})\left(\frac{z_0}{z_1}\right) + P_{-(n+2)}}, \end{aligned}$$

avec

$$x_0 = \frac{z_0}{z_1}, \quad x_{-1} = \frac{z_{-1}}{z_0},$$

donc

$$x_n = \frac{P_{-n}x_{-1}x_0 + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})x_0 + P_{-(n+1)}}{P_{-(n+1)}x_{-1}x_0 + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})x_0 + P_{-(n+2)}}. \tag{2.7}$$

De tout ce qui précède, le théorème suivant est vrai.

Théorème 2.1.1
Soit $\{x_n\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie de l'équation aux différences* (2.1).
Alors pour $n \in \mathbb{N}_0$,

$$x_n = \frac{P_{-n}x_{-1}x_0 + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})x_0 + P_{-(n+1)}}{P_{-(n+1)}x_{-1}x_0 + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})x_0 + P_{-(n+2)}}, \tag{2.8}$$

où $\{P_{-n}\}_{n\geq 0}$ *est la suite de Pell généralisée d'indice négatif.*

2.2 Stabilité globale de solution de l'équation (2.1)

Lemme 2.2.1
L'équation (2.1) *admet un seul point d'équilibre réel, et il est donné par :*

$$\bar{y} = \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Preuve.
Supposons $I \subset \mathbb{R}$ et on considére la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & I^2 & \to & I \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \dfrac{1}{x(y-2)-1}. \end{array}$$

Soit $\bar{y}$ un point d'équilibre de l'équation (2.1), donc

$$\begin{aligned} f(\bar{y},\bar{y}) &= \bar{y}, \\ \frac{1}{\bar{y}(\bar{y}-2)-1} &= \bar{y}, \end{aligned}$$

alors

$$\bar{y}^3 - 2\bar{y}^2 - \bar{y} - 1 = 0. \tag{2.9}$$

L'équation (2.9) est l'équation caractéristique (1.36) dans le chapitre précédant, qui admet une seule solution réelle dans I, donnée par :

$$\bar{y} = \alpha = \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

■

Théorème 2.2.1
Le point d'équilibre $\bar{y}$ est instable.

Preuve.
L'équation linéaire associée à l'équation (2.1) autour du point d'équilibre $\bar{y}$ est donnée par :

$$S_{n+1} = R_0 S_n + R_1 S_{n-1},$$

avec

$$\begin{aligned}
R_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \alpha) = \frac{-\alpha + 2}{(\alpha(\alpha - 2) - 1)^2} = \frac{2 - \alpha}{(\alpha^2 - 2\alpha - 1)^2} \\
&= \frac{2 - \alpha}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = 2\alpha^2 - \alpha^3 = -\alpha - 1, \\
R_1 &= \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \alpha) = \frac{-\alpha}{(\alpha(\alpha - 2) - 1)^2} = \frac{-\alpha}{(\alpha^2 - 2\alpha - 1)^2} \\
&= \frac{-\alpha}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = -\alpha^3.
\end{aligned}$$

Alors

$$S_{n+1} = -(\alpha + 1)S_n - \alpha^3 S_{n-1},$$

son équation caractéristique est donnée par :

$$\lambda^2 + (\alpha + 1)\lambda + \alpha^3 = 0.$$

On a $\Delta = (\alpha + 1)^2 - 4\alpha^3 = -53.51 < 0$,
alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.7735 - 3.65754\,\imath, \\ \lambda_2 &= -1.7735 + 3.65754\,\imath. \end{aligned}$$

On trouve, $\quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.7735 > 1.$
Donc, d'après le Théorème (1.1.5) le point d'équilibre $\bar{y}$ est instable. ■

Exemples numériques

Pour confirmer l'instabilité des solutions de l'équation (2.1), nous considérons les exemples numériques suivants :

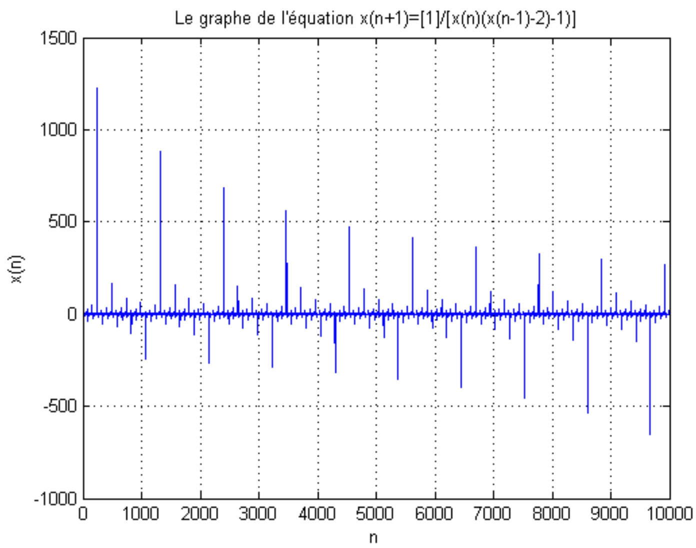

FIGURE 2.1 – La figure de la solution de l'équation (2.1) avec les conditions initiales $x_{-1} = 35, \quad x_0 = 55.$

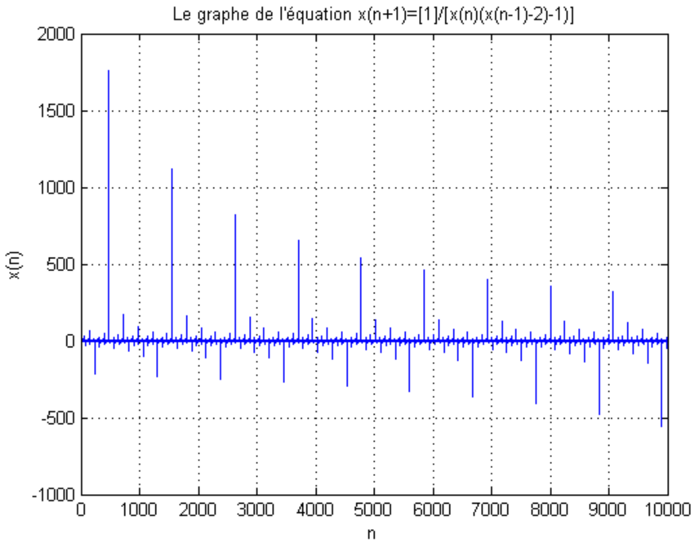

FIGURE 2.2 – La figure de la solution de l'équation (2.1) avec les conditions initiales $x_{-1} = -20, \quad x_0 = 100$.

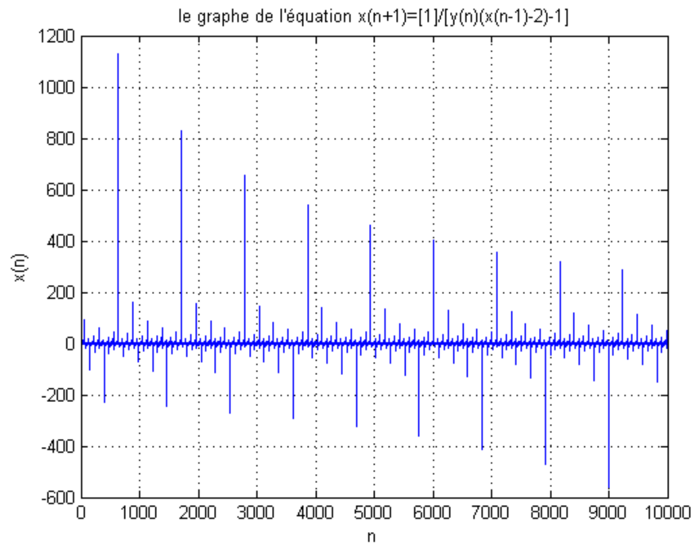

FIGURE 2.3 – La figure de la solution de l'équation (2.1) avec les conditions initiales $x_{-1} = -11, \quad x_0 = 33$.

2.3 Forme de solution de l'équation $x_{n+1} = \dfrac{-1}{x_n(x_{n-1}+2)-1}$

Pour trouver la forme des solutions de l'équation (2.2), on considère le changement de variable suivant :

$$x_n = \frac{y_n}{-y_{n+1}},$$

$$\frac{y_{n+1}}{-y_{n+2}} = \frac{-1}{\dfrac{-y_n}{y_{n+1}}\left(\dfrac{y_{n-1}}{-y_n}+2\right)-1} = \frac{-1}{\dfrac{-y_n}{y_{n+1}}\left(\dfrac{y_{n-1}-2y_n}{-y_n}\right)-1} = \frac{-y_{n+1}}{y_{n-1}-2y_n-y_{n+1}}.$$

Donc l'équation (2.2) devient

$$y_{n+2} = -y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}. \tag{2.10}$$

L'équation (2.10) est sous la forme de l'équation (2.3), donc d'après le Lemme (2.1.1) ses solutions sont sous la forme (2.4).
i.e.

$$y_n = P_{-n}y_{-1} + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})y_0 + P_{-(n+1)}y_1,$$

tel que P_{-n} est le n-ème nombre de Pell généralisé d'indice négatif et y_{-1}, y_0 et y_1 sont des nombres réels.
Alors

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{y_n}{-y_{n+1}},\\
&= \frac{P_{-n}y_{-1} + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})y_0 + P_{-(n+1)}y_1}{-P_{-(n+1)}y_{-1} - (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})y_0 - P_{-(n+2)}y_1},\\
&= \frac{P_{-n}\left(\dfrac{y_{-1}}{y_1}\right) + (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})\left(\dfrac{y_0}{y_1}\right) + P_{-(n+1)}}{-P_{-(n+1)}\left(\dfrac{y_{-1}}{y_1}\right) - (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})\left(\dfrac{y_0}{y_1}\right) - P_{-(n+2)}},\\
&= \frac{P_{-n}\left(\dfrac{y_{-1}}{-y_0}\dfrac{-y_0}{y_1}\right) - (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})\left(\dfrac{y_0}{-y_1}\right) + P_{-(n+1)}}{-P_{-(n+1)}\left(\dfrac{y_{-1}}{-y_0}\dfrac{-y_0}{y_1}\right) + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})\left(\dfrac{y_0}{-y_1}\right) - P_{-(n+2)}},
\end{aligned}$$

avec

$$x_0 = \frac{y_0}{-y_1}, \quad x_{-1} = \frac{y_{-1}}{-y_0},$$

donc

$$x_n = \frac{P_{-n}x_{-1}x_0 - (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})x_0 + P_{-(n+1)}}{-P_{-(n+1)}x_{-1}x_0 + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})x_0 - P_{-(n+2)}}. \tag{2.11}$$

De tout ce qui précède, le théorème suivant est vrai.

Théorème 2.3.1

Soit $\{x_n\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie de l'équation aux différences* (2.2).
Alors pour $n \in \mathbb{N}_0$,

$$x_n = \frac{P_{-n}x_{-1}x_0 - (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})x_0 + P_{-(n+1)}}{-P_{-(n+1)}x_{-1}x_0 + (P_{-(n+2)} + P_{-(n+3)})x_0 - P_{-(n+2)}}, \tag{2.12}$$

où $\{P_{-n}\}_{n\geq 0}$ *est la suite de Pell généralisée d'indice négatif.*

2.4 Stabilité globale de solution de l'équation (2.2)

Lemme 2.4.1

L'équation (2.2) *admet un seul point d'équilibre réel, et il est donné par :*

$$\bar{x} = -\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \tag{2.13}$$

Preuve.

Supposons $I \subset \mathbb{R}$ et on considére la fonction

$$\begin{array}{rccl} g: & I^2 & \to & I \\ & (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \dfrac{-1}{x(y+2)-1}. \end{array}$$

Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de l'équation (2.2) , donc

$$\begin{array}{rcl} f(\bar{x},\bar{x}) & = & \bar{x}, \\ \dfrac{-1}{\bar{x}(\bar{x}+2)-1} & = & \bar{x}, \end{array}$$

alors

$$\bar{x}^3 + 2\bar{x}^2 - \bar{x} + 1 = 0. \tag{2.14}$$

L'équation caractéristique (2.14) admet une seule solution réelle dans I, donnée par :

$$\bar{x} = -\alpha = -\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

■

Théorème 2.4.1

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est instable.

Preuve.

L'équation linéaire associée à l'équation (2.2) autour du point d'équilibre $\bar{x}$ est donnée par :

$$T_{n+1} = K_0 T_n + K_1 T_{n-1},$$

avec

$$\begin{aligned}
K_0 &= \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{-\alpha + 2}{(-\alpha(-\alpha + 2) - 1)^2} \\
&= \frac{-\alpha + 2}{\left(\frac{1}{-\alpha}\right)^2} = -\alpha^3 + 2\alpha^2 = -\alpha - 1, \\
K_1 &= \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{-\alpha}{(-\alpha(-\alpha + 2) - 1)^2} \\
&= \frac{-\alpha}{\left(\frac{1}{-\alpha}\right)^2} = -\alpha^3.
\end{aligned}$$

Alors

$$T_{n+1} = (-\alpha - 1)T_n + (-\alpha^3)T_{n-1},$$

son équation caractéristique est donnée par :

$$\lambda^2 + (\alpha + 1)\lambda + \alpha^3 = 0,$$

On a $\Delta = (\alpha + 1)^2 - 4\alpha^3 = -53.51 < 0$,

alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.7735 - 3.65754\,\imath, \\ \lambda_2 &= -1.7735 + 3.65754\,\imath. \end{aligned}$$

On trouve, $\quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.7735 > 1.$

Donc, d'après le Théorème (1.1.5) le point d'équilibre $\bar{x}$ est instable. ■

Exemples numériques

Pour confirmer l'instabilité des solutions de l'équation (2.2), nous considérons les exemples numériques suivants :

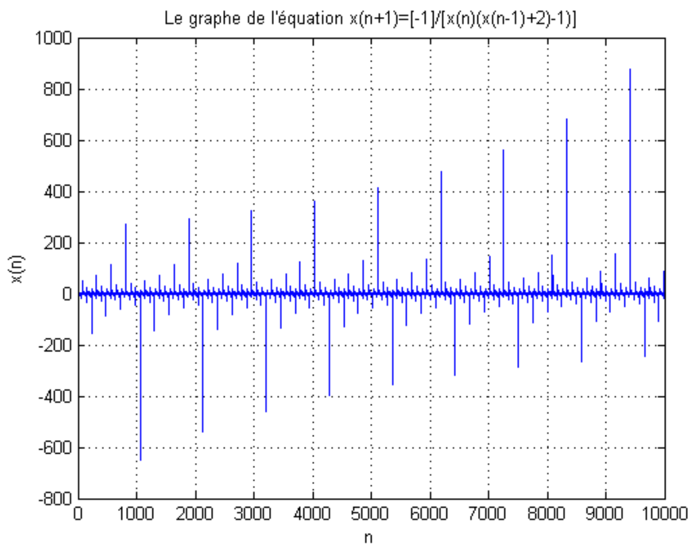

FIGURE 2.4 – La figure de la solution de l'équation (2.2) avec les conditions initiales $x_{-1} = 30, \quad x_0 = 50.$

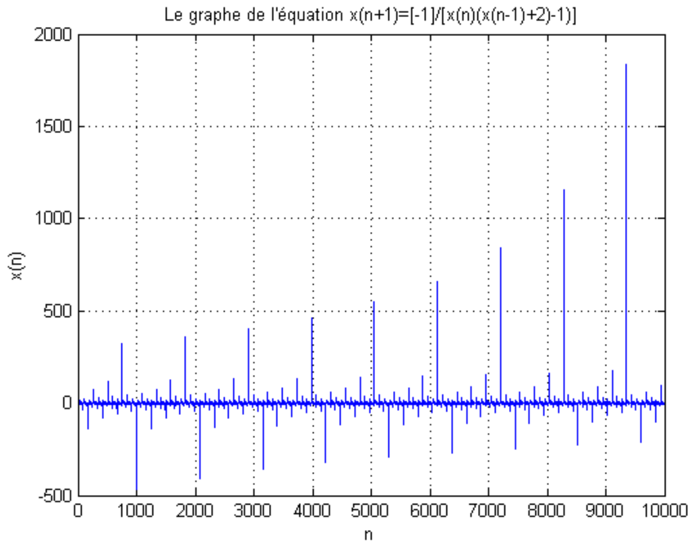

FIGURE 2.5 – La figure de la solution de l'équation (2.2) avec les conditions initiales $x_{-1} = -15, \quad x_0 = 55.$

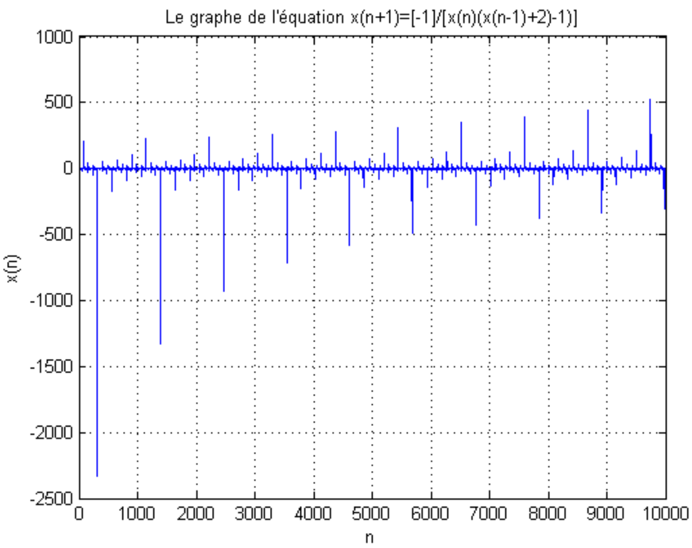

FIGURE 2.6 – La figure de la solution de l'équation (2.2) avec les conditions initiales $x_{-1} = 55, \quad x_0 = 100.$

CHAPITRE 3

LA SOLUTION DE DEUX SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRES

Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons des formules explicites pour la solution générale de deux systèmes d'équations aux différences non linéaires d'ordre deux suivants :

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n(x_{n-1} - 2) - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{x_n(y_{n-1} - 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{y_n(x_{n-1} + 2) - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{-1}{x_n(y_{n-1} + 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.2}$$

avec les conditions initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 sont des nombres réels.

Où les solutions sont données en termes des nombres de Pell généralisés .

3.1 Forme de solution du système (3.1)

Nous rappelons que P_{-n} est le n-ème nombre de Pell généralisé d'indice négatif, qui vérifie la relation de récurrence

$$P_{-n} = -P_{-(n-1)} - 2P_{-(n-2)} + P_{-(n-3)}, \quad P_0 = 0, P_1 = 0 \quad et \quad P_2 = 1.$$

Pour trouver la forme des solutions du système (3.1) nous aurons besoin de deux lemmes suivants.

Lemme 3.1.1
On considère l'équation aux différences linéaire

$$T_{n+1} - T_n + 2T_{n-1} + T_{n-2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.3}$$

avec les valeurs initiales T_{-1}, T_0 et $T_1 \in \mathbb{R}$. Alors toutes les solutions de l'équation (3.3) *écrites sous la forme*

$$T_n = (-1)^{-n+1}\left(P_{-n}T_{-1} - (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})T_0 + P_{-(n+1)}T_1\right). \tag{3.4}$$

Preuve.
L'équation caractéristique de l'équation (3.3) est donnée par :

$$\rho^3 - \rho^2 + 2\rho + 1 = 0,$$

qui a trois solutions distinctes, une solution réelle ρ_1 et deux solutions complexes conjuguées ρ_2, ρ_3, où

$$\rho_1 = -\alpha^{-1}, \rho_2 = -\beta^{-1}, \rho_3 = -\gamma^{-1},$$

tel que α, β et γ sont les solutions de l'équation (1.36). Donc la solution générale de (3.3) est donnée par :

$$T_n = c_1(-\alpha)^{-n} + c_2(-\beta)^{-n} + c_3(-\gamma)^{-n}. \tag{3.5}$$

Pour trouver c_1 , c_2 et c_3, on utilise les conditions initiales T_{-1}, T_0 et T_1, c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\alpha c_1 - \beta c_2 - \gamma c_3 &= T_{-1}, \\ c_1 + c_2 + c_3 &= T_0, \\ \dfrac{1}{-\alpha} c_1 + \dfrac{1}{-\beta} c_2 + \dfrac{1}{-\gamma} c_3 &= T_1. \end{cases}$$

On va écrit le système sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta & -\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{-\alpha} & \dfrac{1}{-\beta} & \dfrac{1}{-\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{-1} \\ T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Cramer, on obtient

$$c_1 = \frac{-\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} T_{-1} + \frac{1+\dfrac{1}{\alpha}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} T_0 - \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} T_1,$$

$$c_2 = \frac{-\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} T_{-1} + \frac{1+\dfrac{1}{\beta}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} T_0 - \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} T_1,$$

$$c_3 = \frac{-\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} T_{-1} + \frac{1+\dfrac{1}{\gamma}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} T_0 - \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} T_1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
T_n &= \left(\frac{(-\alpha)^{-n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(-\beta)^{-n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{(-\gamma)^{-n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)T_{-1} \\
&+ \left(\frac{(-\alpha)^{-n}\left(1+\alpha^{-1}\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(-\beta)^{-n}\left(1+\beta^{-1}\right)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{(-\gamma)^{-n}\left(1+\gamma^{-1}\right)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)T_0 \\
&- \left(\frac{(-\alpha)^{-n}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(-\beta)^{-n}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{(-\gamma)^{-n}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)T_1.
\end{aligned}$$

Alors

$$T_n = G_{-n}T_{-1} - \left(-G_{-(n+1)} + G_{-(n+2)}\right)T_0 - G_{-(n+1)}T_1, \tag{3.6}$$

où, G_{-n} est définie pour $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$\begin{aligned}
G_{-n} &= \frac{(-\alpha)^{-n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(-\beta)^{-n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{(-\gamma)^{-n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \\
&= (-1)^{-n+1}\left(\frac{\alpha^{-n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{-n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{-n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right), \\
&= (-1)^{-n+1}P_{-n},
\end{aligned}$$

où, P_{-n} est donnée par (1.44).

Alors

$$\begin{aligned}
T_n &= (-1)^{-n+1}P_{-n}T_{-1} - \left(-(-1)^{-n}P_{-(n+1)} + (-1)^{-n-1}P_{-(n+2)}\right)T_0 - (-1)^{-n}P_{-(n+1)}T_1, \\
&= (-1)^{-n+1}\left(P_{-n}T_{-1} - (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})T_0 + P_{-(n+1)}T_1\right).
\end{aligned}$$

Donc, la solution est écrite sous la forme suivante :

$$T_{2n+1} = P_{-(2n+1)}T_{-1} - \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)T_0 + P_{-(2n+2)}T_1,$$

et

$$T_{2n} = -P_{-2n}T_{-1} + \left(P_{-(2n+1))} + P_{-(2n+2)}\right)T_0 - P_{-(2n+1)}T_1.$$

■

Lemme 3.1.2 *([1])*
On considère le système d'équations aux différences linéaires suivant :

$$\begin{cases} u_{n+2} &= -v_{n+1} - 2u_n + v_{n-1}, \\ v_{n+2} &= -u_{n+1} - 2v_n + u_{n-1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.7}$$

avec les valeurs initiales u_{-1}, u_0, u_1, v_{-1}, v_0 et $v_1 \in \mathbb{R}$.
Alors toutes les solutions de ce système sont écrites sous la forme

$$\begin{cases} u_{2n} &= P_{-2n}v_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)u_0 + P_{-(2n+1)}v_1, \\ u_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}u_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)v_0 + P_{-(2n+2)}u_1, \\ v_{2n} &= P_{-2n}u_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)v_0 + P_{-(2n+1)}u_1, \\ v_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}v_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)u_0 + P_{-(2n+2)}v_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Preuve.
Du système (3.7), pour $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} + v_{n+1} &= -\left(v_n + u_n\right) - 2\left(u_{n-1} + v_{n-1}\right) + \left(v_{n+1} + u_{n-2}\right), \\ u_{n+1} - v_{n+1} &= -\left(v_n - u_n\right) - 2\left(u_{n-1} - v_{n-1}\right) + \left(v_{n+1} - u_{n-2}\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

On pose

$$\begin{cases} R_n &= u_n + v_n, \\ S_n &= u_n - v_n. \end{cases} \tag{3.10}$$

On remplace (3.10) dans (3.9), on obtient les deux équations aux différences linéaires suivantes :

$$R_{n+1} = -R_n - 2R_{n-1} + R_{n-2}, \tag{3.11}$$

$$S_{n+1} = S_n - 2S_{n-1} - S_{n-2}. \tag{3.12}$$

– L'équation (3.11) est sous la forme de l'équation (2.3), donc d'après le Lemme (2.1.1) sa solution est sous la forme (2.4). C'est-à-dire

$$R_n = P_{-n}R_{-1} + \left(P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)}\right)R_0 + P_{-(n+1)}R_1,$$

tel que P_{-n} est le n-ème nombre de Pell généralisé d'indice négatif et R_{-1}, R_0 et R_1 sont des nombres réels.

– L'équation (3.12) est sous la forme de l'équation (3.3), donc d'après le Lemme (3.1.1) sa solution est sous la forme (3.4). C'est-à-dire

$$S_n = (-1)^{-n+1}\left(P_{-n}S_{-1} - (P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)})S_0 + P_{-(n+1)}S_1\right), \tag{3.13}$$

tel que P_{-n} est le n-ème nombre de Pell généralisé d'indice négatif et S_{-1}, S_0 et S_1 sont des nombres réels.

De (3.10), on a

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{1}{2}\left(R_n + S_n\right), \\ v_n &= \dfrac{1}{2}\left(R_n - S_n\right). \end{cases} \tag{3.14}$$

Donc la solution du système (3.7) est donnée par :

$$\begin{cases} u_{2n} &= P_{-2n}v_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)u_0 + P_{-(2n+1)}v_1, \\ u_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}u_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)v_0 + P_{-(2n+2)}u_1, \\ v_{2n} &= P_{-2n}u_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)v_0 + P_{-(2n+1)}u_1, \\ v_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}v_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)u_0 + P_{-(2n+2)}v_1. \end{cases} \tag{3.15}$$

■

Pour trouver la forme des solutions du système (3.1), on considère les changements des variables suivants :

$$x_n = \frac{z_n}{w_{n+1}}, \quad y_n = \frac{w_n}{z_{n+1}}.$$

Alors

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{z_{n+1}}{w_{n+2}}, \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{w_{n+1}}{z_{n+2}}. \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1}}{w_{n+2}} &= \dfrac{1}{\dfrac{w_n}{z_{n+1}}\left(\dfrac{z_{n-1}}{w_n}-2\right)-1}, \\ \\ &= \dfrac{z_{n+1}}{z_{n-1}-2w_n-z_{n+1}}. \\ \\ \dfrac{w_{n+1}}{z_{n+2}} &= \dfrac{1}{\dfrac{z_n}{w_{n+1}}\left(\dfrac{w_{n-1}}{z_n}-2\right)-1}, \\ \\ &= \dfrac{w_{n+1}}{w_{n-1}-2z_n-w_{n+1}}. \end{cases}$$

Donc, le système (3.1) devient

$$\begin{cases} w_{n+2} = -z_{n+1} - 2w_n + z_{n-1}, \\ z_{n+2} = -w_{n+1} - 2z_n + w_{n-1}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Le système (3.17) est sous la forme du système (3.7), donc d'après le Lemme (3.1.2) ses solutions sont sous la forme (3.8), c'est-à-dire,

$$\begin{cases} w_{2n} &= P_{-2n}z_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)w_0 + P_{-(2n+1)}z_1, \\ w_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}w_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)z_0 + P_{-(2n+2)}w_1, \\ z_{2n} &= P_{-2n}w_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)z_0 + P_{-(2n+1)}w_1, \\ z_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}z_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)w_0 + P_{-(2n+2)}z_1, \end{cases} \tag{3.18}$$

tel que les valeurs initiales $w_{-1},\ w_0,\ w_1,\ z_{-1},\ z_0\ \ et\ \ z_1 \in \mathbb{R}$.

On a

$$x_n = \frac{z_n}{w_{n+1}},$$

alors

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} &= \frac{z_{2n+1}}{w_{2n+2}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}z_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)w_0 + P_{-(2n+2)}z_1}{P_{-(2n+2)}z_{-1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)w_0 + P_{-(2n+3)}z_1}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}\dfrac{z_{-1}}{z_1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}\dfrac{z_{-1}}{z_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+3)}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}\dfrac{z_{-1}}{w_0}\dfrac{w_0}{z_1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}\dfrac{z_{-1}}{w_0}\dfrac{w_0}{z_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+3)}},
\end{aligned}$$

donc

$$x_{2n+1} = \frac{P_{-(2n+1)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)y_0 + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)y_0 + P_{-(2n+3)}}. \tag{3.19}$$

Et

$$\begin{aligned}
x_{2n+2} &= \frac{z_{2n+2}}{w_{2n+3}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}w_{-1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)z_0 + P_{-(2n+3)}w_1}{P_{-(2n+3)}w_{-1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)z_0 + P_{-(2n+4)}w_1}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}\dfrac{w_{-1}}{w_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}\dfrac{w_{-1}}{w_1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+4)}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}\dfrac{w_{-1}}{z_0}\dfrac{z_0}{w_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}\dfrac{w_{-1}}{z_0}\dfrac{z_0}{w_1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+4)}},
\end{aligned}$$

donc

$$x_{2n+2} = \frac{P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)x_0 + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)x_0 + P_{-(2n+4)}}. \tag{3.20}$$

Par un calcul similaire, on trouve y_n.

On a

$$y_n = \frac{w_n}{z_{n+1}},$$

alors

$$\begin{aligned}
y_{2n+1} &= \frac{w_{2n+1}}{z_{2n+2}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}w_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)z_0 + P_{-(2n+2)}w_1}{P_{-(2n+2)}w_{-1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)z_0 + P_{-(2n+3)}w_1}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}\dfrac{w_{-1}}{w_1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}\dfrac{w_{-1}}{w_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+3)}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}\dfrac{w_{-1}}{z_0}\dfrac{z_0}{w_1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}\dfrac{w_{-1}}{z_0}\dfrac{z_0}{w_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{z_0}{w_1} + P_{-(2n+3)}},
\end{aligned}$$

donc

$$y_{2n+1} = \frac{P_{-(2n+1)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)x_0 + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)x_0 + P_{-(2n+3)}}. \tag{3.21}$$

Et

$$\begin{aligned}
y_{2n+2} &= \frac{w_{2n+2}}{z_{2n+3}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}z_{-1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)w_0 + P_{-(2n+3)}z_1}{P_{-(2n+3)}z_{-1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)w_0 + P_{-(2n+4)}z_1}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}\dfrac{z_{-1}}{z_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}\dfrac{z_{-1}}{z_1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+4)}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}\dfrac{z_{-1}}{w_0}\dfrac{w_0}{z_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}\dfrac{z_{-1}}{w_0}\dfrac{w_0}{z_1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)\dfrac{w_0}{z_1} + P_{-(2n+4)}},
\end{aligned}$$

donc

$$y_{2n+2} = \frac{P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) y_0 + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) y_0 + P_{-(2n+4)}}. \tag{3.22}$$

D'après tout ce qui précède, le théorème suivant est vrai.

Théorème 3.1.1

Soit $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie du système* (3.1). *Alors pour* $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{cases} x_{2n+1} = \dfrac{P_{-(2n+1)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) y_0 + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) y_0 + P_{-(2n+3)}}, \\[2ex] x_{2n+2} = \dfrac{P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) x_0 + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) x_0 + P_{-(2n+4)}}, \\[2ex] y_{2n+1} = \dfrac{P_{-(2n+1)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) x_0 + P_{-(2n+2)}}{P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) x_0 + P_{-(2n+3)}}, \\[2ex] y_{2n+2} = \dfrac{P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) y_0 + P_{-(2n+3)}}{P_{-(2n+3)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) y_0 + P_{-(2n+4)}}, \end{cases} \tag{3.23}$$

où $\{P_{-n}\}_{n\geq 0}$ *est la suite de Pell généralisée d'indice négatif.*

3.2 Stabilité globale des solutions du système (3.1)

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale des solutions réelles du système (3.1).

Supposons I et $J \subset \mathbb{R}$ et on considère les fonctions

$$\begin{array}{lccc} f: & I^2 \times J^2 & \rightarrow & I \\ g: & I^2 \times J^2 & \rightarrow & J \end{array}$$

définies par

$$\begin{cases} f\left(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}\right) = \dfrac{1}{y_n\left(x_{n-1}-2\right)-1}, \\ \\ g\left(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}\right) = \dfrac{1}{x_n\left(y_{n-1}-2\right)-1}. \end{cases}$$

Lemme 3.2.1

Le système (3.1) *admet un seul point d'équilibre réel donné par :*

$$\overline{M} = (\bar{x}, \bar{y}) = (\alpha, \alpha), \quad avec \quad \alpha = \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Preuve.

Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un point d'équilibre, donc

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{y}\left(\bar{x}-2\right)-1},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\bar{x}\left(\bar{y}-2\right)-1}.$$

On obtient

$$\bar{x}^2\bar{y} - 2\bar{x}\bar{y} - \bar{x} - 1 = 0, \tag{3.24}$$

$$\bar{y}^2\bar{x} - 2\bar{y}\bar{x} - \bar{y} - 1 = 0. \tag{3.25}$$

D'après la soustraction (3.25) de (3.24), on obtient

$$\begin{aligned} \bar{x}^2\bar{y} - \bar{y}^2\bar{x} - \bar{x} + \bar{y} &= 0, \\ \left(\bar{x}\bar{y}-1\right)\left(\bar{x}-\bar{y}\right) &= 0, \end{aligned}$$

alors

$$\bar{x}\bar{y} = 1, \quad (impossible)$$

ou

$$\bar{x} = \bar{y}. \tag{3.26}$$

On remplace (3.26) dans (3.25), on obtient

$$\bar{y}^3 - 2\bar{y}^2 - \bar{y} - 1 = 0. \tag{3.27}$$

L'équation (3.27) est l'équation caractéristique (1.36), qui admet une seule solution réelle dans I, donnée par :

$$\bar{y} = \alpha = \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

et d'après (3.26), on a

$$\bar{x} = \bar{y} = \alpha,$$

donc le point d'équilibre du système (3.1) est :

$$\overline{M} = (\bar{x}, \bar{y}) = (\alpha, \alpha).$$

■ La stabilité locale du point d'équilibre $\overline{M} = (\alpha, \alpha)$ du système (3.1) est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.1
Le point d'équilibre $\overline{M}$ est instable.

Preuve.
Le système linéaire associé au système (3.1) autour du point d'équilibre $\overline{M}$, est donné par :

$$W_{n+1} = AW_n, \quad W_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1})^T,$$

où **A** est la matrice Jacobienne donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^3 & -\alpha-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha-1 & 0 & 0 & -\alpha^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de **A** est donné par :

$$P_A(\lambda) = det(A-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha^3 & -\alpha-1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\alpha-1 & 0 & -\lambda & -\alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^2\left(2\alpha^3 - (\alpha+1)^2\right) + \alpha^6.$$

On a $\Delta = -672.99 < 0$, donc le polynôme caractéristique admet 4 racines

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.77501 - 3.66479\,\imath, \\ \lambda_2 &= -1.77501 + 3.66479\,\imath, \\ \lambda_3 &= 1.77501 - 3.66479\,\imath, \\ \lambda_4 &= 1.77501 + 3.66479\,\imath. \end{aligned}$$

On trouve,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.77501 > 1.$$

Donc, d'après le Théorème (1.1.8) le point d'équilibre $\overline{M}$ est instable . ■

3.3 Exemple numérique

Pour confirmer l'instabilité globale des solutions du système (3.1), nous considérons les exemples numériques suivants :

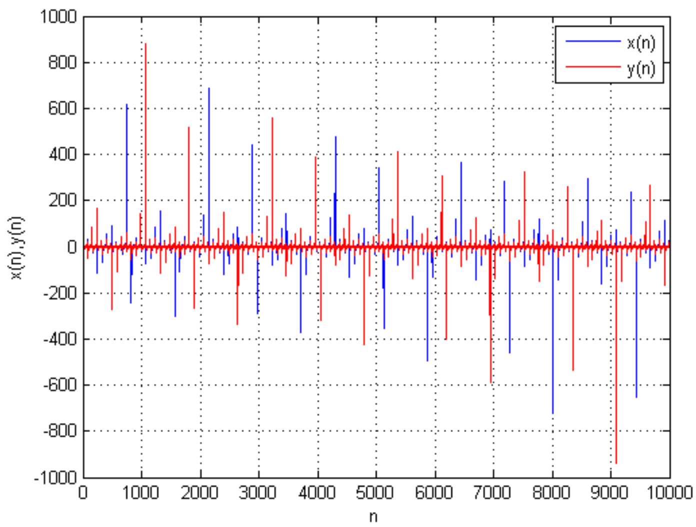

FIGURE 3.1 – La représentation graphique du système (3.1) avec les conditions initiales $x_{-1} = 30, \quad , x_0 = 35$ et $y_{-1} = 50, \quad , y_0 = 55$

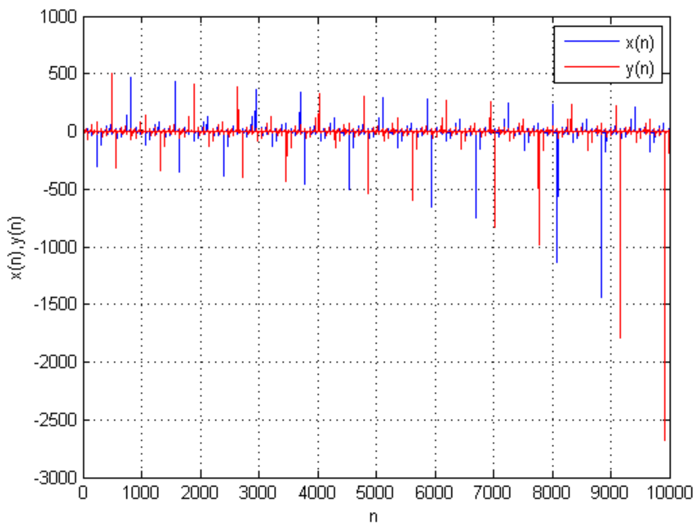

FIGURE 3.2 – La représentation graphique de la solution du système (3.1) avec les conditions initiales $x_{-1} = -33, \quad , x_0 = 11$ et $y_{-1} = 33, \quad , y_0 = 45$

3.4 Forme de solution du système (3.2)

Nous rappelons que P_{-n} est le n-ème nombre de Pell généralisé d'indice négatif, qui vérifie la relation de récurrence

$$P_{-n} = -P_{-(n-1)} - 2P_{-(n-2)} + P_{-(n-3)}, \quad P_0 = 0, P_1 = 0 \quad et \quad P_2 = 1.$$

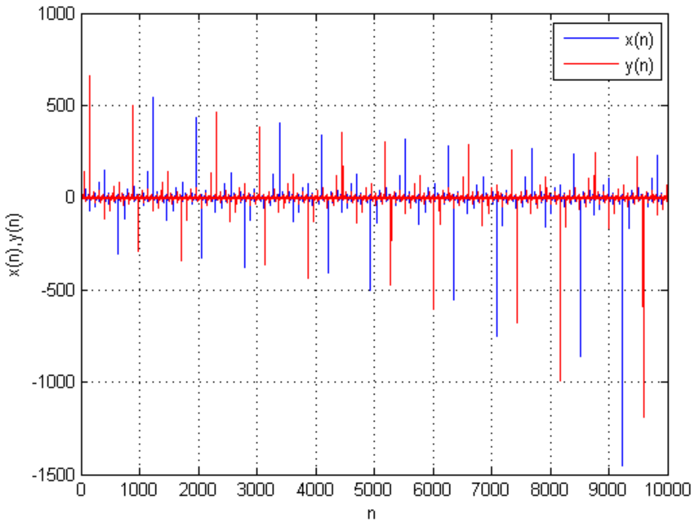

FIGURE 3.3 – La représentation graphique de la solution du système (3.1) avec les conditions initiales $x_{-1} = -11, \quad , x_0 = 22$ et $y_{-1} = 99, \quad , y_0 = 111$

Pour trouver la forme des solutions du système (3.2), on considère les changements des variables suivants :

$$x_n = \frac{r_n}{-s_{n+1}}, \quad y_n = \frac{s_n}{-r_{n+1}}.$$

Alors

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{r_{n+1}}{-s_{n+2}}, \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{s_{n+1}}{-r_{n+2}}. \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} \dfrac{r_{n+1}}{-s_{n+2}} &= \dfrac{-1}{\dfrac{-s_n}{r_{n+1}}\left(\dfrac{r_{n-1}}{-s_n}+2\right)-1}, \\ \\ &= \dfrac{-r_{n+1}}{r_{n-1}-2s_n-r_{n+1}}. \\ \\ \dfrac{s_{n+1}}{-r_{n+2}} &= \dfrac{-1}{\dfrac{-r_n}{s_{n+1}}\left(\dfrac{s_{n-1}}{-r_n}+2\right)-1}, \\ \\ &= \dfrac{-s_{n+1}}{s_{n-1}-2r_n-s_{n+1}}. \end{cases}$$

Donc, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} s_{n+2} = -r_{n+1} - 2s_n + r_{n-1}, \\ r_{n+2} = -s_{n+1} - 2r_n + s_{n-1}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Le système (3.29) est sous la forme du système (3.7), donc d'après le Lemme (3.1.2) ses solutions sont sous la forme (3.8), c'est-à-dire,

$$\begin{cases} s_{2n} &= P_{-2n}r_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)s_0 + P_{-(2n+1)}r_1, \\ s_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}s_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)r_0 + P_{-(2n+2)}s_1, \\ r_{2n} &= P_{-2n}s_{-1} + \left(P_{-(2n+1)} + P_{-(2n+2)}\right)r_0 + P_{-(2n+1)}s_1, \\ r_{2n+1} &= P_{-(2n+1)}r_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)s_0 + P_{-(2n+2)}r_1, \end{cases} \tag{3.30}$$

tel que les valeurs initiales s_{-1}, s_0, s_1, r_{-1}, r_0 et $r_1 \in \mathbb{R}$.
On a

$$x_n = \frac{r_n}{-s_{n+1}},$$

alors

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= \frac{r_{2n+1}}{-s_{2n+2}}, \\ &= \frac{P_{-(2n+1)}r_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)s_0 + P_{-(2n+2)}r_1}{-P_{-(2n+2)}r_{-1} - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)s_0 - P_{-(2n+3)}r_1}, \\ &= \frac{P_{-(2n+1)}\dfrac{r_{-1}}{r_1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)\dfrac{s_0}{r_1} + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}\dfrac{r_{-1}}{r_1} - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{s_0}{r_1} - P_{-(2n+3)}}, \\ &= \frac{P_{-(2n+1)}\dfrac{r_{-1}}{-s_0}\dfrac{-s_0}{r_1} - \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)\dfrac{s_0}{-r_1} + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}\dfrac{r_{-1}}{-s_0}\dfrac{-s_0}{r_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\dfrac{s_0}{-r_1} - P_{-(2n+3)}}, \end{aligned}$$

donc

$$x_{2n+1} = \frac{P_{-(2n+1)}x_{-1}y_0 - \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right)y_0 + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)y_0 - P_{-(2n+3)}}. \tag{3.31}$$

Et

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= \frac{r_{2n+2}}{-s_{2n+3}}, \\ &= \frac{P_{-(2n+2)}s_{-1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)r_0 + P_{-(2n+3)}s_1}{-P_{-(2n+3)}s_{-1} - \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)r_0 - P_{-(2n+4)}s_1}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= \frac{P_{-(2n+2)}\frac{s_{-1}}{s_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\frac{r_0}{s_1} + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}\frac{s_{-1}}{s_1} - \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)\frac{r_0}{s_1} - P_{-(2n+4)}}, \\ &= \frac{P_{-(2n+2)}\frac{s_{-1}}{-r_0}\frac{-r_0}{s_1} - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)\frac{r_0}{-s_1} + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}\frac{s_{-1}}{-r_0}\frac{-r_0}{s_1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)\frac{r_0}{-s_1} - P_{-(2n+4)}}, \\ &= \frac{P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right)x_0 + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right)x_0 - P_{-(2n+4)}}. \end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on trouve y_n.

$$y_n = \frac{s_n}{-r_{n+1}},$$

alors

$$\begin{aligned}
y_{2n+1} &= \frac{s_{2n+1}}{-r_{2n+2}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}s_{-1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) r_0 + P_{-(2n+2)}s_1}{-P_{-(2n+2)}s_{-1} - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) r_0 - P_{-(2n+3)}s_1}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}\frac{s_{-1}}{s_1} + \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) \frac{r_0}{s_1} + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}\frac{s_{-1}}{s_1} - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) \frac{r_0}{s_1} - P_{-(2n+3)}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+1)}\frac{s_{-1}}{-r_0}\frac{-r_0}{s_1} - \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) \frac{r_0}{-s_1} + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}\frac{s_{-1}}{-r_0}\frac{-r_0}{s_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) \frac{r_0}{-s_1} - P_{-(2n+3)}},
\end{aligned}$$

donc

$$y_{2n+1} = \frac{P_{-(2n+1)}y_{-1}x_0 - \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) x_0 + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) x_0 - P_{-(2n+3)}}. \tag{3.32}$$

Et

$$\begin{aligned}
y_{2n+2} &= \frac{s_{2n+2}}{-r_{2n+3}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}r_{-1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) s_0 + P_{-(2n+3)}r_1}{-P_{-(2n+3)}r_{-1} - \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) s_0 - P_{-(2n+4)}r_1}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}\frac{r_{-1}}{r_1} + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) \frac{s_0}{r_1} + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}\frac{r_{-1}}{r_1} - \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) \frac{s_0}{r_1} - P_{-(2n+4)}}, \\
&= \frac{P_{-(2n+2)}\frac{r_{-1}}{-s_0}\frac{-s_0}{r_1} - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) \frac{s_0}{-r_1} + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}\frac{r_{-1}}{-s_0}\frac{-s_0}{r_1} + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) \frac{s_0}{-r_1} - P_{-(2n+4)}},
\end{aligned}$$

donc

$$y_{2n+2} = \frac{P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) y_0 + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) y_0 - P_{-(2n+4)}}. \tag{3.33}$$

D'après tout ce qui précède, le théorème suivant est vrai.

Théorème 3.4.1

Soit $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ *une solution bien définie du système* (3.2). *Alors pour* $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{cases} x_{2n+1} = \dfrac{P_{-(2n+1)}x_{-1}y_0 - \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) y_0 + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) y_0 - P_{-(2n+3)}}, \\ \\ x_{2n+2} = \dfrac{P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) x_0 + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) x_0 - P_{-(2n+4)}}, \\ \\ y_{2n+1} = \dfrac{P_{-(2n+1)}y_{-1}x_0 - \left(P_{-(2n+2)} + P_{-(2n+3)}\right) x_0 + P_{-(2n+2)}}{-P_{-(2n+2)}y_{-1}x_0 + \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) x_0 - P_{-(2n+3)}}, \\ \\ y_{2n+2} = \dfrac{P_{-(2n+2)}x_{-1}y_0 - \left(P_{-(2n+3)} + P_{-(2n+4)}\right) y_0 + P_{-(2n+3)}}{-P_{-(2n+3)}x_{-1}y_0 + \left(P_{-(2n+4)} + P_{-(2n+5)}\right) y_0 - P_{-(2n+4)}}, \end{cases} \tag{3.34}$$

où $\{P_{-n}\}_{n\geq 0}$ *est la suite de Pell généralisée d'indice négatif.*

3.5 Stabilité globale de solution du système (3.2)

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale des solutions réelles du système (3.2).

Supposons I et $J \subset \mathbb{R}$ et on considère les fonctions

$$\begin{aligned} f: \quad & I^2 \times J^2 \;\rightarrow\; I \\ g: \quad & I^2 \times J^2 \;\rightarrow\; J \end{aligned}$$

définies par :

$$\begin{cases} f\left(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}\right) = \dfrac{-1}{y_n\left(x_{n-1}+2\right)-1}, \\ \\ g\left(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}\right) = \dfrac{-1}{x_n\left(y_{n-1}+2\right)-1}. \end{cases}$$

Lemme 3.5.1

Le système (3.2) *admet un seul point d'équilibre réel donné par :*

$$\overline{N} = (\bar{x}, \bar{y}) = (-\alpha, -\alpha),$$

avec

$$\alpha = \frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Preuve.

Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un point d'équilibre, donc

$$\bar{x} = \frac{-1}{\bar{y}(\bar{x}+2) - 1},$$

$$\bar{y} = \frac{-1}{\bar{x}(\bar{y}+2) - 1}.$$

On obtient

$$\bar{x}^2\bar{y} + 2\bar{x}\bar{y} - \bar{x} + 1 = 0, \tag{3.35}$$

$$\bar{y}^2\bar{x} + 2\bar{y}\bar{x} - \bar{y} + 1 = 0. \tag{3.36}$$

D'après la soustraction (3.36) de (3.35), on obtient

$$\begin{aligned} \bar{x}^2\bar{y} - \bar{y}^2\bar{x} - \bar{x} + \bar{y} &= 0, \\ (\bar{x}\bar{y} - 1)(\bar{x} - \bar{y}) &= 0, \end{aligned}$$

alors

$$\bar{x} = \bar{y}. \tag{3.37}$$

On remplace (3.37) dans (3.35), on obtient

$$\bar{x}^3 + 2\bar{x}^2 - \bar{x} + 1 = 0. \tag{3.38}$$

L'équation (3.38) admet une seule solution réelle dans I, donnée par :

$$\bar{x} = -\alpha = -\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{61}{54} + \sqrt{\frac{29}{36}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{61}{54} - \sqrt{\frac{29}{36}} \right)^{\frac{1}{3}} \right),$$

et d'après (3.37) on a

$$\bar{x} = \bar{y} = -\alpha,$$

donc le point d'équilibre du système (3.2) est :

$$\overline{N} = (\bar{x}, \bar{y}) = (-\alpha, -\alpha).$$

■ La stabilité du point d'équilibre $\overline{N} = (-\alpha, -\alpha)$ du système (3.2) est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 3.5.1

Le point d'équilibre $\overline{N}$ est instable.

Preuve.

Le système linéaire associé au système (3.2) autour du point d'équilibre $\overline{N}$, est donné par :

$$V_{n+1} = BV_n, \quad V_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1})^T,$$

où **B** est la matrice Jacobienne donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^3 & -\alpha - 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - 1 & 0 & 0 & -\alpha^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de **B** est donné par :

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_4), \\
&= P_A(\lambda), \\
&= \lambda^4 + \lambda^2\left(2\alpha^3 - (\alpha+1)^2\right) + \alpha^6.
\end{aligned}$$

Donc le polynôme caractéristique admet 4 racines

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1.77501 - 3.66479\,\imath, \\
\lambda_2 &= -1.77501 + 3.66479\,\imath, \\
\lambda_3 &= 1.77501 - 3.66479\,\imath, \\
\lambda_4 &= 1.77501 + 3.66479\,\imath.
\end{aligned}$$

On trouve,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.77501 > 1.$$

Donc, d'après le Théorème (1.1.8) le point d'équilibre $\overline{N}$ est instable . ■

3.6 Exemple numérique

Pour confirmer l'instabilité globale des solutions du système (3.2), nous considérons les exemples numériques suivants :

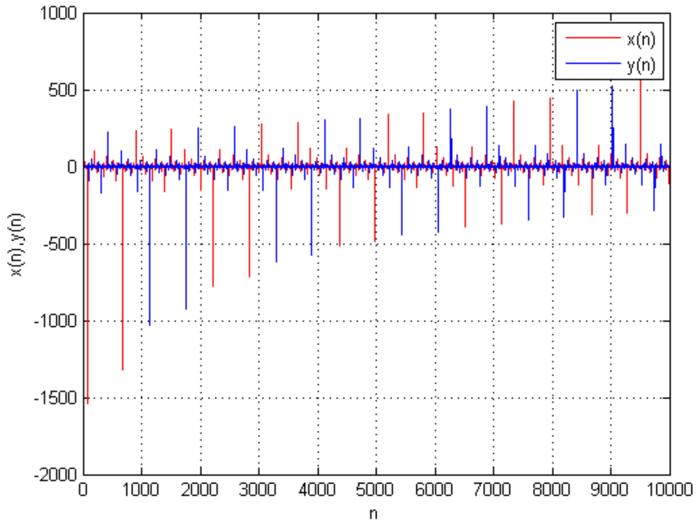

FIGURE 3.4 – La représentation graphique de la solution du système (3.2) avec les conditions initiales $x_{-1} = -10, \quad, x_0 = 19$ et $y_{-1} = 89, \quad, y_0 = 92$

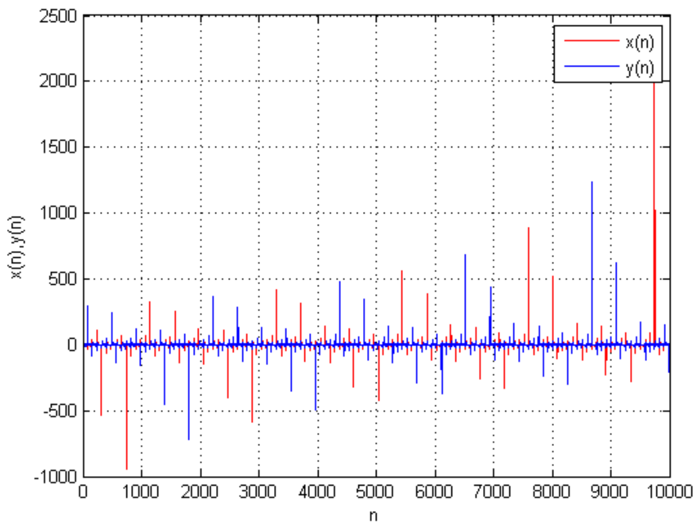

FIGURE 3.5 – La représentation graphique de la solution du système (3.2) avec les conditions initiales $x_{-1} = 55, \quad, x_0 = 76$ et $y_{-1} = -57, \quad, y_0 = -45$

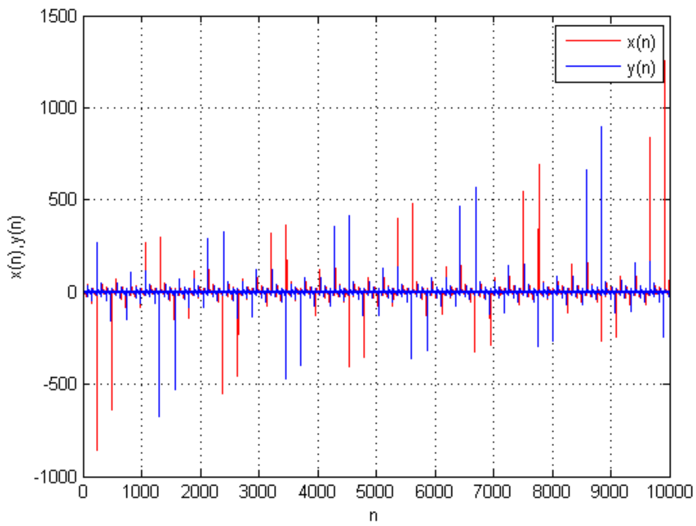

FIGURE 3.6 – La représentation graphique de la solution du système (3.2) avec les conditions initiales $x_{-1} = -45, \quad , x_0 = -32$ et $y_{-1} = 22, \quad , y_0 = 48$

CONCLUSION

Dans notre mémoire, nous avons présenté la forme explicite des solutions de deux équations aux différences non linéaires d'ordre deux

$$x_{n+1} = \frac{\pm 1}{x_n (x_{n-1} \mp 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Les solutions de ces équations, ont été exprimées en termes des nombres de Pell généralisés.

Nous avons donnés également la forme fermée des solutions de deux systèmes d'équations aux différences non linéaires d'ordre deux

$$x_{n+1} = \frac{\pm 1}{y_n (x_{n-1} \mp 2) - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{\pm 1}{x_n (y_{n-1} \mp 2) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nous présentons également quelque explications théoriques liées à la représentation de c'est deux systèmes .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Akrour, N. Touafek and Y. Halim, *On a system of difference equations of second order solved in closed form*, Miskolc Mathematical Notes, 20(2), (2019), 701-717.

[2] F. T. Aydin, K. Köklü, *On generalizations of the Pell sequence*, arXiv, math.CO, 2017.

[3] M. Bicknell, *A primer on the Pell sequence and related sequences*. Fibonacci Q. 13 (1975), 345–349.

[4] C. W. Clark, *A delayed recruitement of population dynamics with an application to baleen whale population*, Journal of Mathematical Biology, 3(1976), 381-391.

[5] I. Dekkar, *Variations sur les équations aux différences (non) autonomes*, Thèse de doctorat, Université Mohamed Seddik ben Yahia, Jijel, 2017.

[6] S. Elaydi, *An introduction to difference equation*, Springer, (2005).

[7] Y. Halim, *Étude du comportement des solutions de certaines classes d'équations aux différences*, Thése de doctorat, Université Mohamed Seddik ben Yahia, Jijel, 2016.

[8] A. F. Horadam, *Applications of modified Pell numbers to representations*, Ulam Q. 3 (1995), 35–53.

[9] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Vol.I.Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts. Wiley, New York, 2001.

[10] M. R. S. Kulenovic, G.Ladas, *Dynamics of second ordre rational difference equations with open problems and conjectures* , Chapman and Hall/Crc, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C, 2002.

[11] Y. Soykan, *On generalized third-order Pell numbers*, Asian Journal of Advanced Research and Reports, 6(1), (2019), 1-18.

[12] N. Touafek, Y. Halim, *Global attractivity of a rational difference equation*, Mathematical Sciences Letters 2, 3, (2013), 161-165.