الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme Master

En : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Sur les nombres de Stirling et fonctions Symétriques

Préparé par: HENNOUS Amal
HARIK Sarra

Soutenue devant le jury

HALIM Yacine (M.C.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
BAZANIAR AB. Elghafour (M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
BOUFELGHA Ibrahim (M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2020/2021

Résumé

Dans ce travail, nous étudions une généralisation des nombres de Stirling de première espèce (versions classiques et analogues) lié à une extension de la fonction symétrique élémentaire. Ces nombres apparaissent comme les coefficients de x^k dans l'expression $\prod_{j=0}^{n-1}(x^s + jx^{s-1} + \cdots + j^{s-1}x + j^s)$. Le tableau formé par ces coefficients peuvent être vus comme une généralisation naturelle du premier triangle de Stirling. Nous donnons également une interprétation combinatoire des nombres de Stirling généralisés des s-uplets de permutations de $[n]$ avec k cycles. les statistiques d'inversion on été utilisés pour établir comme cas particulier les analogues du Stirling généralisé de première espèce. De plus, des lies entre les nombres de Legendre-Stirling et les nombres de Stirling généralisés de première espèce sont proposés.

Abstract

In the present work, we study a generalization of the Stirling numbers of the first kind (classical and analogous versions) linked to an extension of the elementary symmetric function. These numbers appear as the coefficients of x^k in the expression $\prod_{j=0}^{n-1}(x^s+jx^{s-1}+\cdots+j^{s-1}x+j^s)$. The table formed by these coefficients can be seen as a natural generalization of Stirling's first triangle. We also give a combinatorial interpretation of the generalized Stirling numbers of s-uplets of permutations of $[n]$ with k cycles. The inversion statistics have been used to establish as a special case the analogues of the generalized Stirling of the first kind. Moreover, links between Legendre-Stirling numbers and generalized Stirling numbers of the first kind are proposed.

Remerciements

Au non du Dieu le miséricordieux par essence et par excellence
Nous adressons notre profond remerciement tout d' abord notre encadreur **Abdelghafour Bazeniar** *Pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseile, sa disponibilitè et sa bienveillance.*

Nous exprimons notre profonde reconnaissance à Monsieur **Halim Yacine** *, Maître de conférence à l'université de Mila, pour avoir accepté de présider le jury de mémoire et pour son aide précieuse.*

Nous adressons, également, nos remerciements chaleureux à Monsieur **Ibrahim Boufelgha***, Maître assistant à l'université de Mila, qui a bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce travail, qu'il soit vivement remercié.*
Nous voudrions également remercier tout le personnel de linstitut de sciences et de la technologie.

Enfin ,nous remercions toutes personnes qu'ont contribué de prés ou de lois à l'achèvement de ce travail.

MERCI POUR TOUT

Dédicace

A ma chère mère,

" Tu m'as donnée la vie,la tendresse et courage pour réussir.Tout ce que je preux t' offris ne pourra exprimer l amour etla reconnaissance que je te porte. En témoignage,je t'offre ce modeste travail pour te remercier pour tes sacrifices et pour l'affection dont tu m' as toujours entourée."

À mon cher père

À mon cher mari

À mes frères :

Hicham,Tito,Yaakoub

À mes soeurs :

Ritadj, Zina, Souzi, Zinab

À ma famille

À mon encadreur :

Abdelghafour Bazenair

À mes amis(es) :

Meriam,Khawla,Imane,Sarra,Lidya, Hadjer, Nada, Marihane, Amina, Wiam .....la liste est tréslong.

Et à tous les gens qui m' ont aidédans ma vie

Je dédie ce mémoire

AMAL

Dédicace

A Tout d'abord, et tout d'abord, je voudrais remercier la personne la plus chère pour mon cœur, ma deuxième mère, ma tante bien-aimée,ZaHia, que Dieu ait pitié d'elle, et de sa maison spacieuse, qui a pris dans mon cœur la place de père, mère, sœur et amie C'était le fondement sur lequel je me suis appuyé tout au long de mes années scolaires jusqu'à ce que je sois arrivé aujourd'hui à l'étape la plus importante de ma vie, que je souhaitais être avec moi et voir sa joie en moi vous dédier tous les mots de remerciement et d'amour, mes mots ne peuvent pas vous décrire, Tante

ma mère

Pour leur patience, leur amour, leur soutien, leur fatigue et leurs encouragements

Mon cher oncle Al Fatimi et tante Amel

A mes frères :

Abdanoure, Mourad, Hichem, Amine et Meroin

A mes soeurs :

Yasmine, Sanaa

A mes amis(es) :

Tout d'abord,je remercie ma collégue Amel ,avec qui elle a partagé ce travail Marihane,Rayane Amina,karima,imane,Chaima,Sabrina,Manel,Amira... et toutes les copines de l'école

Et à mon Encadreur :

Abdelghafour Bazenair

Je dédie ce mémoire

SARRA

Table des matières

Abréviations et notations **10**

Introduction Générale **11**

1 Notions de base **13**

Introduction **13**

1.1 Les Séries Génératrices 13

1.2 Partages 15

1.3 Permutation 16

1.3.1 Ordres 17

1.3.2 Cycles 17

1.3.3 Groupe symétrique 18

1.3.4 Transpositions 18

1.3.5 Signature et Inversion 19

1.4 Diagramme de Ferrer 19

1.5 Tableau de Young 21

1.6 Coefficients binomiaux 22

1.6.1 Formule du binôme de newton 23

1.7 Les coefficients bi^{s}nomiaux 23

1.7.1 Interprétation combinatoire 24

1.7.2 Les coefficients q-bi^{s}nomiaux 25

1.8 Fonction Symétrique 26
1.8.1 Échanges de deux variables 26
1.8.2 Échanges de variables consécutives 26
1.8.3 Échanges avec une variable fixée 26
1.8.4 Critère minimal 27
1.8.5 Symétrisation 27
1.8.6 Fonction symétriques élémentaires 27
1.8.7 Fonctions symétriques complètes 30

2 Nombres de stirling **35**

Introduction **35**

2.1 Nombre de stirling de première espèce 35
2.1.1 Relations de récurrence 36
2.1.2 Le triangle des nombres de stirling de première espèce 37
2.1.3 Fonction génératrice 39
2.1.4 Formules explicites 40
2.1.5 Interprétation combinatoire 41
2.2 Nombre de stirling de deuxième espèce 42
2.2.1 Relation de récurrence 44
2.2.2 Le triangle des nombres de Stirling de seconde espèce 45
2.2.3 Une relation liant entre les nombres de Stirling des deux espèces 45
2.2.4 Une formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce . 46
2.2.5 La série génératrice exponentielle des nombres de Stirling de seconde espèce 48
2.2.6 Une deuxième formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce 49
2.2.7 Une majoration et un équivalent simple pour les nombres de Stirling de seconde espèce 50
2.2.8 La série génératrice ordinaire des nombres de Stirling de seconde espèce 51

2.2.9 Une troisième formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce 53
2.2.10 Interprétation combinatoire des nombres de Stirling de seconde espace 54

3 Une nouvelle généralisation des nombres de Stirling de première espèce 56

Introduction 56

3.1 Nombre de Stirling généralisé de première espèce 58
3.2 Interprétations combinatoires 60
3.3 Analogues des nombres de Stirling généralisés 64
3.4 Interprétation combinatoire du nombre q-Stirling généralisé 66

Liste des tableaux

1.1 Tableau de Young standard. 21
1.2 Tableau de Young semi-standard. 21
1.3 Triangle de Pascal. 22
1.4 Le $2-$triangle de Pascal $\binom{n}{k}_2$. 24

3.1 Le premier triangle 2-Stirling $c^{(2)}(n,k)$. 59
3.2 Le q-analogue du premier triangle 2-Stirling. 64
3.3 Le p,q-analogue du premier triangle 2-Stirling. 64

Table des figures

1.1 Cycles de σ. 17
1.2 Le seule orbites de σ 18
1.3 Diagramme de Ferrer pour $= (8, 6, 5, 5, 1, 1, 1)$. 20
1.4 Diagramme de Ferrers pour $\lambda = (5, 4, 2, 1)$. 20
1.5 Diagramme de Ferrers conjugué pour $= (4, 3, 2, 2, 1)$. 20

Abréviations et notations

Les notations suivantes seront utilisées dans toute la thèse :

$\mathbb{N}$ Ensemble des nombres naturel.
$\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{Z}$ Ensemble des entiers .
$\delta_{i,j}$ delta de kronecker égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon.
$x^{\overline{n}}$ factorielle :$x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^0 = 1$.
$x^{\underline{n}}$ factorielle :$x(x-1)\cdots(x-n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^0 = 1$.
$\binom{n}{k}$ coefficient binomial :$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ les nombres de stirling de première espèce.
$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ les nombres de stirling de seconde espèce.
$\binom{n}{k}_s$ le coefficient $bi^s nomial$
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$ le coefficient $q - bi^s nomial$

$\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right]$ les nombres de legendre-stirling de première espèce

Introduction Générale

Le but de notre travail sera de mettre au point des techniques basées sur, la théorie combinatoire énumérative et la théorie des fonctions symétriques pour comprendre et donner une interpretation combinatoire aux suites numériques, plus précisément aux celles qui sont engendrées par la fonction élémentaire symétrique généralisée. Cette fonction, sous certains conditions, génère des nombres qui généralisent les nombre de Stirling de première espèce.

Les nombres de stirling de première et deuxième espèce sont introduisés par James Stirling dans son ouvrage *Methodus Differentialis*. Ces nombres, sous différentes appellations intéressent plusieurs mathématiciens dans le 18^{me} et 19^{me} siècles. *Ch. Jordan*, donne une présentation approfondie de ces nombres dans son ouvrage sur les différences finies. *Lagrange* s'intéresse aux relations de récurrence et aux propriétés théoriques des nombres de stirling de première espèce. Ensuite, *Laplace* et *A. Cayley* fournissent plusieurs approximations de ces nombres. *A. Cauchy*, *N. Nielsen* et d'autres étudièrent plus profondément les nombres des deux espèces.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on fait rappel sur quelques définitions et notions de bases qui seront utilisées toute au long de ce travail. On introduit quelques définitions et propriétés concernant le partage, les permutations et les fonctions génératrices. On présente aussi les coefficients binomiaux, *bi^{s}nomiaux* et leurs interprétations combinatoires. Les fonctions symétriques seront abordés.

Dans le deuxième chapitre, on donne une vue d'ensemble sur les nombres de Stirling de première espèce $c(n, k)$ et les nombres de Stirling de deuxième espèce $S(n, k)$, avec certaines propriétés, ainsi leurs fonctions génératrices et leurs relations de récurrences. En termine ce chapitre par donner des interprétations combinatoires pour ces nombres.

Le dernier chapitre est consacré aux nombres de Stirling généralisés de première espèce et leurs analogues. Plus précisément, on donne une définition récursive et la fonction génératrice ordinaire des nombres de Stirling généralisés de première espèce, que nous interprétons comme une spécialisation de la fonction symétrique donnée par la relation 3.8. Par la suite, on établisse des identités qui liés ces nombres aux nombres de Stirling classiques de première espèce. De même, on donne une interprétation combinatoire de $c^{(s)}(n,k)$ comme étant le nombre de s-uples permutations de $[n]$ ayant ensemble k cycles. Une connexion entre $c^{(2)}(n,k)$ et le nombre de Legendre-Stirling de première espèce $\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right]$ et certaines identités seront établis. A la fin de ce chapitre, on parle de certaines résultats pour les analogues des nombres de Stirling généralisés de première espèce.

Chapitre 1

Notions de base

Introduction

Dans ce chapitre, on présente un panorama des concepts et des notions primordiales pour la suite de ce mémoire. On commence par présenter des familles d'objets combinatoires tels, Partage, Permutation et tableaux etc. En citons quelques exemples explicatifs pour chaque notion. Ensuite, on aborde une vue d'ensembles sur les coefficients binomiaux et bi^{s}nomiaux et leurs interpretation combinatoire. On présente dans la dernière section la théorie de la fonction symétrique en tant que une série formelle invariante sous toutes les permutations possible. Les fonctions symétriques monomials, élémentaires, complète et de puissance serons abordés.

1.1 Les Séries Génératrices

On associé une série génératrice qui contient tout l'information concernant l'énumération des partages de la famille,

• Pour tous les partages on a,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n.$$

• Part dans k,

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_k(n) z^n.$$

• Part distinctes ,

$$S_d(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_d(n) z^n.$$

• Part distinctes dans k,

$$S_{k,d}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,d}(n) z^n.$$

Théorème 1.1.1 [Euler] *Pour $K \subseteq \mathbb{N}^+$, on a les fonctions génératrices,*

$$S_k(z) = \prod_{k\in K} \frac{1}{1-z^k},$$

$$S_{k,d}(z) = \prod_{k\in K} (1+z^k).$$

Preuve 1.1.1 *Soit $K = \{k_1, k_2, ...\}$ alors,*

$$\begin{aligned}\prod_{k\in K} \frac{1}{1-z^k} &= (1+z^{k_1}+z^{2k_1}+\cdots)(1+z^{k_2}+z^{2k_2}+\cdots),\\ &= \sum_{\sum n_i<\infty} z^{n_1k_1}z^{n_2k_2},\\ &= \sum_{n\geqslant 0} p_k(n)z^n.\end{aligned}$$

Ici les $z^{n_ik_i}$ signifie qu'on a pris n_i fois une part de taille k_i.
On montre la seconde formule de façon similaire. Dans le développement du produit $\prod_{k\in K}(1+z^k)$, on prend z^k dans le facteur $1+z^k$ si la part k apparaît dans le partage, sinon on prend le 1. On a donc au plus une part de chacune des tailles qui apparaît dans K.

Exemple 1.1.1 *En comparant l'énumération des partages en parts impaires et l'énumération des partages en parts distinctes, on constate que pour les premières valeurs*

$$\begin{aligned}&S_d(1) = S_I(1) = \{1\}.\\ &S_d(1) = S_I(2) = \{2\}.\\ &S_d(1) = S_I(3) = \{3, 21\}.\\ &S_d(1) = S_I(4) = \{4, 31\}.\\ &S_d(1) = S_I(5) = \{5, 41, 32\}.\\ &S_d(1) = S_I(6) = \{6, 51, 42, 321\}.\end{aligned}$$

Ceci peut se prouver par le calcul formel sur les série génératrices,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} p_d(n)z^n &= (1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdots\\ &= \left(\frac{1-z^2}{1-z}\right)\left(\frac{1-z^4}{1-z^2}\right)\left(\frac{1-z^6}{1-z^3}\right)\cdots\\ &= \frac{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)\cdots}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\cdots}\\ &= \frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)}\cdots\\ &= \sum_{n\geqslant 0} p_I(n)z^n.\end{aligned}$$

Pour plus de détails vior[33]

1.2 Partages

Définition 1.2.1 *[33] Soit $n \geq 1$ un entier. Une partition de n est une décomposition de n en somme d'entiers naturels non nuls appelés parts.*

Définition 1.2.2 *[21] Soit n un entier positif, une partition de n est une suite non croissante des entiers positifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ dont la somme est n, écrit sous la forme suivante,*

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n. \end{cases}$$

On plus, on peut donner quelques notatons,
- $\lambda(n)$ *: désigne le nombre de partition de l'entier n .*
- $l(\lambda)$ *: la longuer de la partition λ.*
- $\lambda \vdash n$ *: dire que λ est un partage de n .*
- $P(n)$ *: l'ensemble de partitions de n,*
- $P(n,k)$ *: le nombre de partitions de n avec exactement k parts (autre $P_k(n)$),*

Exemple 1.2.1 — *L'ensemble de partitions de l'entier 4 est,*

$$p(4) = \{4, 31, 22, 211, 1111\},\ p(5) = \{5, 41, 32, 311, 221, 2111, 11111\}.$$

— *Le nombre de partitions de l'entier 5 avec exactement 2 parts,*

$$p(4,2) = 2,\ p(4,3) = 1,\ p(5,1) = p(5,5) = 1,\ p(5,2) = 2.$$

Remarque 1.2.1 *Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ de n correspond, de façon bijective, une suite $(m_1, m_2, ..., m_n)$ d'entiers positifs tels que,*

$$1.m_1 + 2.m_2 + ... + n.m_n = n.$$

Et on note,

$$\lambda = 1^{m_1} 2^{m_2} ... n^{m_n},$$

avec, $m_1, m_2 ... m_n$ sont des multiplicités de chaque partition.

Exemple 1.2.2 *La partition $\lambda = (8, 6, 5, 5, 1, 1, 1)$ de $n = 27$ a pour notation multiplicative,*

$$\lambda = 1^3 2^0 3^0 4^0 5^2 6^1 7^0 8^1 9^0 ... 27^0.$$

1.3 Permutation

Pour plus de détails voir [5, 17]

Définition 1.3.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle permutation d'ordre n une bijection σ de l'ensemble E vers E avec $\mid E \mid = n$. On note S_E l'ensemble des permutations de E. Si $E = \{1, ..., n\}$, on le note simplement S_n.*

Notation : La notation standard d'une permutation place sur une première ligne les éléments dans leur ordre naturel et sur une deuxième ligne les images correspondantes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \sigma(10) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.1 *Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et l'application σ telle que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 3$. L'application σ est une permutation de E,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.3.1

- *La permutation identité est la permutation σ_I qui ne change pas l'ordre initial des éléments,*

$$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}.$$

- *Le produit de deux permutations $\sigma_1\sigma_2$ correspond a la composition de fonctions $\sigma_1 \circ \sigma_2$,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- *Pour trouver l'inverse d'une permutation, nous avons qu'a inverser le domaine et l'image comme dans l'exemple,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.3.2 *Soit $\sigma \in S_n$ et Les deux ensembles suivants,*

$$Supp(\sigma) = \{i, \sigma(i) \neq i\},$$
$$Fix(\sigma) = \{i, \sigma(i) = i\},$$

Supp :est appelé le support de σ.
Fix : est appelé le point fixe de σ.

Exemple 1.3.2 *Soit*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

alors,

$$supp(\sigma) = \{1, 2, 4, 6\}, \;\; fix(\sigma) = \{3, 5\}.$$

1.3.1 Ordres

Définition 1.3.3 *Soit G un groupe noté multiplicativement d'élément neutre σ_I. Un élément σ de G est dit d'ordre fini s'il existe un entier $k > 0$ tel que $\sigma^k = \sigma_I$ et dans ce cas on appelle ordre de σ le plus petit entier $m > 0$ tel que $\sigma^m = \sigma_I$.*

Exemple 1.3.3 *Soit,*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Donc σ est d'ordre 3.

1.3.2 Cycles

Définition 1.3.4 *Soit σ, la permutation d'ordre n sur E. Soient les éléments $\alpha_1, ..., \alpha_k \in E$ tels que $1 \leq k \leq n$ et que $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2, \sigma(\alpha_2) = \alpha_3, ..., \sigma(\alpha_{k-1}) = \alpha_k$ et que $\sigma(\alpha_k) = \alpha_1$. On appelle* **cycle** *de σ la suite des éléments $\alpha_1, ..., \alpha_k$ et on note ce cycle $(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)$.*

Exemple 1.3.4 *La permutation,*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

On peut décomposer σ en 2 cycles : $(1, , 3, 5)$ *et* $(2, 4)$

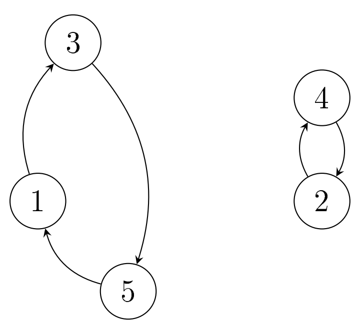

FIGURE 1.1 – Cycles de σ.

Notation : Certaines fois, il est peut être utile de représenter les permutations en donnant la liste de leurs cycles de longueur supérieure ou égale à 2. On parle de la notation canonique d'une permutation.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (135)(24).$$

Définition 1.3.5 *(* **permutation circulaire** *) Siot une permutation $\sigma \in S_n$, on dit que c' est une permutation circulaire si σ admet une seule orbite*

Exemple 1.3.5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $(1432) = (4321) = (3214) = (2143)$.

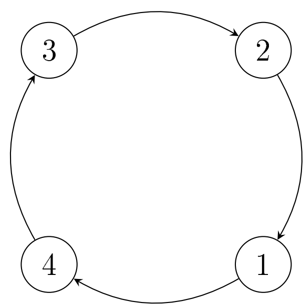

Figure 1.2 – Le seule orbites de σ .

Théorème 1.3.1 *Soit $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma \neq \sigma_I$. Il existe $k \geq 1$ et $c_1, ..., c_k$ des cycles à supports deux à deux disjoints tels que,*

$$\sigma = \mathbf{c_1 \cdots c_k}.$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs et est appelée **décomposition canonique de** *σ.*

Remarque 1.3.2 *Soit $\sigma \in S_n$ de décomposition canonique $c_1 \cdots c_k$. L'ordre de σ est alors le* **PPCM** *des longueurs des cycles c_i.*

1.3.3 Groupe symétrique

Définition 1.3.6 *On appelle groupe symétrique de degré n le groupe constitué de toutes les permutations de n. Ce groupe contient $n!$ permutations et on le note S_n.*

1.3.4 Transpositions

Définition 1.3.7 *On appelle transposition une permutation qui déplace seulement deux éléments (un cycle de longueur 2).*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (24).$$

Remarque 1.3.3 *Toute permutation peut être écrite comme un produit de transpositions.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (135)(24) = (13)(35)(24).$$

Définition 1.3.8 *On appelle permutation paire (resp. impaire) une permutation qui s'écrite comme un produit d'un nombre pair (resp. impair) de transpositions.*

1.3.5 Signature et Inversion

Définition 1.3.9 *On appelle signature d'une permutation σ la fonction,*

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 1 & si \quad \sigma \quad est \qquad paire, \\ -1 & si \quad \sigma \quad est \qquad impaire. \end{cases}.$$

Pour calculer cette fonction, prenons $E = \{0, ..., n-1\}$ les n éléments ordonnés de σ et $\omega : E \to E$ la fonction de σ qui prend i et l'envoie sur $\omega(i)$. Le calcul de la fonction se fait de la manière suivante,

$$sgn(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\omega(i) - \omega(j)}{i - j}.$$

Inversion : On dit que deux éléments i et j forment une inversion si $i < j$ et que $\omega(i) > \omega(j)$. On peut dire que la formule ci-dessus calcule le nombre d'inversions dans une permutation. Le nombre d'inversions permet de savoir la parité de la permutation. Pour calculer le nombre d'inversions par rapport a un élément x a la position i, on regarde le nombre d'éléments inférieurs a x dans les positions supérieures a i. Le nombre total d'inversions dans une permutation est la somme des nombres d'inversions par rapport à chacun des éléments de la permutation. Une permutation est paire si et seulement si le nombre d'inversions dans la permutation est pair.

Exemple 1.3.6 *Soit*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les inversions sont,

$$\begin{array}{cccccl} 5 & : & 5\,3\,2\,4\,1 & \to & 4 & car \;\; 5 > 3,\; 5 > 2,\; 5 > 4 \;\; et \;\; 5 > 1 \\ 3 & : & 3\,2\,4\,1 & \to & 2 & car \;\; 3 > 2 \;\; et \;\; 3 > 1 \\ 2 & : & 2\,4\,1 & \to & 1 & car \;\; 2 > 1 \\ 4 & : & 4\,1 & \to & 1 & car \;\; 4 > 1 \end{array}.$$

Le nombre d'inversions égale 8 et la permutation est paire.

1.4 Diagramme de Ferrer

Définition 1.4.1 [21] *Un diagramme de Ferrer F est un ensemble de n points du plan, ayant les coordonnées entières (i, j), tels que $(i, j) \in F$,*

$$F = \{(i, j) \;/\; 1 \leqslant j \leqslant k, 1 \leqslant i \leqslant \lambda_j\}.$$

Exemple 1.4.1 *Le diagramme de Ferrer de l'exemple précédent 1.2.2 est,*

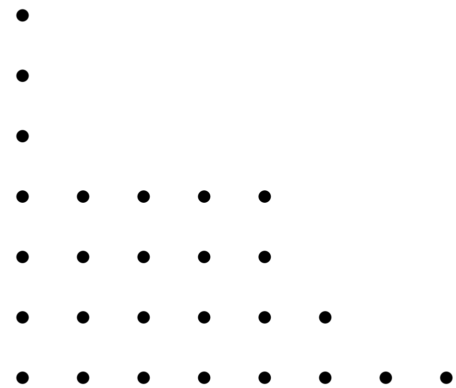

FIGURE 1.3 – Diagramme de Ferrer pour $= (8, 6, 5, 5, 1, 1, 1)$.

Définition 1.4.2 (la partition conjuguée)[21] *En faisant pivoter de* $180°$ *le diagramme de Ferrers de* λ *de* n*, autour de l'axe* $i = j$*, on obtient le diagramme de Ferrers* $\widetilde{\lambda}$*, appelée* **partition conjuguée** *de* λ*. La partition conjuguée* $\widetilde{\lambda}$ *a pour notation multiplicative,*

$$1^{\lambda_1-\lambda_2}2^{\lambda_2-\lambda_3}...(k-1)^{\lambda_{k-1}-\lambda_k}k^{\lambda_k}.$$

Le partage $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda_1}, \tilde{\lambda_2}, \tilde{\lambda_3} \cdots)$ *dont* $\tilde{\lambda_i}$ *est le nombre de parts de* λ *qui sont* $\geq i$*.*

Exemple 1.4.2 *Soit* $n = 12$ *le diagramme de Ferrer de la partition* $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ *et de la partition conjuguée* $\widetilde{\lambda} = (4, 3, 2, 2, 1)$ *est,*

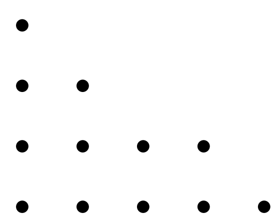

FIGURE 1.4 – Diagramme de Ferrers pour $\lambda = (5, 4, 2, 1)$.

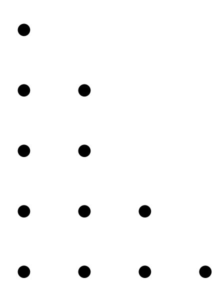

FIGURE 1.5 – Diagramme de Ferrers conjugué pour $\widetilde{\lambda} = (4, 3, 2, 2, 1)$.

1.5 Tableau de Young

Définition 1.5.1 *Un tableau de Young T (standard) à n éléments et de partition λ s' écrit,*

$$T = \{(i, j) \ / \ 1 \leqslant i \leqslant l, 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i\},$$

tel que,

1. *chaque linge forme une suite croissant,*
2. *chaque colonne forme une suite croissant,*
3. *les éléments sont des entiers positifs distincts.*

Définition 1.5.2 *Un tableau de Young (* **semi-standard***) est un diagramme de Young dont chaque case contient un entier compris entre 1 et $n+1$ de condition que,*

1. *les nombres inscrits dans les cases croissent de gauche à droite,*
2. *les nombres inscrits dans les cases strictement croissent de bas en haut.*

Pour une partition λ on notera $Y(\lambda)$ l'ensemble des tableaux de Young de forme λ.

Exemple 1.5.1 *Les tableaux de Young pour $n = 12$ et $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ sont,*

12				
10	11			
6	7	8	9	
1	2	3	4	5

Table 1.1 – Tableau de Young standard.

7				
6	11			
3	5	8	10	
1	2	2	4	12

Table 1.2 – Tableau de Young semi-standard.

Pour plus de détails consulter [26, 32].

1.6 Coefficients binomiaux

Pour plus de détails voir [38]

Définition 1.6.1 *Soit $n, k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$. On appelle coefficient binomial le nombre noté $\binom{n}{k}$ qui égale au nombre de sous ensemble à k éléments d'un ensemble de n éléments.*

Exemple 1.6.1 *Les sous ensembles à deux élément de l'ensemble $\{1,2,3\}$ sont : $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$.*
Donc $\binom{3}{2} = 3$.

Proposition 1.6.1 *Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on a*

1. *la relation de la symétrie,*
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$
2. *la relation de récurrence,*
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

En plaçant les valeurs des coefficients binomiaux dans un tableau de forme triangulaire, on obtient le triangle de pascale.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Table 1.3 – Triangle de Pascal.

1.6.1 Formule du binôme de newton

Théorème 1.6.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et n un entier positif alors,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Autrement dit,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Exemple 1.6.2 *1. pour $n = 3$ on écrit la formule comme suit,*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3,$$

2. si $a = 1$ et $b = 1$ on trouve,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

1.7 Les coefficients bi^{s}nomiaux

Cette section est largement puisée des travaux de Belbachir et al [6] et Belbachir [7]. Les coefficients bi^{s}nomiaux sont une extension naturelle des coefficients binomiaux classiques. Ils sont définis comme suit :
Soient $s \geq 1$ et $n \geq 0$ deux entiers ; pour un entier $k = 0, 1, \cdots, sn$, le coefficient bi^{s}nomial $\binom{n}{k}_s$ est définie comme étant le k-iéme coefficient dans le développement,

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^s)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}_s x^k, \tag{1.1}$$

avec $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$ ($\binom{n}{k}$ étant les coefficients binomiaux classiques)et $\binom{n}{k}_s = 0$ pour $k > sn$ ou $k < 0$.
Une expression via les coefficients binomiaux classiques donnée par,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-1}}{j_s}. \tag{1.2}$$

Comme propriétés déja bien établies, on a la relation de symétrie,

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn-k}_s, \tag{1.3}$$

la relation de récurrence longitudinale,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{n-1}{k-m}_s, \tag{1.4}$$

et la relation de récurrence diagonale,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{n}{m} \binom{m}{k-m}_{s-1}. \tag{1.5}$$

Ces coefficients, comme c'est le cas pour les coefficients binomiaux classiques, vérifient via 1.4 un équivalent du triangle de Pascal : le "s-triangle de Pascal" ou" triangle de Pascal généralisé ", voir l' table 1.4 ci-dessous pour une illustration . pour les premières valeurs de ces s-triangles, on peut consulter l'encyclopédie des suites numériques de SOLONE [40] sous $A027907$ pour $s = 2$, sous $A008287$ pour $s = 3$, sous $A035343$ pour $s = 4$.

1.7.1 Interprétation combinatoire

Bondarenko [11] a donné une interprétation combinatoire des coefficients bi^{s}nomiaux $\binom{n}{k}_s$ comme étant le nombre de manières de distribuer "k" boules dans "n" urnes de sorte que chaque urne contienne au plus "s" boules.
Cet argument combinatoire, permet d'établir la relation suivante,

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{n_1+2n_2+\cdots+sn_s=k} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_s, n-n_1-\cdots-n_s}. \tag{1.6}$$

Pour illustrer la relation de récurrence longitudinale, nous présentons le $2-$triangle de Pascal.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1	1	1	1														
2	1	2	3	2	1												
3	1	3	6	7	6	3	1										
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1								
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5							
6	1	6	21	50	90	126	90	50	21	6	1						
7	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1		
8	1	8	36	112	266	504	784	1016	1107	1016	784	504	266	112	36	8	1

TABLE 1.4 – Le $2-$triangle de Pascal $\binom{n}{k}_2$.

Belbachir et al [6] ont donné le théorème de De Moivre suivant qui établit une expression mono-sommatoire des coefficients bi^{s}nomiaux.

Théorème 1.7.1 *L'identité suivant satisfaite*

$$\binom{N}{k}_s = \sum_{j=0}^{\lfloor k/(s+1) \rfloor} (-1)^j \binom{N}{j} \binom{k-j(s+1)+N-1}{N-1}. \tag{1.7}$$

Cette relation explicite est importante, au sens où elle permet d'exprimer les coefficients bi^{s}nomiaux avec un unique symbole de sommation, contrairement aux relation 1.2 et 1.6 . En 1711, De Moivre (voir [41] ou [42]) avait déjà exprimé l'expression de droite de l'identité 1.7 pour établir l'interprétation combinatoire donnée par Bondarendo [11].

1.7.2 Les coefficients q-bi^{s}nomiaux

Warnaar [43] a introduit le q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux (voir aussi [44] pour une bibliographie exhaustive). Il a proposé $(s+1)$ différentes q-déformations du coefficient bi^{s}nomail.

Définition 1.7.1 *pour $p = 0, \cdots, s$, on définit les coefficients q-bi^{s}nomiaux par*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \sum_{j_1+\cdots+j_s=k} q^{\sum_{l=1}^{s-1}(n-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=s-p}^{s-1} j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix},$$

avec $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = 0$ *pour $k > sn$.On a ainsi*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)} = \sum_{j_1+\cdots+j_s=k} q^{\sum_{l=1}^{s-1}(n-j_l)j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(1)} = \sum_{j_1+\cdots+j_s=k} q^{\sum_{l=1}^{s-1}(n-j_l)j_{l+1} - j_s} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(s)} = \sum_{j_1+\cdots+j_s=k} q^{\sum_{l=1}^{s-1}(n-j_l)j_{l+1} - \sum_{l=0}^{s-1} j_{l+1}} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} j_{s-1} \\ j_s \end{bmatrix},$$

où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{[n]!}{[n-k]![k]!}$ *est le coefficient q-binomial.*

Notons que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} \neq 0$*, pour uniquement $k = 0, \cdots, sn$,et que*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \delta_{k,0} (Symbole de Kronecker).$$

Comme propriétés déjà bien établies, il y a les relation de symétrie et les récurrences fondamentales

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = q^{(s-p)n-k} \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_s^{s-p}, p \neq 0 \quad et \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(0)} = \begin{bmatrix} n \\ sn-k \end{bmatrix}_s^{(0)},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s^{(p)} = \sum_{m=0}^{s-p} q^{m(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)} + \sum_{m=s-p+1}^{s} q^{n(s-p)-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-m \end{bmatrix}_s^{(m)}.$$

Belbachir et Benmezai [8]ont proposé une autre variante du q-analogue des coefficients bi^{s}nomiaux comme suit :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_s = \sum_{j_1+\cdots+j_s=k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix} q^{\sum_{r=1}^{s} \binom{j_r}{2}} (-1)^k a^{-\sum_{r=1}^{s} r j_r},$$

avec $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$*(les coefficients q-binomiaux) et* $a = expi\dfrac{2\pi}{s+1}$ *avec* $i^2 = -1$.

1.8 Fonction Symétrique

Définition 1.8.1 [13] *Une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ à n variables est symétrique si pour toute permutation σ de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$, l'égalité suivante est vérifiée,*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Exemple 1.8.1 • *La fonction $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$ est symétrique, car $f(x_2, x_1) = x_2^3 x_1 + x_1^3 x_2 = f(x_1, x_2)$.*

• *La fonction $h(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2$, n'est pas symétrique car, $h(x_2, x_1) = x_2 x_1 + x_2^2 \neq h(x_1, x_2)$.*

Remarque 1.8.1 *Vior [15, 30] Pour vérifier qu'une fonction est symétrique, il n'est pas nécessaire de tester qu'elle est invariante pour chacune des $n!$ permutations de ses arguments. Il suffit de choisir un ensemble de permutations qui engendre le groupe symétrique.*

1.8.1 Échanges de deux variables

Comme toute permutation est une composée de transpositions de la forme (i, j), une fonction est symétrique dès qu'elle reste inchangée par l'échange de deux variables arbitraires x_i et x_j, donc lorsque $f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i < j$. Ceci réduit le nombre de permutations à tester à n^2.

1.8.2 Échanges de variables consécutives

Comme toute transposition s'exprime aussi comme une composée de transpositions de valeurs consécutives de la forme $(i, i+1)$, il suffit de considérer des variables consécutives x_i et x_{i+1}. Pour la symétrie, il suffit que les $n-1$ égalités $f(\ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots) = f(\ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots)$ valent pour $i = 1, \ldots, n-1$.

1.8.3 Échanges avec une variable fixée

On peut aussi bien considérer les transpositions de la forme $(1, i)$. Une fonction est alors symétrique lorsque l'on peut échanger la première et la i^{me} variable sans changer la valeur de la fonction, en d'autres termes, lorsque $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots) = f(x_i, \ldots, x_1, \ldots)$ pour $i = 2, \ldots, n$. À la place de la première variable, on peut choisir toute autre variable.

1.8.4 Critère minimal

Un ensemble générateur du groupe symétrique S_n est formé des deux permutations $(1, 2, \ldots, n)$ et $(1, 2)$. Il suffit donc, pour qu'une fonction soit symétrique, qu'elle vérifie seulement les deux égalités $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, \ldots, x_n, x_1)$ et $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, \ldots, x_n)$.
La paire formée de $(1, 2, \ldots, n)$ et $(1, 2)$ peut aussi être remplacée par n'importe quelle permutation circulaire et toute transposition d'éléments consécutifs dans ce cycle.

Proposition 1.8.1 *Lorsque les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes, les fonctions symétriques forment une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions à n variables, c'est-à-dire :*
- *La somme de deux fonctions symétriques est encore une fonction symétrique .*
- *Le produit de deux fonctions symétriques est encore une fonction symétrique.*
- *Toute fraction rationnelle symétrique (sur un corps commutatif) est le quotient de deux polynômes symétriques.*

Preuve 1.8.1 *Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in K(X_1, \ldots, X_n)$ une fraction rationnelle symétrique.*
Pour toute permutation $s \in S_n$, notons $Q^\sigma(X_1, \ldots, X_n) = Q(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$.
Le polynôme $D := \prod_{\sigma \in S_n} Q^\sigma$ est symétrique donc $N := FD$ (qui est un polynôme) l'est aussi, et $F = \dfrac{N}{D}$.

1.8.5 Symétrisation

Sur un corps caractéristique, la symétrisation est la sommation d'une fonction sur toutes les permutations possibles de variables, pondérée par $n!$. C'est l'expression,

$$\Sigma f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Par construction, la fonction Σf est symétrique. L'opérateur de symétrisation Σ est une projection de l'espace des fonctions sur le sous-espace des fonctions symétriques.

1.8.6 Fonction symétriques élémentaires

Définition 1.8.2 *[13] On appelle k^{ime} fonctions symétriques élémentaires la fonction définie par,*

$$e_k(n) = e_k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n},$$

Avec : $i_1, i_2, \cdots, i_n = 0$ ou 1 et $0 \leqslant k \leqslant n$.
$e_k(n)$ est donc la somme de tous les produits distincts qu'on peut former on prenant au plus une fois chaque objet ; c'est un polynôme formé de $(\binom{n}{k}$ monôme de degré n.

Exemple 1.8.2 *Pour une équation de degré 3 ($n = 3$; racines : a_1 , a_2 et a_3) on écrit,*

$$\begin{cases} e_0(3) &= 1, \\ e_1(3) &= a_1 + a_2 + a_3, \\ e_2(3) &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \\ e_3(3) &= a_1a_2a_3. \end{cases}$$

Chaque monôme de la fonction $e_2(3) = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ peut être représentée dans la première colonne de chaque tableau de Young comme suite,

$$\underset{a_1a_2}{\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{a_1a_3}{\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} \qquad \underset{a_2a_3}{\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}$$

Proposition 1.8.2 *[14] Soit e_k^n une fonction symétrique élémentaire alors on a,*

1. $e_k(n+1 = a_{n+1}e_{k-1}(n) + e_k(n)$.
2. $e_k(n) = a_ne_{k-1}(n-1) + a_{n-1}e_{k-1}(n-2) + \cdots + a_{n-i}e_{k-1}(n-i-1) + \cdots + a_ke_{k-1}(k-1)$.

Preuve 1.8.2 *1. On a :*

$$\begin{aligned} a_{n+1}e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)} &= a_{n+1}(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}) + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}, \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^0, \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+1=k-1+1=k} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^0, \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{i_{n+1}}, \qquad i_{n+1} = 0 \vee 1, \\ &= e_k(n+1). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} e_k^{(n)} &= a_ne_{k-1}^{(n-1)} + e_k^{(n-1)}, \\ &= a_ne_{k-1}^{(n-1)} + a_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)} + e_k^{n-2}, \\ &= a_ne_{k-1}^{(n-1)} + a_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)} + a_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)} + e_k^{n-3}, \\ &\vdots \\ &= a_ne_{k-1}^{(n-1)} + a_{n-1}e_{k-1}^{(n-2)} + a_{n-2}e_{k-1}^{(n-3)} + \cdots + a_{n-i}e_{k-1}^{(n-i-1)} + \cdots + a_ke_{k-1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Proposition 1.8.3 *[31] Les fonctions symétriques élémentaires peuvent également se définir comme les coefficients du développement en série formelle,*

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_kz^k = \prod_{i=1}^{n}(1 + a_iz),$$

avec $e_k(a_1, a_2, ..., a_n)$ s'annule pour $k > n$.

Preuve 1.8.3 *on a :*

$$e_k^{(n)} = e_k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}, 0 \leqslant k \leqslant n,$$

avec $e_k^{(n)} = 0$ *si* $k > n$
montrons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i z),$$

pour $n = 2$ *, on a*

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2} (1 + a_i z) &= (1 + a_1 z)(1 + a_2 z), \\
&= 1 + (a_1 + a_2) z + a_1 a_2 z^2, \\
&= e_0 + e_1 z + e_2 z^2, \\
&= \sum_{k=0}^{2} e_k z^k.
\end{aligned}$$

supposons que la propriété est vraie pour n,

$$\sum_{k=0}^{n} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i z),$$

et montrons que la propriété est vraie pour $n + 1$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} e_k z^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i z),$$

On a

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_iz) &= \prod_{i=1}^{n}(1+a_nz)(1+a_{n+1}z),\\
&= (\sum_{k=0}^{n} e_kz^k)(1+a_{n+1}z),\\
&= \sum_{k=0}^{n} e_kz^k + a_{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_kz^{k+1},\\
&= \sum_{k=0}^{n} e_kz^k + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} e_{k-1}z^k,\\
&= \sum_{k=0}^{n} e_kz^k + a_{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} e_{k-1}z^k,\\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k^{(n)}z^k + a_{n+1}\sum_{k\geqslant 0} e_{k-1}^{(n+1)}z^k,\\
&= \sum_{k\geqslant 0}(e_k^{(n)} + a_{n+1}e_{k-1}^{(n+1)})z^k,\\
&= \sum_{k\geqslant 0}(e_k^{(n+1)}z^k),\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} e_kz^k.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D

1.8.7 Fonctions symétriques complètes

Définition 1.8.3 *[13] On appelle k^{ime} fonctions symétriques complètes $h_k(a_1, a_2, ..., a_n)$ la fonction définie par,*

$$h_k(n) = h_k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n},$$

avec : $i_1, i_2, i_3 ... i_n \geqslant 0$, et $0 \leqslant k \leqslant n$.
$h_k(n)$ est donc la somme de tous les produits distincts qu'on peut former en prenant chaque objet autant de fois qu'on veut, c'est un polynôme formé de $\binom{k+n-1}{k}$ monôme de degré n.

Exemple 1.8.3 *Pour une équation de degré 3 ($n = 3$; racines a_1, a_2, a_3) on a,*

$$\begin{cases} h_0^{(3)} &= 1, \\ h_1^{(3)} &= a_1 + a_2 + a_3, \\ h_2^{(3)} &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \\ h_3^{(3)} &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_1^2a_2 + a_1^2a_3 + a_2^2a_1 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1 + a_3^2a_2 + a_1a_2a_3, \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \quad . & \end{cases}$$

Chaque monôme de la fonction $h_2^{(3)} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ *peut être représentée dans la première ligne de chaque tableau de Young comme suite,*

$$\begin{array}{cccccc} \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{array}$$

Proposition 1.8.4 *[14] Soit* $h_k^{(n)}$ *une fonction symétrique complète, alors on a,*

1. $h_k(n+1) = a_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n)$.
2. $h_k(n+1) = a_{n+1}^k + a_{n+1}^{k-1}h_1(n) + a_{n+1}^{k-2}h_2(n) + \cdots + a_{n+1}h_{k-1}(n) + h_k(n)$.
3. $h_k(n) = a_nh_{k-1}(n) + a_{n-1}h_{k-1}(n-1) + a_{n-2}h_{k-1}(n-2) + a_{n-3}h_{k-1}(n-3) + \cdots + a_1h_{k-1}(1)$.

Preuve 1.8.4 *1. on a*

$$\begin{aligned} a_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} &= a_{n+1}\Big(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k-1} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{i_{n+1}}\Big) + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}, \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k-1} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{i_{n+1}}a_{n+1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{0}, \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+i_{n+1}+1=k-1+1=k} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{i_{n+1}+1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{0}, \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+(i_{n+1}+1)=k} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{i_{n+1}+1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{0}, \end{aligned}$$

on a $i_{n+1} \geqslant 0$*, alors* $i_{n+1} \geqslant 1$*, supposons* $i'_{n+1} = i_{n+1} + 1 \vee 0$ *alors* $i'_{n+1} \geqslant 0$*.*
donc

$$a_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+i'_{n+1}=k} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}a_{n+1}^{i'_{n+1}+1} = h_k^{(n+1)}.$$

2. on a

$$\begin{aligned}
h_k^{(n+1)} &= a_{n+1}h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)},\\
&= a_{n+1}(a_{n+1}h_{k-2}^{(n+1)} + h_{k-1}^{(n)}) + h_k^{(n)},\\
&= a_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n+1)} + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)},\\
&= a_{n+1}^3 h_{k-3}^{(n+1)} + a_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n)} + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)},\\
&\vdots\\
&= a_{n+1}^i h_{k-i}^{(n+1)} + a_{n+1}^{i-1} h_{k-(i-1)}^{(n)} + \cdots + a_{n+1}^2 h_{k-2}^{(n)} + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)}, i < k,\\
&\vdots\\
&= a_{n+1}^k + a_{n+1}^{k-1}h_1^{(n)} + a_{n+1}^{k-2}h_2^{(n)} + a_{n+1}^{k-3}h_3^{(n)} + \cdots + a_{n+1}h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.8.5 *[31] On peut également définir les k^{ime} fonctions symétriques complètes comme les coefficients du développment en série formelle,*

$$H(z) = \sum_{k\geqslant 0} h_k z^k = \prod_{i\geqslant 1} \frac{1}{(1-a_i z)}.$$

Preuve 1.8.5

$$h_k(n) = h_k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}$$

pour $n = 2$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0} h_k(2)z^k &= h_0(2) + h_1(2)z + h_2(2)z^2 + \cdots\\
&= 1 + (a_1 + a_2)z + (a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)z^2 + \cdots\\
&= (1 + a_1 z + a_1^2 z^2 + \cdots)(1 + a_2 z + a_2^2 z^2 + \cdots),\\
&= (\sum_{k\geqslant 0}(a_1 z)^k)(\sum_{k\geqslant 0}(a_2 z)^k),\\
&= \frac{1}{(1-a_1 z)(1-a_2 z)},\\
&= \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{(1-a_i z)}.
\end{aligned}$$

supposons que la propriété est vraie pour n,

$$\sum_{k\geqslant 0} h_k(n)z^k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-a_i z)},$$

et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$,

$$\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)z^k = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1-a_i z)},$$

on a,

$$h_k(n+1) = a_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)z^k &= \sum_{k\geqslant 0}(a_{n+1}h_{k-1}(n+1) + h_k(n))z^k,\\
&= a_{n+1}\sum_{k\geqslant 0} h_{k-1}(n+1)z^k + \sum_{k\geqslant 0} h_k(n)z^k,\\
&= a_{n+1}z\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)z^k + \sum_{k\geqslant 0} h_k(n)z^k,\\
&= a_{n+1}z\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_iz)^{-1} + \prod_{i=1}^{n}(1-a_iz)^{-1},\\
&= \frac{a_{n+1}z + (1-a_{n+1}z)}{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_iz)},\\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_iz)}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.8.2 *[12] On a :*

$$e_0(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1,$$

et

$$h_0(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1.$$

par convention , pour $k < 0$, on a :

$$e_0(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0,$$

et

$$h_0(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0.$$

Proposition 1.8.6 *[21] Soit $E(z)$ et $H(z)$ les fonctions symétriques élémentaires et complètes respectivement alors,*

$$E(-z)H(z) = 1.$$

Preuve 1.8.6 *On a :*

$$E(z) = \prod_{i\geqslant 1}(1+a_iz),$$

alors

$$E(-z) = \prod_{i\geqslant 1}(1-a_iz),$$

et comme

$$H(z) = \frac{1}{\prod_{i\geqslant 1}}(1 - a_i z),$$

on obtient donc

$$E(-z)H(z) = 1.$$

Chapitre 2

Nombres de stirling

Introduction

On présente dans ce chapitre les definitions des nombres de Stirling de première espèce et de deuxième espèce. On y présente leurs relations de récurrences et interprétations combinatoires, leurs fonction génératrice, ainsi que leurs formes explicites. Et citons quelques exemples explicatifs pour chaque notion.

2.1 Nombre de stirling de première espèce

Pour plus de détails voir[20]

Définition 2.1.1 *Les nombres de Stirling de première espèce* **signés** $s(n,k)$ *sont les coefficients du développement de la factorielle décroissante* $(x)_n$ *ou* $(x)^{\underline{n}}$*, c'est-à-dire,*

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{2.1}$$

$(x)_0 = 1$ *car il s'agit d'un produit vide.*

Les nombres de Stirling de première espèce **non signés** $\mid s(n,k) \mid$ *(valeurs absolues des précédents) sont les coefficients du développement de la factorielle croissante* $(x)^n$ *ou* $(x)^{\overline{n}}$*, c'est-à-dire que ;*

$$(x)^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k. \tag{2.2}$$

$$x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1.$$

N.B : Il est évident que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}.$$

Exemple 2.1.1 $(x)^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ *d'où,*

$$s(3,0) = 0, s(3,1) = 2, s(3,2) = -3, s(3,3) = 1$$

Proposition 2.1.1 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leqslant n$, le signe du nombre entier $s(n,k)$ est $(-1)^{n+k}$.*

Preuve 2.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. En substituant dans 2.1 x par $-x$, on obtient*

$$(-x)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-x)^k.$$

C'est-à-dire

$$(-1)^n x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s(n,k) x^k.$$

D'où

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} s(n,k) x^k.$$

Comme les coefficients du polynôme x^n sont de toute évidence tous positifs, on en déduit que $(-1)^{n+k} s(n,k) \geq 0$,$\forall n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$. Autrement dit, le signe de tout nombre $s(n,k)$ est $(-1)^{n+k}$. Ce qui achève cette démonstration.

2.1.1 Relations de récurrence

Les nombres de Stirling de première espèce signés vérifient la relation de récurrence,
Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k); 1 \leq k \leq n-1 \tag{2.3}$$

avec

$$s(n,0) = 0 \text{ et } s(1,1) = 1.$$

Leurs valeurs absolues vérifient (avec les mêmes conditions initiales) la relation de récurrence,

$$\forall k \geqslant 1 \quad |s(n+1,k)| = |s(n,k-1)| + n|s(n,k)|. \tag{2.4}$$

Chacune des deux relations de récurrence peut se déduire chaque un de l'autre. De plus, la première découle de la relation de récurrence des factorielles décroissantes,

$$(x)_n = x(x)_{n-1} - (n-1)(x)_{n-1}, \tag{2.5}$$

et la seconde, d'un raisonnement combinatoire ou de la relation de récurrence des factorielles croissantes,

$$(x)^n = x(x)^{n-1} + (n-1)(x)^{n-1}.\text{??} \tag{2.6}$$

Preuve 2.1.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a d'une part,*

$$x^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1,k)x^k = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} s(n+1,k)x^k,$$

car $s(n+1,0) = 0$ et $s(n+1,n+1) = 1$.
Et d'autre part,

$$\begin{aligned}
x^{\underline{n+1}} &= x(x-1)\cdots(x-n+1)(x-n)\\
&= (x-n)x^{\underline{n}}\\
&= (x-n)\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k\\
&= x\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k - n\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} ns(n,k)x^k\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} s(n,k-1)x^k - \sum_{k=0}^{n} ns(n,k)x^k\\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(s(n,k-1) - ns(n,k))x^k.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^k $(k \in \mathbb{N}^*, k \leqslant n)$ des deux expressions que l'on a trouvé pour $x^{\underline{n+1}}$, on aboutit à,

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k),$$

qui n'est rien d'autre que 2.3.
Étant donnés $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leqslant n$, l'identité 2.4 s'obtient en multipliant les deux membres de **??** *par $(-1)^{n+k+1}$ et en se rappelant que le signe de $s(a,b)$ est $(-1)^{a+b}$ $(\forall a, b \in \mathbb{N}, a \geqslant b)$ en vertu de la proposition 2.1.1. Ceci achève notre démonstration.*

2.1.2 Le triangle des nombres de stirling de première espèce

En se servant de la relation récurrente 2.4, on peut dresser les nombres de Stirling de 1re espèce (en valeurs absolues) dans un triangle (infini) du même type que le triangle arithmétique de

Pascal des coefficients binomiaux.

$$\begin{array}{lcccccccc}
n=0 & 1 & & & & & & \\
n=1 & 0 & 1 & & & & & \\
n=2 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
n=3 & 0 & 2 & 3 & 1 & & & \\
n=4 & 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & & \\
n=5 & 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Dans ce triangle, chaque ligne de rang $n \geqslant 1$ commence par un 0 et se termine par un 1 et ses coefficients du milieu s'obtiennent par la relation récurrente 2.4 en fonction des coefficients de la ligne qui la précède. Par exemple, le nombre 50 de la 5ème ligne est obtenu par la formule $6 + 4 \times 11$ (où les nombres 6 et 11 proviennent de la 4ème ligne).

Proposition 2.1.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

1. $s(n,0) = 0$ *et* $s(n,n) = 1$,
2. $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k s(n,k) = (-1)^n n!$,
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mid s(n,k) \mid = n!$,
5. $\mid s(n,k) \mid \leq n!$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$,$k \leq n$,
6. $s(n,n-1) = (-1)^n \binom{n}{2}$,
7. $s(n,n-2) = \dfrac{3n-1}{4}\binom{n}{3}$,
8. $s(n,n-3) = -\binom{n}{2}\binom{n}{4}$.

Il existe d'autres identités, comme

$$s(n,2) = (-1)^n (n-1)!\, H_{n-1},$$

où $H_n(m)$ est un nombre harmonique généralisé ($H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$).

Preuve 2.1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.*

1. *Les nombres* $s(n,0)$ *et* $s(n,n)$ *sont respectivement les coefficients de* x^0 *et de* x^n *dans le développement du polynôme*

$$(x)^n n = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Il est bien clair que ces coefficients sont respectivement 0 *et* 1*, comme il fallait le prouver.*

2. *Le nombre* $s(n,1)$ *est par définition le coefficient de* x *dans le développement du polynôme*

$$(x)^n = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Ce qui est aussi le coefficient constant du polynôme $(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$*. Ce coefficient est simplement la valeur de ce dernier polynôme en* 0 *; c'est donc égale à* $(-1)(-2)\cdots(-n+1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ *D'où* $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$*, comme il fallait le prouver .*

3. *L'identité* (3) *résulte simplement de la substitution de* x *par* (-1) *dans l'identité polynômiale 2.1.1 tout en remarquant que*

$$(-1)^n = (-1)(-2)\cdots(-n) = (-1)^n n!.$$

4. *En multipliant les deux membres de l'identité* (3) *par* $(-1)^n$*,on obtient :*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}s(n,k) = n!.$$

Mais puisque le signe de chaque nombre $s(n,k)$ $(1 \leq k \leq n)$ *est* $(-1)^{n+k}$ *(en vertu de la proposition 2.1.1), on a pour tout* $k \in \{1,\cdots,n\}$ *:*

$$(-1)^{n+k}s(n,k) =\mid s(n,k) \mid$$

et l'on conclut enfin que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mid s(n,k) \mid= n!,$$

comme il fallait le prouver.

5. *L'estimation* (5) *du théorème 2.1.2 est une conséquence immédiate de . La proposition est démontrée .*

2.1.3 Fonction génératrice

Théorème 2.1.1 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, on a f*

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{log^k(1+x)}{k!}. \tag{2.7}$$

Preuve 2.1.4 *On détermine de deux façons différentes le développement (formel) de la fonction $f(x, y) = (1 + x)^y$ en série de Taylor en y. D'une part, d'après la formule du binôme généralisée, on a*

$$\begin{aligned}(1+x)^y &= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{2!}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^{\underline{n}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k) y^k \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \frac{x^n y^k}{n!},\end{aligned}$$

soit

$$(1+x)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k) \frac{x^n}{n!} \right) y^k. \tag{2.8}$$

D'autre part, d'après le développement de Taylor de la fonction exponentielle, on a

$$(1+x)^y = exp\{ylog(1+x)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ylog(1+x))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{log^k(1+x)}{k!} y^k. \tag{2.9}$$

L'identification des deux formules 2.8 et 2.9 entraîne (d'après l'unicité du développement de Taylor) que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{log^k(1+x)}{k!}, \tag{2.10}$$

comme il fallait le prouver. Le théorème est démontrée.

2.1.4 Formules explicites

Soit la forme explicites des nombres de Stirling de première espèce suivante,

$$s(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{2k-j}}{k!} \binom{n-1+k}{n-m+k} \binom{2n-m}{n-m-k} \binom{k}{j} j^{n-m+k},$$

ou encore, après simplifications,

$$s(n,m) = \frac{(2n-m)!}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{(n+k)(n-m-k)!(n-m+k)!} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j j^{n-m+k}}{j!(k-j)!}.$$

La formule du théorème 2.1.1 précédent permet d'en déduire une formule explicite très importante pour les nombres $s(n, m)$.

Théorème 2.1.2 *Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \geq m$, on a :*

$$s(n,m) = (-1)^{n+m} \frac{n!}{m!} \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} \frac{1}{i_1 \cdots i_m}.$$

Preuve 2.1.5 *Soit $m \in \mathbb{N}$. On a*

$$\begin{aligned} log^m(1+x) &= \left(\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{x^l}{l} \right)^m \\ &= \sum_{l_1,\cdots,l_m \in \mathbb{N}^*} (-1)^{(l_1+1)+\cdots+(l_m+1)} \frac{x^{l_1+\cdots+l_m}}{l_1 \cdots l_m} \\ &= \sum_{n \geq m} \left(\sum_{l_1+l_2+\cdots+l_m=n} \frac{(-1)^{n+m}}{l_1 \cdots l_m} \right) x^n. \end{aligned}$$

En comparant ceci avec 2.1.1, nous déduisons que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$:

$$s(n,m) = (-1)^{n+m} \frac{n!}{m!} \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_m=n} \frac{1}{l_1 l_2 \cdots l_m},$$

comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré.

2.1.5 Interprétation combinatoire

Le sens combinatoire des nombres de Stirling de 1^{re} espèce est relatif à l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $A = a_1, \cdots, a_n$ un ensemble à n éléments et σ une permutation des éléments de A (i.e., $\sigma \in S(A)$). On considère $\Re_\sigma$ la relation binaire sur A définie par :

$$\forall a, b \in A : a \Re_\sigma b \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N} \qquad tq : b = \sigma^k(a).$$

On montre alors que $\Re_\sigma$ est une relation d'équivalence sur A. Une classe d'équivalence modulo $\Re_\sigma$ s'appelle « cycle relatif à σ », ou simplement « σ-cycle ». On obtient ainsi une partition de A en un nombre fini de σ -cycles. Pour $\sigma = Id_A$ par exemple, les σ-cycles que l'on obtient sont :$\{a_1\}, \{a_2\}, \cdots, \{a_n\}$ (on a exactement $n\sigma$-cycles). Pour que tout cela soit plus clair, étudions un exemple.

Exemple 2.1.2 *Prenons $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et σ la permutation des éléments de A, donnée par*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

La classe de l'élément 1 modulo $\Re_\sigma$ est $cl(1) = \{1, 3, 4\}$; la classe de l'élément 2 est $cl(2) = \{2, 5\}$ et la classe de l'élément 6 est $cl(6) = \{6\}$ et on a ainsi trouvé toutes les classes. Les σ-cycles de A sont donc : $\{1, 3, 4\}, \{2, 5\}$ et $\{6\}$; ainsi A contient exactement 3σ-cycles. Nous somme maintenant prêt à donner l'interprétation combinatoire des nombres de Stirling de 1^{re} espèce. On a le théorème suivant :

Théorème 2.1.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, avec $k \leqslant n$. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui fournissent exactement k cycles est $S(n,k)$.*

Preuve 2.1.6 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, avec $k \leqslant n$, on note provisoirement par $P(n,k)$ le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui fournissent exactement k cycles. On montrera que ces nombres $P(n,k)$ vérifient la relation de récurrence,*

$$P(n+1,k) = P(n,k-1) + nP(n,k), (n \in \mathbb{N}^*, k \leqslant n),$$

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leqslant n$, soit $A_{n+1} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}$ un ensemble à $(n+1)$ éléments et σ une permutation arbitraire de A_{n+1} fournissant exactement k cycles. Nous essayons de voir comment on obtient σ à partir d'une permutation $\sigma^{'}$ de l'ensemble $A_n = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Pour ce faire, nous raisonnons sur le dernier élément a_{n+1} de A_{n+1}. On distingue les deux cas suivants,

1. *Ou bien $\sigma(a_{n+1}) = a_{n+1}$. Ceci revient à dire que a_{n+1} est un point fixe par σ ou encore que le σ-cycle contenant a_{n+1} est $\{a_{n+1}\}$. Dans ce cas σ s'obtient comme un prolongement d'une permutation $\sigma^{'}$ de A_n qui fournit exactement $(k-1)$ cycles. Le nombre de tels σ est donc égale à $P(n,k-1)$.*
2. *Ou bien $\sigma(a_{n+1}) \in \{a_1, \cdots, a_n\}$. Dans ce cas, a_{n+1} intégrera un cycle associé à une certaine permutation $\sigma^{'}$ de A_n, laquelle fournit exactement k cycles. Pour chaque choix de $\sigma(a_{n+1})$ (n choix possibles), on a $P(n,k)$ choix possibles pour $\sigma^{'}$.*
   Ainsi, le nombre de tels σ est $nP(n,k)$. En conclusion, le nombre de permutations de A_{n+1} fournissant exactement k cycles est,

$$P(n+1,k) = P(n,k-1) + nP(n,k).$$

Nous venons de montrer que les nombres $P(n,k)$ satisfont la même relation de récurrence que les nombres $\mid s(n,k) \mid$(cf. la relation 2.4 de la relations récurrentes). Mais puisque, on a par définition même,

$$P(n,0) = 0 = |s(n,0)|, \ \ et \ \ P(1,1) = 1 = |s(1,1)|,$$

on conclut par une récurrence évidente que $P(n,k) = |s(n,k)|$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}(k \leqslant n)$. Le théorème est démontrée.

2.2 Nombre de stirling de deuxième espèce

voir[19]

Définition 2.2.1 *Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont, par définition, les nombres réels $S(n,k)(n,k \in \mathbb{N}, k \leq n)$ qui figurent dans le développement de x^n comme combinaison linéaire des polynômes $x^{\underline{k}}$ $(0 \leq k \leq n)$. On a précisément pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}.$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce sont donc en quelque sorte les inverses 2 des nombres de Stirling de première espèce.
Nous verrons plus loin que ces nombres de Stirling de seconde espèce sont tous des entiers positifs.

Exemple 2.2.1 *on a,*

$$(x)^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x = x^{\underline{1}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{3}},$$

d'où

$$s(3,0) = 0$$

, s(3, 1) = 1, $s(3,2) = 3$ *et* $s(3,3) = 1$.

Proposition 2.2.1 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

1. $S(n,0) = 0$ *et* $S(n,1) = S(n,n) = 1$.
2. $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.
3. $S(n,n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dbinom{n}{2}$.

Preuve 2.2.1 *Étant donné* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a (par définition) l'identité ,*

$$x^n = S(n,0) + S(n,1)x + S(n,2)x(x-1) + \cdots + S(n,n)x(x-1)\cdots(x-n+1). \quad (2.11)$$

1. *En prenant* $x = 0$ *dans 2.11, on obtient immédiatement,*

   $$S(n,0) = 0.$$

   Par suite, en substituant ceci dans 2.11 puis en divisant sur x*, on obtient l'identité,*

   $$x^{n-1} = S(n,1) + S(n,2)(x-1) + S(n,3)(x-1)(x-2) + \cdots + S(n,n)(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

   En prenant dans cette dernière $x = 1$*, on obtient,*

   $$S(n,1) = 1.$$

   Enfin, l'identification des coefficients dominants des polynômes du membre de gauche et du membre de droite de 2.11 donne directement,

   $$S(n,n) = 1.$$

2. *En substituant* $S(n,0)$ *et* $S(n,1)$ *par leurs valeurs dans 2.11 (i.e., par* 0 *et* 1 *respectivement), on obtient,*

   $$x^n = x + S(n,2)x(x-1) + S(n,3)x(x-1)(x-2) + \cdots + S(n,n)x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

   En prenant $x = 2$ *dans cette dernière, on obtient,*

   $$2^n = 2 + 2S(n,2).$$

   D'où

   $$S(n,2) = 2^{n-1} - 1.$$

3. *L'identification des coefficients de x^{n-1} dans les deux membres de l'identité 2.11 donne,*
$$0 = S(n, n-1) - S(n, n)(1 + 2 + \cdots + (n-1)).$$
Puisque $S(n, n) = 1$ (déjà démontrée), il en résulte que,
$$S(n, n-1) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$
soit
$$S(n, n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La proposition est démontrée.

2.2.1 Relation de récurrence

Proposition 2.2.2 *Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, avec $k \leq n-1$, on a*
$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

Preuve 2.2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On part de l'identité triviale,*
$$x^n = x \cdot x^{n-1},$$
dans laquelle on substitue x^n et x^{n-1} par leurs expressions dans la base $(x^{\underline{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_{[x]}$. On obtient,
$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^{\underline{k}} = x \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k)(x \cdot x^{\underline{k}}).$$
Comme
$$x \cdot x^{\underline{k}} = (x-k)x^{\underline{k}} + kx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}},$$
il s'ensuit que
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S(n, k)x^{\underline{k}} &= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1, k)(x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1, k)x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} kS(n-1, k)x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} S(n-1, k-1)x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n-1} k(n-1, k)x^{\underline{k}};
\end{aligned}$$
d'où
$$\sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)\right\} x^{\underline{k}} + S(n-1, n-1)x^{\underline{n}}.$$
En identifiant les coefficients des $x^{\underline{k}}(1 \leq k \leq n-1)$ dans les deux membres de cette dernière identité, on obtient la formule récurrente recherchée,
$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), \qquad (k \in \{1, \cdots, n-1\}).$$
La proposition est achevée.

Corollaire 2.2.1 *Les nombres réel $S(n,k)(n,k \in \mathbb{N}, n \geqslant k)$ sont tous des entiers naturels.*

Preuve 2.2.3 *Il suffit de faire une récurrence sur n en se servant de la formule récurrente de la proposition 2.2.2.*

2.2.2 Le triangle des nombres de Stirling de seconde espèce

En se servant de la relation de la proposition 2.2.2, on peut dresser un triangle (infini) dont chaque ligne d'ordre $n \in \mathbb{N}$ donnée est composée des nombres $S(n,k)$ depuis $k=0$ jusqu'à $k=n$. Le sommet de ce triangle est $S(0,0)=1$ et en vertu du premier point de la proposition 1, chaque ligne d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ commence par un 0 et se termine par un 1. On obtient un triangle du même format que celui de Pascal classique.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
n=0 & 1 & & & & & & & \\
n=1 & 0 & 1 & & & & & & \\
n=2 & 0 & 1 & 1 & & & & & \\
n=3 & 0 & 1 & 3 & 1 & & & & \\
n=4 & 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & & & \\
n=5 & 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & & \\
n=6 & 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

2.2.3 Une relation liant entre les nombres de Stirling des deux espèces

Théorème 2.2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, on a*

$$\sum_{m\leqslant k\leqslant n} s(n,k)S(k,m) = 0,$$

$$\sum_{m\leqslant k\leqslant n} S(n,k)s(k,m) = 0.$$

Preuve 2.2.4 *Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \{0,1,\cdots,n-1\}$. Par définition même des nombres de Stirling de seconde espèce, la matrice A associée à l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[x]$, où l'espace vectoriel de départ est muni de sa base canonique $(x^a)_{0\leq a\leq n}$ et celui d'arrivée est muni de la base $(x^{\underline{a}})_{0\leq a\leq n}$, est clairement égale à :*

$$A = (S(i,j))^t_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}}.$$

De même, Par définition des nombres de Stirling de première espèce, la matrice B associée à l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[x]$, où l'espace vectoriel de départ est muni de la base $(x^{\underline{a}})_{0\leq a\leq n}$ et celui d'arrivée est muni de sa base canonique $(x^a)_{0\leq a\leq n}$, est égale à,

$$B = (S(i,j))^t_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}}.$$

(Notons au passage que A et B sont triangulaires supérieures).

Comme A et B sont de toute évidence inversible l'une de l'autre, on a $AB = BA = I_{n+1}$; d'où les transposées suivantes,

$$(s(i,j))_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} \cdot (S(i,j))_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} = (S(i,j))_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} \cdot (s(i,j))_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} = I_{n+1}. \tag{2.12}$$

Ce qui est équivalant à,

$$\sum_{0\leq k\leq n} s(i,k)S(k,j) = \sum_{0\leq k\leq n} S(i,k)s(k,j) = \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
En prenant dans cette dernière $i = n$ et $j = m$, on obtient,

$$\sum_{0\leq k\leq n} s(n,k)S(k,m) = \sum_{0\leq k\leq n} S(n,k)s(k,m) = 0.$$

Enfin, puisque $s(k,m) = S(k,m) = 0$ lorsque $k < m$, il en découle que :

$$\sum_{m\leq k\leq n} s(n,k)S(k,m) = \sum_{m\leq k\leq n} S(n,k)s(k,m) = 0,$$

Le théorème est prouvé.

2.2.4 Une formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce

Théorème 2.2.2 *Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

On démontrera ce théorème en se basant sur la théorie élémentaire des opérateurs linéaires ; plus précisément sur l'opérateur de différence $\triangle$. Nous rappelons d'abord la définition et quelques propriété de l'opérateur $\triangle$.

Définition 2.2.2 *Soient les deux opérateurs suivants, equation $\tau : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$*

$$P(x) \longmapsto \tau(p)(x) := P(x+1) \tag{2.13}$$

et equation $\Delta : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$$P(x) \longmapsto \Delta(p)(x) := P(x+1) - p(x). \tag{2.14}$$

Il s'agit bien de deux opérateurs linéaires τ et Δ qu'on appelle respectivement : l'opérateur de translation par 1 et l'opérateur de différence.

Quelques propriétés de l'opérateur Δ

En désignant par I l'opérateur identité sur $\mathbb{R}[x]$, on a la formule triviale mais fort utile,

$$\Delta = \tau - I.$$

Comme les deux opérateurs τ et I commutent, la formule du binôme est applicable pour le développement de $(\tau - I)^n = \Delta^n (n \in \mathbb{N})$ et l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n = (\tau - I)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \tau^{n-i} I^i;$$

soit

$$\Delta^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \tau^{n-i}. \tag{2.15}$$

En appliquant les deux opérateurs du membre de droite et du membre de gauche de cette dernière identité à un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, on obtient l'identité polynomiale :

$$(\Delta^n P)(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} P(x + n - i). \tag{2.16}$$

Notons aussi que lorsqu'on applique Δ à un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient un polynôme de degré $(n-1)$ et lorsqu'on applique Δ à un polynôme constant, on obtient (de toute évidence) le polynôme identiquement nul. Il s'ensuit (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré $< n$, on a : $\Delta^n p = 0$.

Maintenant, étant donné $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{k}} &= (x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}} \\
&= (x+1)x(x-1)\cdots(x-k+2) - x(x-1)\cdots(x-k+1) \\
&= x(x-1)\cdots(x-k+2)\{(x+1)-(x-k+1)\} \\
&= kx(x-1)\cdots(x-k+2) \\
&= kx^{\underline{k-1}}.
\end{aligned}$$

Comme la formule $\Delta x^{\underline{k}} = kx^{\underline{k-1}}$ est visiblement valable pour $k \leq 0$ aussi, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta x^{\underline{k}} = kx^{\underline{k-1}} \tag{2.17}$$

Nous soulignons à travers cette dernière formule la remarquable analogie qu'il y a entre l'action de l'opérateur Δ sur les puissances inférieures et l'action de l'opérateur de dérivation D sur les puissances usuelles.

En itérant 2.17 plusieurs fois, on obtient pour tous $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^l x^{\underline{k}} = k(k-1)\cdots(k-l+1)x^{\underline{k-l}}; \tag{2.18}$$

soit

$$\Delta^l x^{\underline{k}} = k^{\underline{l}} x^{\underline{k-l}} \tag{2.19}$$

Nous somme maintenant prêts à démontrer le théorème .

Preuve 2.2.5 *du théorème 2.2.2 Soit* $(n, k) \in \mathbb{N}$. *On a par définition,*

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{m}}.$$

En appliquant l'opérateur Δ^k *aux deux membres de cette identité, on obtient (en vertu des deux formules 2.16 et 2.18),*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (x+k-i)^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,k) m^{\underline{k}} x^{\underline{m-k}}.$$

Puisque $x^{\underline{l}}$ *s'annule en* 0 *pour tout* $l \in \mathbb{Z}$ *sauf pour* $l = 0$ *où sa valeur est* 1, *et si en prend dans la dernière identité* $x = 0$ *alors,*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = S(n,k) k^{\underline{k}} = S(n,k) k!.$$

D'où

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

Le théorème est démontré

2.2.5 La série génératrice exponentielle des nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 2.2.3 *La série génératrice exponentielle d'une suite réelle* $(a_n)_{n\mathbb{N}}$ *est définie par le développement en série entière :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x_n}{n!}.$$

La série génératrice exponentielle d'une suite réelle, lorsqu'elle est connue explicitement, aide à exhiber de nouvelles propriétés de la suite en question,qui sont souvent difficiles à obtenir directement.
Plusieurs suites réelles importantes possèdent une série génératrice exponentielle élémentaire. Ceci est le cas de la suite des nombres de Stirling $(S(n,k))_{n \geqslant k}$ *pour* $k \in \mathbb{N}$ *fixé (i.e., les suites verticales du triangle).*

Théorème 2.2.3 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\sum_{n \geqslant k} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.$$

Preuve 2.2.6 *Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du théorème 2.2.2, on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geqslant k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right\} \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} \left((-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((k-i)x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (e^x)^{k-i} \\
&= \frac{(e^x - 1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

La formule du théorème est ainsi démontrée.

2.2.6 Une deuxième formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce

De la formule du théorème 2.2.3 résulte une seconde formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce. Même si, au niveau des calculs, cette nouvelle formule est moins efficace que la précédente, elle est très utile pour d'autres applications.

Corollaire 2.2.2 *Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geq k$, on a*

$$S(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{n_1, n_2, \cdots, n_k \in \mathbb{N}^* \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n}} \frac{1}{n_1! n_2! \cdots n_k!}. \tag{2.20}$$

Preuve 2.2.7 *Siot $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, tel que $n \geq k$ Le développement en série entière de la* *fonction* $x \longmapsto \dfrac{(e^x-1)^k}{k!}$ *en* 0 *s'écrit,*

$$\begin{aligned}
\frac{(e^x-1)^k}{k!} &= \frac{1}{k!}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{n!}\right)^k,\\
&= \frac{1}{k!}\left(\sum_{n_1\in\mathbb{N}^*}\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(\sum_{n_2\in\mathbb{N}^*}\frac{x^{n_2}}{n_2!}\right)\cdots\left(\sum_{n_k\in\mathbb{N}^*}\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right),\\
&= \frac{1}{k!}\left(\sum_{n_1,n_2,\cdots n_k\in\mathbb{N}^*}\frac{x^{n_1+n_2+\cdots+n_k}}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\right),\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{n\geq k}\left(\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N}^*\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\right)x^n,
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{(e^x-1)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{n\geq k}\left(\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N}^*\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\right)x^n.$$

En identifiant ce développement avec celui de la formule du théorème 2.2.3,il en résulte (en vertu de l' unicité du développement en série entière d'une fonction analytique) que,

$$\frac{S(n,k)}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N}^*\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!},$$

d'où la formule recherchée,

$$S(n,k) = \frac{n!}{k!}\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N}^*\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!}. \tag{2.21}$$

Le corollaire est démontré.

2.2.7 Une majoration et un équivalent simple pour les nombres de Stirling de seconde espèce

Des formules 2.2.2 et 2.2.2, on déduit assez facilement une importante majoration et uune équivalence simple (lorsque n est au voisinage de l'infini) pour les nombres $S(n,k)$.

Proposition 2.2.3 *1. Pour tout* $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ *, avec* $n\geq k$ *, on a*

$$S(n,k) \leq \frac{k^n}{k!}. \tag{2.22}$$

2. Soit $k\in\mathbb{N}$ *fixe. Lorsque* $n\in\mathbb{N}$ *est au voisinage de l'infini, on a*

$$S(n,k) \sim \frac{k^n}{k!}. \tag{2.23}$$

Preuve 2.2.8 *1. Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\geq k$. D'après la formule du corollaire 2.2.2, on a*

$$\begin{aligned}
S(n,k) &= \frac{n!}{k!}\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N}^*\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!},\\
&\leq \frac{n!}{k!}\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N}\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\frac{1}{n_1!n_2!\cdots n_k!},\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\substack{n_1,n_2,\cdots,n_k\in\mathbb{N}\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}}\binom{n}{n_1n_2\cdots n_k},\\
&= \frac{1}{k!}\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{kfois}\right)^n.
\end{aligned}$$

D'où

$$S(n,k)\leq\frac{n!}{k!}.$$

2. Soit $k\in\mathbb{N}$ fixé. D'après la formule du théorème 2.2.2 , on a pour tout $n\geq k$,

$$\begin{aligned}
S(n,k) &= \frac{1}{k!}\left\{k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}0^n\right\},\\
&= \frac{1}{k!}(k^n+o(k^n)),
\end{aligned}$$

d'où :

$$s(n,k)\sim_{+\infty}\frac{k^n}{k!}.$$

La proposition est démontrée.

2.2.8 La série génératrice ordinaire des nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 2.2.4 *La série génératrice ordinaire d'une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par le développement en série entière (i.e ; de rayon de convergence nul).*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Tout comme la série génératrice exponentielle, la série génératrice ordinaire d'une suite réelle, lorsqu'elle est connue explicitement, nous apporte des informations sur la suite en question qui sont souvent difficiles à obtenir directement.
Il est, par ailleurs, immédiat que le rayon de convergence de la série génératrice exponentielle est plus grand que celui de la série génératrice ordinaire de toute suite réelle.
Plusieurs importantes suites réelles possèdent des série génératrices ordinaires élémentaires et c'est justement le cas de la suite des nombres de Stirling $(S(n,k))_{n\geq k}$ pour $k\in\mathbb{N}$ fixé (i.e ; les suites verticales du triangle dressé). On a le

Théorème 2.2.4 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{n \geq k} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

Preuve 2.2.9 *Soit $k \in \mathbb{N}$. En se servant de l'identité obtenue au théorème 2.2.2, on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq k} S(n,k)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} S(n,k)x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right\} x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} (-1)^i \binom{k}{i} ((k-i)x)^n, \\
&= \sum_{i=0}^{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (-1)^i \binom{k}{i} ((k-i)^n x)^n, \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left\{ \frac{1}{k!} (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} ((k-i)x)^n \right\}, \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \cdot \frac{1}{1-(k-i)x}, \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{i!(k-i)!} \cdot \frac{1}{1-ix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq \geq k} S(n,k)x^n$ est une somme finie de fonctions rationnelles ; c'est donc une fonction rationnelle qui s'écrit (par réduction à un même dénominateur commun) sous la forme,

$$\sum_{n \geq k} s(n,k)x^n = \frac{P_k(x)}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}, \tag{2.24}$$

où P_k est un polynôme de $\mathbb{Q}[x]$, de degré $\leq k$. Mais puisque lorsque x est au voisinage de 0, on a d'une part,

$$\sum_{n \geq k} s(n,k)x^n \sim_0 S(k,k)x^k = x^k,$$

et d'autre part (grâce à 2.24),

$$\sum_{n \geq k} s(n,k)x^n \sim_0 P_k(x),$$

il en résulte que $P_k(x) \sim_0 x^k$. Ce qui entraîne, du fait que P_k est un polynôme de de degré $\leq k$, que $P_k(x) = x^k$. D'où l'identité recherchée,

$$\sum_{n \geq k} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

Le théorème est démontré.

Remarque 2.2.1 *On peut aussi démontrer l'identité du théorème en partant de la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle :*

$$x \mapsto \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)},$$

puis en utilisant l'identité du théorème 2.2.2.

2.2.9 Une troisième formule explicite pour les nombres de Stirling de seconde espèce

Du théorème 2.2.4 résulte une nouvelle formule explicite assez importante pour les nombres de Stirling de seconde espèce.

Corollaire 2.2.3 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, on a*

$$S(n,k) = \sum_{\substack{r_1, r_2 \cdots r_k \in \mathbb{N} \\ r_1+r_2+\cdots+r_k = n-k}} 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots k^{r_k}. \tag{2.25}$$

Preuve 2.2.10 *Étant donné $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned}
\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} &= x^k \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-2x}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-kx}\right), \\
&= x^k \sum_{r_1 \in \mathbb{N}} x^{r_1} . \sum_{r_2 \in \mathbb{N}} (2x)^{r_2} \cdots \sum_{r_k \in \mathbb{N}} (kx)^{r_k}, \\
&= \sum_{r_1, r_2 \cdots r_k \in \mathbb{N}} 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots k^{r_k} x^{r_1+\cdots+r_k+k}, \\
&= \sum_{n \geq k} \left(\sum_{\substack{r_1, r_2, \cdots, r_k \in \mathbb{N} \\ r_1+r_2+\cdots+r_k+k = n}} 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots k^{r_k} \right) x^n, \\
&= \sum_{n \geq k} \left(\sum_{\substack{r_1, r_2, \cdots, r_k \in \mathbb{N} \\ r_1+r_2+\cdots+r_k = n-k}} 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots k^{r_k} \right) x^n.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression n'est qu'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$ au voisinage de 0. Or un développement en série entière de la même fonction au voisinage de 0 a déjà été donné par la formule du théorème 2.2.4. L'identification des deux développements conclut (en vertu de l'unicité du développement en série entière d'une fonction donnée) que l'on a pour tout entier $n \geq k$,

$$S(n,k) = \sum_{\substack{r_1, r_2, \cdots, r_k \in \mathbb{N} \\ r_1+r_2+\cdots+r_k = n-k}} 1^{r_1} 2^{r_2} \cdots k^{r_k},$$

qui est bien la formule recherchée. Le corollaire est démontré.

Exemple 2.2.2 *Calculons $S(5,3)$ en se servant de la formule 2.2.3. On a*

$$\begin{aligned} S(5,3) &= \sum_{\substack{r_1,r_2,r_3\in\mathbb{N}\\ r_1+r_2+r_3=2}} 1^{r_1}2^{r_2}3^{r_3}, \\ &= 1^0 2^0 3^2 + 1^0 2^1 3^1 + 1^0 2^2 3^0 + 1^1 2^0 3^1 + 1^1 2^1 3^0 + 1^2 2^0 3^0, \\ &= 9+6+4+3+2+1, \\ &= 25. \end{aligned}$$

C'est bien le résultat qui figure dans le triangle des nombres $S(n,k)$.

2.2.10 Interprétation combinatoire des nombres de Stirling de seconde espace

Proposition 2.2.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'entier positif $S(n,k)$ représente le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k groupes (non vides et deux à deux disjoints). En d'autres termes, $S(n,k)$ représente le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments qui fournissent exactement k classes d'équivalence.*

Preuve 2.2.11 *L'énoncé de la proposition est trivial pour $k = 0$. Nous pouvons donc supposer pour la suite que $k \geq 1$. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^{*2}$, notons provisoirement par $P(n,k)$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k groupes (non vides et deux à deux disjoints). Il s'agit alors de montrer que l'on a $P(n,k) = S(n,k)(n; k \in \mathbb{N}^*)$.*
Pour ce faire, nous allons raisonner par récurrence sur n.
• Pour $n = 1$. On a par définition : $P(1;1) = 1$ et $P(1;k) = 0$ pour tout entier $k \geq 2$; ce qui montre que $P(1;k) = S(1;k)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.
• Soit $n \geq 2$ un entier. Supposons que l'on a $P(n-1,k) = S(n-1,k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que l'on a aussi $P(n,k) = S(n,k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).
Pour ce faire, nous allons exprimer (par le biais d'une analyse combinatoire)tout nombre $P(n,k)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ en fonction des nombres $P(n-1,l)$ $(l \in \mathbb{N})$.
Soient k un entier strictement positif, N un ensemble à n éléments et x un élément fixé de N. Soit aussi $N' := N\backslash\{x\}$, qui est un ensemble à $(n-1)$ éléments. Pour partitionner l'ensemble N en k groupes en se servant des partitions de l'ensemble N', il y a deux et seulement deux façons possibles (et complémentaires),

◦ Ou bien, on partitionne l'ensemble N' en ($k-1$) groupes et on considère le singleton $\{x\}$ comme le k^{me} groupe de la partition voulue de N. On obtient ainsi $P(n-1,k-1)$ de telles partitions de N en k groupes.

◦ Ou bien, on partitionne l'ensemble N' en k groupes (donc $P(n-1,k)$ possibilités) et on intègre l'élément x de N dans l'un de ces k groupes (donc k choix possibles pour x). Et l'on obtient ainsi $kP(n-1,k)$ de telles partitions de N en k groupes.

Au total, on obtient donc $P(n-1,k-1) + kP(n-1,k)$ partitions de N en k groupes. D'ou

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + kP(n-1,k).$$

D'aprés l'hypothése de récurrence, on a $P(n-1,k-1) = S(n-1,k-1)$ et$P(n-1,k) = S(n-1,k)$, il en résulte que,

$$P(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) = S(n,k),$$

(en vertu de la proposition 2.2.2).
Ceci achève cette démonstration.

Exemple 2.2.3 *Calculons $S(5,4)$ en se servant uniquement du sens combinatoire des nombres de Stirling de seconde espèce. Soit N l'ensemble à 5 éléments $N := \{a,b,c,d,e\}$. Les partitions de N en 4 groupes N_1, N_2, N_3, N_4 (tous non vides et deux à deux disjoints) sont les suivantes,*

$$\begin{aligned}
\wp_1 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{c\}, N_4 &= \{d,e\};\\
\wp_2 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{d\}, N_4 &= \{c,e\};\\
\wp_3 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{b\}, N_3 = \{e\}, N_4 &= \{c,d\};\\
\wp_4 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{d\}, N_4 &= \{b,e\};\\
\wp_5 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{e\}, N_4 &= \{b,d\};\\
\wp_6 : N_1 = \{a\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 &= \{b,c\};\\
\wp_7 : N_1 = \{b\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{d\}, N_4 &= \{a,e\};\\
\wp_8 : N_1 = \{b\}, N_2 = \{c\}, N_3 = \{e\}, N_4 &= \{a,d\};\\
\wp_9 : N_1 = \{b\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 &= \{a,c\};\\
\wp_{10} : N_1 = \{c\}, N_2 = \{d\}, N_3 = \{e\}, N_4 &= \{a,b\};
\end{aligned}$$

(Noter que l'ordre des groupes N_i $(1 \leq i \leq 4)$ n'est pas important).
Le nombre de partitions de N en 4 groupes est donc égale à 10 ; d'où

$$S(5,4) = 10.$$

C'est bien le même résultat qui figure dans le triangle des nombres $S(n,k)$.

Chapitre 3

Une nouvelle généralisation des nombres de Stirling de première espèce

Introduction

Les nombres de Stirling de première espèce notés $c(n,k)$ ou $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$(voir, [27]) qui ont une interprétation combinatoire : pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ la quantité $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le nombre de permutations de $[n]$ avec exactement k cycles, sont définis comme on a vu dans le deuxième chapitre, par les conditions initiales,

$$c(n,0) = \delta_{n,0}, c(0,k) = \delta_{k,0},$$

et la relation de récurrence

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k). \tag{3.1}$$

Ils sont également considérés comme les coefficients du produit suivant

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k. \tag{3.2}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors son q-analogue standard est,

$$[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1},$$

et son p,q-analogique standard est,

$$[n]_{p,q} = p^{n-1} + p^{p-2}q + \cdots + q^{n-1},$$

où $[0]_q = [0]_{p,q} = 0$.

On peut donc définir les nombres q-Stirling (resp. nombres p, q-Stirling) de première espèce $c_q[n,k]$ (resp. $c_{p,q}[n,k]$) en utilisant un q-analogue (resp. p,q-analogue) de équation 3.1

$$c_q[n,k] = c_q[n-1,k-1] + [n-1]_q c_q[n-1,k], \tag{3.3}$$

$$c_{p,q}[n,k] = c_{p,q}[n-1,k-1] + [n-1]_{p,q} c_{p,q}[n-1,k], \tag{3.4}$$

où $c_q[0,k] = c_{p,q}[0,k] = \delta_{0,k}$.

Récemment,

Une extension naturelle du coefficient bi^{s}nomiale est le coefficient q- bi^{s}nomiale , qui satisfait la récursivité suivante

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^{s} q^{(n-1)j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)}, \tag{3.5}$$

et qui apparaissent comme les coefficients du produit suivant

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j z + \cdots + (q^j z)^s) = \sum_{k \geqslant 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} z^k. \tag{3.6}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [4, 2, 9]

Définition 3.0.1 *Soit $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ un ensemble de variables dénombrable infini. La fonction symétrique élémentaire de degré k en $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est définie par*

$$e_k(n) := e_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

où $e_0(n) = 1, e_k(0) = \delta_{0,k}$ et $e_k(n) = 0$ sauf si $0 \leqslant k \leqslant n$.

Alors pour $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$e_k(n) = e_k(n-1) + x_n e_{k-1}(n-1). \tag{3.7}$$

Pour plus de détails, voir par exemple [29, 39]

Les nombres de Stirling de premier espèce avec leurs analogues peuvent être exprimés comme spécialisations de la fonction symétrique élémentaire

$$\begin{aligned} c(n,k) &= e_{n-k}(1, 2, \cdots, n-1), \\ c_q[n,k] &= e_{n-k}([1]_q, [2]_q, \cdots, [n-1]_q), \\ c_{p,q}[n,k] &= e_{n-k}([1]_{p,q}, [2]_{p,q}, \cdots, [n-1]_{p,q}). \end{aligned}$$

Dans[4], Bazeniar et al. a proposé une nouvelle fonction symétrique pour interpréter les coefficients bi^{s}nomial et leurs analogues. Cette fonction est une généralisation de la fonction symétrique élémentaire donnée comme suit,

$$E_k^{(s)}(n) := E_k^{(s)}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k \\ 0\leqslant \alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n \leqslant s}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \tag{3.8}$$

où $E_0^{(s)}(n) = 1, E_k^{(s)}(n) = 0$ à moins que $0 \leqslant k \leqslant s_n$, et satisfait la relation récurrente,

$$E_k^{(s)}(n) = \sum_{j=0}^{s} x_n^j E_{k-j}^{(s)}(n-1). \tag{3.9}$$

Si $s \geqslant k$ alors $E_k^{(s)}(n)(x_1, \cdots, x_n)$ est la fonction symétrique homogène complète.
Pour illustrer,

$$E_4^{(2)}(3) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2.$$

En utilisant cette fonction et cette relation 3.9, une simple induction prouve.

1. $E_k^{(s)}(1, 1, \cdots, 1) = \binom{n}{k}_s,$
2. $E_k^{(s)}(1, q, \cdots, q^{n-1}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)},$

Les fonctions symétriques généralisées $E_k^{(s)}$ ne sont pas essentiellement un nouveau généralisation des fonctions symétriques élémentaires e_k . Une définition équivalente de ces fonctions symétriques existent déjà dans l'article de Doly et Walker [16]avec un autre nom appelé fonction symétrique complète modulaire. Fu et Mei [22] et Grinberg[25] ont indépendamment introduit la fonction symétrique généralisation $E_k^{(s)}$. Grinberg a appelé ces fonctions les fonctions symétriques de Patrie tandis que Fu et Mei les appelaient des fonctions symétriques homogènes tronquées.

3.1 Nombre de Stirling généralisé de première espèce

Dans cette partie, nous proposons une généralisation des nombres de Stirling de première espèce en utilisant la fonction symétrique définie dans 3.8, à laquelle on donne une récurrence et une fonction génératrice ordinaire.

Définition 3.1.1 *Pour tout $n \geq 0$ on note $c^{(s)}(n, k)$ les nombres de Stirling généralisés de première espèce, qui sont donnés par les conditions initiales,*

$$c^{(s)}(n, 0) = \delta_{n,0}, c^{(s)}(0, k) = \delta_{0,k},$$

et la relation de récurrence,

$$c^{(s)}(n, k) = \sum_{j=0}^{s} (n-1)^j c^{(s)}(n-1, k-s+j), \tag{3.10}$$

où $c^{(s)}(n, k) = 0$ sauf si $s \leqslant k \leqslant sn$. Comparer cette définition avec la fonction symétrique élémentaire généralisée $E_k^{(s)}$ et la relation 3.9, on trouve une induction simple.

Proposition 3.1.1 *Pour $n \geqslant 1$ et $s \leqslant k \leqslant sn$,*

$$c^{(s)}(n,k) = E^{(s)}_{sn-k}(1,2,\cdots,n-1). \tag{3.11}$$

Ces nombres, comme pour les nombres de Stirling classique de première espèce, sont construits à travers le premier triangle de Stirling, dit "le premier triangle s-Stirling".
Comme illustration de la relation de récurrence 3.10, nous établissons le premier 2-Stirling Triangle.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	0	1								
2	0	0	1	1	1						
3	0	0	4	6	7	3	1				
4	0	0	36	66	85	54	25	6	1		
5	0	0	576	1200	1660	1270	701	250	65	10	1

Table 3.1 – Le premier triangle 2-Stirling $c^{(2)}(n,k)$.

D'après la relation 3.10, nous montrerons ci-dessous que $c^{(s)}(n,k)$ est le coefficient du k-ième terme du produit suivant.

Théorème 3.1.1 *On a,*

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x^s + jx^{s-1} + \cdots + j^{s-1}x + j^s) = \sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n,k)x^k.$$

Preuve 3.1.1 *En prenant $n = 1$, on a*

$$x^s = 0 + 0 \times x + \cdots + 0 \times x^{s-1} + 1 \times x^s = \sum_{k=0}^{s} c^{(s)}(1,k)x^k.$$

Supposons que cette hypothèse soit vraie pour n. On montre qu'elle reste vraie pour $n+1$

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{n}(x^s + jx^{s-1} + \cdots + j^{s-1}x + j^s) &= \sum_{j=0}^{s} n^j x^{s-j} \sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n,k)x^k, \\
&= \sum_{k=0}^{s(n+1)} \left[\sum_{j=0}^{s} n^j c^{(s)}(n,k-s+j)\right] x^k, \\
&= \sum_{k=0}^{s(n+1)} c^{(s)}(n+1,k)x^k.
\end{aligned}$$

Par conséquent, par hypothèse d'induction et relation 3.10 , la preuve est achevée.
Maintenant, nous sommes en mesure de donner le lien entre ces nombres et le nombre de Stirling de première espèce.

Théorème 3.1.2 *On a,*

$$c^{(s)}(n,k) = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} \left[\prod_{r=1}^{s} c(n,j_r)\right] a^{\sum_{r=1}^{s} rj_r},$$

où $a = e^{i\frac{2\Pi}{s+1}}$.

Preuve 3.1.2 *pour* $a = e^{i\frac{2\Pi}{s+1}}$ *, on voit que*

$$1 + x + \cdots + x^s = \prod_{r=1}^{s} (x - a^r).$$

Donc d'après le théorème 3.1.1, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n,k)x^k &= \prod_{j=0}^{n-1} (x^s + jx^{s-1} + \cdots + j^{s-1}x + j^s) \\
&= x^{sn} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \left(\frac{j}{x}\right) + \cdots + \left(\frac{j}{x}\right)^{s-1} + + \left(\frac{j}{x}\right)^{s}\right) \\
&= x^{sn} \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{r=1}^{s} \left(\frac{j}{x} - a^r\right) \\
&= \prod_{r=1}^{s} \prod_{j=0}^{n-1} (j - a^r x).
\end{aligned}$$

Il résulte de la relation 3.2 que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{sn} c^{(s)}(n,k)x^k &= \prod_{r=1}^{s} \sum_{k=0}^{n} c(n,k)(-a^r x)^k \\
&= \sum_{j_1=0}^{n} c(n,j_1)(-1)^{j_1} a^{j_1} x^{j_1} \times \cdots \times \sum_{j_s=0}^{n} c(n,j_s)(-1)^{j_s} a^{sj_s} x^{j_s} \\
&= \sum_{k=0}^{sn} \left[\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} c(n,j_1) \times \cdots \times c(n,j_s)(-1)^k a^{\sum_{r=1}^{s} rj_r}\right] x^k
\end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons

$$c^{(s)}(n,k) = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k} \prod_{r=1}^{s} c(n,j_r) a^{\sum_{r=1}^{s} rj_r}.$$

3.2 Interprétations combinatoires

Les nombres de Stirling de première espèce comptent les permutations de $[n]$ avec k cycles, nous donnons dans cette section une interprétation similaire à celle du nombre de Stirling de première espèce. Ici, les maxima de cycle d'une permutation sont les nombres qui sont les plus grands dans leurs cycles. Par exemple, si $\pi = (1,3,5)(2,6,8)(7)(4,9)(10)$ est une permutation dans S_{10}, alors les maximas de cycle sont $5, 7, 8, 9$ et 10.

Définition 3.2.1 *Le s-uplet de permutation de Stirling généralisé de longueur n est un s-tuple ordonné $(\pi_1, \cdots, \pi_s)$ avec $\pi_1, \cdots, \pi_s \in S_n$ pour lequel les deux conditions sont vérifiées.*

1. *Pour chaque j, $1 \leqslant j \leqslant s-1$, le nombre de cycles dans π_j est supérieur ou égal au nombre de cycles dans π_{j+1}.*
2. *Pour chaque j, $1 \leqslant j \leqslant s-1$, le maxima de cycle de π_{j+1} est inclus dans le maxima de cycle de π_j.*

Exemple 3.2.1 *Pour $n = 3$ et $s = 2$, les possible permutations de Stirling généralisée des paires (π_1, π_2) de longueur 3 sont,*

$$(123, 123) - (123, 132) - (132, 123) - (132, 132) - ((1)(23), 123) - ((1)(23), 132)-$$
$$((13)(2), 123) - ((13)(2), 132) - ((12)(3), 123) - ((12)(3), 132) - ((1)(2)(3), 123)-$$
$$((1)(2)(3), 132) - ((12)(3), (12)(3)) - ((13)(2), (13)(2)) - ((1)(23), (1)(23))-$$
$$((13)(2), (12)(3)) - ((12)(3), (13)(2)) - ((1)(2)(3), (12)(3)) - ((1)(2)(3), (13)(2))-$$
$$((1)(2)(3), (1)(23)) - ((1)(2)(3), (1)(2)(3)).$$

Théorème 3.2.1 *Pour $n \geqslant 1$ et $s \leqslant k \leqslant s_n$. Le nombre de s-uplets de permutation $(\pi_1, \cdots, \pi_S)$ de Stirling généralisés de longueur n ayant ensemble exactement k cycles est $c^{(s)}(n, k)$.*

Preuve 3.2.1 *Soit $p^{(s)}(n, k)$ le nombre des s-uplets de permutations du Stirling généralisés $(\pi_1, \ldots, \pi_s)$ de longueur n ayant ensemble exactement k cycles. Il est clair que,*

$$p^{(s)}(n, 0) = \delta_{n,0} \text{ et } p^{(s)}(0, k) = \delta_{0,k},$$

*donc en vertu de la relation (**??**) il suffit de montrer que si $n > 0$ et $k > 0$ alors,*

$$p^{(s)}(n, k) = p^{(s)}(n-1, k-s) + \sum_{j=1}^{s} (n-1)^j p^{(s)}(n-1, k-s+j). \tag{3.12}$$

*Pour un s-uplets $(\pi_1, \ldots, \pi_s)$ de permutations du s-Stirling de longueur n, le 1 est un point fixe dans π_s si et seulement s'il s'agit d'un point fixe dans chaque $\pi_i \in \{\pi_1, \ldots, \pi_{s-1}\}$(condition 2 de la définition **??**). Les s-uplets $(\pi_1, \ldots, \pi_s)$ dans lequel le 1 est un point fixe dans chaque $\pi_i \in \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ sont en bijection avec les s-uplets $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ de longueur $n-1$ ayant ensemble exactement $k-s$ cycles en supprimant le 1 de chaque permutation et en diminuant toutes les autres entrées de 1, c'est le nombre $p^{(s)}(n-1, k-s)$. Chaque s-uplets $(\pi_1, \ldots, \pi_s)$ dans lequel le 1 est un point fixe uniquement dans $\pi_i \in \{\pi_1, \ldots, \pi_{s-j}\}$ peut être construit uniquement en choisissant s-uplet $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ de longueur $n-1$ ayant ensemble $k-(s-j)$ cycles, augmentant chaque entrée de chaque permutation de 1 et insérant le 1 comme point fixe dans chaque permutation $\sigma_i \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-j}\}$ et comme nouvelle entrée dans chaque permutation $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1}, \ldots, \sigma_s\}$. Il y a un une seule façon d'insérer le 1 comme point fixe dans chaque permutation $\sigma_i \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{s-j}\}$, et il existe $(n-1)^j$ façons d'insérer le 1 comme nouvelle entrée dans chaque permutation $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1}, \ldots, \sigma_s\}$, c'est le nombre $(n-1)^j p^{(s)}(n-1, k-s+j)$. Ainsi la relation (3.12) est vérifiée.*

Proposition 3.2.1 *Nous avons,*

1. $c^{(s)}(n,s) = [(n-1)!]^s = [c(n,1)]^s$;
2. $c^{(s)}(n,s+1) = [(n-1)!]^{s-1}c(n,2) = [(n-1)!]^s H^{n-1}$ *où* H^{n-1} *est le* $(n-1)$*-ième Numéro d'harmonique ;*
3. $c^{(s)}(n,sn) = 1$;
4. $c^{(s)}(n,sn-1) = c(n,n-1) = \binom{n}{2}$;
5. *Pour* $n \geqslant 2, \sum_{k=0}^{sn}(-1)^{sn-k}c^{(s)}(n,k) = 0$ *si* s *impair ;*
6. $\left[\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}\right] = n \times c^{(2)}(n,2)$.

Preuve 3.2.2 1. *Pour chaque permutation* $\pi_i \in \pi_1, \ldots, \pi_s.$ *, il y a* $(n-1)!$ *façons de permuter* π_i *en un seul cycle. Ainsi, il y a*

$$c^{(s)}(n,s) = [(n-1)!]^s = [c(n,1)]^s$$

façons de permuter $\pi_1, \ldots, \pi_s$ *ensemble en* s *cycles.*

2. *Il est facile de voir que* π_1 *a exactement deux cycles et chaque* $\pi_i \in \pi_1, \ldots, \pi_s$ *a un cycle car* $\pi_1, \pi_2, \ldots$ *et* π_s *ont ensemble exactement* $s+1$ *cycles. Par conséquent, il existe* $c(n,2)$ *façons de permuter* π_1 *en deux cycles et* $(n-1)!$ *façons de permuter chaque* $\pi_i \in \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ *en un cycle. Ainsi,*

$$c^{(s)}(n,s+1) = [(n-1)!]^{s-1}c(n,2),$$

puisque $c(n,2) = (n-1)!H_{n-1}$ *on obtient*

$$c^{(s)}(n,s+1) = [(n-1)!]^s H_{n-1}$$

3. *La preuve que* $c^{(s)}(n,sn) = 1$ *est triviale puisque chaque* $\pi_i \in \pi_1, \cdots, \pi_s$ *a exactement* n *cycles.*

4. *Chaque* $\pi_i \in \{\pi_1, \ldots, \pi_{s-1}\}$ *a* n *cycles et* π_s *a* $n-1$ *cycles car* $\pi_1, \pi_2, \ldots$ *et* π_s *ont ensemble exactement* $sn-1$ *cycles. Par conséquent, par 3 il y a une seule façon de permuter tous les* $\pi_i \in \pi_1, \cdots, \pi_{s-1}$ *ensemble en* $(s-1)n$ *cycles. Et il y a* $c(n,n-1)$ *façons de permuter* π_s *en* $n-1$ *cycles. Ainsi,*

$$c^{(s)}(n,sn-1) = c(n,n-1) = \binom{n}{2}.$$

5. *D'après le théorème 3.1.1, il n'est pas difficile d'avoir*

$$\sum_{k=0}^{sn}(-1)^{sn-k}c^{(s)}(n,k)x^k = x^s\prod_{j=1}^{n-1}(x^s - jx^{s-1} + \cdots + (-1)^s j^s).$$

Par conséquent, pour $n \geq 2$, en fixant $x = 1$ et s impair dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{sn}(-1)^{sn-k}c^{(s)}(n,k) &= 1 \times \prod_{j=1}^{n-1}(1-j+\cdots+(-1)^s j^s)\\ &= 0 \times \prod_{j=2}^{n-1}(1-j+\cdots+(-1)^s j^s)\\ &= 0.\end{aligned}$$

6. *En remplaçant $s = 2$ dans (1) on obtient,*

$$c^{(2)}(n,2) = [(n-1)!]^2.$$

D'autre part, à partir des relations **??** *et* **??**, *nous pouvons voir que*

$$\left[\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}\right] = n!(n-1)! = n[(n-1)!]$$

Ainsi,

$$\left[\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}\right] = n \times c^{(2)}(n,2)$$

La relation entre les nombres de Stirling généralisés pour $s = 2$ et le Les nombres de Legendre-Stirling sont donnés par la proposition suivante.

Proposition 3.2.2 *Le nombre de paires de permutations Legendre-Stirling (σ_1, σ_2) de la longueur n est exactement le nombre de paires de permutations de Stirling généralisées (π_1, π_2) de longueur n,*

$$\sum_{k=0}^{2n} c^{(2)}(n,k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right].$$

Preuve 3.2.3 *D'après la relation* **??** , *on a*

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right] x^k = \prod_{j=0}^{n-1}(x + j(j+1)), \tag{3.13}$$

et en prenant $s = 2$ dans le théorème 3.1.1, on obtient

$$\sum_{k=0}^{2n} c^{(2)}(n,k) = \prod_{j=0}^{n-1}(x^2 + jx + j^2) = \prod_{j=0}^{n-1}(x^2 + j(j+x)). \tag{3.14}$$

Par conséquent, en fixant $x = 1$ dans les relations 3.13 et 3.14 nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{2n} c^{(2)}(n,k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right].$$

3.3 Analogues des nombres de Stirling généralisés

Maintenant, nous sommes en mesure de proposer une définition des analogues de la généralisation de nombre de Stirling de première espèce.

Définition 3.3.1 *Pour tout $n \geqslant 0$ on écrit $c_q^{(s)}[n,k]$ (resp.$c_{p,q}^{(s)}[n,k]$ pour désigner les nombres q-Stirling généralisés (resp. nombres p, q-Stirling) de première espèce, qui sont donnés par les conditions initiales,*

$$c_q^{(s)}[n,0] = c_{p,q}^{(s)}[n,0] = \delta_{n,0}, \qquad c_q^{(s)}[0,k] = c_{p,q}^{(s)}[0,k] = \delta_{0,k}.$$

et les relations de récurrence,

$$c_q^{(s)}[n,k] = \sum_{j=0}^{s} [n-1]_q^j c_q^{(s)}[n-1, k-s+j], \tag{3.15}$$

$$c_{p,q}^{(s)}[n,k] = \sum_{j=0}^{s} [n-1]_{p,q}^j c_{p,q}^{(s)}[n-1, k-s+j], \tag{3.16}$$

où $c_q^{(s)}[n,k] = c_{p,q}^{(s)}[n,k] = 0$ sauf si $s \leqslant k \leqslant sn$.

Ces nombres, comme les nombres de Stirling généralisés de première espèce, sont construits à travers le premier triangle s-Stirling, connu sous le nom de « q-analogue (resp. p,q-analogue) de première triangle s-Stirling ». Comme illustration de la relation de récurrence 3.15, nous établissons le q-analogue du premier triangle 2-Stirling.

n/k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	0	1				
2	0	0	1	1	1		
3	0	0	$1+2q+q^2$	$2+3q+q^2$	$3+3q+q^2$	$2+q$	1

Table 3.2 – Le q-analogue du premier triangle 2-Stirling.

De même pour la relation de récurrence 3.16 , nous établissons le p,q-analogue du premier 2-Triangle de Stirling.

n/k	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	0	1		
2	0	0	1	1	1
3	0	0	$p^2+2pq+q^2$	$p^2+2pq+q^2+p+q$	$p^2+2pq+q^2+p+q+1$

Table 3.3 – Le p,q-analogue du premier triangle 2-Stirling.

Comparant la définition 3.3.1 avec la fonction symétrique élémentaire généralisée $E_k^{(s)}(n)$ et la relation 3.15 (resp. 3.16) et par une induction simple on aura la proposition suivante.

Proposition 3.3.1 *Pour $n \geqslant 1$ et $s \leqslant k \leqslant sn$,*

$$c_q^{(s)}[n,k] = E_{sn-k}^{(s)}\left([1]_q, [2]_q, \cdots, [n-1]_q\right), \tag{3.17}$$

$$c_{p,q}^{(s)}[n,k] = E_{sn-k}^{(s)}\left([1]_{p,q}, [2]_{p,q}, \cdots, [n-1]_{p,q}\right). \tag{3.18}$$

Remarque 3.3.1 *Le nombre q-Stirling généralisé (resp.p, q-Stirling) de première espèce $c_q^{(s)}[n,k]$ (resp. $c_{p,q}^{(s)}[n,k]$ est défini comme étant la somme des produits possibles $\binom{n-1}{sn-k}_s$, chaque facteur apparaît au plus s fois dans un produit différent, ce qui peut être formé à partir des premiers $(n-1)$ q-nombres naturels $[1]_q, [2]_q, \cdots, [n-1]_q$ (resp.,p, q-nombres naturels $[1]_{p,q}, [2]_{p,q}, ..., [n-1]_{p,q}$).*
Pour illustrer,

$$c_q^{(2)}[3,2] = [1]_q^2[2]_q^2; \qquad c_q^{(2)}[3,3] = [1]_q^2[2]_q + [1]_q[2]_q^2;$$

$$c_q^{(2)}[3,4] = [1]_q^2 + [2]_q^2 + [1]_q[2]_q; \qquad c_q^{(2)}[3,5] = [1]_q + [2]_q; \qquad c_q^{(2)}[3,6] = 1.$$

De plus, les résultats suivants apparaissent comme des analogues naturels du théorème 3.1.1.

Théorème 3.3.1 *On a,*

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x^s + [j]_q x^{s-1} + \cdots + [j]_q^{s-1}x + [j]_q^s) = \sum_{k=0}^{sn} c_q^{(s)}[n,s]x^k,$$

$$\prod_{j=0}^{n-1}(x^s + [j]_{p,q} x^{s-1} + \cdots + [j]_{p,q}^{s-1}x + [j]_{p,q}^s) = \sum_{k=0}^{sn} c_{p,q}^{(s)}[n,s]x^k.$$

Preuve 3.3.1 *D'après les relations 3.17 et 3.18 données dans la proposition 3.3.1, on utilise la même méthode de la preuve proposée dans le théorème 3.1.1.*
La méthode de preuve utilisée dans le théorème 3.1.2 peut être appliquer à leurs analogues.

Théorème 3.3.2

$$c_q^{(s)}[n,k] = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\left[\prod_{r=1}^{s} c_q[n,j_r]\right] a^{\sum_{r=1}^{s} rj_r},$$

$$c_{p,q}^{(s)}[n,k] = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\left[\prod_{r=1}^{s} c_{p,q}[n,j_r]\right] a^{\sum_{r=1}^{s} rj_r},$$

où $a = e^{i\frac{2\pi}{s+1}}$.

3.4 Interprétation combinatoire du nombre q-Stirling généralisé

Les nombres q-Stirling de première espèce $c_q(n,k)$ sont introduits par Gould [24], et interprétée comme fonction génératrice de la statistique d'inversion sur les cycles des permutations par Gessel [23]. En utilisant la même statistique, nous donnons dans cette section l'interprétation combinatoire et quelques identités pour les analogues des nombres de Stirling généralisés de première espèce.
Nous savons que les minimas de cycle d'une permutation données sont les nombres qui sont les plus petits dans leurs cycles. Par exemple, si $\pi = (1,3,5)(2,6,8)(7)(4,9)$ est une permutation dans S_9, écrite en notation de cycle, alors ses minimas de cycle sont $1, 2, 4$ et 7.

Pour $\pi = p_1 \dots p_n \in \mathcal{G}_n$ le nombre d'inversions est $inv(\pi) = \{(i,j) : i < j \text{ et } p_i > p_j\}$ où $\mathcal{G}_n$ est le groupe de permutations sur n éléments. La statistique d'inversion dans l'histoire remonte aux travaux de **Cramer** (1750),**B Lezout** (1764) et **Laplace** (1772). Voir la discussion dans [[28], page 92]. Netto a énuméré les éléments du groupe symétrique par la statistique d'inversion en 1901 [[28], Chapitre 4, Sections 54 et 57], et en 1916 MacMahon [[34], page 318] a donné le développement q-factoriel

$$\sum_{\pi \in \varrho_n} q^{inv(\pi)} = [n]_q!.$$

Maintenant, avant de donner la formule de q-Stirling généralisé. Procédant en premier lieu, à un arrangement dont les quelles les cycles de chaque permutation π_i donnée dans la définition **??**, seront organisés dans l'ordre croissant de gauche à droite selon les minimas de chaque cycle. En deuxième lieu, après avoir supprimé les parenthèses des cycles, on considère tous les cycles de chaque $\pi_i \in (\pi_1, \dots, \pi_s)$ comme un seul cycle et on note ces nouvelles permutations par $\pi_i^{(\leq,c)}$.

Exemple 3.4.1 *Pour la permutation* $\pi = (1,3,5)(2,6,8)(7)(4,9)$ *on a* $\pi^{(\leq,c)} = 135268497$.

Définition 3.4.1 *Soit $\hbar_s(n,m)$ l'ensemble de toutes les permutations s-uplets de type $\left(\pi_1^{(\leq,c)}, \cdots, \pi_s^{(\leq,c)}\right)$ associé à toutes les permutations de Stirling généralisées s-tuples $(\pi_1, \cdots, \pi_s)$ de longueur n ayant ensemble exactement m cycles.*

Théorème 3.4.1 *Pour $n \geq 1$ et tout k avec $s \leq k \leq sn$. Le nombre généralisé du q-Stirling de première espèce $c_q^{(s)}[n,k]$ est donné par*

$$c_q^{(s)}[n,k] = \sum_{\left(\pi_1^{(\leq,c)}, \cdots, \pi_s^{(\leq,c)}\right) \in \hbar_s(n,k)} q^{\sum_{t=1}^{s} inv\left(\pi_t^{(\leq,c)}\right)},$$

où la somme est sur toutes les permutations s-tuples $\left(\pi_1^{(\leq,c)}, \cdots, \pi_s^{(\leq,c)}\right)$ associée avec toutes les permutations de Stirling généralisées s-uplets $(\pi_1, ..., \pi_s)$ de longueur n ayant ensemble exactement k cycles.

Preuve 3.4.1 *En vertu de la relation (**??**) il suffit de montrer que si $n > 0$ et$k \geq s$ alors*

$$\sum_{\left(\pi_1^{(\leq,c)},\ldots,\pi_s^{(\leq,c)}\right)\in\mathcal{Q}(n,k)} q^{\sum_{i=1}^{s} inv\left(\pi_i^{(\leq,c)}\right)} = c_q^{(s)}[n-1,k-s] + \sum_{j=1}^{s}[n-1]_q^j c_q^{(s)}[n-1,k-s+j].$$

*Pour ce faire, notons d'abord que par la condition 2 de la définition **??**, si $(\pi_1,\ldots,\pi_s)$ est une permutation généralisée des s-tuples du Stirling de longueur n alors, n est un point fixe dans π_s ssi il est un point fixe dans $\pi_i \in \{\pi_1,\ldots,\pi_{s-1}\}$. Les s-tuples $(\pi_1,\ldots,\pi_s)$ dont lequel n est un point fixe dans chaque $\pi_i \in \{\pi_1,\ldots,\pi_s\}$, sont en bijection avec s-tuples $(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)$ de longueur $n-1$ qui ont simultanément $k-s$ cycles, cela se fait en supprimant n de chaque permutation. Donc, par la définition **??** les s-tuples $\left(\pi_1^{(\leq,c)},\ldots,\pi_s^{(\leq,c)}\right)$ de longueur n sont aussi en bijection avec $\left(\sigma_1^{(\leq,c)},\ldots,\sigma_s^{(\leq,c)}\right)$ de longueur $n-1$ ce qui conclure le nombre $c_q^{(s)}[n-1,k-s]$. Chaque s-tuple $(\pi_1,\ldots,\pi_s)$ dont lequel n est un point fixe seulement dans $\pi_i \in \{\pi_1,\ldots,\pi_{s-j}\}$ peut être construit uniquement en choisissant s-tuple $(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)$ de longueur $n-1$ qui ont simultanément $k-(s-j)$ cycles, se faisait par l'insertion du n comme point fixe dans chaque permutation $\sigma_i \in \{\sigma_1,\ldots,\sigma_{s-j}\}$ et comme une nouvelle entrée dans $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1},\ldots,\sigma_s\}$. On compte $c^{(s)}(n-1,k-s+j)$ s-tuples $(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)$ et donc on déterminera $\left(\sigma_1^{(\leq,c)},\ldots,\sigma_s^{(\leq,c)}\right)$ s-tuples $(\sigma_1,\ldots,\sigma_s)$ par $c_q^{(s)}[n-1,k-s+j]$, par ailleurs il existe une seule façon d'insérer n comme point fixe dans chaque $\sigma_i \in \{\sigma_1,\ldots,\sigma_{s-j}\}$ cela implique le poids total de n dans $\left(\sigma_1^{(\leq,c)},\ldots,\sigma_{s-j}^{(\leq,c)}\right)$ est $q^{\overbrace{0+\cdots+0}^{s-j\ times}} = 1$, ensuite il y a aussi $(n-1)^j$ façon d'insérer n comme une nouvelle entrée dans $\sigma_i \in \{\sigma_{s-j+1},\ldots,\sigma_s\}$, cela implique le poids total de n dans $\sigma_i^{(\leq,c)} \in \left\{\sigma_{s-j+1}^{(\leq,c)},\ldots,\sigma_s^{(\leq,c)}\right\}$ est $1+q+\cdots+q^{n-2} = [n-1]_q$. Le nombre total de toutes les permutations $\left(\sigma_{s-j+1}^{(\leq,c)},\ldots,\sigma_s^{(\leq,c)}\right)$ est $[n-1]_q^j$. On résume que la relation (**??**) est construite.*

Exemple 3.4.2 *De l'exemple 3.2.1, les paires de permutations de Stirling généralisées (π_1,π_2) de longueur 3 ayant ensemble trois cycles sont*

$$((1)(23),123)-((1)(23),132)-((13)(2),123)-((13)(2),132)-((12)(3),123)-((12)(3),132).$$

Alors les paires de permutation $\left(\pi_1^{(\leq,c)},\pi_2^{(\leq,c)}\right)$ sont,

$$(123,123)-(123,132)-(132,123)-(132,132)-(123,123)-(123,132).$$

Ainsi,
En fixant $s=1$, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 3.4.1 *[23]*

Les nombres q-Stirling de première espèce $c_q[n,k]$ sont donnés par,

$$c_q[n,k] = \sum_{\pi^{(\leq,c)} \in \hbar(n,k)} q^{inv\left(\pi^{(\leq,c)}\right)}, \tag{3.19}$$

où la somme est sur toutes les permutations $\pi^{(\leq,c)}$ associées à π de longueur n ayant exactement k cycles.

Le p,q-analogue des nombres de Stirling généralisés de première espèce $c_{p,q}^{(s)}[n,k]$ ont l'interprétation combinatoire suivante.

Théorème 3.4.2 *Pour $n \geq r$ et tout k avec $sr \leq k \leq sn$. Le p,q-analogue du nombre de Stirling généralisé de première espècee $c_{p,q}^{(s)}[n,k]$ est donné par,*

$$c_{p,q}^{(s)}[n,k] = \sum_{\left(\pi_1^{(\leq,c)},\cdots,\pi_s^{(\leq,c)}\right) \in \hbar_s(n,k)} p^{\sum_{i=1}^{s} coinv'\left(\pi_i^{(\leq,c)}\right)} q^{\sum_{i=1}^{s} inv\left(\pi_i^{(\leq,c)}\right)}, \tag{3.20}$$

où $coinv'\left(\pi^{(\leq,c)}\right) = coinv\left(\pi^{(\leq,c)}\right) - (n-1)$.

Preuve 3.4.2 *Approche et arguments similaires donnés dans la preuve du théorème 3.4.1.*

Exemple 3.4.3 *Pour les paires de permutations,*

$((1)(23),123) - ((1)(23),132) - ((13)(2),123) - ((13)(2),132) - ((12)(3),123) - ((12)(3)132)$

de $\left(\pi_1^{(\leq,c)}, \pi_2^{(\leq,c)}\right)$ donné dans l'exemple 3.2.1, on a

$$\begin{aligned} c_{p,q}^{(2)} &= p^{coinv'(123)+coinv'(123)} q^{inv(123)+inv(123)} + p^{coinv'(123)+coinv'(132)} q^{inv(123)+inv(132)} \\ &+ p^{coinv'(132)+coinv'(123)} q^{inv(132)+inv(123)} + p^{coinv'(132)+coinv'(132)} q^{inv(132)+inv(132)} \\ &+ p^{coinv'(123)+coinv'(123)} q^{inv(123)+inv(123)} + p^{coinv'(123)+coinv'(132)} q^{inv(123)+inv(132)} \\ &= p^2 + q^2 + 2pq + p + q. \end{aligned}$$

Semblable à la proposition 3.2.1 , il est facile de voir à partir du théorème 3.4.1, du théorème 3.4.2 et Théorème 3.3.1 que les analogues des nombres de Stirling généralisés satisfont à la identités suivantes.

Proposition 3.4.1 *on a,*

(i) $c_q^{(s)}[n,s] = [[n-1]_q!]^s = [c_q[n,1]]^s$,

(ii) $c_{p,q}^{(s)}[n,s] = [[n-1]_{p,q}!]^s = [c_{p,q}[n,1]]^s$,

(iii) $c_q^{(s)}[n,sn] = c_{p,q}^{(s)}[n,sn] = 1$,

(iv) Pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{sn} (-1)^{sn-k} c_q^{(s)}[n,k] = 0$ *si s impair.*

Conclusion généréle

Dans ce travail nous avons étudient une nouvelle généralisation des nombres de stirling de première espèce en utilisant les fonctions symétrique élémentaires. Comme premier résultat, on a présenté une extension des nombres de stirling de première espèce et leurs analogues. De plus, on a pu determiner une un relation de récurrence $c^{(s)}(n,k) = \sum_{j=0}^{s}(n-1)^j c^{(s)}(n-1, k-s+j)$. On a, de même, utilisé la fonctions symétriques élémentaires généralisée $E_k^{(s)}$ pour interpreter les nombres de stirling généralisés de première espèce $c^{(s)}(n,k)$ ainsi leurs interprétations comminatoires. En fin, les analogues des nombres de stirling généralisés de première espèce ont été abordés.

Parmi les questions et les travaux qui peuvent être présentés comme des perspectives et qu'on souhaite les abordés dans l'avenir on y trouve :

► établir le même travail pour les nombres de stirling de deuxième espèce.
► Peut- on établir une généralisation de la fonctions symétriques complètes, comme on a fait pour l'élémentaire ?

Bibliographie

[1] G.E. Andrews, L.L. Littlejohn, A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009) 2581-2590.

[2] G.E. Andrews, J. Baxter, Lattice gas generalization of the hard hexagon model III q-trinomials coeffcients, Journal of Statistical Physics. 47 (1987) 297-330.

[3] Tom M. Apostol, Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Springer 1990.

[4] A. Bazeniar, M. Ahmia, H. Belbachir, Connection between bisnomial coeffcients with their analogs and symmetric functions, Turkish Journal of Mathematics. 42 (2018) 807-818.

[5] B.Baumslag et B. Schaum's, Outline of theory and Problems of Group Theory. McGraw-Hill, 1968.

[6] H.Belbachir, S.Bouroubi,A Khelladi, Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution, Annales Mathematicae et Informaticae, 35 (2008) 21-30.

[7] H.Belbachir, Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numérique . **USTHB** Alger, Thése de Doctorat d'Etat en Mathématiques (Décembre 2007).

[8] H.Belbachir, S.Bouroubi,A.Khelladi,connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution, Annales Mathematicae et Informaticae, 35(2008)21-30.

[9] H. Belbachir, A. Benmezai, A q-analogue for bisnomial coefficients and generalized Fibonacci sequences, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series I. 352 (2014) 167-171.

[10] F.Bergeron, Introduction à la combinatoire algébrique, UQAM université du Québec à Montréal, 2015.

[11] B.A. Bondarnenko, Generatized Pascal triangles and Pyramids, their fractals, graphs and applications, The Fibonacci Association,Santa Clara (1993),translated from russian by **R.C**.Bollinger.

[12] K. Boubelouta, M. Karada, Some identités and Generating Funtions For Padovan Numbres, Doi : 10. 29371/2019. 16. SI04.

[13] M. Boulyere M. Ghedjan , les fonctions symétrique pour la généralisation des polynômes orthogonaux, Université de Jijel , 2015.

[14] JP. Chabert, Équations Algébriques et Fonctions Symétriques, P. 1-36.

[15] Pierre Cartier, La théorie classique et moderne des fonctions symétriques , Séminaire Bourbaki, (1982-1983)

[16] S. Doty, G. Walker, Modular symmetric functions and irreducible modular representations of general linear groups, J. Pure Appl. Algebra. 82(1), (1992) 1-26.

[17] P.Delahaye, Le groupe symétrique, MPSI Prytanée National Militaire, 10 mai 2017.

[18] E.S. Egge, Legendre-Stirling permutations, European Journal of Combina- torics. 31 (2010) 1735-1750.

[19] B. Farhi , Département de Mathématiques Université de Béjaia Algérie Béjaia, le 22 avril 2014.

[20] B. Farhi, Département de Mathématiques Université de Béjaia Algérie Béjaia, le 11 novembre 2013.

[21] D. Foata et G. Han, Pricipes de combinatoire classique, Cours et exercice corrigés, *Université Louis Pasteur, Strasbourg*, 2008.

[22] H. Fu, Z. Mei, Truncated homogeneous symmetric functions, Linear Multi- linear Algebra. (2020) DOI : 10.1080/03081087.2020.1733460

[23] I.M. Gessel, A q-analog of the exponential formula, Discrete Math. 40 (1982) 69-80.

[24] H.W. Gould, The q-Stirling numbers of the first and second kinds, Duke Math. J. 28 (1961) 281-289.

[25] D. Grinberg, Petrie symmetric functions, arXiv :2004.11194v1.

[26] G.Hains, Groupe symétrique et tableaux Young, Bulletin AMQ, octobre 1983.

[27] D.E. Knuth, Two notes on notation, The American Mathematical Monthly. 99 (1992) 403–422.

[28] I. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Univ Press, Oxford (1979).

[29] P.A. MacMahon, Two applications of general theorems in combinatory analysis, Proceedings of the London Mathematical Society. 15 (1916) 314-321.

[30] Ian G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford University Press, coll. « Oxford Mathematical Monographs », 1979

[31] L. Moura, Recurrence Relations, Winter, 2010.

[32] M. Mansuy, Tableau de Young et bases cristallines de $u_q(sL_{n+1})$,29 Novembre 2012.

[33] Jeffrey B. Remmel, Bijective proofs of some classical partition identities, J. Combin.Theory Ser. A 33 (1982), 273-286.

[34] E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, Chelsea, New York (1901).

[35] J. Riordan, Introduction to combinatorial analysis, 2002.

[36] Herbret S.Wilf, Lecturs On Integer Partitions, University Of Pennsylvania

[37] R.Sahali, W.Rouibah, Certaines Applications sur les Fonctions Symétriques, Mémoire de Master, Université de Jijel,2011.

[38] M. Claude Werquin, Probalités, Institut Galilée, Science et technologie, 2010-2011.

[39] B. Sagan, The symmetric group : representations, combinatorial algo- rithms, and symmetric functions, Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove (1991).

[40] N.J.A. Sloane, The On Line Encyclopedia of Integer Sequences.Published electronically at http ://www.research.att.com/njas/saquences,2014.

[41] A. de Moivre, The doctrine of chances,(first ed.1718 and second ed.1738),reprinted by Chelsea,**N.Y**(1967), Third edition (1756).

[42] A. de Moivre, Miscellanca Analytica de Scrichus et Quadraturis,J.tomson and J.Watts, London,(1731).

[43] S.O.Warnaar, The Andrews-Gordon Identities and q-Multinomial coefficients Commun. Math. phys. 184(1997)203-232.

[44] S.O.Warnaar, Refined Q-trinomial coefficients and charater identities , J.Stat.PHYS.102(2001), no. 3-4, 1065-1081.