

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre universitaire Abd Elhafid Boussof Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Synchronisation combinée de plusieurs systèmes chaotiques fractionnaires

Préparé par

- Wassila BOUFEDECHE
- Rihab BOULCHERAB

Devant le jury :

Labeled BOUDJEMAA (M.A.A)	C.U. Abelhafid Boussof-Mila	Président
Smail KAUCHE (M.C.A)	C.U. Abelhafid Boussof-Mila	Rapporteur
Nedjet BOUDJRIDA (M.A.A)	C.U. Abelhafid Boussof-Mila	Examineur

Année Universitaire : 2020/2021

ملخص:

العمل المقدم في هذه المذكرة هو بشكل عام في سياق دراسة التزامن المركب لعدة أنظمة فوضوية ذوات رتب اشتقاق كسرية .

يتم تنظيم بقية هذه المذكرة على النحو التالي :

في الفصل الأول سنقوم بعرض المفاهيم الأساسية الرئيسية للأنظمة الديناميكية الحتمية . سنعرض كذلك بعض المفاهيم التمهيديّة الخاصة بنظرية الفوضى.

الفصل الثاني يخصص لدراسة التعاريف الأساسية للحساب التفاضلي الكسري والأنظمة الفوضوية الجزئية وبعض التعاريف المختلفة المتعلقة باستقرار هذه الأنظمة.

الفصل الثالث هو محور عملنا الرئيسي. يرتكز هذا الفصل بشكل أساسي على مشكلة التزامن المركب بين ثلاثة أنظمة فوضوية متطابقة رتب اشتقاق كسرية. باستخدام تقنية التحكم المستمر وكذلك طريقة ليابونوف المباشرة للأنظمة الكسرية سيتم التأكد من استقرارية نظام خطأ التزامن . سيتم كذلك الاستشهاد ببعض الأمثلة العددية واجراء المحاكاة العددية لاختبار قدرة التزامن المقترحة .

الكلمات المفتاحية:

الأنظمة الفوضوية ذوات رتب اشتقاق كسرية ، التزامن المركب، نظرية الفوضى، التحكم المستمر.

Résumé :

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit en général dans le contexte de la synchronisation combinée des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire .

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante:

Le premier chapitre présente les principales notions de base des systèmes dynamiques déterministes. Il énonce également quelques concepts introductifs à la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré aux études des définitions de base du calcul fractionnaire, des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire ainsi que les différentes définitions relatives à la stabilité de tels systèmes.

Le troisième chapitre constitue véritablement l'objet de notre travail. L'objectif de ce chapitre porte principalement sur le problème de la synchronisation combinée entre trois systèmes chaotiques identiques d'ordre fractionnaire. Une technique de contrôle continu est employée pour conclure sur la stabilité ainsi que la convergence asymptotique de l'erreur de synchronisation en utilisant une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov des systèmes fractionnaires. Des simulations numériques sont effectuées pour tester la capacité de la méthode de synchronisation proposée.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion générale et quelques perspectives.

Mots-clés:

le chaos, synchronisation combinée, systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire , contrôle continu.

Abstract

The work presented in this memory is generally focus in the context of the combination synchronization of chaotic fractional systems

The rest of this paper is organized as follows:

The first chapter presents the main basic concepts of deterministic dynamical systems. It also sets out some concepts to chaos theory.

The second chapter is devoted to studies the basic definitions of fractional chaotic systems and the various definitions relating to the stability of such systems.

The third chapter is the focus of our work. In this chapter we present he problem of combination synchronization between three identical chaotic fractional systems. An active control technique is used to conclude on the stability as well as the asymptotic convergence of the synchronization error by using a new extension of Lyapunov's direct method of fractional systems. Numerical simulations are performed to confirm the capacity of the proposed synchronization method.

A general conclusion and some perspectives are concluding in the last chapter.

Keywords:

chaotic fractional systems, the combination synchronization, Active controller.

Dédicace

Je tiens C'est avec grand plaisir que je dédie ce modest travail :

À l'être le plus cher de ma vie, ma mère .

À celui qui m'a fait de moi un homme, mon père.

À mes chers frères Samir et Aziz.

À mes soeurs Nassima, Moufida, Samiha et Nadia.

À leurs maris Khaled, Samir, Houcin et Azouz et leurs enfants.

Et à milleurs amis Zeyneb, Rihab, Amina, Halima, wiam.

À tous mes amis de promotion de master 2 mathématique 2020/2021

Et à tous les memberes de ma famille.

*** **WASSILA** ***

Dédicace

Je dédie ce mémoire

*À mes chers parents ma mère « Nadia » et mon
père « Tahar »*

À ma grand-mère

À ma sœur « Khalida »

À mes frères « Ammar, Sid-Ali et Amdjed »

À toute ma belle famille

*À tous mes amis « Amina, Wassila, Zeyneb,
Wiam, Ikram, Somia, Asma » et tous mes
camarades.*

*Don oublier tout les professeurs et les
enseignements Supérieur.*

« RIHAB »

Remerciements

Nous remercions *ALLAH* le tout puissant de nous avoir donné la santé et la Force d'entamer et de terminer ce mémoire.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à notre encadreur *Mr. Smail Kaouache* nous le remercions pour son encadrement, pour tous ses Conseils et ses remarques qui nous ont permis de réaliser ce mode de travail.

Nous sommes honoré dans la présence de ce jury de *Mr. Labeled Boudjema*, maître assistant au centre universitaire de Mila et de *Mr. Boudjrida Nadjet*, maître assistant au centre universitaire de Mila.

Nous remercions tous les enseignants des départements de Mathématiques de Centre universitaire de Mila. Et nous remercions également tout le personnel de l'université.

****Merci****

Table des matières

1 Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques	3
1.1 Systèmes dynamiques	3
1.1.1 Systèmes dynamiques continus	4
1.1.2 Systèmes dynamiques discret	4
1.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes	4
1.1.4 Flot	4
1.1.5 Systèmes conservatifs ou dissipatifs	5
1.2 Attracteurs et bassin d'attraction	5
1.2.1 Attracteurs réguliers	5
1.2.2 Attracteurs étranger (chaotique)	6
1.2.3 Bassin d'attraction	6
1.3 Points d'équilibre	6
1.3.1 Stabilité de points d'équilibres	7
1.3.2 Méthode directe	7
1.3.3 Méthode indirecte	8
1.4 La Section de Poincaré	9
1.5 Caractérisation du comportement chaotique	10
1.5.1 Le Chaos	10
1.5.2 Caractéristiques principales du comportement chaotique	10
1.6 Les scénarios transitions vers le chaos	13
1.6.1 L'intermittence	14

1.6.2	Le doublement de période	14
1.6.3	Le quasi-périodicité	15
1.7	Avantage du Chaos	15
1.8	Conclusion	15
2	Systèmes dynamiques fractionnaires	17
2.1	Quelques concepts de base de la théorie de dérivation non entière	18
2.1.1	Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire	18
2.1.2	Transformation de Laplace	20
2.1.3	Définitions des dérivées fractionnaires	21
2.2	Équations différentielles fractionnaires	27
2.2.1	Équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo "EDFSC"	27
2.2.2	Résolution analytique des EDFSC linéaires	29
2.2.3	Résolution numérique des équations fractionnaires	37
2.3	Systèmes chaotiques fractionnaires	39
2.3.1	Systèmes d'ordre fractionnaire par rapport systèmes d'ordre entier	40
2.4	Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité	41
2.5	Condition nécessaire pour le chaos	43
2.5.1	Méthode directe de Lyapounov fractionnaire basée sur les fonctions de classe k	43
2.6	Fonctions candidates de Lyapounov à la stabilité des systèmes fractionnaires	44
2.7	Conclusion	48
3	Synchronisation combinées des systèmes chaotiques	49
3.1	Systèmes couplés	49
3.1.1	Accouplement bidirectionnel	50
3.1.2	Accouplement unidirectionnel	50
3.2	Différents types de synchronisation combinée	51
3.2.1	Synchronisation complète combinée	51
3.2.2	Anti-synchronisation combinée	52
3.2.3	Synchronisation projective combinée	52
3.2.4	Synchronisation projective modifiée combinée	52
3.2.5	Synchronisation combinée généralisée	53
3.3	Synchronisation combinée complète des systèmes chaotiques	53

3.3.1	Méthode générale de SCC	53
3.3.2	Résultats théoriques	55
3.3.3	Résultats de simulation	55

Table des figures

1.1	Attracteurs réguliers	5
1.2	Attracteurs de système de Lü	6
1.3	Section de Poincaré	9
1.4	Aspects aléatoires des états chaotiques du système de Lü.	11
1.5	Evolution temporelle de la trajectoire u du système de Lü avec trois conditions initiales différentes très proches.	12
1.6	Diagramme de bifurcations de l'application logistique.	13
1.7	Transition vers le chaos par doublement de période de l'application logistique.	14
2.1	Graphe de la fonction Γ	19
2.2	Fonction de Mittag-Leffer à un seul paramètre.	19
2.3	Fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres.	19
2.4	Courbes de la dérivée fractionnaire de la fonction t^2 , pour différentes valeurs de α	25
2.5	Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$	42
2.6	L'évolution temporelle des états du système (2.142).	46
2.7	L'évolution temporelle des états du système (2.149)	48
3.1	Attracteurs hyperchaotiques du système (3.32).	57
3.2	La variation des exposants de Lyapunov du (3.32)	57
3.3	Courbes des états du système (3.32).	57

Introduction générale

Dans la littérature, il n'y avait aucune définition standard du chaos. Néanmoins, la caractéristique typique des systèmes chaotiques ou hyperchaotiques est qu'un très petit changement des conditions initiales conduit à un comportement strictement différent dans l'état finale de système étudié.

De très nombreux systèmes ont été présentés ces dernières années exploitant les comportements chaotique dans les domaines physiques [1], chimiques [2], biologiques [3] et économiques [4], etc.

Récemment, et en raison des applications potentielles des systèmes chaotiques dans la transmission chaotique des informations et le traitement de contrôle, la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire a attiré une attention croissante des physiciens aussi bien que des ingénieurs..

La configuration de base d'un système de synchronisation des systèmes dynamiques est constituée de deux systèmes : l'un est appelé système émetteur et l'autre est appelé système récepteur. On rappelle que ces systèmes peuvent être identiques avec des conditions initiales différentes ou complètement différents. Le système émetteur synchronise le système récepteur à partir d'un signal ou plusieurs signaux d'accouplement. Dans la littérature, plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées pour réaliser la synchronisation, à savoir le contrôle continu [5], le contrôle adaptatif [6] et le contrôle de mode glissant [7]. À l'aide de ces méthodes, plusieurs approches de synchronisation chaotique ont été également étendus telle que la synchronisation complète [8], l'anti-synchronisation [9], la synchronisation généralisée [10], la synchronisation projective [11] et la synchronisation projective modifiée [12]

Cependant, tous les schémas de synchronisation mentionnés ci-dessus sont liés à un seul système émetteur et un seul système récepteur. Donc, il est très intéressant de les étendre au cas général de plusieurs systèmes chaotiques.

La synchronisation combinée des systèmes chaotiques (ou hyper-chaotique) d'ordre fractionnaire est encore considérée comme un sujet de recherche stimulant. En effet, la synchronisation combinée a une

capacité anti-décodage et anti-attaque plus forte que celle de la synchronisation habituelle dans une communication sécurisée, car le message d'origine peut être divisé en deux segments et chaque segment peut être séparé en deux systèmes émetteurs distincts. Quelques travaux sur la synchronisation combinée de plusieurs systèmes d'ordre fractionnaire chaotique sont déjà discutables, comme indiqué dans les références [13, 14, 15, 16, 17].

La principale motivation de ce travail est de construire un contrôle continu pour que la synchronisation complète combinée (SCC) de trois systèmes chaotiques fractionnaires identiques par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov des systèmes fractionnaires est réalisée.

La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre présente les principales concepts de base des systèmes dynamiques déterministes. Il énonce également quelques notions introductifs à la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré aux études de quelques définitions des dérivées fractionnaire, des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire ainsi que les différentes définitions relatives à la stabilité de tels systèmes.

Dans le troisième chapitre, le problème de la synchronisation complète combinée de trois systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires est étudié.

Enfin, ce mémoire est clôturée par une conclusion générale.

Généralités sur les systèmes dynamiques chaotiques

Dans ce chapitre, nous rappellerons quelques brèves notions sur le phénomène chaotique qui apparaît dans un système dynamique déterministe. Nous commencerons par définir la notion des systèmes dynamiques, puis nous aborderons d'autres notions mathématiques notamment les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs, la section de Poincaré, les attracteurs, le bassin d'attraction, les points d'équilibres et quelques notions de stabilité. Enfin nous présenterons la caractérisation du comportement chaotique.

1.1 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. l'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :

- de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0 .
- de sa loi d'évolution.

Un système peut être :

- * Continu : donc il peut se représenter par une équation différentielle ordinaire.
- * Discret : donc il peut se représenter par une équation algébrique récurrente.

1.1.1 Systèmes dynamiques continus

On appelle système dynamique continu tout système d'équation différentielles du premier ordre défini par :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t, v), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

où \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres et x est le vecteur l'état. $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ est le champ de vecteurs.

1.1.2 Systèmes dynamiques discret

La forme générale d'un système dynamique à temps discret est décrit par une équation aux différences non linéaire suivante :

$$x_{n+1} = f(x_n, v), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

1.1.3 Systèmes autonomes ou non autonomes

Lorsque le champ de vecteur f ne dépend pas explicitement du temps, le système (1.1) est dit autonome. Dans le cas contraire, il est appelé non autonome. En utilisant un changement de variable approprié, on peut facilement transformer un système non autonome de dimension n en un système autonome équivalent de dimension $n + 1$.

Exemple 1.1.1 *Système autonome est : $\dot{x} = x^2 + y + 1$.*

Système non autonome est : $\dot{x} = x^2 + y + 1 + \sin(t)$.

1.1.4 Flot

Soit le système autonome suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

On appelle flot de (1.3) l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) \rightarrow \phi(t, x_0) = x(t, x_0) \end{cases}$$

Telle que :

-Pour chaque x_0 fixé, $t \rightarrow \phi(t, x_0)$ est une solution de l'équation différentielle 1.3.

$-\phi(0, x_0) = x_0$.

$-\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y)$.

Définition 1.1.1 *Toute solution du système autonome (1.3) considérée comme un ensemble de trajectoires de différentes conditions initiales est appelé flot.*

1.1.5 Systèmes conservatifs ou dissipatifs

Un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Théorème 1.1.1 (Théorème de divergence) *Soient ϕ_t le flot de (1.3), V un volume de l'espace des phases au temps $t = 0$, $V(t) = \phi_t(V)$ l'image de V par ϕ_t on a :*

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{t=0} = \int_V \operatorname{div} f dx_1 \dots dx_n \text{ et } \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Le système est dissipatif si $:\frac{dV}{dt} < 0$.

Le système est conservatif si $:\frac{dV}{dt} = 0$.

1.2 Attracteurs et bassin d'attraction

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent toutes les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle un attracteur. Les attracteurs sont donc des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques. Il en existe deux type d'attracteurs : attracteurs réguliers et attracteurs étranges.

1.2.1 Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois genres :

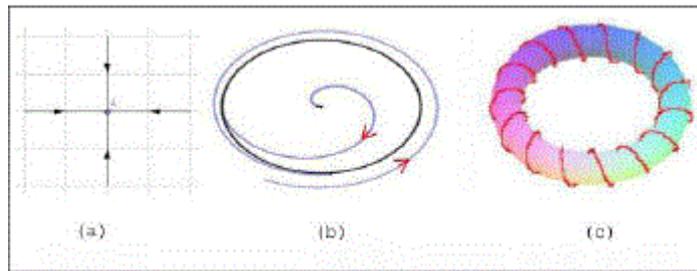


FIGURE 1.1 – Attracteurs réguliers

(a). **point fixe** : c'est l'attracteur le plus simple. Il est représenté par un point dans l'espace des phases. C'est donc une solution constante et stationnaire.

(b). **cycle limite** : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches. C'est donc une solution périodique du système.

(c). Attracteur **quasi périodique (tore)** : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs fréquences, que l'on appelle parfois "tore".

1.2.2 Attracteurs étranger (chaotique)

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes chaotiques, il a été introduit par Ruelle et Takens. Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

1. Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.
2. La dimension de l'attracteur étrange est fractale (non entière) pour un système continue autonome $2 < d < n$, ou n la dimension de l'espace des phases.
3. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écartier l'une de l'autre).

1.2.3 Bassin d'attraction

Soit A un attracteur. La région de l'espace B tel que : $B(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = A\}$, telle que toutes les trajectoires qui y sont initialisées convergent vers A est appelée bassin d'attraction.

1.3 Points d'équilibre

Soit le système dynamique autonome suivant. Le point d'équilibre x_{eq} vérifie :

$$\dot{x} = f(x_{eq}) = 0.$$

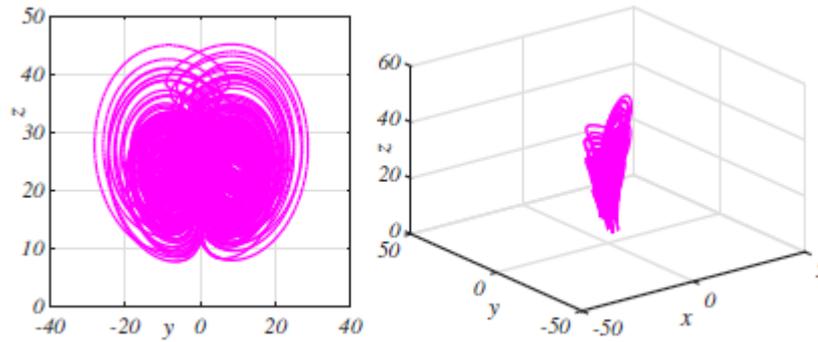


FIGURE 1.2 – Attracteurs de système de Lü

1.3.1 Stabilité de points d'équilibres

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires au voisinage des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet alors d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est très proche d'un point d'équilibre. La théorie de stabilité au sens de Lyapunov est valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste toujours suffisamment proche.

Définition 1.3.1 (Stabilité) *Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.3) est stable au sens de Lyapounov si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tel que } \|x_0 - x_{eq}\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0) - x_{eq}\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.4)$$

Définition 1.3.2 (Attractivité) *Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.3) est attractif si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{tel que } \|x_0 - x_{eq}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, x_0) - x_{eq}) = 0. \quad (1.5)$$

Définition 1.3.3 (Stabilité asymptotique) *Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.3) asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.*

Définition 1.3.4 (Stabilité exponentielle) *Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.3) exponentiellement stable, s'il existe deux constantes strictement positives a et b et s'il existe $t_0 > 0$, tels que :*

$$\|x_0 - x_{eq}\| < a \exp(-bt), \quad \text{pour tout } t \geq t_0. \quad (1.6)$$

Remarque 1.3.1 Notons que l'utilisation des définitions précédentes, pour réaliser la stabilité de (1.3), au voisinage de son point d'équilibre, exige la résolution explicite de l'équation (1.3), ce qui est souvent très difficile dans la plupart des cas. De ce fait là, les deux méthodes suivantes de Lyapounov nous permettent de contourner cet obstacle.

1.3.2 Méthode directe

La méthode directe de Lyapounov nous permet d'analyser localement la stabilité de système, sans (1.3) le résoudre explicitement. Le problème de la stabilité se ramène alors à chercher une telle fonction (dite fonction de Lyapounov), qui est fournie des informations sur la stabilité du système. Le théorème suivant va résumer cette méthode.

Théorème 1.3.1 Le point d'équilibre x_{eq} du système (1.3) est dit stable (respectivement asymptotiquement stable) au sens de Lyapounov s'il existe un voisinage $D(x_{eq})$ et une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ (dite fonction de Lyapounov) de classe C^1 ayant les propriétés suivantes :

1. $V(x_{eq}) = 0$ et $V(x) > V(x_{eq})$, pour tout $x \neq x_{eq}$ dans D .
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ (respectivement $\dot{V}(x) < 0$), pour tout $x \neq x_{eq}$ dans D .

1.3.3 Méthode indirecte

La seconde méthode de Lyapounov est basée sur l'examen de la linéarisation au voisinage du point d'équilibre x_{eq} du système (1.3). Plus précisément, on examine les valeurs propres x_{eq} de la matrice jacobienne associée à ce point d'équilibre.

La linéarisation revient à poser :

$$x = x_{eq} + \delta x, \quad (1.7)$$

où δx est une petite perturbation appliquée au voisinage du point d'équilibre x_{eq} . On a alors :

$$\dot{x} = \dot{x}_{eq} + \delta \dot{x}. \quad (1.8)$$

Le système (1.3) devient alors :

$$\dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} = f(x_{eq} + \delta x) \quad (1.9)$$

En utilisant un développement de Taylor du premier ordre de f au voisinage x_{eq} , on obtient

$$f(x_{eq} + \delta x) = f(x_{eq}) + J_f(x_{eq})(x - x_{eq}) \quad (1.10)$$

où J_f représente la matrice jacobienne de f . D'où

$$\delta \dot{x} = J_f(x_{eq})\delta x \quad (1.11)$$

Cette équation montre l'évolution de la perturbation δx au voisinage du point d'équilibre. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 1.3.2 (Hartman-Grobman) *Considérons un système de flot φ_t . Si x_{eq} est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage V de x_{eq} sur lequel le flot φ_t est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en x_{eq} . En d'autres termes le théorème signifie que dans le voisinage V d'un point d'équilibre, les orbites d'un système peuvent être déformées continuellement dans les orbites de son linéarisé. En particulier, si toutes les valeurs propres du linéarisé sont de parties réelles strictement négatives, alors toutes les issues du voisinage V tendent vers d'équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$. De la même manière, lorsque toutes les valeurs propres sont de parties réelles strictement positives, alors toutes les solutions issues du voisinage V vers l'équilibre $t \rightarrow -\infty$.*

1.4 La Section de Poincaré

L'application de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système.

Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension n et la trajectoire de sa solution en x_0 . Définissant dans cet espace une surface de dimension $n - 1$.

L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface.

L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface est appelé section de Poincaré.

Remarque 1.4.1 : *Si le système dynamique continue défini sur un espace de dimension n , on aurait une application de Poincaré définie sur un espace de dimension $n - 1$.*

Remarque 1.4.2 :L'application de Poincaré est aussi un outil pour l'étude de la stabilité des orbites périodiques. En effet, l'intérêt de l'application de Poincaré : son étude est plus simple que celle du flot.

Remarque 1.4.3 Par exemple le point d'équilibre $c = P(c)$ est un point attractif. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un cycle limite attractif pour le flot.

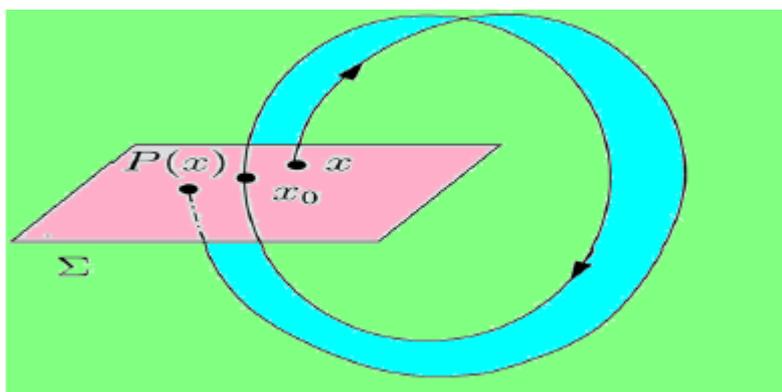


FIGURE 1.3 – Section de Poincaré

1.5 Caractérisation du comportement chaotique

L'objectif de cette partie est de mieux faire connaître les caractéristiques permettant de reconnaître un comportement chaotique. En première approche, nous rappelons quelques approches de définitions du chaos, ensuite nous présentons des caractéristiques principales du comportement chaotique d'un système dynamique déterministe. Nous citons également quelques scénarios de transition vers le chaos. Enfin, nous terminons cette partie par une application sur les systèmes chaotiques.

1.5.1 Le Chaos

Depuis longtemps, le chaos était synonyme de désordre et de confusion. Il s'opposait à l'ordre et devait être évité. La science était caractérisée par le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes.

Le terme chaos définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme. Des chercheurs d'horizons divers ont alors commencé à s'intéresser à ce comportement.

Le chaos au sens de Li et Yorke (1975).

Définition 1.5.1 Soit $g : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique (X, d) compact.

On dit que g est chaotique dans le sens de Li et Yorke s'il existe un sous-ensemble dénombrable S de X vérifiant les propriétés suivantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(g^n(x), g^n(y)) > 0$ pour tout $x, y \in S$, $x \neq y$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(g^n(x), g^n(y)) > 0$ pour tout $x, y \in S$, $x \neq y$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(g^n(x), g^n(p)) > 0$ pour tout $x \in S$, $p \in X$ p périodique.

1.5.2 Caractéristiques principales du comportement chaotique

Ci-dessous, nous rappelons quelques caractéristiques qui nous permettent de mieux comprendre les points marquants d'un système chaotique.

La non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.

Le déterminisme

Un système chaotique est déterministe (plutôt que probabiliste), c'est-à-dire qu'il soumet à des lois qui décrivent complètement son mouvement. La notion de déterminisme signifie donc la capacité de prédire l'état futur d'un phénomène à partir d'un événement passé.

Cependant, dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir les trajectoires d'une quelconque particule.

Aspects aléatoires

La Figure (1.4) illustre l'évolution temporelle des trajectoires chaotiques du système de Lú . Le système représente une évolution complexe, non périodique et imprévisible. C'est donc l'aspect aléatoire des

systèmes chaotiques. L'évolution temporelle d'une trajectoire chaotique apparaît comme aléatoire, cependant l'observation de cette trajectoire dans l'espace des phases, au voisinage de l'infini, décrit une forme

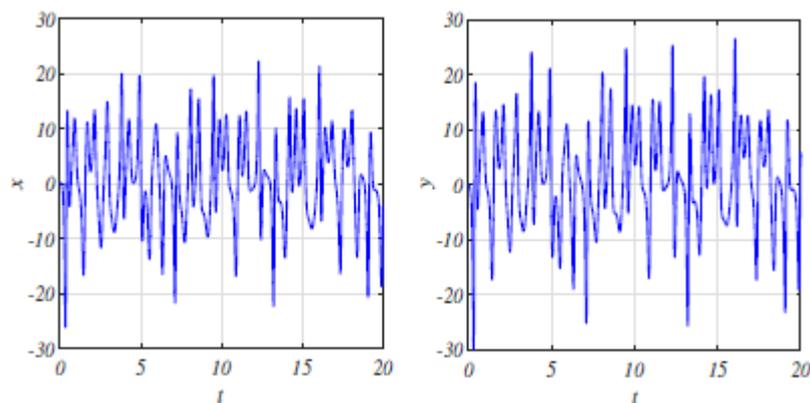


FIGURE 1.4 – Aspects aléatoires des états chaotiques du système de Lú.

particulière dont la structure est fractale, c'est l'attracteur chaotique. Attracteurs chaotiques La figure géométrique particulière qui représente l'attracteur d'un système chaotique dans l'espace des phases en fonction du temps, appelé attracteur chaotique. Ainsi, cet attracteur se produit à l'aide de deux opérations simultanées à savoir l'étirement, responsable de de la sensibilité aux conditions initiales et de l'instabilité, et le repliement, responsable du côté étrange. D'autre part, on parle d'attracteur chaotique lorsque sa dimension est fractale. Grâce de cette propriété particulière, fractale, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges(chaotiques). Ils représentent la signature du chaos qui nous permet d'authentifier un comportement chaotique.

Sensibilité aux conditions initiales

Les systèmes chaotiques sont extrêmement très sensibles aux conditions initiales. De très petites perturbations sur l'état initial d'un système peuvent être mener finalement à un comportement strictement différent dans son état final.

La Figure (1.5) illustre l'évolution temporelle d'un trajectoire du système de Lú avec trois conditions initiales différentes très proches.

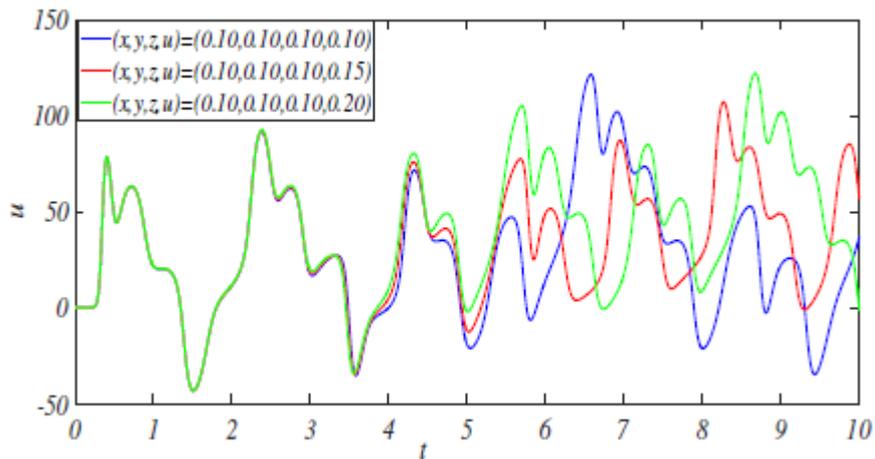


FIGURE 1.5 – Evolution temporelle de la trajectoire u du système de Lú avec trois conditions initiales différentes très proches.

Exposants de Lyapounov

La vitesse de divergence de deux trajectoires initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapounov afin de caractériser la nature du chaos détecté. L'exposant de Lyapounov sert à mesurer le taux de divergence des deux trajectoires. A titre d'exemple, on considère un système dynamique de dimension 4. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 les exposants de Lyapounov de ce système satisfaisant $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. Alors ce système se comporte de la manière suivante :

- Si $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Il s'agit d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Si $\lambda_1 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < 0$. Il s'agit d'un cycle limite stable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < 0$. Il s'agit d'un tore stable.
- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < 0, \sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$. Il s'agit d'un système chaotique.
- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ et $\sum_{i=1}^4 \lambda_i < 0$. Il s'agit d'un système hyperchaotique.

Remarque 1.5.1 *Un exposant de Lyapounov négatif selon une direction, indique que les trajectoires se rapprochent et par conséquent on perd l'information sur les conditions initiales. l'orbite est donc at-*

tractive vers une orbite périodique ou un point fixe. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce genre de système exhibe une stabilité asymptotique. Un exposant de Lyapounov positif selon une direction, indique que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. les trajectoires divergent, l'orbite est donc chaotique. Intuitivement, c'est la sensibilité aux conditions initiales. Un exposant de Lyapounov nul, les orbites issues de conditions initiales différentes, gardent une séparation constante, ni convergent, ni divergent l'une par rapport à l'autre. Dans ce cas, un tel système physique est dit conservatif.

Remarque 1.5.2 Notons qu'il existe plusieurs algorithmes pour calculer les exposants de Lyapounov, l'un des plus connus étant l'algorithme de Wolf . Cet algorithme nous permet de calculer les exposants de Lyapounov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires par rapport à la perturbation introduite parallèlement.

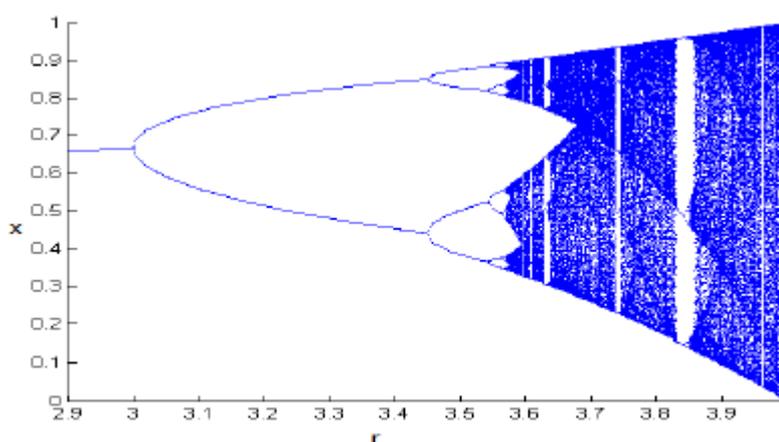


FIGURE 1.6 – Diagramme de bifurcations de l'application logistique.

Diagramme de bifurcations

On dit qu'il y a une bifurcation lorsqu'un tel changement qualitatif de la structure d'un système se produit à l'occasion de la variation quantitative de l'un de ses paramètres (qu'on l'appelle valeur de bifurcation). Les graphiques qui représentent ces bifurcations, sont appelés diagrammes de bifurcation. Donc le diagramme de bifurcation est un outil très important pour évaluer les comportements possibles d'un système en fonction des valeurs de bifurcation.

La Figure (1.6) illustre le diagramme de bifurcations de l'application logistique définie sur le segment

$[0,1]$ par :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1.12)$$

où $n = 0, 1, 2 \dots$ dénote le temps discret, et $r \in [0, 4]$ un paramètre de contrôle. Selon la Figure(1.6), on peut constater trois états différents du système selon la valeur du paramètre r : un régime stable, puis périodique à plusieurs états et enfin un régime chaotique.

1.6 Les scénarios transitions vers le chaos

On ne sait pas toujours à l'heure actuelle dans quelles conditions un système non linéaire va devenir chaotique.

Cependant, il existe un certain nombre de scénarios transition vers le chaos qui sont universels, et si un système entre dans un de ces scénarios, son évolution peut être décrite. Supposons que la dynamique étudiée dépend d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique. Nous allons passer en revue quelques scénarios de transition vers le chaos. Par ces scénario il faut comprendre une conjecture sur le comportement d'un système donnant une explication simplifiée et possible de la cascade de bifurcation qu'il subit lorsque les paramètres de contrôle varient. Cette conjecture repose sur l'hypothèse d'un système bifurquant. La différenciation des scénarios découlera d'une hypothèse supplémentaire de résonance ou de non résonance, de super criticalité ou sous criticalité. Tous ces scénarios ont été prédits par la théorie et observés dans de nombreuses expériences. Les systèmes présentant un comportement chaotique possèdent en général des transitions entre un état chaotique et un état non chaotique.

On a trois grands scénarios de transition vers le chaos sont :

- L'intermittence
- Le doublement de période
- Le quasi-périodicité

1.6.1 L'intermittence

L'intermittence vers le chaos se caractérise par un mouvement périodique entrecoupé par des bouffées chaotiques, puis le régime redevient périodique et ainsi de suite. La survenance des bouffées apparaissent de manière irrégulière dans le temps. L'augmentation d'un paramètre réalise l'augmentation de

la fréquence des perturbations, puis les bouffées sont rares et espacées et finalement le chaos domine le comportement du système.

1.6.2 Le doublement de période

Ce scénario de transition vers le chaos est sans doute le plus connu. Il a été étudié en particulier en dynamique de population par R. May sur l'application logistique. Ce problème consiste à considérer l'itération :

$$X_{n+1} = f(X_n) \text{ avec } f(x) = rx(1-x) \text{ c'est à dire : } X_{n+1} = rX_n(1-X_n)$$

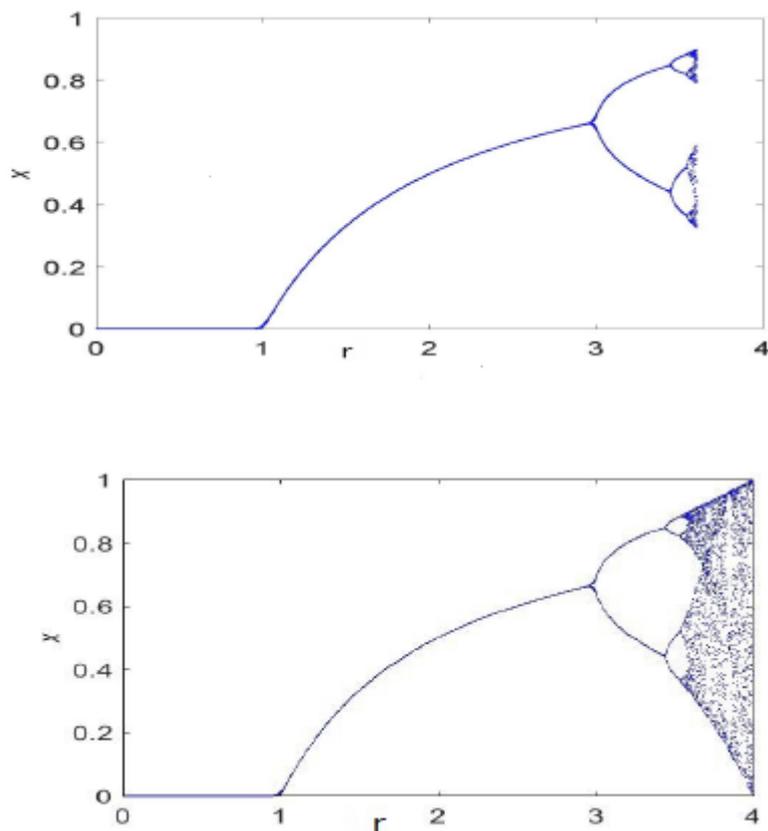


FIGURE 1.7 – Transition vers le chaos par doublement de période de l'application logistique.

Selon la valeur du paramètre a , la suite converge soit vers un point fixe nul ou pas. Dès que a est plus grand que 3 le système bifurque, c'est à dire qu'il oscille entre 2 valeurs autour du point fixe.

On parle de cycle attracteur de période 2. En continuant à augmenter a , ces 2 attracteurs s'écartent du point fixe jusqu'à ce qu'une nouvelle bifurcation ait lieu. Chaque point se dédouble et on obtient un cycle attracteur de période 4 : On dit qu'il y a doublement de période. C'est à partir de cet exemple que Feigenbaum a présenté l'existence d'une forme d'universalité dans cette transition vers le chaos sous forme de cascade de doublement de période. De là naquit la constante de Feigenbaum (4.6692016609), également retrouvée grâce à la théorie des groupes de renormalisations, bien connue aux physiciens. La route de Feigenbaum se réduit par des doublements de période successif sauf suret à mesure que la contrainte augmente, la période est multipliée par 2, 4, 8, ... avec des doublement de période de plus en plus rapprochés. Lorsque la période est infinie, le système est chaotique.

1.6.3 Le quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodique a été mis en évidence par les travaux théorique de Ruelle et Takens (1971) illustré par exemple sur le modèle de Lorenz (1963), ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences dont les plus célèbres se trouvent en thermohydrodynamique convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte et en chimie réaction de Bélousov-Zabotinsky entre-autres, L'exemple de Lorenz est probablement le plus souvent développé pour illustrer ce phénomène de quasi-périodicité, C'est donc E.N. Lorenz, météorologue au MIT qui a exhibé cet attracteur étrange avant même que le terme n'ait été inventé, Il avait conçu un modèle très simple de la circulation atmosphérique, représenté par un système de trois équations non linéaires.

Ce nouveau scénario peut devenir instable et être remplacé par un attracteur étrange. le comportement dynamique du système n'est plus quasi périodique à trois fréquences mais chaotique. Ainsi à partir d'un point fixe, le régime chaotique est obtenu à partir du bifurcations de Hopf.

1.7 Avantage du Chaos

Comme il a été déjà mentionné dans l'introduction, le chaos déterministe peut générer des comportements dynamiques d'apparences aléatoires. Il serait donc intéressant d'utiliser ces derniers comme porteuses d'informations en communications sécurisées.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base des systèmes dynamiques. Nous avons présenté également les définitions mathématiques relatives au chaos et les différentes caractéristiques intrinsèques aux systèmes chaotiques.

Systèmes dynamiques fractionnaires

Les systèmes fractionnaires sont également considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la description des propriétés de plusieurs matériaux comme les polymères. En effet, la dérivée fractionnaire procure un excellent instrument pour la description de la propriété de mémoire de plusieurs matériaux et processus puisque la dérivée fractionnaire d'une fonction tient compte de tout l'historique de la fonction et ne reflète pas uniquement des caractéristiques locales comme dans le cas de la dérivée classique.

Ce chapitre est ainsi consacré d'une manière unifiée à l'étude des éléments sur la théorie du calcul fractionnaire et de la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires fractionnaires, sur lesquels s'appuient nos résultats décrits dans le troisième chapitre. Quelques concepts de base de la théorie de dérivation non entière, en particulier, la fonction Gamma, la fonction de Mittag-Leffler, la transformation de Laplace et les différentes définitions des dérivées fractionnaires, sont présentés d'abord dans la section 2.1. Dans la section 2.2, nous rappelons les éléments nécessaires de la théorie des équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo, en mettant en exergue le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales pour une équation fractionnaire, puis la résolution explicite des équations différentielles fractionnaires linéaires, et nous terminons cette section par la présentation d'une méthode numérique nécessaire à la résolution des équations fractionnaires.

Dans la section 2.3, le problème de la stabilité des systèmes différentielles d'ordre fractionnaire est étudié. Nous souhaitons également étudier la stabilisation asymptotique des systèmes fractionnaires, en utilisant une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire.

2.1 Quelques concepts de base de la théorie de dérivation non entière

Les définitions et les résultats proposés dans cette section sont indispensables à la bonne compréhension de cette thèse. Nous regroupons un ensemble de définitions sur le thème du calcul fractionnaire et nous rappelons quelques théorèmes.

2.1.1 Fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire

Dans cette partie, nous présentons la fonction Gamma d'Euler et les fonctions de Mittag-Leffer. On rappelle que ces fonctions jouent des rôles très important dans la théorie du calcul fractionnaire (la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle).

Fonction Gamma

L'une des fonctions de base dans la théorie du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. Elle est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt, \quad z > 0. \quad (2.1)$$

L'une des propriétés importante de la fonction de Gamma est la suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (2.2)$$

Prolongement de $\Gamma(z)$ pour z négative.

De la relation (2.1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma(z - 1) &= \frac{\Gamma(z)}{z - 1} & -1 < z - 1 < 0 \\ \Gamma(z - 2) &= \frac{\Gamma(z - 1)}{z - 2} & -2 < z - 2 < -1. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut trouver :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z} \quad -n < z < -(n - 1). \quad (2.3)$$

On en déduit alors que la fonction Gamma est également définie pour toutes les valeurs négatives de z .

La Figure 2.1 représente le graphe de la fonction Gamma d'Euler.

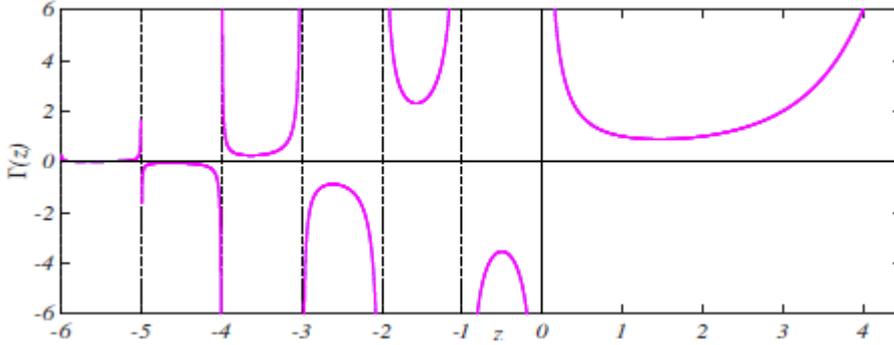


FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction Γ .

Fonction Mittag-Leffer

La fonction exponentielle, joue un rôle très important dans la résolutions des équations différentielles d'ordre entier. La fonction de Mittag-Leffer est une généralisation de la fonction exponentielle, elle est souvent utilisée dans la résolution des problèmes physiques décrits par des équations à dérivée fractionnaire.

La fonction de Mittag-Leffer à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffer. Elle est définie par :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} E_{\alpha}(z), \quad \alpha > 0. \quad (2.4)$$

La Figure 2.2 illustre le comportement de la fonction de Mittag-Leffer pour différentes valeurs de α .

La fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres a été introduite par Agarwal . Elle est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} E_{\alpha}(z), \quad \beta > 0, \alpha > 0. \quad (2.5)$$

En particulier, pour $\beta = 1$, on trouve la relation (2.1).

La Figure 2.3 illustre le comportement de la fonction de Mittag-Leffer, pour différentes valeurs de α et β . A partir de la relation (2.5), on trouve :

$$E_1(z) = \exp(z), \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}). \quad (2.6)$$

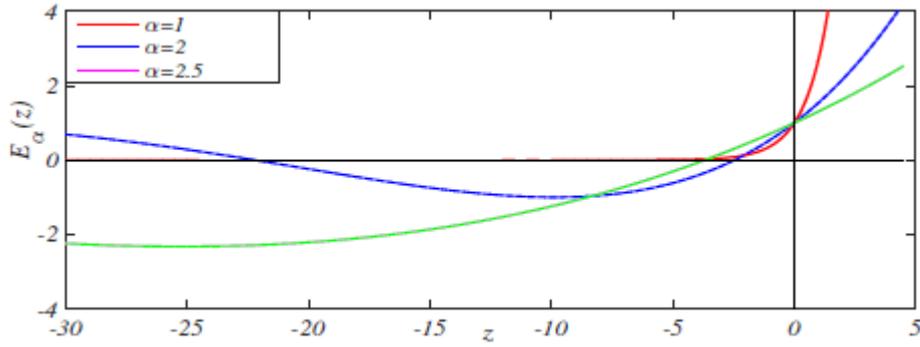


FIGURE 2.2 – Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre.

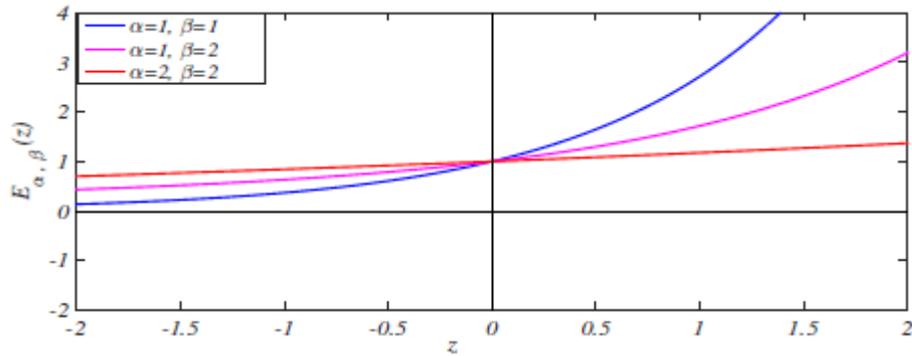


FIGURE 2.3 – Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

La dérivée n-ième de la fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre est donné par :

$$E_{\alpha}^{(n)}(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + 1)} \quad (2.7)$$

Tandis que la dérivée n-ième de la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)} \quad (2.8)$$

2.1.2 Transformation de Laplace

L'utilisation de la technique de transformation de Laplace est souvent nécessaire et joue un rôle très important dans la résolution des équations à dérivée fractionnaire.

Soit F , la transformée de Laplace de f définie par :

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t)dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (2.9)$$

où f est la fonction originale qui peut être obtenue à l'aide de la transformation réciproque de Laplace :

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st)F(s)ds \quad (\gamma = \Re(s) > \gamma_0), \quad (2.10)$$

où γ_0 est l'indice de convergence de l'intégrale (2.9).

si $F(s) = L\{f(t)\}$, alors $L\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\{F(s)\}$. Par récurrence, on trouve :

$$L\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n}\{F(s)\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

A titre d'exemple, la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffer à deux paramètres vérifie la relation suivante :

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha), s\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \lambda}, \quad \Re(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}, \quad t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est donné par :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau. \quad (2.13)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution des fonctions f et g peut s'écrire sous la forme :

$$L\{f(t) * g(t), s\} = F(s)G(s). \quad (2.14)$$

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier n de $f(t)$ est donnée par :

$$L\{f^n(t), s\} = s^n F(s) - \sum_0^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (2.15)$$

2.1.3 Définitions des dérivées fractionnaires

Dans cette thèse, les symboles de la dérivée fractionnaire ont été normalisés comme suit :

$${}_a D_t^\alpha \begin{cases} \frac{d^\alpha}{(dt)^\alpha}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \int_a^t d\tau^{(-\alpha)}, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

où ${}_a D_t^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation d'ordre α , a et t sont respectivement des limites inférieure et supérieure de cet opérateur.

Il existe plusieurs définitions pour les intégrales et les dérivées fractionnaires. Malheureusement toutes les définitions considérées, en générale ne sont pas toutes équivalentes.

Nous rappelons dans cette thèse celles qui sont les plus célèbres.

Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

La définition au sens de Grünwald-Letnikov est basée sur une approche aux différences finies fractionnaires, où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle, à travers la fonction Gamma d'Euler. La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'une fonction f est définie par :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \quad (2.17)$$

où $\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{t-\alpha}{h}$ et $\binom{\alpha}{k}$ sont des coefficients binomiaux.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est basée sur l'intégrale k -ième d'une fonction, qui peut naturellement s'étendre au réel α , avec $n - 1 < \alpha \leq n$.

Une intégrale k -ième ($k \in \mathbb{N}^*$) de f est donnée par :

$${}_a D_t^{-k} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^t (t - \tau)^{k-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.18)$$

s'étend naturellement aux réels $\alpha > 0$, comme suit :

$$\begin{aligned}
{}_a^R J_t^\alpha f(t) &= {}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) \\
&= {}_a D_t^{-\alpha} f(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

A partir de l'expression (2.19), il vient :

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} * f(t), \tag{2.20}$$

où * désigne le produit de convolution.

Soit maintenant $n-1 < \alpha \leq n$, alors la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de l'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction intégrable f est donnée par :

$$\begin{aligned}
{}_a^R D_t^{-\alpha} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^{-(n-\alpha)} f(t)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La formulation suivante des dérivées fractionnaires, dite dérivée au sens de Caputo est souvent utilisée, puisque sa transformée de Laplace conduit à des conditions initiales, qui prennent la même forme que pour les systèmes entiers, avec des interprétations physiques claires. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction f est définie par :

$$\begin{aligned}
{}_a^C D_t^\alpha f(t) &= {}_a D_t^{-(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right), \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

où $n - 1 < \alpha \leq n$. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville sont reliées par la formule :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k - \alpha}, \quad n - 1 < \alpha \leq n, \quad (2.23)$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$L\{{}^C D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha - k - 1} f^{(k)}(0), \quad n - 1 < \alpha \leq n. \quad (2.24)$$

Supposons que toutes les conditions initiales sont nulles, l'équation (2.24) peut être réduite à :

$$L\{{}^C D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s). \quad (2.25)$$

Puisque l'opérateur de la dérivation au sens de Caputo est plus cohérent que celui de RL, c'est cet opérateur qui sera employé tout au long de cette thèse. En outre, la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton qui sera défini ultérieurement, sera utilisée pour toutes les simulations numériques des systèmes fractionnaires.

Les propriétés suivantes de la dérivée d'ordre fractionnaire de Caputo seront également considérées par la suite :

Propriété 1 : La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

Propriété 2 : La dérivée fractionnaire de la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$ est donnée par :

$${}^C D_t^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}, \quad \text{pour tout } \beta > \alpha. \quad (2.26)$$

Propriété 3 : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $n - 1 < \alpha \leq n$, on a :

$${}^C D_t^\alpha ({}^C D_t^m f(t)) = {}^C D_t^{\alpha + m} f(t). \quad (2.27)$$

Propriété 4 : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $n - 1 \leq \alpha < n$, on a :

$${}_a D_t^m ({}^C D_t^\alpha f(t)) = {}^C D_t^{\alpha + m} f(t) + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - (\alpha + m) + 1)} (t - a)^{k - (\alpha + m)}. \quad (2.28)$$

En particulier, si $f^{(k)}(a) = n$ pour $k = n, n+1, \dots, n+m-1$, il vient :

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t). \quad (2.29)$$

preuve 2.1.1 Propriété 1 Soit $f(t) = c$. Puisque $f^{(n)} = 0$, on a alors :

$${}_a^C D_t^\alpha c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = 0. \quad (2.30)$$

Propriété 2 On rappelle que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville sont reliées par la formule :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (2.31)$$

Si $\alpha > \beta$, on a : $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$, ce qui implique :

$${}_a^C D_t^\alpha (t-a)^\beta = {}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta \quad (2.32)$$

Calculons maintenant ${}_a^R D_t^\alpha (t)^\beta$.

Soit $n-1 < \alpha \leq n$, alors, pour tout $\beta > \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^\beta d\tau. \end{aligned} \quad (2.33)$$

En utilisant le changement de variables : $\tau = xt$, l'équation (2.33) devient alors :

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (1-x)^{n-\alpha-1} t^{n-\alpha-1} x^\beta t^{\beta+1} dx \\ &= \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (1-x)^{n-\alpha-1} x^\beta dx \\ &= \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \beta(n-\alpha, \beta+1) \\ &= t^{n-\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En appliquant maintenant la relation (2.21), on trouve :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^{-(n-\alpha)} f(t)) \\ &= {}_a^R D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En tenant compte (2.35), (2.1.1) devient :

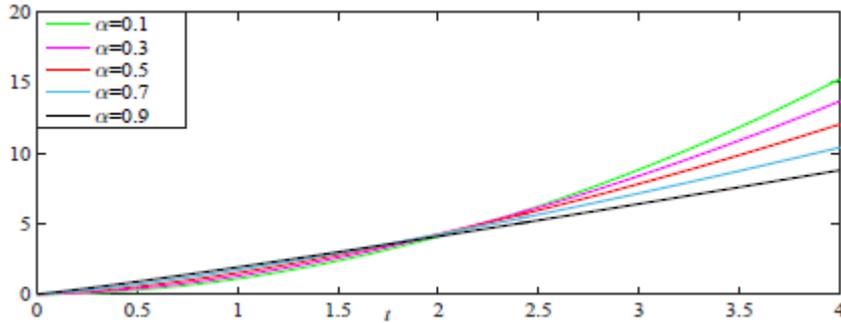


FIGURE 2.4 – Courbes de la dérivée fractionnaire de la fonction t^2 , pour différentes valeurs de α .

$${}_a^C D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.36)$$

En particulier, si

$\beta = 2$ et $a = 0$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de $f(t) = t^2$ est donnée par :

$${}_0^C D_t^\alpha t^2 = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \alpha \quad (2.37)$$

La Figure 2.4 illustre les courbes de la dérivée fractionnaire de la fonction t^2 pour différentes valeurs de α .

Propriété 3 Par définition, on a :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) &= {}_a D_t^{-(n-\alpha)} {}_a D_t^n ({}_a D_t^m f(t)) \\ &= {}_a D_t^{-(n-\alpha)} {}_a D_t^{n+m} f(t) \\ &= {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Propriété 4 Moyennant de la 2.23, on trouve :

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) &= {}_a D_t^m [{}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}] \\
&= {}_a^R D_t^m D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} {}_a D_t^m (t-a)^{k-\alpha} \\
&= {}_a^R D_t^m D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=n}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&= {}_a^R D_t^m D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=n}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&\quad - \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&= {}_a^R D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)} \\
&= {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} (t-a)^{k-(\alpha+m)}. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

En particulier, si $f^{(k)}(a) = 0$, pour tout $k = n, n+1, \dots, n+m-1$, la relation suivante est bien vérifiée :

$${}_a D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t). \tag{2.40}$$

Autres propriétés fondamentales des dérivées fractionnaires

Les définitions des dérivées fractionnaires sont basées sur celles des intégrations d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire prend un caractère global contrairement à la dérivation entière. Certaines propriétés d'intégration et de différentiation d'ordre fractionnaire sont :

1. Les opérateurs d'intégration d'ordre fractionnaire satisfaisaient la propriété de semigroupe. Par contre, les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient cette propriété que sous certaines conditions.
2. et la différentiation d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires.

2.2 Équations différentielles fractionnaires

Dans cette section, on s'intéresse seulement aux éléments nécessaires de la théorie des équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo. Nous rappelons le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales pour une équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo, puis la résolution explicite des équations différentielles fractionnaires linéaires, et nous terminons cette partie par la présentation d'une méthode numérique nécessaire à la résolution des équations fractionnaires.

2.2.1 Équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo "EDFSC"

Considérons le problème aux valeurs initiales suivantes :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ {}^C D^i y(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.41)$$

où ${}^C D_t^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo, et $n-1 < \alpha \leq n$. Le théorème suivant nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution du problème aux valeurs initiales (2.41).

Théorème 2.2.1 *Soient $K > 0$, $h^* > 0$ et $y_0^i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, et soit $f : G = [0, h^*] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue, satisfaisant la condition de Lipschitz par rapport à y :*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < l|y_1 - y_2|, \quad (2.42)$$

et soit :

$$h = \min\{h^*, (KT(\alpha + 1)/M)^{\frac{1}{\alpha}}\}, \quad (2.43)$$

où

$$M = \sup_{t, z \in G} |f(t, z)|, \quad (2.44)$$

Théorème 2.2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.2.1, le problème aux conditions initiales 2.41 est*

équivalent à l'équation d'intégrale de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.45)$$

preuve 2.2.1 Supposons que y est une solution de l'équation 2.45. Cette dernière peut se réécrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + {}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t)). \quad (2.46)$$

En appliquant l'opérateur de différentiation ${}_0^C D_t^\alpha$ sur les deux cotés de cette relation, on trouve :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^\alpha t^k}{k!} + {}_0^C D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^\alpha t^k}{k!} + f(t, y(t)). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Puisque $k < \alpha$ donc, ${}_0^C D_t^\alpha t^k = 0$ Par conséquent y est une solution de l'équation (2.41). Il reste à montrer que ${}_0^C D_t^j y(0) = y_0^{(j)}$. En effet, en appliquant maintenant l'opérateur ${}_0^C D_t^j$, $0 \leq j \leq n-1$ sur l'équation de Volterra (2.45), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^j t^k}{k!} + {}_0^C D_t^j {}_0D_t^{-j} {}_0D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^C D_t^j t^k}{k!} + {}_0D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)). \end{aligned} \quad (2.48)$$

On rappelle que :

$${}_0^C D_t^j t^k = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k \\ \Gamma(k+1), & \text{si } j = k \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-j+1)} t^{k-j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (2.49)$$

Ce qui implique :

$${}_0^C D_t^j t^k|_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k \\ \Gamma(k+1), & \text{si } j = k \\ 0, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (2.50)$$

D'autre part $\alpha-j \geq 1$, ce qui implique que l'intégrale ${}_0D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t))|_{t=0}$ est nulle. Par suite ${}_0^C D_t^j y(0) = y_0^{(j)}$. Supposons maintenant que y est une solution de l'équation (2.41) et montrons que y est la solution

de (2.45). Posons $z(t) = f(t, y(t))$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 z(t) &= f(t, y(t)) = {}_0^C D_t^\alpha y(t) = {}_0^R D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\
 &= {}_0^R D_t^\alpha y(t) - {}_0^R D_t^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \\
 &= {}_0^R D_t^\alpha \left(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!} \right) \\
 &= {}_0^R D_t^\alpha (y - T_{n-1}[y, 0])(t) \\
 &= {}_0 D_t^n {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t), \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

où $T_{n-1}[y, 0](t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$ est le polynôme de Taylor de degré $n-1$. En appliquant l'opérateur ${}_0 D_t^{-n}$ sur les deux membres de cette dernière équation, il vient :

$${}_0 D_t^{-n} z(t) = {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t) + q(t), \tag{2.52}$$

où q est un polynôme de degré $\leq n-1$. Puisque la fonction z est continue, la fonction ${}_0 D_t^{-(n-\alpha)} z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine.

En outre, la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ ayant la même propriété par construction. Et donc la fonction ${}_0 D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])$ doit également avoir un zéro d'ordre n . Par suite le polynôme q ayant la même propriété, mais comme il est de degré $\leq n-1$, il en résulte que $q = 0$.

Par conséquent :

$${}_0 D_t^{-n} z(t) = {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t). \tag{2.53}$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= T^{n-1}[y, 0](t) + {}_0 D_t^{-\alpha} z(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

2.2.2 Résolution analytique des EDFSC linéaires

Dans cette partie, on s'intéresse à résoudre explicitement une équation différentielle fractionnaire linéaire au sens Caputo.

Cas d'une équation unidimensionnelle

Théorème 2.2.3 Soient $\alpha > 0$ et $n = \lceil \alpha \rceil + 1$. La solution générale du problème :

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t) + q(t), & \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et } q \text{ une fonction continue.} \\ y^{(k)}(0) = y_0^k, & k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.55)$$

est donnée par la formule suivante :

$$y(t) = \sum_k^{n-1} y_0^k u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad (2.56)$$

où :

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} {}_0 D_t^{-\alpha} q(t) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau, & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

et

$$u_k(t) = D^{-k} e_\alpha(t), \quad e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.58)$$

preuve 2.2.2 si $\lambda = 0$, le problème (2.55) devient :

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) = q(t) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Puisque $e_\alpha(t) = E_\alpha(0) = 1$, on a alors $u_k(t) = \frac{t^k}{k!}$, pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$: En appliquant la relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo, on trouve :

$${}^C_0 D_t^\alpha y(t) = {}^R_0 D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} = q(t). \quad (2.59)$$

Ce qui implique :

$${}^R_0 D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + q(t). \quad (2.60)$$

En appliquant l'intégrale de Riemann-Liouville sur les deux cotés de l'équation (2.60), on trouve :

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{-\alpha} {}^R_0 D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) {}_0 D_t^{-\alpha} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + {}_0 D_t^{-\alpha} q(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) t^k}{k!} + {}_0 D_t^{-\alpha} q(t). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Cette dernière est équivalente à :

$$y(t) = \sum_k^{n-1} y_0^k u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad \text{où} \quad \tilde{y}(t) = {}_0 D_t^{-\alpha} q(t) \quad (2.62)$$

Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$. La preuve se fait en deux étapes (a) et (b).

(a) La fonction u_k satisfait l'équation différentielle homogène, c'est à dire : ${}_0^C D_t^\alpha u_k = \lambda u_k, \forall k = 1, \dots, n-1$ et vérifie les conditions initiales $u_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$ (delta de Kronecker) pour $j, k = 0, \dots, n-1$.

(b) La fonction \tilde{y} est une solution de l'équation différentielle non homogène, avec les conditions initiales homogènes. On commence par (a). Un calcul simple montre que :

$$e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \quad (2.63)$$

par suite :

$$u_k = D^{-k} e_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j + k}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \quad (2.64)$$

Montrons maintenant que u_k est une solution de l'équation différentielle homogène. En effet :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u_k(t) &= {}_0^C D_t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j + k}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} {}_0^C D_t^\alpha t^{\alpha j + k} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} t^{\alpha(j-1) + k} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} t^{\alpha j + k} \\ &= \lambda u_k(t). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ce qui assure que u_k est une solution de l'équation homogène. De plus, si $j = k$, on a :

$$u_k^{(k)}(0) = D^k D^{-k} e_\alpha(0) = e_\alpha(0) = 1. \quad (2.66)$$

pour $j < k$, on a :

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{-(k-j)} e_\alpha(0) = 0 \quad (2.67)$$

pour $j > k$, on a :

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{(j-k)} e_\alpha(0) = 0. \quad (2.68)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) e'_0(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e'_0(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.69)$$

On rappelle que cette intégrale existe toujours, quelque soit $t > 0$, car q est une fonction continue, e'_α intégrable, et $\tilde{y}(0) = 0$. D'après une propriété de la différentiation des intégrales dépendant d'un paramètre, on a :

$$D\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e''_\alpha(t-\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} q(t) \underbrace{e'_\alpha(0)}_{=0}. \quad (2.70)$$

En utilisant la continuité de q et la singularité faible de e''_α , on peut vérifier facilement que $D^{(1)}D\tilde{y}(0) = 0$. De la même manière, on trouve également :

$$D^k \tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e_\alpha^{k+1}(t-\tau) d\tau, \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, n-1. \quad (2.71)$$

donc, $D^k \tilde{y}(0) = 0$. Alors \tilde{y} satisfait toutes les conditions initiales homogènes. Montrons maintenant que \tilde{y} est une solution de l'équation différentielle non homogène. Puisque :

$$e'_\alpha(u) = \frac{d}{du} e_\alpha(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j u^{\alpha j - 1}}{\Gamma(\alpha j)} \quad (2.72)$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e'_\alpha(t-\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (t-\tau)^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)} d\tau \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha j)} \int_0^t q(\tau) (t-\tau)_{\alpha j-1} d\tau \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0^{j-1} D_t^{-\alpha j} q(\tau).
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 {}^C_0 D_t^\alpha \tilde{y}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}^C_0 D_t^\alpha D_t^{-\alpha j} q(t) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}_0 D_t^{-\alpha(j-1)} q(t) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j {}_0 D_t^{-\alpha j} q(t) \\
 &= q(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j {}_0 D_t^{-\alpha j} q(t) \\
 &= q(t) + \lambda \tilde{y}(t)
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Exemple 2.2.1 A titre d'exemple, on prend :

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) = y(t) - 2, & \alpha \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.75}$$

Puisque $\lambda = 1$ et $q(t) = -2$, on a alors :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^t -2 u'_0(\tau) d\tau \\
 &= -2 [E_\alpha(\tau^\alpha)]_0^t \\
 &= 2 - 2E_\alpha(t^\alpha).
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^1 y_0^{(k)} u_k(t) = y(0)E_\alpha(t^\alpha) + y'(0) \int_0^t E_\alpha(\tau^\alpha) d\tau = 0. \quad (2.78)$$

Ce qui implique que la solution générale du problème (2.75), est donnée par :

$$y(t) = 2 - 2E_\alpha(t^\alpha). \quad (2.79)$$

Cas d'une équation multidimensionnelle

Considérons maintenant l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t) + q(t), \quad (2.80)$$

où $0 < \alpha < 1$, $A \in M_n \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $q : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n$

On commence par résoudre le problème homogène :

$${}^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t). \quad (2.81)$$

Nous distinguons deux cas :

Cas 1 : Supposons que la matrice A ayant des valeurs propres simples. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs, et v_1, v_2, \dots, v_n les vecteurs propres associés. Dans ce cas, la solution de (2.81) est donnée par :

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k v_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha), \quad (2.82)$$

où $c_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, \dots, n$. **Cas 2 :** Supposons maintenant que A ayant des valeurs propres multiples. Soient λ sa valeur propre, de degré de multiplicité k . Nous avons donc : * Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ est égale à k , dans ce cas, la solution de (2.81) est de la forme (2.82). * Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ est égale à m (où $m < k$), dans ce cas, les autres solutions ($k - m$), qui sont linéairement indépendantes sont données par :

$$y^i(t) = \sum_{j=m}^i u^j t^{i-j} (\lambda t^\alpha), \quad \text{pour tout } i = m + 1, \dots, k, \quad (2.83)$$

où les vecteurs propres $u^{(j)}$ sont les solutions du système linéaire non homogène :

$$(A - \lambda I)u^{j+1} = u^j. \quad (2.84)$$

Remarque 2.2.1 Soient $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ la solution du problème homogène (2.81), alors $(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))^T$, la solution du problème non homogène (2.80), avec la condition initiale $y(0) = y_0$ est donnée par :

$$Y_i(t) = y_i(t) + \int_0^t y_i(t - \tau) q_i(\tau) d\tau \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.85)$$

Exemple 2.2.2 (cas1) Considérons le système fractionnaire suivant :

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t), y(t) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Les valeurs propres de A sont données par

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad (2.87)$$

et les vecteurs propres associées sont respectivement donnés par :

$$v_1 = (1 - \sqrt{2}, 1)^T, \quad v_2 = (1 + \sqrt{2}, 1)^T. \quad (2.88)$$

Par suite, la solution générale du système (2.86) est donnée par :

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 - \sqrt{2})t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 + \sqrt{2})t^\alpha). \quad (2.89)$$

Choisissons maintenant :

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on a alors } c_1 = 1 \quad \text{et} \quad c_2 = -1. \quad (2.90)$$

Ce qui implique :

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 - \sqrt{2})t^\alpha) - \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha((1 + \sqrt{2})t^\alpha). \quad (2.91)$$

Exemple 2.2.3 (cas2) *Considérons maintenant le système fractionnaire suivant :*

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = Ay(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

Les valeurs propres de A sont calculées comme :

$$\lambda_1 = 8(\text{de multiplicité}), \quad \lambda_2 = 4, \quad (2.93)$$

et les vecteurs propres associés sont respectivement donnés par :

$$v_1 = (1, 0, 1)^T, \quad v_2 = (0, 1, 1)^T. \quad (2.94)$$

Puisque le nombre de vecteurs propres associé à $\lambda_1 = 8$ est égale à ($m = 1$) qui est strictement inférieur à $k = 2$ (k représente le degré de multiplicité), alors les autres ($k - m$) solutions du système, qui sont linéairement indépendants, sont données par :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^2 u^{(j)} t^{(2-j)\alpha} E_\alpha^{(2-j)}(\lambda_1 t^\alpha) \\ &= u^{(1)} t^\alpha \dot{E}_\alpha(8t^\alpha) + u^{(2)} t^\alpha E_\alpha(8t^\alpha), \end{aligned} \quad (2.95)$$

où $u^{(1)} = (1, 0, 1)^T$ satisfaisant la condition suivante :

$$(A - \lambda_1 I)u_{(2)} = u^{(1)}. \quad (2.96)$$

Soit $u^{(2)} = (a, b, c)^T$. On a alors :

$$\begin{cases} 2a + 2b - 2c = 1, \\ 2a - 2b - 2c = 0, \\ 4a - 4c = 1. \end{cases}$$

Ce qui donne : $(a, b, c) = (1/4, 1/4, 0)$.

par suite, la solution générale du système (2.99) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= c_1(1, 0, 1)^T E_\alpha(8t^\alpha) + c_2(0, 1, 1)^T E_\alpha(4t^\alpha) \\
 &+ c_3((1, 0, 1)^T t^\alpha \dot{E}_\alpha(8t^\alpha) + (1/4, 1/4, 0)^T E_\alpha(8t^\alpha)).
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Sous la condition initiale $y(0) = (0, 0, 1)$, les constantes c_1 , c_2 et c_3 sont données comme :

$$c_1 = 1/2, \quad c_2 = 1/2, \quad c_3 = -2. \tag{2.98}$$

Enfin, la solution du système (2.92) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (1/2, 0, 1/2)^T E_\alpha(8t^\alpha) + (0, 1/2, 1/2)^T E_\alpha(4t^\alpha) \\
 &+ ((-2, 0, 2)^T t^\alpha \dot{E}_\alpha(8t^\alpha) - (1/2, 1/2, 0)^T E_\alpha(8t^\alpha)).
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

2.2.3 Résolution numérique des équations fractionnaires

En général, pour résoudre des équations différentielles non linéaire, nous utilisons des méthodes numériques, de fait que la résolution analytique dans ce cas est généralement impossible. Il existe plusieurs méthodes pour la résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, à savoir : la méthode des différences fractionnaires de Grünwald-Letnikov, la méthode de décomposition d'Adomian, la méthode d'itération variationnelle et la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton.

Dans cette partie, on s'intéresse à la méthode numérique d'Adams-Bashforth-Moulton, pour résoudre une équation différentielle fractionnaire de type Caputo. Cette méthode est basée sur une formulation fractionnaire de la méthode classique d'Adams-Bashforth-Moulton. C'est la méthode numérique qu'on va utiliser le long de ce travail pour la simulation des systèmes dynamiques fractionnaires.

Méthode d'Adams-Bashforth-Moulton généralisée :

La méthode d'Adams-Bashforth-Moulton est une méthode numérique introduite par Diethelm et Freed, basée sur l'équation de Volterra (2.45).

On suppose que y_k est l'approximation de $y(t_j)$, pour tout $j = 1, \dots, k$, dans l'intervalle $[0, T]$.

Pour obtenir y_{k+1} , on remplace l'intégrale dans l'équation de Volterra (2.45), en utilisant la formule de

produit de quadrature des trapèzes où les noeuds t_j pour $j = 0, \dots, k + 1$, s'en prennent respectivement à la fonction $(t_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$.

On obtient alors l'approximation :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j). \quad (2.100)$$

où

$$a_{j,k+1} = \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \phi_{j,k+1} d\tau. \quad (2.101)$$

et

$$\phi_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{\tau - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & \text{si } t_{j-1} < \tau < t_j, \\ \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j}, & \text{si } t_j < \tau < t_{j+1}, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases} \quad (2.102)$$

Puisque $t_j = jh$, pour tout $j = 0, \dots, k + 1$, on a alors :

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} (k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha), & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}), & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}, & \text{si } j = k+1. \end{cases} \quad (2.103)$$

On trouve alors l'équation implicite de la méthode à un pas d'Adams-Moulton :

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right). \quad (2.104)$$

Le problème de cette dernière formule, est que l'inconnue y_{k+1} apparait dans les deux membres de l'équation, et en raison de la non linéarité de f , on ne peut pas la résoudre pour y_{k+1} d'une manière directe. Pour cela, en insérant une valeur préliminaire approchée de y_{k+1} dans le membre droite de cette dernière égalité.

L'approximation préliminaire y_{k+1}^p , appelée le terme prédiction, est obtenue d'une manière similaire, juste, en remplaçant la formule de trapèze par la formule du rectangle :

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right). \quad (2.105)$$

Ainsi, pour déterminer y_{k+1}^p , on utilise une fois encore la méthode d'Adams-Bashforth à un pas (de la même manière pour la formule de correction), mais on remplace l'intégrale par la règle de produit des rectangles :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{k+1} b_{j,k+1} g(t_j). \quad (2.106)$$

où

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha) \quad (2.107)$$

on a alors :

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \right). \quad (2.108)$$

Enfin, les expressions (2.105) et (2.108), avec $a_{j,k+1}$ et $b_{j,k+1}$, qui sont particulièrement calculées à partir de (2.101) et (2.107), respectivement, forment la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire. Cette méthode est dite de type PECE (Predict, Evaluate, Correct, Evaluate) car elle commence par calculer le prédicteur en utilisant la relation (2.108), puis elle évalue $f(t_{k+1}, y_{k+1}^p)$. L'utilisation de cette dernière évaluation, nous permet de calculer le correcteur via la relation (2.105), et finalement évaluer $f(t_{k+1}, y_{k+1})$.

2.3 Systèmes chaotiques fractionnaires

Le chaos ne peut pas se réaliser dans les systèmes dynamiques continus autonomes d'ordre inférieur à trois. Le modèle d'un système chaotique peut être réorganisé en trois équations différentielles contiennent des dérivées fractionnaires.

Considérons maintenant un système non linéaire à dérivée fractionnaire comme :

$$D^\alpha x = f(x). \quad (2.109)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ ($0 < \alpha_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$) et D^α est l'opérateur de dérivation au sens de Caputo. Les points d'équilibre du système (2.109) sont calculés par la résolutions de l'équation suivante :

$$D^\alpha x = 0. \quad (2.110)$$

Remarque 2.3.1 Si $x = 0$ est un point d'équilibre du système (2.109) et lorsqu'il existe $t_1 \geq 0$ satisfaisant $x(t_1) = 0$, alors $x(t) = 0$, pour tout $t \geq t_1$.

Remarque 2.3.2 Dans l'équation (2.109), qui décrit la dynamique d'un système non linéaire d'ordre non entier, deux types de systèmes seront présentés : les systèmes commensurables (ou d'ordres commensurables) et les systèmes non commensurables (ou d'ordres non commensurables).

Définition 2.3.1 Si tous les ordres de dérivations $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ du système (2.109) sont égaux, on dit que le système est commensurable. Dans le cas contraire, le système est dit non commensurable.

2.3.1 Systèmes d'ordre fractionnaire par rapport systèmes d'ordre entier

Considérons les deux systèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = \beta t^{\beta-1}, \quad 0 < \beta < 1, \quad x(0) = x_0. \quad (2.111)$$

$$D^\alpha x(t) = \beta t^{\beta-1}, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \text{ et } x(0) = x_0. \quad (2.112)$$

Les solutions des systèmes (2.111) et (2.112) sont respectivement données par :

$$x(t) = t^\beta + x_0, \quad (2.113)$$

$$x(t) = \frac{\beta \Gamma(\beta) t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} + x_0. \quad (2.114)$$

On peut voir facilement, que la solution du système d'ordre entier (2.111) est asymptotiquement stable, pour tout $0 < \beta < 1$. Cependant, la solution du système fractionnaire (2.112) est asymptotiquement stable, lorsque $0 < \beta < 2 - \alpha$. Ce qui montre que les systèmes fractionnaires admettent des caractéristiques différentes de celles des systèmes d'ordre entier.

2.4 Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité

Dans la théorie de la stabilité des systèmes linéaires d'ordre entier, nous savons bien qu'un système est stable si toutes les racines du polynôme caractéristique sont à parties réelles strictement négatives, c'est-à-dire situées sur la moitié gauche du plan complexe. Tandis que, dans le cas des systèmes fractionnaires linéaires, la définition de la stabilité est strictement différente de celle des systèmes classique. En effet, dans les systèmes fractionnaires, on peut avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stables.

Les théorèmes suivants, nous permettent d'affirmer les conditions nécessaires et suffisantes, pour la stabilité des systèmes fractionnaires.

Théorème 2.4.1 *Considérons le système non linéaire fractionnaire décrit par le modèle suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x = f(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.115)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $f \in \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire continue.

1. *Supposons que le système (2.115) est commensurable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ associée à f au point d'équilibre.*

Alors, le système (2.115) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.116)$$

2. *Supposons maintenant que le système (2.115) est non commensurable, c'est-à-dire $\alpha_i \neq \alpha_j$, pour tout $i \neq j$, et soit m le plus petit multiple commun des dénominateurs u_i de α_i , tel que :*

$$\alpha_i = \frac{u_i}{v_i}, (u_i, v_i) = 1, u_i, v_i \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.117)$$

Posons $\gamma = \frac{1}{m}$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de l'équation caractéristique :

$$\det(\text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - \frac{\partial f}{\partial x}) = 0 \quad (2.118)$$

Alors, le système non commensurable (2.115) est asymptotiquement stable, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \gamma \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.119)$$

Remarque 2.4.1 Si le système étudié est linéaire, les conditions de stabilité dans les théorèmes précédents restent vrais, juste en remplaçant la matrice Jacobienne de f par sa partie linéaire.

La Figure 2.5, illustre les différentes régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$.

Exemple 2.4.1 Considérons le système non linéaire fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x = 1 + x^2 y - 4x, \\ D^\alpha y = -x^2 y + 3x, \end{cases} \quad (2.120)$$

où D^α est l'opérateur de dérivation de Caputo.

Les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation :

$$\begin{cases} 1 + x^2 y - 4x = 0, \\ -x^2 y + 3x = 0, \end{cases} \quad (2.121)$$

Le seul point d'équilibre du système (2.120) est $P = (1, 3)$.

La matrice Jacobienne du système, associée au point d'équilibre P est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

Le polynôme caractéristique correspondant est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1. \quad (2.123)$$

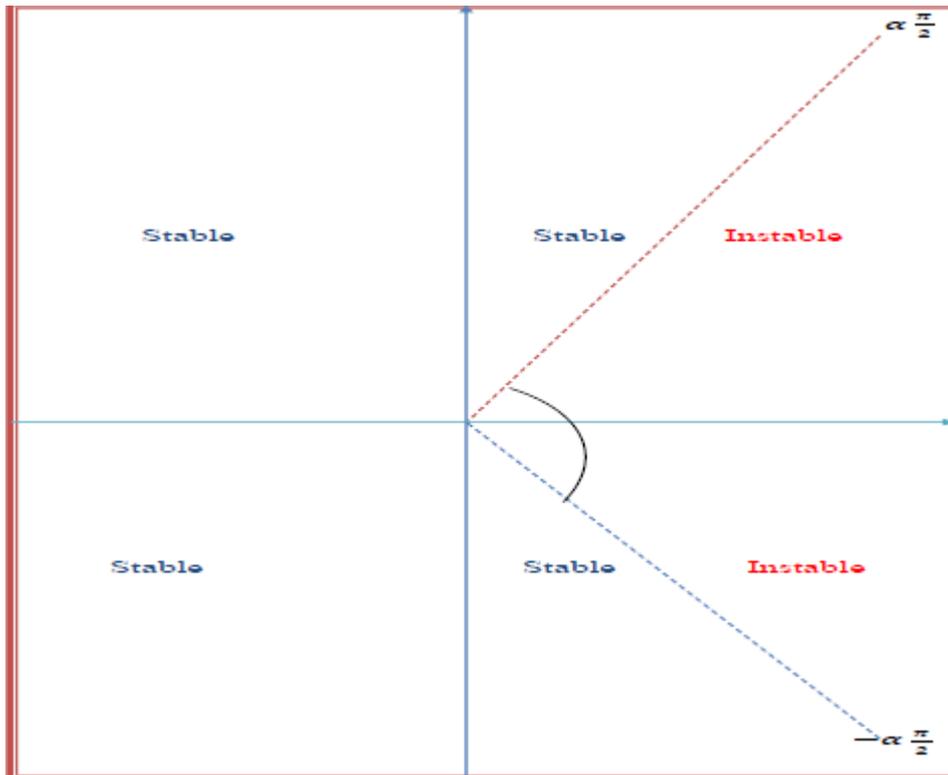
Les valeurs propres du système, associées au point P sont données par :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \text{et } \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad (2.124)$$

Lorsque $\alpha = 0,65$, on peut voir facilement que :

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.047 > \frac{\alpha\pi}{2} = 1.021. \quad (2.125)$$

La stabilité du point d'équilibre P . Cependant, dans le cas entier, le point d'équilibre P est instable.

FIGURE 2.5 – Régions de stabilité d'un système fractionnaire, où $0 < \alpha < 1$

2.5 Condition nécessaire pour le chaos

Considérons maintenant le système commensurable (2.115). On sait que les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Donc ces points sont localement asymptotiquement stables, lorsque toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ associée au point d'équilibre, vérifient la condition (2.116).

Dans la théorie des systèmes dynamiques en trois dimensions, un point selle est un point d'équilibre, pour lequel le système linéarisé équivalent, ayant au moins une valeur propre dans une région stable, et une dans une région instable, de plus, ce point est dit un point selle **d'indice 1**, si et seulement si, une des valeurs propres est instable et les autres sont stables. Cependant, un point selle est **d'indice 2**, si et seulement si, deux valeurs propres sont instables et la troisième est stable.

Concernant les systèmes chaotiques, il est bien connu que "les scrolls" sont générés seulement autour d'un point selle d'indice 2. Tandis que, les points selles d'indice 1 prennent seulement la responsabilité de connecter ces scrolls. Supposons maintenant qu'on a un système chaotique en trois dimension, possède

un attracteur d'un seul scroll.

Ce système admet alors un point selle d'indice 2, encerclé par cet attracteur. Supposons également que λ est une valeur propre de ce point selle et d'indice 2. Une condition nécessaire, pour que le système fractionnaire (2.109) peut être avoir un comportement chaotique, est de maintenir λ dans la région instable, ce qui entraîne :

$$\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\left|\frac{\Re(\lambda)}{\Im(\lambda)}\right|\right). \quad (2.126)$$

2.5.1 Méthode directe de Lyapounov fractionnaire basée sur les fonctions de classe k

Le concept de la méthode directe de Lyapounov, consiste à trouver une fonction de Lyapounov associée à un problème non linéaire. Lorsque cette fonction existe, le système est stable.

Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre, cependant elle est d'une portée beaucoup plus générale. Notons que cette méthode nous permet de donner une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire, on peut démontrer la stabilité d'un système, même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapounov, puisqu'il n'y a pas de règle générale qui nous permet de trouver une telle fonction de Lyapounov. Cependant, dans les problèmes de physiques, l'énergie est souvent un bon candidat.

Dans cette partie, nous étendons la méthode directe de Lyapounov des systèmes fractionnaire, en utilisant les fonctions de classe κ , pour étudier la stabilité asymptotique des solutions du système suivant :

$$D^\alpha = f(x(t)), \quad (2.127)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente une fonction non linéaire, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $\alpha \in (0, 1)$.

Pour atteindre cet objectif, nous regroupons un ensemble de définitions sur le thème des fonctions de classe κ , et nous rappelons quelques résultats de la stabilité au sens de Lyapounov, sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans la quatrième section du troisième chapitre.

2.6 Fonctions candidates de Lyapounov à la stabilité des systèmes fractionnaires

Cette partie présente une nouvelle propriété pour les dérivés fractionnaires au sens de Caputo, lorsque $0 < \alpha < 1$, qui permet de trouver une fonction candidate de Lyapounov simple pour de nombreux systèmes d'ordre fractionnaire, et par conséquent la preuve de leur stabilité, en utilisant l'extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire.

Lemme 2.6.1 *Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ une fonction dérivable au sens de Caputo. Alors, pour tout $t > t_0$.*

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2 \leq x(t)D^\alpha x(t), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.128)$$

preuve 2.6.1 *Par définition, on a :*

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.129)$$

De même :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.130)$$

Nous avons donc :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(\tau)]\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.131)$$

En utilisant le changement de variable $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$; l'équation (2.131), peut se réécrire sous la forme :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau)\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.132)$$

Faisons l'intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} du = y(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau, \\ v = \frac{(t-\tau)\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \end{cases} \quad (2.133)$$

on trouve :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau. \quad (2.134)$$

D'autre part, en utilisant la règle de l'hôpital, on trouve :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{2y(\tau)\dot{y}(\tau)}{2\alpha\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha-1}} = 0. \quad (2.135)$$

Et enfin :

$$x(t)D^\alpha x(t) - \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \geq 0, \quad \text{pour } t \geq t_0. \quad (2.136)$$

Remarque 2.6.1 Le lemme précédent reste vrai, si $x(t) \in \mathbb{R}^n$; et dans ce cas :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^T \leq x^T(t)D^\alpha x(t), \quad \text{pour tout } \alpha \in (0,1). \quad (2.137)$$

Corollaire 2.6.1 Considérons le système fractionnaire suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)). \quad (2.138)$$

$\alpha \in (0,1)$: Soit $x = 0$, le point d'équilibre de ce système. Si la condition suivante est satisfaite.

$$x(t)f(x(t)) \leq 0, \forall x, \quad (\text{resp. } x(t)f(x(t)) < 0, \quad \text{pour tout } x \neq 0). \quad (2.139)$$

alors le point d'équilibre 0 est stable (resp. asymptotiquement stable).

preuve 2.6.2 Considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x(t)) = \frac{1}{2}x^2(t). \quad (2.140)$$

En utilisant le lemme précédent, on trouve :

$$D^\alpha V(x(t)) \leq x(t)D^\alpha x(t) = x(t)f(x(t)) \leq 0, \forall x (\text{resp. } < 0, \quad \forall x \neq 0), \quad (2.141)$$

Alors, le point d'équilibre 0 est stable (resp. asymptotiquement stable).

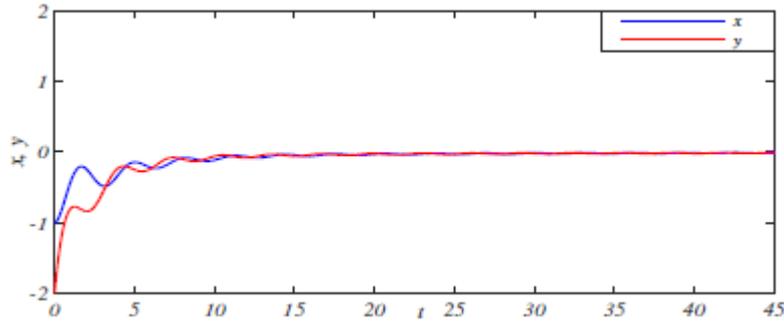


FIGURE 2.6 – L'évolution temporelle des états du système (2.142).

Exemple 2.6.1 *Considérons le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -\sin^2(t)x(t) - \sin(t)\cos(t)y(t), \\ D^\alpha y(t) = -\sin(t)\cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t), \end{cases} \quad (2.142)$$

Considérons également la fonction de Lyapounov suivante :

$$V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)). \quad (2.143)$$

En utilisant la propriété suivante :

$$\dot{x}(t) = -D^{1-\alpha}D^\alpha x(t). \quad (2.144)$$

le système (2.142), peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -D^{1-\alpha}(-\sin^2(t)x(t) - \sin(t)\cos(t)y(t)), \\ \dot{y}(t) = -D^{1-\alpha}(-\sin(t)\cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t)). \end{cases} \quad (2.145)$$

Si on utilise la dérivée classique de la fonction de Lyapounov, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x(t), y(t)) &= x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) \\
 &= -x(t)D^{1-\alpha}(-\sin^2(t)x(t) - \sin(t)\cos(t)y(t)) \\
 &\quad - y(t)D^{1-\alpha}(-\sin(t)\cos(t)x(t) - \cos^2(t)y(t)).
 \end{aligned} \tag{2.146}$$

Comme nous le voyons très bien dans l'équation (2.146), il est difficile de reconnaître le signe de la première dérivée de la fonction de Lyapounov (2.143), et par conséquent, on ne peut pas conclure sur la stabilité.

Cependant, la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov (2.143), satisfaisant :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha V(x(t), y(t)) &= \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) + D^\alpha y^2(t) \\
 &\leq x(t)D^\alpha x(t) + y(t)D^\alpha y(t) \\
 &= -[x(t)\sin(t) + y(t)\cos(t)]^2 \\
 &< 0, \quad \text{pour tout } (x, y) \neq 0.
 \end{aligned} \tag{2.147}$$

$$\tag{2.148}$$

De l'inégalité (2.148), la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov est définie négative sur \mathbb{R}^2 , ce qui montre la stabilité asymptotique du système (2.142).

La Figure (2.6) illustre l'évolution temporelle des états du système (2.142), avec la condition initiale $(x, y) = (-1, -2)$ et l'ordre de la dérivée fractionnaire $\alpha = 0.90$.

Exemple 2.6.2 *Considérons le système fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -x(t) + y^3(t), \\ D^\alpha y(t) = -x(t) - y(t), \end{cases} \tag{2.149}$$

Considérons également la fonction de Lyapounov :

$$V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{4}y^4(t). \tag{2.150}$$

Il est clair que V est définie positive.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 D^\alpha V(x(t), y(t)) &= \frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) + \frac{1}{4}D^\alpha y^4(t) \\
 &\leq x(t)D^\alpha x(t) + \frac{1}{2}y^2(t)D^\alpha y^2(t) \\
 &\leq x(t)D^\alpha x(t) + y^3(t)D^\alpha y(t) \\
 &\leq -x^2(t) - y^4(t) \\
 &< 0, \quad \text{pour tout } (x, y) \neq (0, 0).
 \end{aligned} \tag{2.151}$$

Comme nous pouvons voir dans l'inégalité (2.151), la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapounov

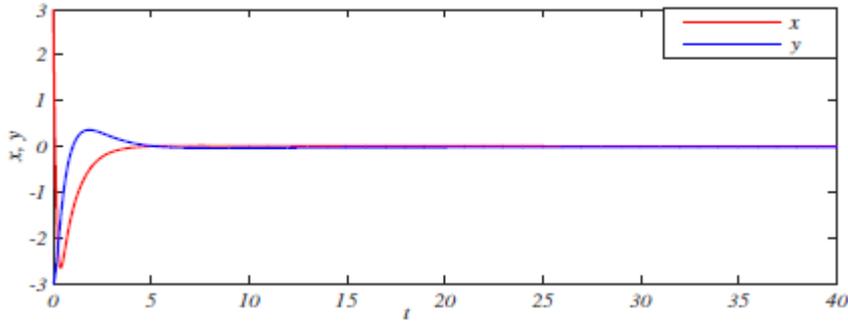


FIGURE 2.7 – L'évolution temporelle des états du système (2.149)

est définie négative sur \mathbb{R}^2 , ce qui montre la stabilité asymptotique du système (2.149).

La Figure 2.7 illustre l'évolution temporelle des états du système (2.149), avec la condition initiale $(x, y) = (3, -3)$ et l'ordre de la dérivé fractionnaire $\alpha = 0.95$.

2.7 Conclusion

ce chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base de calcul fractionnaire. La théorie de la dérivation fractionnaire a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et les propriétés de la dérivée fractionnaire. Nous avons ensuite décrit les équations d'ordre fractionnaire.

Enfin, pour clôturer ce chapitre, nous avons présenté la stabilisation des systèmes chaotiques fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov d'ordre fractionnaire.

L'utilisation de cette nouvelle approche va nous permettre ultérieurement de montrer sous certaines hypothèses adéquates, qu'on peut garantir la stabilisation asymptotique de tels systèmes.

Synchronisation combinées des systèmes chaotiques

Le principale motivation de ce chapitre est de construire un nouveau controle continu pour que la synchronisation complète combinée de trois systèmes chaotiques identiques d'ordre fractionnaires est réalisée en utilisant l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov des systèmes fractionnaires. Pour atteindre cet objectif, nous présentons une propriété très importante pour les dérivés fractionnaires au sens de Caputo. Cette propriété nous permet de montrer qu'on peut garantir la stabilisation ainsi que la convergence asymptotique de l'erreur de synchronisation. La synchronisation proposée est illustrée par l'intermédiaire d'un exemple numérique.

3.1 Systèmes couplés

On dit que deux oscillateurs sont couplés, si l'existence d'une petite perturbation dans l'un des oscillateurs entraîne une perturbation dans l'autre. Physiquement, cet effet se traduit par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement s'appelle en général accouplement mutuel.

3.1.1 Accouplement bidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes chaotiques fractionnaires, présentés par des équations suivantes :

$$D^\alpha X(t) = f_1(X, t), \quad (3.1)$$

$$D^\alpha Y(t) = f_2(Y, t), \quad (3.2)$$

On dit que les deux systèmes (3.1) et (3.2) sont couplés, si on peut les réécrire sous les formes suivantes :

$$D^\alpha X(t) = g_1(X, X, Y, t), \quad (3.3)$$

$$D^\alpha Y(t) = g_2(Y, X, Y, t), \quad (3.4)$$

où g_1, g_2 sont des fonctions non linéaires, et la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième, la troisième variable sont les résultats de l'effet d'accouplement.

La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, c'est la définition de l'accouplement bidirectionnel.

3.1.2 Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$D^\alpha X(t) = f(X, t), \quad (3.5)$$

$$D^\alpha Y(t) = f(Y, t). \quad (3.6)$$

Lorsque l'équation (3.6) va être modifier par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équations suivantes :

$$D^\alpha X(t) = f(X, t), \quad (3.7)$$

$$D^\alpha Y(t) = g(Y, X, t), \quad (3.8)$$

tel que $g(Y, X, t) = f(Y, t)$, pour $X = Y$, dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel. le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système récepteur(esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un acte sur le récepteur et le contraire est faux. Il est

bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel. Dans ce travail, on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

3.2 Différents types de synchronisation combinée

Plusieurs types de synchronisation combinée ont été employés dans la littérature, à savoir : la synchronisation complète combinée (SCC), l'anti-synchronisation combinée (ASC), la synchronisation projective combinée (SPC) et la synchronisation projective modifiée combinée (SPMC), etc. Par exemple, dans la synchronisation complète combinée, nous avons une coïncidence complète entre les variables d'états des deux systèmes maître-esclave synchronisés. Cependant par exemple, dans la synchronisation projective combinée, l'état du système maître se synchronise avec un multiple (plusieur) de l'état du système esclave.

Considérons maintenant les systèmes maîtres et esclave respectivement suivants :

$$D^\alpha x = f(x), \quad (3.9)$$

$$D^\alpha y = g(y), \quad (3.10)$$

$$D^\alpha z = h(z) + u. \quad (3.11)$$

où $x, y, z \in \mathbb{R}^n$; sont les vecteurs d'état des systèmes maîtres et esclave, respectivement, $f, g, h \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues, et u est le vecteur de contrôle. L'objectif de cette partie consiste principalement à vérifier les performances de la méthode d'un contrôle pour différents types de synchronisation combinée des systèmes chaotiques.

3.2.1 Synchronisation complète combinée

La synchronisation complète combinée (SCC) a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes dynamiques. C'est la forme de la synchronisation combinée la plus simple. On dit qu'il y a une (SCC) entre les trois systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôle $u(t, x, y, z)$, tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| y(t) + x(t) - z(t) \| = 0, \quad (3.12)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ des trois systèmes.

Si $f = g = h$, la SCC est dite identique.

L'étude de synchronisation combinée se ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qui s'appelle "système erreur", ce dernier est donnée par l'équation :

$$e = y + x - z \quad (3.13)$$

3.2.2 Anti-synchronisation combinée

Les systèmes maîtres et le système esclave sont dits prêts pour effectuer l'anti-synchronisation combinée entre ces trois systèmes , s'il existe un contrôle $u(t, x, y, z)$ tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| y(t) + x(t) + z(t) \| = 0, \quad (3.14)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ des trois systèmes.

3.2.3 Synchronisation projective combinée

On dit qu'il y a une synchronisation projective combinée (SPC) entre les trois systèmes maîtres et esclave , s'il existe un contrôle efficace $u(t, x, y, z)$, de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| x(t) + y(t) - \theta z(t) \| = 0, \quad (3.15)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ trois systèmes, où θ est une constante non nulle, appelée facteur d'échelle.

3.2.4 Synchronisation projective modifiée combinée

On dit qu'il y a une synchronisation projective modifiée combinée (SPMC) entre les trois systèmes maîtres et esclave, s'il existe un contrôle efficace $u(t, x, y, z)$, de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| B(x(t) + y(t)) - z(t) \| = 0, \quad (3.16)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ des trois systèmes, où B est une matrice diagonale constante non nulle, appelée matrice d'échelle i.e ,

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), b_i \neq b_j, \text{ pour tout } i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Remarque 3.2.1 *La synchronisation complète combinée (respectivement, l'anti-synchronisation combinée) est le cas particulier de synchronisation projective combinée où le facteur d'échelle $\theta = 1$ (respectivement $\theta = -1$).*

3.2.5 Synchronisation combinée généralisée

Ondit qu'il y a une synchronisation combinée généralisée de type entre trois systèmes s'il existe un contrôle $u(t, x, y, z)$ et des trois matrices Q , R et S vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| Qy(t) + Rx(t) - Sz(t) \| = 0, \quad (3.18)$$

pour toutes conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ des trois systèmes.

3.3 Synchronisation combinée complète des systèmes chaotiques

3.3.1 Méthode générale de SCC

Pour quantifier notre objectif, considérons le modèle mathématique suivant

$$D^\alpha x = f(x), \quad (3.19)$$

$$D^\alpha y = g(y), \quad (3.20)$$

$$D^\alpha z = h(z) + u, \quad (3.21)$$

où D^α est l'opérateur de différentiel de Caputo ($0 < \alpha \leq 1$), x, y et $z \in \mathbb{R}^n$ sont des états variables des systèmes, f, g et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions non linéaires et continues et $u \in \mathbb{R}^n$ est le contrôle à

déterminé.

La définition de SCC est la suivante :

Définition 3.3.1 *Les systèmes émetteurs (3.20), (3.21) et le système récepteur (3.21) se synchronisent au sens de synchronisation proposée lorsqu'il existe un contrôle u tel que l'erreur de synchronisation*

$$e(t) = x(t) + y(t) - z(t), \quad (3.22)$$

satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) + y(t) - z(t)\| = 0, \quad (3.23)$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme matricielle.

Pour simplifier notre étude, supposons que les systèmes (3.20), (3.21) et (3.21) peuvent s'écrire sous la forme :

$$D^\alpha x = Mx + F(x), \quad (3.24)$$

$$D^\alpha y = My + G(y), \quad (3.25)$$

$$D^\alpha z = Mz + H(z) + u, \quad (3.26)$$

où $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $F, G, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont respectivement la partie linéaire et les parties non linéaires des systèmes.

La dynamique de système erreur peut alors s'écrire comme

$$\begin{aligned} D^\alpha e &= D^\alpha x + D^\alpha y - D^\alpha z \\ &= Me + F(x) + G(y) - H(z) - u. \end{aligned} \quad (3.27)$$

L'étude de la stabilité par la méthode du contrôle continu [?] consiste à choisir le contrôle u de tel sorte que le système erreur (3.27) converge asymptotiquement vers zéro, c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0. \quad (3.28)$$

Nous avons donc le résultat suivant.

3.3.2 Résultats théoriques

Théorème 3.3.1 *Supposons que le contrôle continu u est structuré de la façon suivante*

$$u = Ce + F(x) + G(y) - H(z), \quad (3.29)$$

où $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de gain à déterminer.

Si la matrice C est sélectionnée de telle sorte que la matrice $M + C$ est définie négative, le système erreur converge asymptotiquement vers zéro.

preuve 3.3.1 *Avec le choix de contrôle continu (3.29), le système (3.27) devient :*

$$D^\alpha e = (M + C)e. \quad (3.30)$$

Considérons la fonction de Lyapounov candidate suivante

$$V(e) = \frac{1}{2}e^T e. \quad (3.31)$$

L'utilisation du Lemme ??, nous donne

$$\begin{aligned} D^\alpha V(e) &= D^\alpha \left(\frac{1}{2}e^T e \right) \\ &\leq e^T D^\alpha e \\ &= e^T (M + C)e. \end{aligned}$$

Donc, si la matrice C est sélectionnée de telle sorte que la matrice $M + C$ est définie strictement négative, la condition du Théorème 3.3.2 est satisfaite et le système contrôlé devient asymptotiquement stable. Ceci termine la preuve de ce théorème.

3.3.3 Résultats de simulation

Pour vérifier et démontrer l'efficacité et la faisabilité de la méthode de la synchronisation souhaitée nous appliquons notre résultat sur le système hyperchaotique fractionnaire de Rabinovich modifié [21].

La dynamique de ce système est décrit par le modèle fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = -a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ D^\alpha x_2 = a_2 (x_1 - x_4) - a_3 (x_2 - x_3) + x_3 - x_1^2 x_2, \\ D^\alpha x_3 = -a_4 (x_3 - x_2), \\ D^\alpha x_4 = -a_5 x_2, \end{cases} \quad (3.32)$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont les variables d'état, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont des constantes réelles, D^α est l'opérateur de dérivation au sens de Caputo, et α est l'ordre de dérivation compris entre 0 et 1.

La matrice de gain C est sélectionnée comme :

$$C = \begin{pmatrix} -2 + a_1 & -a_2 & 0 & 2 \\ -a_2 & -4 + a_3 & -1 - a_3 & -2 + a_2 \\ 0 & -a_4 & -3 + a_4 & 2 \\ a_5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

Le choix des paramètres de contrôle devient alors

$$\begin{cases} u_1 = (-2 + a_1)e_1 - a_2 e_2 + 2e_4 - x_1^2 x_2 - y_1^2 y_2 + z_1^2 z_2, \\ u_2 = -a_2 e_1 - (4 - a_3)e_2 - (1 + a_3)e_3 - (2 - a_2)e_4, \\ u_3 = -a_4 e_2 - (3 - a_4)e_3 + 2e_4, \\ u_4 = a_5 e_1 + e_4. \end{cases} \quad (3.34)$$

Par suite

$$\begin{pmatrix} D^\alpha e_1 \\ D^\alpha e_2 \\ D^\alpha e_3 \\ D^\alpha e_4 \end{pmatrix} = (M + C) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Il est facile de voir que la matrice $M + C$ est définie négative. Alors la condition du théorème est satisfaite, ce qui assure la réalisation de la stabilité du système erreur.

Dans les simulations numériques, la méthode Adams-Bashforth-Moulton [23] est utilisée pour résoudre notre système fractionnaire. Pour ces simulations numériques :

les paramètres du système sont donnés par

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.01, \quad a_3 = 1.7, \quad a_4 = -2.5 \text{ et } a_5 = 0.03, \quad (3.36)$$

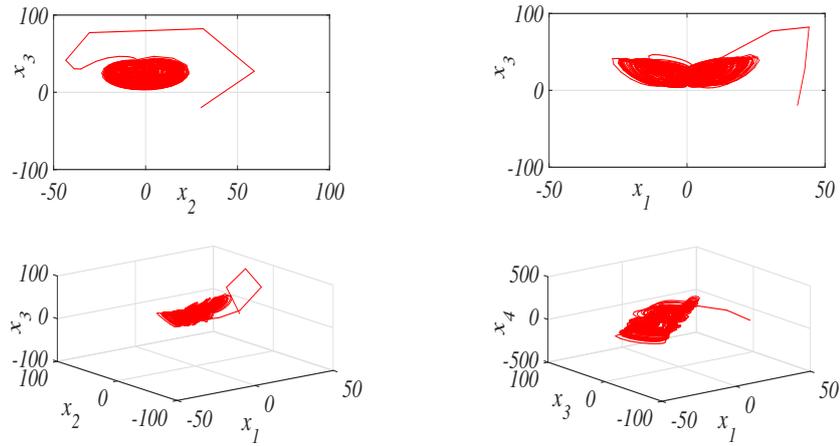


FIGURE 3.1 – Attracteurs hyperchaotiques du système (3.32).

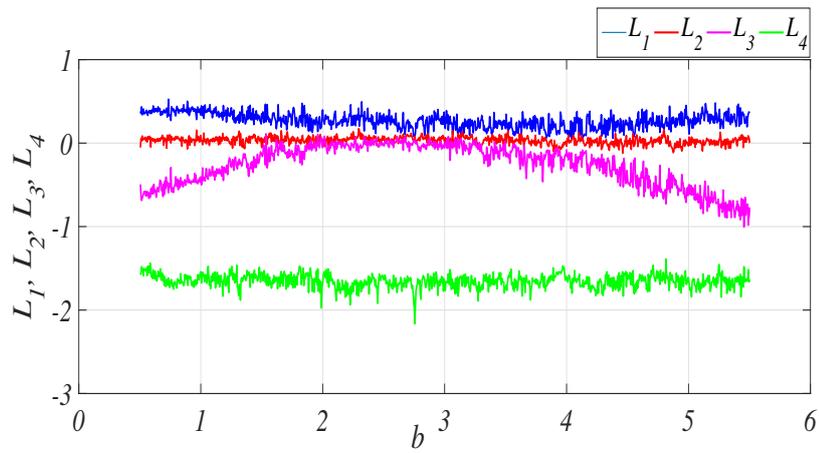


FIGURE 3.2 – La variation des exposants de Lyapunov du (3.32) .

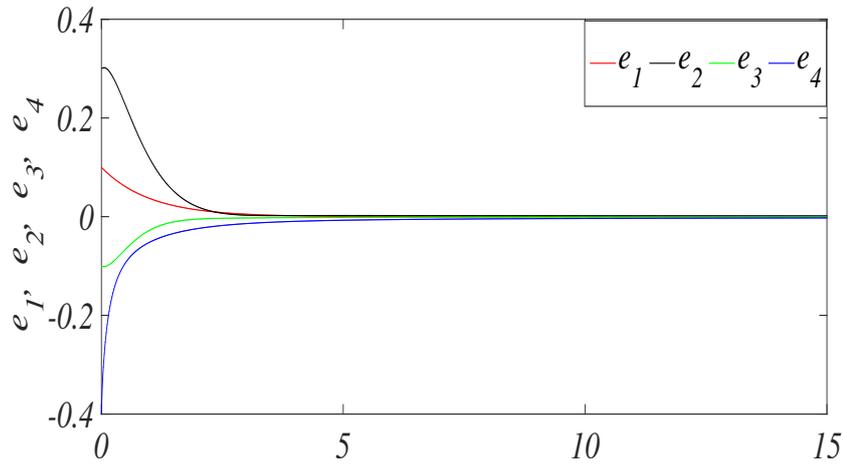


FIGURE 3.3 – Courbes des états du système (3.32).

L'ordre de dérivée fractionnaire est donné par $\alpha = 0.98$,

les conditions initiales des systèmes émetteurs (3.20), (3.21) et le système récepteur (3.21) sont respectivement données par

$$x_1(0) = -0.01, \quad x_2(0) = -0.02, \quad x_3(0) = 0.01 \text{ et } x_4(0) = 0.02. \quad (3.37)$$

$$y_1(0) = 0.3, \quad y_2(0) = 0.1, \quad y_3(0) = 0.3 \text{ et } y_4(0) = -1. \quad (3.38)$$

$$z_1(0) = 0.3, \quad z_2(0) = 0.1, \quad z_3(0) = 0.3 \text{ et } z_4(0) = -1. \quad (3.39)$$

L'erreur de synchronisation ayant donc les conditions initiales suivantes

$$e_1(0) = -0.01, \quad e_2(0) = -0.02, \quad e_3(0) = 0.01 \text{ et } e_4(0) = 0.02. \quad (3.40)$$

Les projections de portrait de phase du système (3.32) sur les plans : $x_1 - x_3$, $x_2 - x_3$, $x_1 - x_2 - x_3$ et $x_1 - x_2 - x_4$ sont représentés dans la Figure 3.1 et les courbes des états du système erreur (3.35) sont représentés dans la Figure 3.3.

De la Figure 3.3, on peut facilement voir que toutes les variables du système (3.35) convergent rapidement vers zéro, ce qui indique que la stabilité du système erreur.

Conclusion générale

Dans ce travail de notre mémoire, le problème de la synchronisation complète combinée de trois systèmes chaotiques fractionnaires identiques par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov des systèmes fractionnaires a été réalisée. Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notions de base des systèmes dynamique chaotiques, qui nous semblent utiles pour la bonne compréhension de notre problème présenté dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base de calcul fractionnaire. La théorie de la dérivation fractionnaire a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler et sur les différentes définitions et les propriétés de la dérivée fractionnaire. Nous avons également justifié notre choix de la dérivation au sens de Caputo dans les travaux présentés dans ce mémoire. Nous avons ensuite décrit les équations d'ordre fractionnaire. Enfin, pour clôturer ce chapitre, nous avons présenté la stabilisation des systèmes chaotiques fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov d'ordre fractionnaire. L'utilisation de cette nouvelle approche a nous permis de montrer la stabilisation asymptotique de tels systèmes.

Dans le troisième chapitre, le problème de la synchronisation complète combinée de trois systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires a été réalisée. Une technique de contrôle continu et l'utilisation d'une nouvelle approche de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires ont été adopté pour effectuer la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation.

Enfin, des simulations numériques ont été fournies pour vérifier et tester la validité et la capacité des schémas de synchronisations proposée.

Bibliographie

- [1] R. Roy, T.W. Murphy, T.D. Maier, Z. Gills, Z.E.R. Hunt. Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system. *Physical Review Letters* **68** (9) (1992) 1259–1262.
- [2] V. Petrov, V. Gaspar, J. Masere and K. Showalter. Controlling chaos in the Belousov—Zhabotinsky reaction. *Nature* **361** (6409) (1993) 240–243.
- [3] A. Garfinkel, J.N. Weiss, W.L. Ditto and M.L. Spano. Chaos control of cardiac arrhythmias. *Trends in Cardiovascular Medicine* **5** (2) (1995) 76–80.
- [4] J. Ding and H.X. Yao. Chaos control of a kind of non-linear finance system. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)* **25** (6) (2004) 500–504.
- [5] H.E. Guitian and L.U.O. Maokang. Dynamic behavior of fractional order Dufing chaotic system and its synchronization via singly active control. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* **33** (5) (2012) 567–582.
- [6] Q. Gan, Y. Yang, S. Fan and Y. Wang. Synchronization of stochastic Fuzzy cellular neural networks with leakage delay based on adaptive control. *Differ. Equ. Dyn. Syst.* **22** (2014) 319–332.
- [7] W. Zhen, H. Xia and S. Hao. Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neuro computing* **83** (2012) 83–88.
- [8] T.L. Carroll, L.M. Pecora. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** (4) (1991) 453–456.
- [9] M. Rehan. Synchronization and anti-synchronization of chaotic oscillators under input saturation. *Appl. Math. Model.* **37** (2013) 6829–6837.
- [10] G. Zhang, Z. Liu, Z. Ma. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems. *Chaos Solitons Fract.* **32** (2) (2007) 773–779.

-
- [11] R. Manieri, J. Rehacek. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **82** (15) (1999) 3042-3045.
- [12] G.H. Li. Modified projective synchronization of chaotic system. *Chaos Solitons Fractals* **32** (5) (2007) 1786-1790.
- [13] S. Kaouache, M.S. Abdelouahab and R. Bououden. Reduced generalized combination synchronization between two n - dimensional integer-order hyperchaotic drive systems and one m - dimensional fractional-order chaotic response system, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, **17**, (2) (2020), Art. 19, 8 pp.
- [14] S. Kaouache, N.E. Hamri, A.S. Hacinliyan, E. Kandiran, B. Deruni and A.C. Keles . Increased Order Generalized Combination Synchronization of Non-Identical Dimensional Fractional-Order Systems by Introducing Different ObservableVariable Functions, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **20**, (3) (2020) 307–315.
- [15] S. Kaouache, Abdelouahab and N.E. Hamri. Generalized combination synchronization of three different dimensional fractional chaotic and hyperchaotic systems using three scaling matrices. , *Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems*, **12**, (4) (2020) 330–337.
- [16] S. Kaouache and M.S. Abdelouahab. Inverse matrix projective synchronization of novel hyperchaotic system with hyperbolic sine function non-linearity, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B : Applications and Algorithms*, **27**, (2020) 145-154.
- [17] Y. Wang. Active backstepping-based combination synchronization of three different chaotic systems, *Adv. Sci. Eng. Med.*, **4**, (2012) 142-147.
- [18] I. Podlubny. Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Teir Solution and Some of Teir Applications, *Academic Press, New York, USA* , 1999.
- [19] D. Chen, R. Zhang, X. Liu, X. Ma. Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, (2014), doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.05.005>
- [20] N. Aguila-Camacho. Duarte-Mermoud, M.A. and Gallegos, J.A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **19** (9) (2014) 2951–2957.
- [21] S. Kaouache. Existence du hyperchaos dans un nouveau système de Rabinovich d'ordre fractionnaire avec un seul terme non linéaire, *IC-PAM21* , 27 Mai, 2021.

- [22] S. Kaouache, M.S. Abdelouahab and N.E. Hamri. Generalized combination synchronization of three different dimensional fractional chaotic and hyperchaotic systems using three scaling matrices, *Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems* **12**, (4) (2020) 330–337.
- [23] K. Diethelm, N.J., Ford and A.D., Freed. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics* **29** (2002) 3–22.