



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Stationnarité et existence des moments de la famille des modèles GARCH (1.1)

Préparé par :

- Maouche Ouarda
- Hendous Moufida

Soutenu devant le jury :

- Bouzakria Fahima (MAA)	C.U. Abd Elhafid Boussouf	Président
- Ghezal Ahmed (MCA)	C.U. Abdelhafid Boussouf	Rapporteur
- Zerari Amel (MAA)	C. U. Abdelhafid Boussouf	Examineur

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciement

On tient à remercier avant tout 'Allah' le tout puissant, pour la force, le courage et la volonté qui nous a donné pour arriver à ce que nous sommes aujourd'hui. Avec une grande volupté on remercie tous ceux qui ont contribué à la réalisation de notre thème de recherche particulièrement :

Notre encadreur 'Ghezal Ahmed' d'avoir accepté d'encadrer nous travail avec compétence pour sa patience et pour ses conseils et remarques tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nos sincères considérations et remerciements sont également exprimés aux membres des jury 'Bouzakria Fahima' et 'Zerari Amel' qui nous ont fait honneur par leurs présences et d'avoir accepté d'examiner ce travail et consacrer leurs temps pour son évaluation. A l'en l'ensemble des enseignement ayant assuré mes années d'études, à l'université de Jijel et Mila et dans le travail qu'on présente aujourd'hui consiste en soit même une preuve de leur dévouement.

Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de le loin à l'aboutissement de notre travail.

Dédicace

A l'occasion de remise de diplôme, je dédie cette remise de diplôme a mon père, qui j'ai souhaite parmi nous en ce jour dont la présence me manque, mais je suis sûr qu'il a été très heureux dans sa tombe de ce que j'ai accompli. Je le dédie aussi à ma chère mère à celle qui était fatiguée et me gardait à l'aise et était la raison de ce que je suis maintenant, et dans ces moments je ne peux que remercier la faculté pour ceux qui ont pris l'initiative de nous donner la connaissance en intégralité sans exception.

*Une spéciale dédicace à la famille Maouche mes frères "Karim",
"Hicham", "Khaled", "Aissa" et ma sœur "Amina".*

*Mes frères épouses "Donia", "Khadidja", "Sana" et poussins de la famille
"Mohammed", "Abdellah", "Ibrahim", "Hadil", "Rital" et une spéciale
dédicace à ma grand mère.*

Mes amies "Rania", "Amel", "Samar" et mon binôme "Moufida".

*A ma promotion de Master M.A 2021, merci "**Allah**" et merci beaucoup
pour tous.*

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mes parents qui m'ont encouragé à aller de l'avant et qui m'ont donné tout ses amour pour reprendre mes études. A mon marie qui voila deux ans m'a encouragé à prendre mes études et ma chérie fille Mayar.

A mes oncles Zouhir et Said. A mes frères Hamza, Oussama, Ayoub et Monib.

A mes sœurs Khadidja et son marie Kamel et ses enfants Aness, Adem, Bouchra, Alae et Tawba.

A mes amies : Zineb, Bouchra, Naima, Hassna, Rayan, Samah, Ilham et Samar.

Une spéciale dédicace à tante Samir et ma grande mère Djamila.

A tous les membres de la famille "Hendous" et "Ben aoun".

A mon binôme Ouarda.

Table des matières

Introduction	1
1 Stationnarité stricte et ergodicité de la famille des modèles GARCH(1,1)	6
1.1 Préliminaires	6
1.2 Stationnarité stricte et ergodicité	9
2 Les moments non conditionnels d'une famille des modèles GARCH(1,1)	19
2.1 Le Kurtosis non conditionnel	25
2.2 L'autocorrélation	27
3 Application numérique	33
3.1 Application empirique	33
3.1.1 Description des données	33
3.1.2 Analyse descriptive de la série	34
3.2 Estimation	34
Annexe	36
3.3 Processus stochastique	37
3.4 Matrices	38
3.5 Notions générales	38
Conclusion	39
Bibliographie	41

Introduction

L'analyse des séries temporelles est un outil important qui vise à comprendre et décrire le mécanisme de production de la série d'une part et la prévision des valeurs futures d'autres part, une série chronologique est une suite d'observations indicées par le temps. Pour chaque instant du temps, la valeur de la quantité étudiée X_t est une variable aléatoire, l'ensemble des valeurs quand t varie est appelé processus aléatoire (X_t). La modélisation et la prévision des séries temporelles est un enjeu important dans de nombreux domaines : l'économie, la médecine, le transport, l'écologie et la finance.

Les séries chronologiques peuvent être divisées en deux principales catégories : les processus linéaires et les processus non linéaires. Les modèles linéaires sont basés sur les processus ARMA qui ont fondé sur des combinaisons linéaires de valeurs présentes et passées de chocs. Ils sont utilisés pour la modélisation d'un grand nombre de phénomènes et ils fournissent un ensemble des théories mathématiques permettant de prévoir les valeurs futures de la série. En 1927 Yule a proposé les modèles AutoRegressifs (AR), et dans la même année Slutsky a présenté un modèle Moving Average (MA). La combinaison des deux nous a donné le processus ARMA(p,q) (AutoRegressive Moving Average) qui s'écrit sous la forme suivante [15] :

$$X_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \varphi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

où ϕ_i ($i = 1, \dots, p$) et φ_j ($j = 1, \dots, q$) sont des réelles.

Ces modèles sont fréquemment utilisés à cause notamment de leurs propriétés statistiques qui rendent facile l'inférence statistique, l'estimation, et la prévision (les séries et résidus étant générés par des processus gaussiennes stationnaires). Cependant, ces modèles linéaires ARMA ne permettent pas de prendre en compte d'une part les mécanismes d'asymétrie dans les séries temporelles et d'autre part les contraintes structurelles en

terme de volatilité qui caractérise certains phénomènes étudiés. Pour palier les insuffisances des modèles linéaires ARMA les modèles non linéaires ont été envisagés, plusieurs classes de ces modèles ont été abordés : les modèles bilinéaires, les modèles à seuil, les modèles hétéroscédastiques. L'étude de ces modèles ne cesse pas à progresser de manière significative. Dans ce contexte, Engle (1982) [21] a proposé une nouvelle classe de modèles auto-régressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH) apte à capter le comportement de la volatilité dans le temps, le but est de permettre à la variance de bruit de varier conditionnellement au passé de la série. Le modèle ARCH(q) est défini par les équations :

$$\begin{cases} X_t = h_t \eta_t \\ h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2, \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

où $\omega > 0$, (η_t) est i.i.d(0,1) et $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, q$).

Ce modèle a été largement appliqué dans la modélisation des rendements boursiers et les taux de change, le modèle ARCH suppose que la variance conditionnelle soit une fonction des carrés des innovations passées. L'application de ces modèles sur les séries financière (taux d'inflation, taux de change...) montre que la volatilité change au cours de temps. Cependant, l'introduction d'un grand nombre de retard p dans l'équation de la variance conditionnelle de modèle ARCH(q) est nécessaire pour tenir compte de la mémoire longue de la volatilité qui caractérise certaines séries financières. Ce nombre important de paramètres peut poser des problèmes d'estimations. Dans cette perspective, une extension importante, le modèle auto-régressif conditionnellement hétéroscédastiques généralisé (GARCH), est proposé par Bollerslev (1986) [4]. Ce modèle exige moins de paramètres à estimer et présente les mêmes propriétés et les mêmes fondements que le processus ARCH(q). La seule différence se situe au niveau de la définition telle que la variance conditionnelle de la variable étudiée est exprimée par le carré des p et q. Le modèle GARCH(p,q) de Bollerslev s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} X_t = h_t \eta_t \\ h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

où $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, q$) et $\beta_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, p$).

Le modèle GARCH tient compte non seulement de la volatilité courante exprimée par les carrés des résidus passés mais aussi de la volatilité passée, il présente ainsi une spécification plus flexible de la variance conditionnelle. Toutefois, le modèle GARCH ne permet de modéliser que la dépendance temporelle de court terme : l'effet des chocs décroît exponentiellement dans le temps. Le modèle ARCH et sa généralisation GARCH ont joué un rôle

central dans la finance et la macroéconomie, une classe importante de ces généralisations peut être regroupée sous la notion de modèle générale GARCH(p,q) qui introduit par Duan (1997) et qui contient la plupart des modèles GARCH connus en tant que cas particuliers, on obtient la classe de modèle générale GARCH(1,1) définis par He et Terasvirta (1999) [11] qui définit par :

$$\begin{cases} X_t = h_t \eta_t \\ h_t^2 = a(\eta_{t-1}) + g(\eta_{t-1})h_{t-1}^2, \end{cases}$$

où $a(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont des fonctions non négatives.

Cette famille de processus GARCH inclut des modèles symétriques et des modèles asymétriques, on peut citer à titre d'exemple : le modèle GARCH(1,1) de Bollerslev (1986), la valeur absolue GARCH(1,1) modèle de Taylor (1986) et de Schwert (1989), le modèle non linéaire GARCH(1,1) d'Engle (1993), le modèle de seuil GARCH(1,1) de Zakoïan (1994), le modèle EGARCH(1,1) (exponentiel GARCH) de Nelson en 1991, le modèle AGARCH(1,1) qui défini par Ding et al (1993), le modèle logGARCH(1,1) été introduit par Geweke, Pantula (1986) et Milhog (1987) et le modèle QGARCH(1,1) qui proposé par Engle et NG (1983).

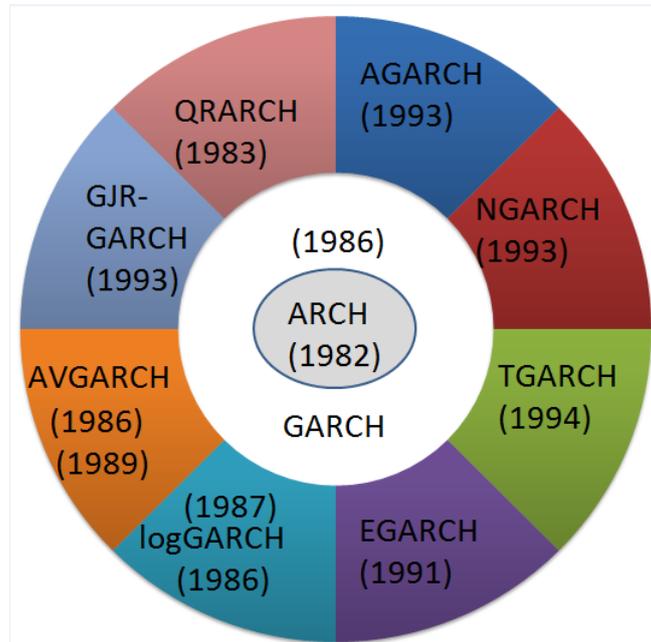


FIGURE 1 – La famille de modèle GARCH.

Ce mémoire se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre intitulé la stationnarité stricte et ergodicité de la famille des modèles GARCH(1,1). Le deuxième chapitre intitulé les moments non conditionnels d'une famille des modèles GARCH(1,1). Enfin, nous faisons une application numérique des trois sous modèle : GARCH(1,1), EGARCH(1,1) et TGARCH(1,1).

Notations

Processus

i.i.d	indépendant identiquement distribué,
i.i.d(0, 1)	indépendant identiquement distribué centré et de variance unité,
h_t^2	variance conditionnelle ou volatilité,
$\sigma\{X_s, s < t\}$	tribu engendrée par le passé de X_t ,

Notations générales

$\log^+ x$	$\max\{\log x, 0\}$, pour tout $x > 0$,
$:=$	est définie comme,
$\mathbb{I}_{\{ \}}$	indicatrice,

Probabilité

p.s	presque sûrement,
$\xrightarrow{p.s}$	convergence presque sûre,

Stationnarité stricte et ergodicité de la famille des modèles GARCH(1,1)

1.1 Préliminaires

He et Terasvirta [11] (1999) on défini le modèle générale GARCH(1,1) comme suit :

$$\begin{cases} X_t = h_t \eta_t \\ h_t^2 = a(\eta_{t-1}) + g(\eta_{t-1})h_{t-1}^2, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $a(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont des fonctions non négatives, $P(h_t^2 > 0) = 1$, (η_t) est une suite i.i.d avec $E\{\eta_t\} = 0$ et $Var\{\eta_t^2\} = 1$. Comme indique par ces auteurs cette famille de processus GARCH comprend : (puisque tous les sous modèles doivent satisfaire l'équation 1 de modèle (1.1) il suffit de vous-rappeler juste l'équation 2 de modèle (1.1) qui est changer à chaque fois).

1.1.1 Le modèle GARCH(1,1) de Bollerslev (1986) :

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha\eta_{t-1}^2$ tel que :

$$\begin{aligned} h_t^2 &= \omega + \alpha X_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 \\ &= \omega + [\beta + \alpha\eta_{t-1}^2]h_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

avec $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

1.1.2 Le modèle TGARCH(1,1) (GARCH à seuil) :

Ce modèle introduit par Rabemamanjara et Zakoïan (1993) qui s'écrit sous la forme (d'après Ali [3]) :

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha_1 \eta_{t-1}^2 I_{\{\eta_{t-1} < 0\}} + \alpha_2 \eta_{t-1}^2 I_{\{\eta_{t-1} \geq 0\}}$ tel que

$$\begin{aligned} h_t^2 &= \omega + \beta h_{t-1}^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2 I_{\{X_{t-1} < 0\}} + \alpha_2 X_{t-1}^2 I_{\{X_{t-1} \geq 0\}} \\ &= \omega + [\beta + \alpha_1 \eta_{t-1}^2 I_{\{\eta_{t-1} < 0\}} + \alpha_2 \eta_{t-1}^2 I_{\{\eta_{t-1} \geq 0\}}] h_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

D'autre part, Zakoïan en 1994 [24] donne la forme suivante :

Remarque 1.1 *On peut écrire le modèle TGARCH(1,1) avec d'autre manière qui aussi asymétrique*

$$h_t^2 = \omega + \alpha_{1,+} (X_{t-1}^+)^2 - \alpha_{1,-} (X_{t-1}^-)^2 + \beta h_{t-1}^2,$$

avec $\omega > 0$, $\alpha_{1,+} \geq 0$, $\alpha_{1,-} \geq 0$, $\beta \geq 0$ et en utilisant la notion $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$.

D'après Ali [3], il existe des modèles qui nous permettent d'extraire la formule TGARCH(1,1), on trouve dans le corollaire suivant :

Corollaire 1.1 *Le modèle GJR-GARCH(1,1) est représenté par l'expression :*

$$h_t^2 = \omega + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 I_{\{\eta_{t-1}\}} X_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2,$$

où $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ et $\beta > 0$.

1.1.3 Le modèle EGARCH(1,1) (exponentiel GARCH) :

De Nelson (1991) [20] est s'écrit sous la forme suivante :

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega + \alpha_1 \eta_{t-1} + \alpha_2 |\eta_{t-1}|$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta$.

$$\log h_t^2 = \omega + \beta \log h_{t-1}^2 + \alpha_1 \eta_{t-1} + \alpha_2 |\eta_{t-1}|, \quad (1.4)$$

où $\omega > 0$, $\alpha_{1,2} > 0$, et $\beta > 0$.

1.1.4 Le modèle logGARCH(1,1) :

Qui été introduit par Geweke, Pantula (1986) et Milhoj (1987).

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega + (\alpha_1 I_{\{\eta_{t-1} < 0\}} + \alpha_2 I_{\{\eta_{t-1} > 0\}}) \log \eta_{t-1}^2$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha_1 I_{\{\eta_{t-1} < 0\}} + \alpha_2 I_{\{\eta_{t-1} > 0\}}$.

$$\log h_t^2 = \omega + (\alpha_1 I_{\{X_{t-1} < 0\}} + \alpha_2 I_{\{X_{t-1} > 0\}}) \log X_{t-1}^2 + \beta \log h_{t-1}^2 \quad (1.5)$$

$$= \omega + (\alpha_1 I_{\{\eta_{t-1} < 0\}} + \alpha_2 I_{\{\eta_{t-1} > 0\}})(\log \eta_{t-1}^2 + \log h_{t-1}^2) + \beta \log h_{t-1}^2,$$

où $\omega > 0$, $\alpha_{1,2} \geq 0$, et $\beta \geq 0$.

1.1.5 Le modèle AVGARCH(1,1) (la valeur absolue GARCH) :

Ce modèle de Taylor (1986) et Schwert (1989) :

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha_1 |\eta_{t-1}|$ tel que :

$$h_t^2 = \omega + [\beta + \alpha_1 |\eta_{t-1}|] h_{t-1}^2, \quad (1.6)$$

où $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, et $\beta \geq 0$.

1.1.6 Le modèle QGARCH(1,1) :

Ce modèle proposé par Engle et Ng (1983).

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega + \alpha_2 h_{t-1} \eta_{t-1}$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha_1 \eta_{t-1}^2$.

$$h_t^2 = \omega + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-1} + \beta h_{t-1}^2 \quad (1.7)$$

$$= \omega + \alpha_2 h_{t-1} \eta_{t-1} + (\beta + \alpha_1 \eta_{t-1}^2) h_{t-1}^2$$

où $\omega > 0$, $\alpha_{1,2} \geq 0$, et $\beta \geq 0$. Notez que $a(\eta_{t-1})$ dans ce cas dépend de η_{t-1} et h_{t-1} et $\{a_t\}$ n'est pas une suite de variable aléatoire i.i.d. Pourtant, c'est une suite de variable aléatoire non corrélées, cette propriété permet d'obtenir des résultats similaires à ceux obtenus en le cas d'i.i.d exclusif. Ce pendant, il faut le mentionner.

1.1.7 Le modèle AGARCH(1,1) :

Ce modèle asymétrique de volatilité a été défini par Ding et al (1993) :

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha(|\eta_{t-1}| - \mu \eta_{t-1})^2$ tel que :

$$h_t^2 = \omega + \beta h_{t-1}^2 + \alpha(|X_{t-1}| - \mu X_{t-1})^2 \quad (1.8)$$

$$= \omega + [\beta + \alpha(|\eta_{t-1}| - \mu \eta_{t-1})^2] h_{t-1}^2,$$

où $\mu \geq 0$, $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, et $\beta \geq 0$.

1.1.8 Le modèle NGARCH(1,1) :

Ce modèle asymétrique non linéaire a également été introduit par Engle et Ng (1993) (voir l'article Hentschel [13]) :

Soient $a(\eta_{t-1}) = \omega$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha(\eta_{t-1} - \mu)^2$.

$$h_t^2 = \omega + \beta h_{t-1}^2 + \alpha(\eta_{t-1} - \mu)^2 h_{t-1}^2, \quad (1.9)$$

où $\mu \geq 0$, $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, et $\beta \geq 0$.

1.2 Stationnarité stricte et ergodicité

Dans ce section nous supposons de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la stationnarité au sens stricte et ergodicité de la famille des modèles GARCH(1,1). Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle et comme $E\{\eta_t^2\} = 1 < \infty$, alors il est clair que $E\{\log^+ \|g(\eta_t)\|\} < \infty$. Par conséquent une condition nécessaire et suffisante (Bougerol et Picard [15]) pour le modèle (1.1) possède une unique solution strictement stationnaire non anticipative et ergodique est que l'exposant de Lyapounov :

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E\{\log \|\prod_{j=0}^{t-1} g(\eta_{t-j})\|\} \stackrel{p.s.}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\prod_{j=0}^{t-1} g(\eta_{t-j})\|,$$

cette dernière est l'outil principale pour étudier la stationnarité.

Le théorème suivant de Francq et Zakoïan [7] permet de fournir une condition suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire et non anticipative au modèle (1.1) ce qui suit :

Théorème 1.1 *Le modèle (1.1) admet une solution strictement stationnaire et non anticipative donnée par*

$$h_t^2 = a(\eta_{t-1}) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-1-j}) \right) a(\eta_{t-i-1}), \quad (1.10)$$

si et seulement si

$$\gamma = E\{\log(g(\eta_t))\} < 0, \quad (1.11)$$

où la série (1.10) converge p.s pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De plus la solution est unique et non anticipative et ergodique, si la condition (1.11) n'est pas vérifié et $P(\eta_t = 0) \neq 1$, le modèle (1.1) n'admet aucun solution strictement stationnaire.

Preuve :

Il faut noter tout d'abord que $\gamma = E\{\log(g(\eta_t))\}$ existe dans $] -\infty, +\infty[$ ce qui fait :

$$h_t^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} h_t(N) \text{ p.s,}$$

où

$$h_t(N) = a(\eta_{t-1}) + \sum_{i=0}^N \left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-1-j}) \right) a(\eta_{t-i-1}), \quad (1.12)$$

cette limite étant bien défini sur $\bar{\mathbb{R}}^+$ compte tenu de la positivité de ses termes, en plus

$$h_t(N) = a(\eta_{t-1}) + g(\eta_{t-1})h_{t-1}(N-1),$$

on obtient

$$h_t = a(\eta_{t-1}) + g(\eta_{t-1})h_{t-1},$$

lorsque $N \rightarrow \infty$ il reste de montrer que h_t^2 presque sûrement fini. On a

$$\left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-1-j})\right)^{\frac{1}{i}} = \exp\left[\frac{1}{i} \sum_{i=1}^t \log(g(\eta_{t-i}))\right] \rightarrow e^\gamma \text{ p.s.},$$

quand $t \rightarrow \infty$ par la loi forte des grands nombres appliquée sur les suites i.i.d, il découle de la règle de Cauchy que $\forall t$ la suite $\{h_t(N), N \geq 1\}$ converge p.s dans \mathbb{R} , nous avons donc $h_t^2 < \infty$ p.s en fonction d'une suite i.i.d, donc la limite h_t^2 est strictement stationnaire et ergodique de même cas c'est (X_t) . Pour montrer l'unicité de solution, on suppose (\tilde{h}_t^2) un autre solution strictement stationnaire de modèle (1.1).

Pour certain t de deuxième équation dans le modèle (1.1), nous avons :

$$|h_t^2 - \tilde{h}_t^2| = \left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-j-1})\right) |h_{t-n-1}^2 - \tilde{h}_{t-n-1}^2|,$$

et $\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-j-1})$ converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ avec probabilité 1, ainsi

$$P(|h_{t-n-1}^2 - \tilde{h}_{t-n-1}^2| \rightarrow \infty) > 0$$

ce qui implique $|h_{t-n-1}^2| \rightarrow \infty$ ou $|\tilde{h}_{t-n-1}^2| \rightarrow \infty$ avec une probabilité non nul, celle n'est pas possible parce que les deux suites (h_t^2) et (\tilde{h}_t^2) sont stationnaires, par conséquent $h_t^2 \stackrel{p.s}{=} \tilde{h}_t^2$. Pour prouver la partie nécessaire, soit (h_t^2) est une solution strictement stationnaire de modèle (1.1). Pour $n > 0$, on a :

$$h_0^2 \geq g(\eta_{-1}) + \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{-j-1})\right) a(\eta_{-i-1}),$$

d'où l'on déduit que

$$\left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{-j-1})\right) a(\eta_{-i-1}) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

il est équivalent à

$$\sum_{i=1}^n \log(g(\eta_i)) + \log a(\eta_{-n-1}) \rightarrow -\infty \text{ p.s.}, \quad (1.13)$$

d'abord supposer $\gamma > 0$, par la loi forte des grands nombres

$$\sum_{i=1}^n \log(g(\eta_i)) \rightarrow +\infty,$$

presque sûr, cette convergence implique $a(\eta_0) \rightarrow 0$ ce qui est exclu puis que η_t n'est pas identiquement à 0.

Maintenant suppose que $\gamma = 0$, basant sur le théorème de Chung-Fuchs, on aura :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \log(g(\eta_i)) = +\infty,$$

avec probabilité 1. La convergence (1.13) implique que $\log(a(\eta_{-n-1})) \xrightarrow{p.s.} -\infty$, donc nous somme amenée à une contraction comme dans le cas précédent, alors l'hypothèse d'existence d'une solution strictement stationnaire quand $\gamma \geq 0$ entraîne une contradiction. \square

Le résultat suivant montre que (1.10) est la seule solution de modèle (1.1), on dit qu'un la solution strictement stationnaire de modèle (1.1) est non anticipative si pour tout t , la variable aléatoire X_t est indépendant de $\{\eta_i, i > t\}$ selon Brandt (1986) [6] la seule solution strictement stationnaire de modèle (1.1) dans la partie (i) du théorème suivant est toujours non anticipative, il est de même sous l'hypothèse de la partie (ii) du même théorème (AUE et al [2]).

Théorème 1.2 *Soit le modèle (1.1), $E\{\log^+|a(\eta_t)|\} < \infty$ et $E\{\log^+|g(\eta_t)|\} < \infty$ sont satisfaits :*

- i) L'équation (1.12) est la seule solution stationnaire de modèle (1.1) Si $\gamma < 0$.*
- ii) Si $P(a(\eta_0) = 0) < 1$, $a(\eta_0) \geq 0$ et $g(\eta_0) \geq 0$ sont vérifiés et le modèle (1.1) ont une solution stationnaire et non négative alors $\gamma < 0$ doit être satisfait.*

Preuve :

La première partie est une conséquence immédiate de Brandt (1986). La deuxième partie est basée sur (1.12) avec $t = 0$ puisque $a(\eta_0) \geq 0$ et $g(\eta_0) \geq 0$ tous les termes de (1.12) sont non négatifs. Nous obtenons pour tout $k > 1$ que

$$h_0^2 \geq \sum_{1 \leq i \leq k} a(\eta_{-i}) \prod_{1 \leq j \leq i-1} g(\eta_{-j}), \quad (1.14)$$

si $E\{\log g(\eta_0)\} \geq 0$, avec

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} a(\eta_{-i}) \prod_{1 \leq j \leq i-1} g(\eta_{-j}) \geq b,$$

pour certains $b > 0$, $a(\eta_0) \geq 0$ et $g(\eta_0) \geq 0$ contredire (1.14). \square

D'après Bougerol et Picard [15], ce lemme ne permettons l'équivalence entre quelques propriétés qui revoir dans le théorème.

Lemme 1.1 *Soit $\{g(\eta_{t-1})\}$ suite ergodique et strictement stationnaire de modèle générale GARCH(1,1) défini par (1.1), lorsque $E\{\|g(\eta_{t-1})\|\}$ est fini, avec l'exposant de Lyapounov on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n g(\eta_j) = 0 \text{ p.s.} \Rightarrow \gamma < 0.$$

comme les modèles ARMA, nous somme généralement intéressés à la non-anticipativité de solution X_t de modèle (1.1), c'est-à-dire, ceux pour lesquels X_t appartient au champ σ algèbre engendré par $\{\eta_t, \eta_{t-1}, \dots\}$.

Preuve :

Comme $\prod_{j=0}^n g(\eta_j) = e^{\sum_{j=0}^n \log g(\eta_j)}$, on obtient l'équivalence suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n g(\eta_j) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \log g(\eta_j) = -\infty, \text{ p.s.} \quad (1.15)$$

si $\gamma > 0$ alors d'après la loi forte des grands nombres, l'équation (1.15) n'est pas vérifié. Au contraire, l'équation (1.15) est vérifié si $\gamma < 0$. Il reste le cas ou $\gamma = 0$. On suppose que $\gamma = 0$ et que l'équation (1.15) est vérifié. Alors, d'après le théorème central limite, nous avons

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{j=0}^n \frac{\log g(\eta_j)}{n^{\frac{1}{2}}} \leq 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{j=0}^n \log g(\eta_j) < 0\right) = 1,$$

ce qui est absurde.

Les sous modèles développés qui sont très utilisés dans le domaine de la finance et donnons quelques conditions nécessaire et suffisantes pour l'existence de la stationnarité au sens stricte.

Modèle GARCH(1,1)

Énonçons maintenant un théorème et des remarques sur la stationnarité strict du processus GARCH(1,1), d'après Francq et Zakoïan [8] on a :

Théorème 1.3 *si*

$$\gamma := E\{\log(\alpha\eta_{t-1}^2 + \beta)\} < 0, \quad (1.16)$$

la série

$$h_t^2 = \omega \left[1 + \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^i (\alpha\eta_{t-j} + \beta) \right) \right], \quad (1.17)$$

converge presque sûrement (p.s), le processus (X_t) défini par $X_t = h_t\eta_t$ et (1.2) est l'unique solution strictement stationnaire, cette solution est non anticipative et ergodique. Si $\gamma \geq 0$ n'existe pas une solution strictement stationnaire.

On donne maintenant des remarques sur la stationnarité stricte du processus GARCH(1,1).

Remarque 1.2 *1/ Si $\gamma < 0$ et $\omega = 0$ il est claire pour (1.17) l'unique solution strictement stationnaire est $X_t = 0$, c'est pour ca supposer $\omega > 0$.*

2/ La condition (1.16) implique $\beta < 1$, inversement si $\alpha + \beta < 1$ l'équation (1.16) est vérifiée car par application de l'inégalité de Jensen :

$$E\{\log g(\eta_t)\} \leq \log E\{g(\eta_t)\} = \log(\alpha + \beta) < 0.$$

Exemple 1.1 *On donne la région de la stationnarité stricte du modèle GARCH(1,1). Dans la Figure(1.1), la région 1 représente la stationnarité stricte du modèle GARCH(1,1) tel que si et $\eta_t \sim N(0,1)$.*

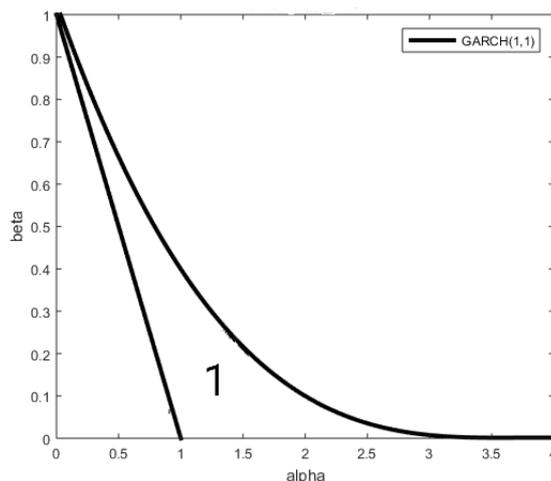


FIGURE 1.1 – Région de la stationnarité stricte du modèle GARCH(1,1).

Modèle TGARCH(1,1)

Pour obtenir la condition de la stationnarité stricte, on suppose que $E\{\log g(\eta_{t-1})\}$ existe. Suivant la même approche que Nelson (1990) [19], nous montrons que l'existence d'une solution stationnaire au sens stricte pour le modèle TGARCH(1,1). Cette condition est trouvée dans la proposition suivante (Zakoïan 1994 [24]).

Proposition 1.1 *Si $E\{\log(\alpha_{1,+}(\eta_{t-1}^+)^2 - \alpha_{1,-}(\eta_{t-1}^-)^2 + \beta)\} \neq 0$ alors il existe une solution strictement stationnaire et ergodique si et seulement si*

$$E\{\log(\alpha_{1,+}(\eta_{t-1}^+)^2 - \alpha_{1,-}(\eta_{t-1}^-)^2 + \beta)\} < 0,$$

est une solution unique.

Remarque 1.3 *Lorsque $\beta = 0$ et la distribution de (η_t) est symétrique, on peut facilement obtenir la forme suivante pour cette condition de la stationnarité stricte :*

$$\alpha_{1,+}\alpha_{1,-} < e^{-2E\{\log|\eta_t|\}}.$$

Exemple 1.2 *La région de la stationnarité stricte du modèle TAR(1).*

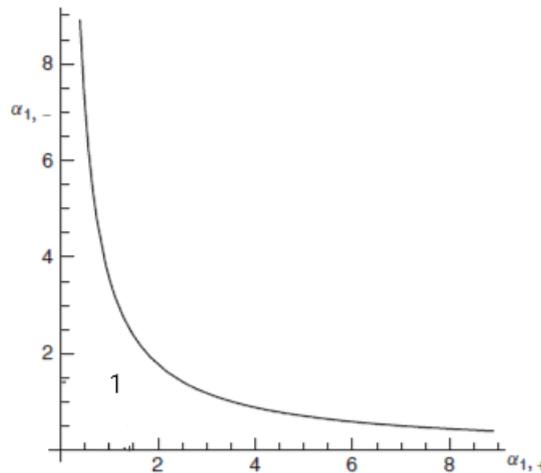


FIGURE 1.2 – Région de la stationnarité stricte du modèle TAR(1).

Dans la Figure (1.2), la région 1 représente la stationnarité stricte.

Modèle EGARCH(1,1)

Tout d'abord, nous établissons une condition de la stationnarité pour la classe de modèle EGARCH(1,1). Nous avons le résultat suivant (He et al [12]).

Corollaire 1.2 *Supposons que $Var(\alpha_1\eta_{t-1} + \alpha_2|\eta_{t-1}|) < \infty$. Ensuite, l'équation (1.4) est strictement stationnaire si et seulement si $|\beta| < 1$.*

Exemple 1.3 *Dans la Figure(1.3), on donne la région de la stationnarité stricte du modèle EGARCH(1.1) tel que la région 1 représente la stationnarité stricte de ce modèle.*

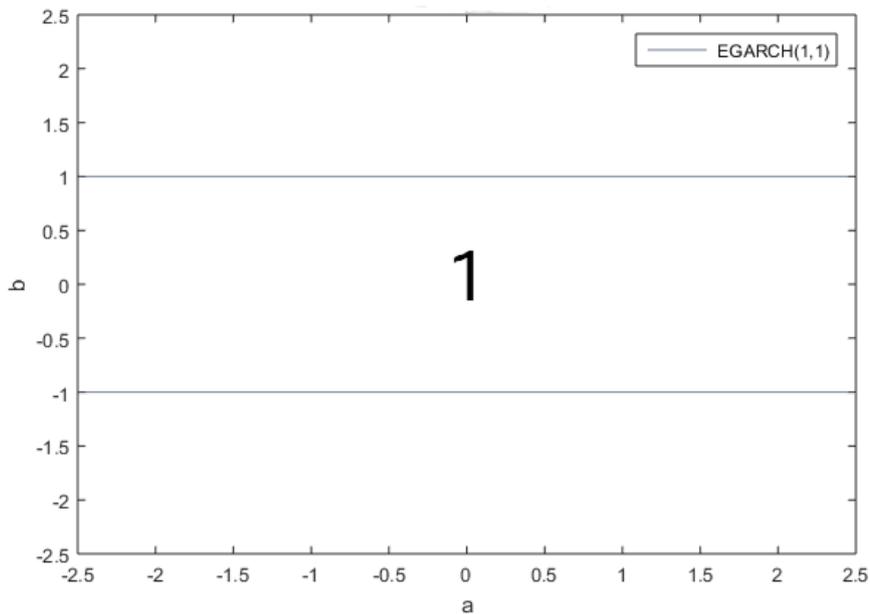


FIGURE 1.3 – Région de la stationnarité stricte du modèle EGARCH(1.1).

Modèle logGARCH(1,1)

Supposons que $E\{\log^+|\log \eta_0^2| < \infty\}$ ce qui implique $P(\eta_0 = 0) = 0$. L'exposant de Lyapounov pour le modèle logGARCH(1,1) s'écrit donc

$$\gamma = E\{\log|\alpha_1 I_{\{\eta_0 < 0\}} + \alpha_2 I_{\{\eta_0 > 0\}} + \beta|\} = \log|\beta + \alpha_1|^a |\beta + \alpha_2|^{1-a},$$

où $a = P(\eta_0 > 0)$. La condition $|\beta + \alpha_1|^a |\beta + \alpha_2|^{1-a} < 1$ garantit ainsi l'existence d'une solution strictement stationnaire au modèle logGARCH(1,1).

Remarque 1.4 Si $\alpha_1 = \alpha_2$, l'exposant Lyapounov est $\gamma = E\{\log|\alpha_1 + \beta|\}$. Dans ce cas la condition suffisante d'existence d'une solution strictement stationnaire est $|\alpha_1 + \beta| < 1$.

La remarque suivante se confirme que la condition $\gamma < 0$ n'est nécessaire (voir Francq et al [9]).

Remarque 1.5 Supposons que $\alpha_1 = \alpha_2$ et que $\eta_0^2 = 1$ p.s. Dans ce cas $\gamma < 0$ est équivalent à $|\alpha_1 + \beta| < 1$ lorsque $\alpha_1 + \beta \neq 1$, il existe une solution stationnaire de modèle défini par :

$$X_t = \exp\left(\frac{\omega}{2(1 - \alpha_1 - \beta)}\right)\eta_t. \quad (1.18)$$

Exemple 1.4 La Figure(1.4), on donne la région de la stationnarité du modèle logARCH(1) tel que représente la région la stationnarité stricte du modèle logARCH(1).

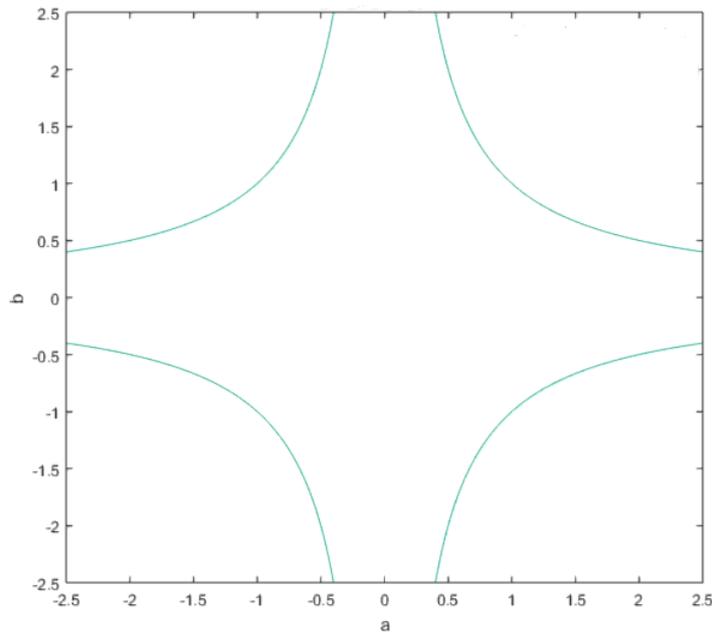


FIGURE 1.4 – Région de la stationnarité du modèle logARCH(1).

Modèle AVGARCH(1,1)

Soit $\gamma = E\{\log(\beta + \alpha(\eta_{t-1}))\} = \log(\beta) < 0 \Leftrightarrow \beta < 1$, alors la condition suffisante d'existence d'une solution strictement stationnaire d'un modèle AVGARCH(1,1) est $\beta < 1$ (ce résultat est donné par Afuecheta [1]).

Exemple 1.5 On donne la région de la stationnarité stricte du modèle $AVGARCH(1,1)$. Dans la Figure(1.5), la région 1 représente la stationnarité stricte du modèle $AVGARCH(1,1)$.

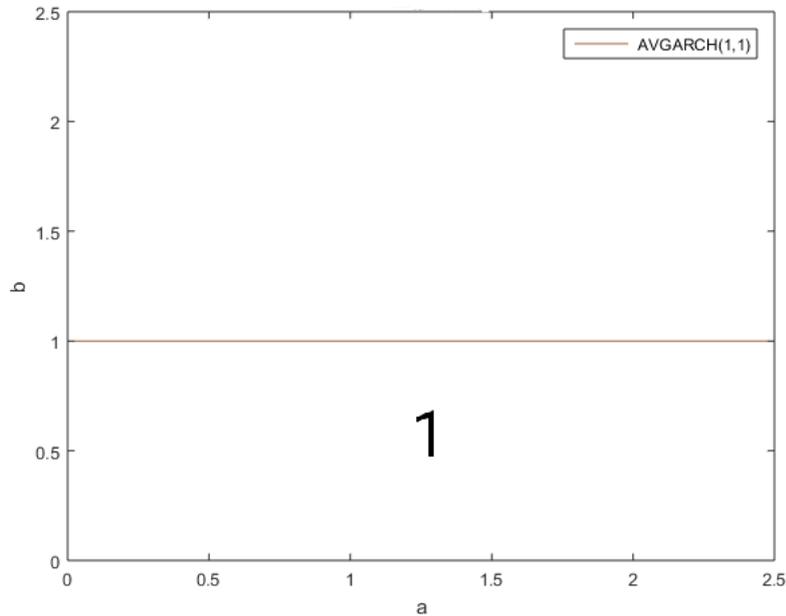


FIGURE 1.5 – Région de la stationnarité stricte du modèle $AVGARCH(1,1)$.

Modèle $QGARCH(1,1)$

Pour étudier la stationnarité stricte de sous modèle on utilise l'exposant de Lyapounov qui s'écrit dans le cas suivant comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma &= E\{\log(\alpha_1 \eta_{i-1}^2 + \beta)\} < 0 \\ &= \log(\alpha_1 + \beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \beta < 1, \end{aligned}$$

alors la condition suffisante d'existence d'une solution strictement stationnaire de sous modèle est $\alpha_1 + \beta < 1$.

Exemple 1.6 Dans cet exemple on donne la régions de la stationnarité stricte du modèle $QGARCH(1,1)$. Dans la Figure(1.5), la région 1 représente la stationnarité stricte du modèle $QGARCH(1,1)$.

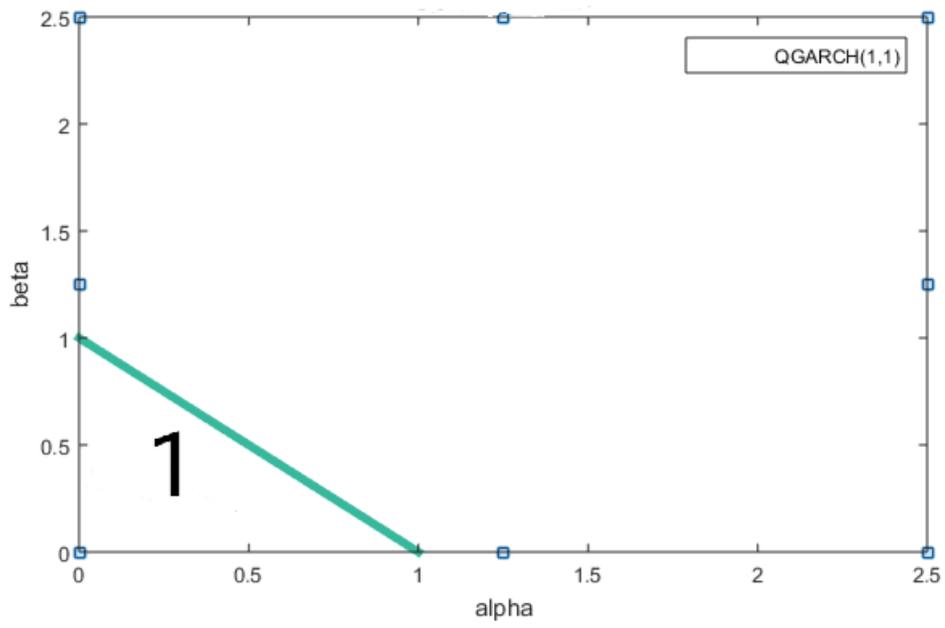


FIGURE 1.6 – Région de la stationnarité stricte du modèle QGARCH(1,1).

Les moments non conditionnels d'une famille des modèles GARCH(1,1)

Ce chapitre est résumé à l'étude des propriétés des moments de modèle générale GARCH(1,1). Aussi au traitement de la fonction d'autocorrélation et le Kurtosis. Pour la suite de ce chapitre, on adapte les notations suivantes : $v_i = E\{|\eta_{t-1}|^i\}$, $\gamma_{g(j)} = E\{g^j(\eta_{t-1})\}$, $\gamma_{a(i)} = E\{a^i(\eta_{t-1})\}$ et $\bar{\gamma}_{a(i)g(j)} = E\{a^i(\eta_{t-1})g^j(\eta_{t-1})\}$, où i et j sont des entiers positives. En particulier : $\gamma_g = \gamma_{g_1}$, $\gamma_a = \gamma_{a_1}$ et $\bar{\gamma}_{ag} = \bar{\gamma}_{a_1g_1}$. Le résultat suivant fournit une condition nécessaire et suffisante pour le modèle (1.1) admet une solution d'ordre supérieur. Ling et McAleer [16] a donné le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Si $E\{\eta_{t-1}^{2m}\} < \infty$, $E\{a^m(\eta_{t-1})\} < \infty$ et $E\{g^m(\eta_{t-1})\} < 1$ pour $m \in [0, 1]$ alors il existe une solution stationnaire unique au 2m ordre de modèle (1.1). La solution est strictement stationnaire et ergodique où la série (1.10) converge p.s.*

Preuve :

Soit

$$S_n = a(\eta_{t-1}) + \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-1-j}) \right) a(\eta_{t-1-i}),$$

puis :

$$E\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^m \right\} \leq E\left\{ a^m(\eta_{t-1}) + \sum_{i=0}^n \left[\left(\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-1-j}) \right) a(\eta_{t-1-i}) \right]^m \right\},$$

$$\begin{aligned}
&= E\{a^m(\eta_{t-1})\} + \sum_{i=0}^{\infty} E\left\{\prod_{j=0}^i g^m(\eta_{t-1-j})\right\} E\{a^m(\eta_{t-1-i})\} \\
&= E\{a^m(\eta_{t-1})\} \left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} (E\{g^m(\eta_{t-1})\})^{i+1}\right] \\
&= E\{a^m(\eta_{t-1})\} [1 - (E\{g^m(\eta_{t-1})\})^{-1}] < \infty,
\end{aligned}$$

de sorte que (S_n) converge p.s sous les hypothèses donnees la limite de (S_n) par h_t^2 c.à.d :

$$h_t = [g(\eta_{t-1}) + \sum_{i=0}^{\infty} (\prod_{j=0}^i g(\eta_{t-1-j})) a(\eta_{t-1-i})]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

de l'équation (2.1), h_t est une fonction fixer et strictement stationnaire et ergodique. Pour prouver l'unicité, soit h_{t_1} une autre solution stationnaire d'ordre $2m$ de modèle (1.1) :

$$\begin{aligned}
E\{|h_t^2 - h_{t_1}^2|^m\} &= E\{g^m(\eta_{t-1})\} E\{|h_{t-1}^2 - h_{t_1-1}^2|^m\} \\
&\leq [E\{g^m(\eta_{t-1})\}]^i (E\{h_{t-i}^{2m}\} + E\{h_{t_1-i}^{2m}\}) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

comme $i \rightarrow \infty$, donc : $h_t = h_{t_1}$. \square

Remarque 2.1 *Le théorème (2.1) montrer clairement que le modèle (1.1), en fait, il y a un nombre indéfini des périodes par contre, c'est une conséquence de l'existence de la solution stationnaire et n'est pas une hypothèse, où*

$$a(\eta_{t-1}) = \omega > 0 \text{ et } g(\eta_{t-1}) = \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta,$$

à savoir Bollerslev le modèle GARCH(1,1), la condition $E\{g(\eta_{t-1})^m\} < 1$, pour certain $m \in [0, 1]$ est équivalente à $\log g(\eta_{t-1}) < 0$ ce qui est nécessaire et suffisante condition donnée par Nelson (1990) [19] et Bougerol et Picard (1992) [15].

D'après HÖRMANN [10] on a :

Théorème 2.2 *Supposons que $E\{\eta_{t-1}^{2m}\} < \infty$, m est positive et $E\{a^m(\eta_{t-1})\} < \infty$, une condition nécessaire et suffisante pour que le modèle (1.1) admet une solution donné par (1.10) et que $E\{g^m(\eta_{t-1})\} < 1$, ou la série (1.10) converge en moyenne d'ordre m . De plus la solution est unique strictement stationnaire et ergodique.*

Preuve : Voir l'article Ling et McAleer [16].

La condition des moments de notre modèle générale GARCH(1,1) est donné par He et Trasvira [11] dans le théorème suivant :

Théorème 2.3 *Pour le modèle (1.1), la période de 2m-ème moment non conditionnel existe si*

$$\gamma_{g_m} = E\{g^m(\eta_{t-1})\} < 1, \quad (2.2)$$

la condition (2.2) est nécessaire et suffisante à l'existence de la 2m-ème moment non conditionnel, sous cette condition

$$\mu_{2m} = E\{X_t^{2m}\} = \frac{v_{2m}}{(1 - \gamma_{g_m})} \left[\frac{\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \tilde{\gamma}_{a_j g(m-j)} \mu_{2(m-j)}}{v_{2(m-j)}} \right].$$

Preuve :

On donne l'équation (1.1) à la puissance m :

$$h_t^{2m} = g^m(\eta_{t-1})h_{t-1}^{2m} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} a^j(\eta_{t-1})(g(\eta_{t-1})h_{t-1}^2)^{m-j}, \quad (2.3)$$

on appliquant l'équation 2 de modèle (1.1) au premier terme du coté droite de (2.3) on obtient :

$$h_t^{2m} = (g(\eta_{t-1})g(\eta_{t-2})h_{t-2}^2)^m + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \left[a^j(\eta_{t-1})(g(\eta_{t-1})h_{t-1}^2)^{m-j} + g^m(\eta_{t-1})a^j(\eta_{t-2})(g(\eta_{t-2})h_{t-2}^2)^{m-j} \right],$$

par récurrence :

$$h_t^{2m} = \left(\prod_{i=1}^n g^m(\eta_{t-i}) \right) h_{t-n}^{2m} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \sum_{l=1}^n \left(\prod_{i=1}^{l-1} g^m(\eta_{t-i}) \right) a^j(\eta_{t-l})(g(\eta_{t-l})h_{t-l}^2)^{m-j}, \quad (2.4)$$

les moments non conditionnel d'expression (2.4) est :

$$\begin{aligned} E\{h_t^{2m}\} &= \left(\prod_{i=1}^n E\{g^m(\eta_{t-i})\} \right) E\{h_{t-n}^{2m}\} \\ &+ \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \sum_{l=1}^n \left(\prod_{i=1}^{l-1} E\{g^m(\eta_{t-i})\} \right) E\{a^j(\eta_{t-l})g^{m-j}(\eta_{t-l})\} E\{h_{t-l}^{2(m-j)}\} \\ &= \tilde{\gamma}_{g_m} E\{h_t^{2m}\} + \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \sum_{i=1}^n (\gamma_{g_m}^{i-1} \tilde{\gamma}_{a_j g(m-j)}) E\{h_t^{2(n-j)}\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

supposons que le processus a commencé à une valeur finie, il y a une nombre infini de période puis laisser $n \rightarrow \infty$ dans l'équation (2.5) donne

$$\begin{aligned}\mu_{2m} &= E\{h_t^{2m}\} \left[\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \frac{\tilde{\gamma}_{a_j g(m-j)}}{1 - \gamma_{g_m}} E\{h_t^{2(m-j)}\} \right] \\ &= \frac{v_{2m}}{(1 - \gamma_{g_m})} \left[\frac{\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \tilde{\gamma}_{a_j g(m-j)} \mu_{2(m-j)}}{v_{2(m-j)}} \right],\end{aligned}$$

si est seulement si $\gamma_{g_m} < 1$.

Pour calculer le moment d'ordre quatre on a le corollaire He et Trasvira [11] suivant :

Corollaire 2.1 *Soit le modèle GARCH(1,1) avec $P(h_t^2 > 0) = 1$ dans la condition (1.11), si $\gamma_{g_2} < 1$ le moment non conditionnel d'ordre quatre est donné par*

$$\mu_4 = E\{X_t^4\} = \frac{v_4[\gamma_{a_2}(1 - \gamma_g) + 2\tilde{\gamma}_{ag}\gamma_a]}{(1 - \gamma_g)(1 - \gamma_{g_2})}.$$

D'après Francq et Zakoïan [8] on a les lemmes et le corollaire suivants :

Lemme 2.1 *Soit X une variable aléatoire réelle presque sûrement positive si $E\{X^r\} < +\infty$ pour un $r > 0$ et si $E\{\log X\} < 0$ alors $\exists s > 0$ tel que $E\{X^s\} < 1$.*

Preuve :

La fonction génératrice de $Y = \log X$ est définie par :

$$G(u) = E\{e^{uY}\} = E\{X^u\},$$

la fonction est continument dérivable sur $[0, r]$ et on a pour $u > 0$:

$$\frac{G(u) - G_0}{u} = \int \frac{e^{uy} - 1}{u} dP_Y(y),$$

on sait que $\forall \tau > 0, \forall u \in]0, \tau[$:

$$\left| \frac{e^{uy} - 1}{u} \right| \leq \frac{e^{\tau|y|}}{\tau}, \quad (2.6)$$

ce résultat s'obtient par exemple en introduisant la fonction définie par $g(v) = \frac{e^v - 1}{v}$ pour $v \neq 0$, et $g(0) = 1$, g est une fonction croissante sur \mathbb{R} , on a pour $y \geq 0$:

$$\frac{e^{uy} - 1}{u} \leq \frac{e^{\tau y} - 1}{\tau} \leq \frac{e^{\tau y}}{\tau},$$

et pour $y < 0$

$$\frac{1 - e^{uy}}{u} \leq -y \leq \frac{e^{-\tau y}}{\tau},$$

ce qui prouve (2.6). On a $\int y dP_Y(y) = E(\log X) < 0$, comme $M(0) = 1$, il existe $s > 0$ tel que $M(s) = E(X^s) < 1$. \square

Lemme 2.2 Soit (η_t) une suite des variables aléatoires, γ l'exposant de Lyapounov de modèle GARCH(1,1) alors :

$$\gamma < 0 \Leftrightarrow \exists s > 0, \exists t_0 \geq 1, \gamma = E\left\{\left\|\prod_{k=0}^{t_0-1} g(\eta_{t_0-k})\right\|^s\right\} < 1.$$

Preuve :

Supposons $\gamma > 0$ comme :

$$\gamma = \inf\left\{\frac{1}{t} E\left\{\log\left\|\prod_{k=0}^{t-1} g(\eta_{t-k})\right\|\right\}\right\} < 0,$$

$\exists t_0 \geq 1$ tel que :

$$E\left\{\log\left\|\prod_{k=0}^{t_0-1} g(\eta_{t_0-k})\right\|\right\} < 0,$$

de plus

$$E\left\{\left\|\prod_{k=0}^{t_0-1} g(\eta_{t_0-k})\right\|\right\} = \left\|E\left\{\prod_{k=0}^{t_0-1} g(\eta_{t_0-k})\right\}\right\|,$$

$$\left\|E\{g(\eta_1)\}^{t_0}\right\| = E\{\|g(\eta_1)\|\}^{t_0} < +\infty,$$

en utilisant la norme multiplicative. La positivité des éléments des $g(\eta_{t-i})$, l'indépendance et l'équidistribution des $g(\eta_{t-i})$. D'après le lemme (1.1) entraîne donc l'existence d'un $s > 0$ et $t_0 \geq 1$ tel que $\gamma < 1$ l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\gamma \leq \frac{1}{t_0} E\left\{\log\left\|\prod_{k=0}^{t_0-1} g(\eta_{t_0-k})\right\|\right\} \leq \frac{1}{st_0} \log \gamma < 0. \square$$

Corollaire 2.2 Soit γ de la suite $\{g(\eta_{t-1})\}$, alors

$$\gamma < 0 \Leftrightarrow \exists s > 0, E\{h_t^{2s}\} < \infty \text{ et } E\{X_t^{2s}\} < \infty,$$

où X_t est une solution strictement stationnaire de GARCH(p,q).

Dans ce qui suit nous donnons des conditions des moments d'ordre deux et d'ordre quatre, d'après Ling et McAleer [16] on a

Exemple 2.1 Dans ce qui suit, nous allons étudier pour le modèle $\log\text{GARCH}(1,1)$ les conditions suffisantes d'existence des log-moment d'ordre 2.

La condition est $E\{|\log \eta_0^2|^m < \infty\}$ et

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (a|\alpha_1|^k + (1-a)|\alpha_2|^k) |\beta|^{m-k} < 1,$$

impliquent ainsi $E\{|\log X_t^2|^m < \infty\}$.

Exemple 2.2 Dans le modèle (1.1), soient : $a(\eta_{t-1}) = \omega$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + (\alpha_1 + \alpha_2 I_{\{\eta_{t-1}\}})\eta_{t-1}$, ce qui le modèle asymétrique $\text{GJR-GARCH}(1,1)$ de Glosten et al (1993). Pour ce modèle

$$E\{g(\eta_{t-1})\} = \beta + \alpha_1 + \alpha_2 b,$$

où $b = E\{I_{\{\eta_{t-1}\}}\eta_{t-1}^2\}$, dans ce cas la condition de deuxième moments pour le modèle asymétrique $\text{GJR-GARCH}(1,1)$ qui est simple à vérifier et donné par :

$$\beta + \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 < 1, \quad (2.7)$$

lorsque $\alpha_2 = 0$, la condition (2.7) se réduit au second moment bien connu pour le modèle $\text{GARCH}(1,1)$ signifie que l'admissibilité région pour la stationnarité de second ordre du $\text{GJR-GARCH}(1,1)$ asymétrique est plus petite que celui du modèle $\text{GARCH}(1,1)$ symétrique car l'asymétrie du modèle augmente son incertitude, de plus si $\eta_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, la condition de quatrième moment pour le modèle $\text{GJR-GARCH}(1,1)$ est donné par

$$\beta^2 + 2\beta\alpha_1 + 3\alpha_1^2 + \beta\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_2 < 1, \quad (2.8)$$

lorsque $\alpha_2 = 0$, la condition (2.8) se réduit au quatrième moment bien connu pour le modèle $\text{GARCH}(1,1)$. Si $\eta_t \sim t(v)$ avec $v \geq 5$, la condition de quatrième moment est donné par :

$$\beta^2 + 2\beta\alpha_1 + s\alpha_1^2 + \beta\alpha_2 + \frac{3}{2}(2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) < 1, \quad (2.9)$$

où $s = \frac{3(v-2)}{(v-4)}$, la condition (2.9) se réduit à la condition (2.8).

Exemple 2.3 Dans le modèle (1.1), soient :

$a(\eta_{t-1}) = \omega$ et $g(\eta_{t-1}) = \beta + \alpha[1 - 2\mu \text{sgn}(\eta_{t-1}) + \mu^2]\eta_{t-1}^2$ (où sgn représente la fonction

signe), à savoir le modèle non linéaire $GARCH(1,1)$ d'Engle (1990), qui est un cas particulier du modèle $GARCH$ à puissance asymétrique de Ding et al (1993) pour ce modèle

$$E\{g(\eta_{t-1})\} = \beta + \alpha + \alpha\mu^2 - 2\alpha\mu b,$$

où $b = E\{\text{sgn}(\eta_{t-1})\eta_{t-1}^2\}$ lorsque η_{t-1} suit une distribution symétrique, $b = 0$ et dans ce cas, la condition du deuxième moment pour ce modèle est donné par :

$$\beta + \alpha + \alpha\mu^2 < 1, \quad (2.10)$$

lorsque $\mu = 0$ la condition (2.10) se réduit à celle de $GARCH(1,1)$, si $\eta_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ la condition de quatrième moment donné par :

$$\beta^2 + 2\beta\alpha(1 + \mu^2) + 3\alpha^2[(1 + \mu^2)^2 + 4\mu^2] < 1, \quad (2.11)$$

lorsque $\mu = 0$, la condition (2.11) se réduit à celle de $GARCH(1,1)$.

Exemple 2.4 Nous considérons l'existence des moments non conditionnel définie par l'équation (1.1), nous nous concentrons sur le cas où $\{X_t\}$ est strictement stationnaire de l'équation

$$\log h_t^2 = \omega + c(\eta_{t-1}) + \beta \log h_{t-1}^2,$$

où $c(\eta_{t-1}) = \alpha_1\eta_{t-1} + \alpha_2|\eta_{t-1}|$, il résulte que

$$h_t^2 = \exp(\omega + c(\eta_{t-1})), \quad (2.12)$$

les récursions sur l'équation (2.12) donnant finalement le moment non conditionnel de (X_t) et dont l'expression est énoncée dans le corollaire de He et al suivant :

Corollaire 2.3 Soit le modèle $EGARCH(1,1)$ avec $|\beta| < 1$, supposons que $E\{\exp(mc(\eta_{t-1}))\} < \infty$ pour $m > 0$ et $v_{2m} = E\{\eta_{t-1}^{2m}\} < \infty$ alors pour ce processus le moment non conditionnel de (X_t) existe est donné par :

$$\mu_{2m} = E\{X_t^{2m}\} = v_{2m} \exp(m\omega(1 - \beta))\pi E\{\exp(m\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\}. \quad (2.13)$$

2.1 Le Kurtosis non conditionnel

Le Kurtosis à été utilisé pour calculer les coefficients d'asymétries. On va calculer le coefficient de Kurtosis d'une famille de modèle $GARCH(1,1)$, les résultats suivants sont

trouver dans Francq et Zakoïan [8]. Il faut calculer les moments d'ordre $2k$:

$$E\{X_t^{2k}\} = E\{h_t^{2k}\eta_t^{2k}\},$$

d'après l'indépendance entre h_t et η_t on a : $E\{h_t^{2k}\eta_t^{2k}\} = E\{h_t^{2k}\}E\{\eta_t^{2k}\}$ donc

$$K_X = \frac{E\{X_t^4\}}{(E\{X_t^2\})^2} = \frac{E\{h_t^4\eta_t^4\}}{(E\{h_t^2\eta_t^2\})^2} = \frac{E\{h_t^4\}}{(E\{h_t^2\})^2} \frac{E\{\eta_t^4\}}{(E\{\eta_t^2\})^2} = K_h K_\eta.$$

Francq et Zakoïan [8] donnent le corollaire suivant :

Corollaire 2.4 Soit (X_t) processus de générale GARCH(1,1), le coefficient de Kurtosis non conditionnel de (X_t) donné par

$$K_X = \frac{E\{X_t^4\}}{(E\{X_t^2\})^2} = \frac{E\{h_t^4\}}{(E\{h_t^2\})^2} K_\eta.$$

Preuve :

On a $K_X = \frac{E\{X_t^4\}}{(E\{X_t^2\})^2}$ et d'après l'indépendance de η_t^2 et h_t^2 , η_t^4 et h_t^4 on trouve :

$$K_X = \frac{E\{\eta_t^4 h_t^4\}}{(E\{\eta_t^2 h_t^2\})^2} = \frac{E\{\eta_t^4\}E\{h_t^4\}}{(E\{\eta_t^2\})^2(E\{h_t^2\})^2} = \frac{E\{h_t^4\}}{(E\{h_t^2\})^2} K_\eta,$$

d'où le résultat. \square

Corollaire 2.5 Pour le modèle générale GARCH(1,1), avec $\gamma_{g2} < 1$ et le Kurtosis est donné par :

$$K_X = \frac{K_\eta[\gamma_{a2}(1 - \gamma_g) + 2\tilde{\gamma}_{ag}\gamma_a](1 - \gamma_g)}{\gamma_a^2(1 - \gamma_{g2})}, \quad (2.14)$$

où : $K_\eta = \frac{v_4}{v_2^2}$ est le Kurtosis de (η_t) .

D'après He et al [12] on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.6 Soit le modèle EGARCH(1,1) et supposons que $v_4 < \infty$ et de plus que $\exp(c(\eta_{t-1}))$ et $E\{\exp(2c(\eta_{t-1}))\}$ existent et la condition $|\beta| < 1$ de moment est vérifiée, alors le Kurtosis de X_t existe et est donné par :

$$K_X = \frac{E\{X_t^4\}}{(E\{X_t^2\})^2} = K_\eta \prod_{i=1}^{\infty} \frac{E\{\exp(2\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\}}{(E\{\exp(\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\})^2},$$

où $K_\eta = \frac{v_4}{v_i}$ est le Kurtosis de η_{t-1} .

2.2 L'autocorrélation

Dans cette partie, nous considérons la fonction d'autocorrélation de X_t , de notre modèle général GARCH(1,1). Soit : $\bar{\gamma}_a = E\{\eta_t^2 a(\eta_{t-1})\}$ et $\bar{\gamma}_g = E\{\eta_t^2 g(\eta_{t-1})\}$, on pose $v_i = E\{\eta_t^i\}$, $\gamma_{g(i)} = E\{g^i(\eta_{t-1})\}$ et $\gamma_{a(i)} = E\{a^i(\eta_{t-1})\}$ ce qui suit définit le résultat de n ordre d'autocorrélation de X_t^2 , $\rho_n = \rho_n(X_t^2, X_{t-n}^2)$, $n \geq 1$. D'après He et Trasvira [11] on a :

Théorème 2.4 *Supposant que : $\gamma_{g2} < 1$ dans le modèle (1.1), la fonction d'autocorrélation de $\{X_t^2\}$ est donné par :*

$$\rho_1 = \frac{v_2[(1 - \gamma_g)(\gamma_a \bar{\gamma}_a(1 - \gamma_{g2}) + \bar{\gamma}_g(\gamma_{a2}(1 - \gamma_g)) + 2\tilde{\gamma}_{ag}\gamma_a) - v_2\gamma_a^2(1 - \gamma_{g2})]}{v_4[\gamma_{a2}(1 - \gamma_g) + 2\tilde{\gamma}_{ag}\gamma_a](1 - \gamma_g) - v_2\gamma_a^2(1 - \gamma_{g2})}$$

et $\rho_n = \rho_1 \gamma_g^{n-1}$ pour $n > 1$.

Preuve :

Considérer d'abord :

$$h_t^2 h_{t-1}^2 = (a(\eta_{t-1}) + g(\eta_{t-1})h_{t-1}^2)h_{t-1}^2, \quad (2.15)$$

insérant : $h_{t-1}^2 = a(\eta_{t-2}) + g(\eta_{t-2})h_{t-2}^2$ à l'expression (2.15) conduit à :

$$h_t^2 h_{t-2}^2 = (a(\eta_{t-1}) + g(\eta_{t-1})a(\eta_{t-2}) + g(\eta_{t-1})g(\eta_{t-2})h_{t-2}^2)h_{t-2}^2,$$

en générale, après $n - 1$ recursions :

$$h_t^2 h_{t-n}^2 = [g(\eta_{t-1}) + \sum_{j=2}^n (a(\eta_{t-j}) \prod_{i=1}^{j-1} g(\eta_{t-i})) + (\prod_{i=1}^n g(\eta_{t-i}))h_{t-n}^2]h_{t-n}^2, \quad (2.16)$$

multiplier les deux cotés de l'équation (2.16) par $\eta_t^2 \eta_{t-n}^2$ et accepter les rendements attendus :

$$E\{X_t^2, X_{t-n}^2\} = (v_2^2 \gamma_a \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_g^j + v_2 \bar{\gamma}_a \gamma_g^{n-1})E\{h_t^2\} + v_2 \bar{\gamma}_g \gamma_g^{n-1}E\{h_t^4\}, \quad (2.17)$$

où $\bar{\gamma}_a = E\{\eta_t^2 a(\eta_{t-1})\}$ et $\bar{\gamma}_g = E\{\eta_t^2 g(\eta_{t-1})\}$.

On a : $E\{h_t^2\} = \frac{\gamma_a}{1 - \gamma_g}$ et $E\{h_t^4\} = \frac{\gamma_{a2}(1 - \gamma_g) + 2\tilde{\gamma}_{ag}\gamma_a}{(1 - \gamma_{g2})(1 - \gamma_g)}$ dans l'équation (2.17) sous l'hypothèse $\gamma_{g2} < 1$ et appliquant la définition de $\rho_n = \rho_n(X_t^2, X_{t-n}^2)$, $n \geq 1$, avec un rendement de manipulation supplémentaire. \square

Pour calculer l'autocorrélation de modèle EGARCH(1,1) on a le théorème de He et al [12] suivant :

Théorème 2.5 *Considérons le modèle EGARCH(1,1), si $v_{4m} < \infty$, $E\{\eta_t^{2m}\} \exp(mc(\eta_{t-1})) < \infty$ et $\exp(mc(\eta_{t-1})) < \infty$ pour $0 < m < \infty$ et $|\beta| < 1$ est vérifiée, alors la fonction d'autocorrélation de $\{X_t^{2m}\}$ lorsque (X_t) est généré par n'importe quel membre de modèle EGARCH(1,1) équivaut :*

$$\rho_n(m) = \frac{v_{2m} E\{\eta_t^{2m}\} \exp(m\beta^{n-1}c(\eta_{t-1})) \prod_{i=1}^{n-1} E\{\exp(m\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\}}{v_{4m} \prod_{i=1}^{\infty} E\{\exp(2m\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\} - v_{2m}^2 \prod_{i=1}^{\infty} (E\{\exp(m\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\})^2} \\ \times \prod_{i=1}^{\infty} E\{\exp(m(1 + \beta^n)\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\} - v_{2m}^2 \prod_{i=1}^{\infty} (E\{\exp(m\beta^{i-1}c(\eta_{t-1}))\})^2,$$

pour $n \geq 1$.

Maintenant dans ces exemples nous étudions les moments non conditionnels, Kurtosis et la fonction autocorrélation de modèle GARCH(1,1) et le modèle TGARCH(1,1).

Exemple 2.5 *Pour le modèle GARCH(1,1) à coefficients positifs, la condition d'existence de $E\{X_t^{2m}\}$ est*

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \alpha^i \beta^{m-i} \mu_{2i} < 1,$$

où $\mu_{2i} = E\{\eta_t^{2i}\}$, $i = 0, \dots, m$, dans le cas $m = 1$ et $m = 2$ nous obtenons

$$E\{X_t^2\} = E\{h_t^2\}E\{\eta_t^2\} = E\{h_t^2\}$$

car $E\{\eta_t^2\} = 1$

$$= \omega + \alpha E\{X_{t-1}^2\} + \beta E\{h_{t-1}^2\} \\ = \omega + (\alpha + \beta)E\{X_{t-1}^2\},$$

donc $(1 - \alpha - \beta)E\{X_t^2\} = \omega$ puisque $\omega > 0$ alors

$$E\{X_t^2\} = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta},$$

calcul du moment d'ordre 4

$$E\{X_t^4\} = E\{ht^4\}E\{\eta_t^4\} \\ = \mu_4[\omega^2 + 2\omega(\alpha + \beta)E\{X_{t-1}^2\} + (\beta^2 + 2\alpha\beta)E\{h_{t-1}^2\} + \alpha^2 E\{X_{t-1}^4\}],$$

$\mu_4 = E\{\eta_t^4\}$ alors

$$(1 - \alpha^2\mu_4 - \beta^2 - 2\alpha\beta)E\{X_t^4\} = (\omega^2 + 2\omega^2(\alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta)^{-1})\mu_4 \\ = (\omega^2(1 + \alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta)^{-1})\mu_4,$$

donc

$$E\{X_t^4\} = \frac{\omega^2(1 + \alpha + \beta)}{(1 - \mu_4\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta)(1 - \alpha - \beta)}\mu_4,$$

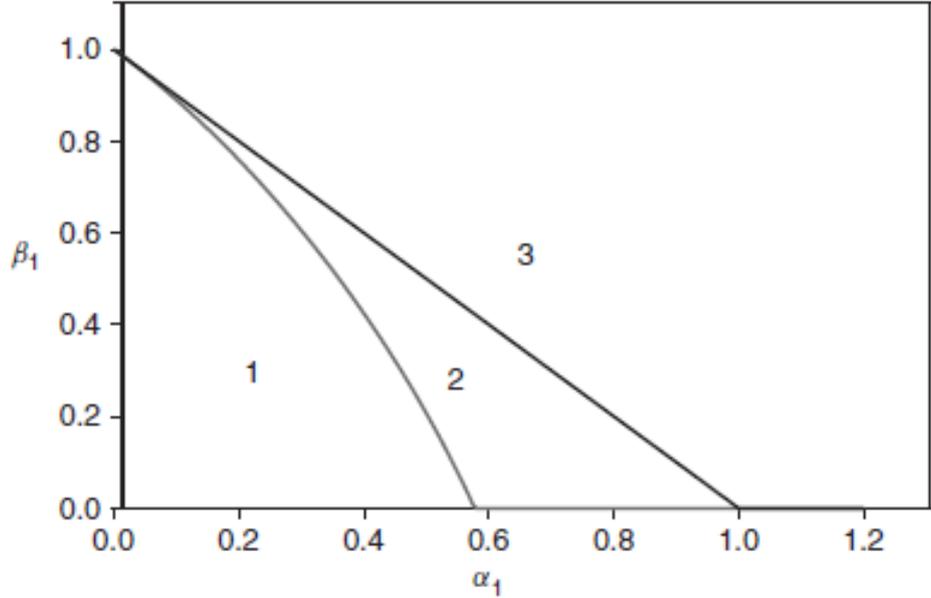


FIGURE 2.1 – Existence de régions des moments pour le modèle GARCH(1,1).

à condition que le dénominateur soit positif la figure (2.1) montre les zones de stationnarité de second et de quatrième ordre pour le modèle GARCH(1,1) lorsque $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, tel que 1 représenté moment d'ordre 4, 1 et 2 représenté moment d'ordre 2 par contre 3 représenté variance infinie. Pour calculer le Kurtosis de (X_t) , il faut les calculs précédents de le moment d'ordre 2 quatre divisé par le carré du moment d'ordre 2 alors le Kurtosis pour le modèle GARCH(1,1) est

$$\begin{aligned} K_X &= \frac{E\{X_t^4\}}{(E\{X_t^2\})^2} = \frac{\omega^2(1 + \alpha + \beta)}{(1 - \mu_4\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta)(1 - \alpha - \beta)}\mu_4 \\ &= \mu_4 \frac{\omega^2(1 + \alpha + \beta)}{(1 - \mu_4\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta)(1 - \alpha - \beta)} \frac{(1 - \alpha - \beta)^2}{\omega^2} \\ &= \mu_4 \frac{(1 + \alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta)}{(1 - \mu_4\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta)} \end{aligned}$$

$$K_X = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta}{1 - (\alpha + \beta)^2 - \alpha^2(\mu - 1)} \mu_4.$$

Pour le modèle GARCH(1,1) tel que $E\{X_t^4\} < \infty$ la fonction autocorrélation satisfait ainsi :

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \text{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) \\ &= (\alpha + \beta)\rho(h-1), \forall h > 1 \end{aligned}$$

nous avons vu X_t^2 admet la représentation ARMA(1,1)

$$X_t^2 - (\alpha + \beta)X_{t-1}^2 = \omega + v_t - \beta v_{t-1},$$

où $v_t = X_t^2 - E\{X_t^2 | X_{\mu}, \mu < t\}$ est bruit blanc (faible), nous utilisons la représentation MA(∞)

$$X_t^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} + v_t + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha + \beta)^{i-1} v_{t-i}$$

on obtient pour $h = 0$

$$\begin{aligned} \gamma_{X^2}(0) &= E\{v_t^2\} \left(1 + \alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha + \beta)^{2(i-1)}\right) \\ &= E\{v_t^2\} \left(1 + \frac{\alpha^2}{1 - (\alpha + \beta)^2}\right) \end{aligned}$$

et pour $h = 1$

$$\begin{aligned} \gamma_{X^2}(1) &= E\{v_t^2\} (\alpha + \alpha^2(\alpha + \beta) \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha + \beta)^{2(i-1)}) \\ &= E\{v_t^2\} \left(\alpha + \frac{\alpha^2(\alpha + \beta)}{1 - (\alpha + \beta)^2}\right), \end{aligned}$$

il s'ensuit que le décalage 1 autocorrélation est :

$$\rho_{X^2}(1) = \frac{\alpha(1 - \beta^2 - \alpha\beta)}{1 - \beta^2 - 2\alpha\beta}.$$

tel que $X_t = h_t \eta_t$, $h_t^2 = 1 + 0.3X_{t-1}^2 + 0.55h_{t-1}^2$, $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

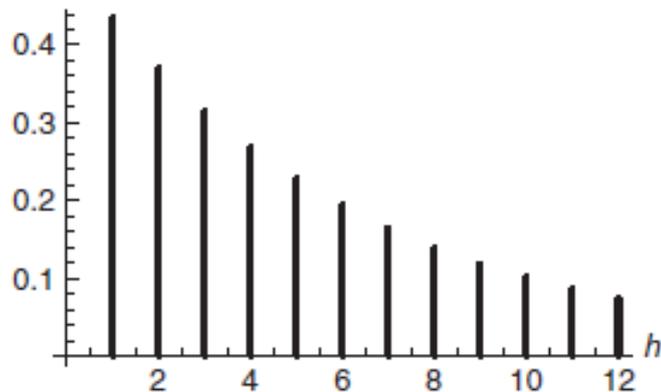


FIGURE 2.2 – Fonction d'autocorrélation du carré du modèle GARCH(1,1).

Exemple 2.6 Pour le modèle TGARCH(1,1) à coefficients positifs, la condition d'existence de $E\{|X_t|^m\}$ peut être obtenu directement, en utilisant la représentation suivants :

$$h_t^2 = \omega + \alpha_{1,+}\eta_{t-1}^+ - \alpha_{1,-}\eta_{t-1}^- + \beta h_{t-1}^2,$$

nous trouvons que $E\{h_t^{2m}\}$ existe et satisfait

$$E\{h_t^{2m}\} = \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} \omega^i E\{\alpha_{1,+}\eta_{t-1}^+ - \alpha_{1,-}\eta_{t-1}^- + \beta\} E\{h_t^{2m-i}\},$$

si et seulement si $E\{\alpha_{1,+}\eta_{t-1}^+ - \alpha_{1,-}\eta_{t-1}^- + \beta\} < 1$, si cette condition satisfait $m = 4$ alors le coefficient de Kurtosis existe. De plus, si $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ on a :

$$K_X = 3 \frac{E\{h_t^4\}}{(E\{h_t^2\})^2},$$

en utilisant la notation $c_i = E\{g^i(\eta_t)\}$ où

$$g(\eta_t) = \alpha_{1,+}\eta_{t-1}^+ - \alpha_{1,-}\eta_{t-1}^- + \beta,$$

les moments peuvent être calculé successivement comme : $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-}) + \beta$

$$E\{h_t\} = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{1,+}^2 + \alpha_{1,-}^2) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\beta(\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-}) + \beta^2$$

$$E\{h_t^2\} = \frac{\omega^2(1 - \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)}$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\alpha_{1,+}^3 + \alpha_{1,-}^3) + \frac{3}{2}\beta(\alpha_{1,+}^2 + \alpha_{1,-}^2) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\beta^2(\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-}) + \beta^3,$$

$$E\{h_t^3\} = \frac{\omega^3(1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)}.$$

$$c_4 = \frac{3}{2}(\alpha_{1,+}^4 + \alpha_{1,-}^4) + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\beta(\alpha_{1,+}^3 + \alpha_{1,-}^3) + \beta^4 + 3\beta^2(\alpha_{1,+}^2 + \alpha_{1,-}^2) + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\beta^3(\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-}),$$

$$E\{h_t^4\} = \frac{\omega^4(1 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3 + 5\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)}.$$

De nombreux moments du TGARCH(1,1) peuvent être obtenus de la même manière, comme les autocorrélations des valeurs absolues et des carrés, mais les calculs peuvent être fastidieux.

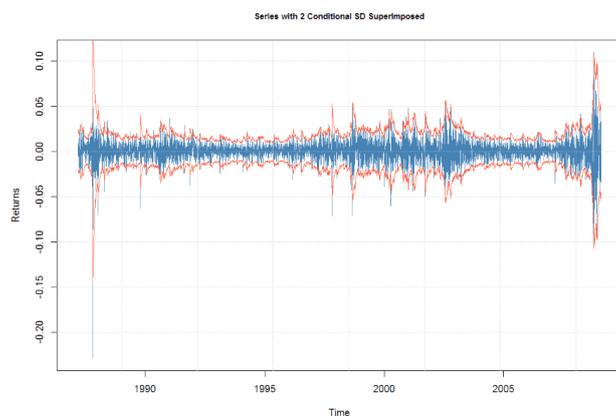
Application numérique

L'objectif de ce chapitre est de renforcer les résultats théoriques présentés précédemment par le biais de la simulation et une application empirique. Trois modèles de type GARCH, EGARCH et GJR-GARCH sont utilisés. Nous allons utiliser la bibliothèque rugarch de logiciel R 4.1.1 et plus particulièrement les commandes : `ugarchspec`, `ugarchfit` et `ugarchsim`.

3.1 Application empirique

3.1.1 Description des données

Nous possédons des données journalières des log-rendement de l'indice boursier SP 500, cette base de données comporte 5523 observations couvrant la période de 10/03/1987 au 30/01/2009.



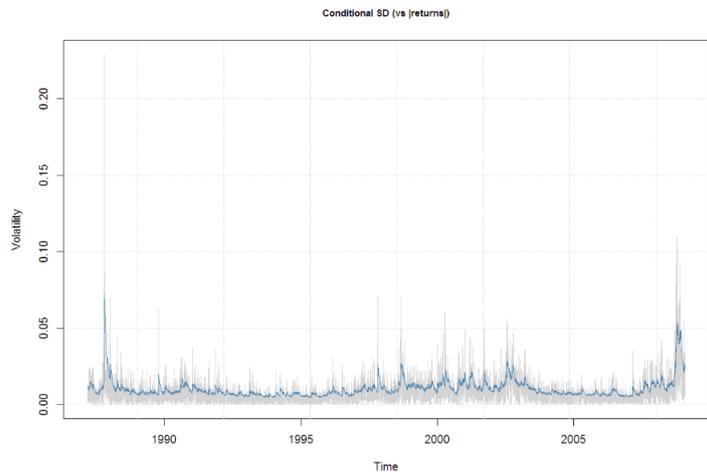


FIGURE 3.1 – Log-rendements de SP500 (à haut) et la variance conditionnelle (à bas).

3.1.2 Analyse descriptive de la série

Le tableau suivant résume les différents paramètres de statistique descriptive

n	Min	Max	1 QU	Med	3 QU	Moyenne
5523	-0.288	0.10	-0.004	0.00053	0.0056	0.00019

TABLE 3.1 – Statistique descriptive.

3.2 Estimation

Estimation de modèle GARCH(1,1)

On se basant sur la méthode de maximum de vraisemblance pour estimer les 04 paramètres de modèle GARCH (1,1). Le tableau suivant résume les paramètres estimés, leurs écarts types, T-Value et P-signification.

Paramètre	Estimation	Ecart type	T-value	Pr(> t)
μ	0.000522	0.000087	5.987	0.0000***
ω	0.000001	0.000001	1.3891	0.16482
α_1	0.087715	0.013718	6.3942	0.0000***
β_1	0.904945	0.013768	65.7284	0.0000***

signif. codes : 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' '0.1' '1'

AIC = -6.4807 BIC = -6.4735 HQ = -6.4782 Log-Vraisemblance = 17902.41

TABLE 3.2 – Estimation de modèle GARCH(1,1).

Estimation de modèle EGARCH(1,1)

On se basant sur la méthode de maximum de vraisemblance pour estimer les 05 paramètres de modèle EGARCH (1,1). Le tableau suivant résume les paramètres estimés, leurs écarts types, T-Value et P-signification.

Paramètre	Estimation	Ecart type	T-value	Pr(> t)
μ	0.000217	0.000109	1.9928	0.046286*
ω	-0.178853	0.001510	-118.4137	0.0000***
α_1	-0.101053	0.00745	-13.5618	0.0000***
β_1	0.980159	0.000064	15362.678	0.0000***
γ_1	0.130274	0.004120	31.6177	0.0000***

signif. codes : 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' '0.1' '1'

AIC = -6.5096 BIC = -6.5012 HQ = -6.5067 Log-Vraisemblance = 17983.26

TABLE 3.3 – Estimation de modèle EGARCH(1,1).

Estimation de modèle TGARCH(1,1)

On se basant sur la méthode de maximum de vraisemblance pour estimer les 05 paramètres de modèle TGARCH(1,1). Le tableau suivant résume les paramètres estimés, leurs écarts types, T-Value et P-signification.

Paramètre	Estimation	Ecart type	T-value	Pr(> t)
μ	0.000284	0.000133	2.138	0.032518*
ω	0.000002	0.000001	1.3239	0.185537
α_1	0.010532	0.01508	1.0022	0.316231
β_1	0.909931	0.008181	111.1276	0.0000***
γ_1	0.125867	0.023203	5.4246	0.0000***

signif. codes : 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1' '1'

AIC = -6.5054 BIC = -6.4970 HQ = -6.5025 Log-Vraisemblance = 17917.65

TABLE 3.4 – Estimation de modèle TGARCH(1,1).

Remarque 3.1 Nous utilisant le critère Akaike (Aic) et le critère d'information Bayésien (Bic) et le critère d'information de Harman et Quim (HQ) :

$$Aic = 2K - 2 \log L.$$

$$Bic = K \log(n) - 2 \log L.$$

$$HQ = 2k \log(\log(n)) - 2 \log L.$$

Où n est la taille de l'échantillon, K est le nombre des paramètres estimés dans le modèle et L est la valeur maximale de la fonction de vraisemblance du modèle.

Interprétation

D'après les résultats d'estimation mentionnés dans les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4, le modèle EGARCH (1,1) est le plus adéquat pour la série SP500RET car :

- Tous ses paramètres sont significativement différents de 0.
- Le modèle EGARCH (1,1) minimise les trois critères d'information AIC, BIC, et HQ.
- Le modèle EGARCH (1,1) maximise la valeur de log-Vraisemblance (17983.26).

Annexe

3.3 Processus stochastique

Stationnarité

L'étude de la stationnarité est une étape importante avant celle de l'estimation. Le but est de chercher sous quelles conditions le processus étudié est stationnaire. On distingue deux notions de stationnarité au second ordre et stationnarité stricte, nous pouvons donner les définitions de ce propriété.

Définition 3.1 (*Stationnarité stricte*)

Soit (X_t) un processus temporel à valeurs réelles et en temps discret X_1, X_2, \dots, X_t . Ce processus est dit stationnaire (au sens strict) si toutes les fonctions f mesurables

$$f(X_1, X_2, \dots, X_t) = f(X_{1+k}, X_{2+k}, \dots, X_{t+k}),$$

ont la même loi jointe, pour tous $t \in \mathbb{N}$ et pour tous $k \in \mathbb{Z}$

Définition 3.2 (*La volatilité*)

La volatilité est un phénomène non observable, elle est l'ampleur des variations du cours d'un actif financier. Il s'agit d'un paramètre de quantification du risque de rendement et de prix. Ce phénomène est très utile dans les domaines boursiers et les taux de change.

Définition 3.3 (*Hétéroscédasticité*)

En statistique, l'on parle d'hétéroscédasticité lorsque les variances des résidus des variables examinées sont différentes. Cette notion provient du grec et est composée du préfixe hétéro- (« autre »), et de skedasê (« dissipation»). La notion d'hétéroscédasticité s'oppose à celle d'homoscédasticité, qui correspond au cas où la variance de l'erreur des variables est

constante. Tandis que dans le cas d'homoscédasticité, nous avons $\text{Var}(X_i) = h^2 \forall i$, nous avons désormais $\text{Var}(X_i) = h_i^2 \forall i$, où h_i^2 peut être différent de h_j^2 , pour $i \neq j$.

Kurtosis

Définition 3.4 *Le Kurtosis est un paramètre qui mesure le degré d'aplatissement ou de rétrécissement de la distribution d'une variable aléatoire. Il est s'écrit sous la forme suivante :*

$$K_X = E \left\{ \frac{(X_t - \mu)^4}{h^4} \right\},$$

tel que (X_t) un processus d'espérance μ et de d'écart type h . Si le processus (X_t) est centré, alors le kurtosis de ce processus est s'écrit sous forme : $K_X = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, où $\mu_k = E(X_t^k)$.

3.4 Matrices

3.5 Notions générales

Règle de Cauchy

Définition 3.5 *Soit $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists C \in [0, 1[$, on a si $v_n^{\frac{1}{n}} < C$, la série de terme général v_n est convergente. Si $v_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$, la série est divergente.*

Loi forte des grands nombres

Théorème 3.1 *Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, de même loi avec $E\{X_i\} = m, i = 1, \dots, n$ alors*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} m.$$

Fonction d'auto-covariance

Définition 3.6 *Soit $(X_t)_t$ un processus aléatoire de variance finie, on appelle fonction d'auto-covariance γ_h de X_t la fonction :*

$$\gamma_h = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E\{(X_t - E\{X_t\})(X_{t+h} - E\{X_{t+h}\})\}.$$

Théorème 3.2 *La fonction d'auto-covariance d'un processus $(X_t)_t$ stationnaire vérifie les propriétés suivantes :*

- $\gamma_0 = Cov(X_t, X_t) = E\{(X_t - E\{X_t\})^2\}$.
- $|\gamma_h| \leq \gamma_0$.
- $\gamma_h = \gamma_{-h}$ fonction paire.

Fonction d'auto-corrélation

Définition 3.7 Soit $(X_t)_t$ un processus stationnaire, on appelle fonction d'auto-corrélation ρ_h la fonction :

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}, h \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 3.2 Le graphique de la fonction d'auto-corrélation est appelé corrélogramme.

Théorème 3.3 La fonction d'auto-corrélation d'un processus X_t stationnaire vérifié les propriétés suivantes :

- $\rho_0 = 1$.
- $|\rho_h| \leq \rho_0$.
- $\rho_h = \rho_{-h}$ fonction paire.

Conclusion

Dans le présent mémoire, nous avons étudié les propriétés de probabilité de la famille des modèles GARCH(1,1). Nous avons d'abord commencé par chercher des conditions d'existence d'une solution strictement stationnaire pour la famille des modèles GARCH(1,1). Ensuite, nous avons présentés les conditions d'existence des moments non conditionnels de ce même modèle. De plus, elle donne les coefficients de Kurtosis non conditionnelle et la fonction d'autocorrélation de la famille des modèles GARCH(1,1). Dans le troisième chapitre, nous renforçons les résultats théoriques présentés précédemment par une application numérique sur trois modèles GARCH(1,1), EGARCH(1,1) et TGARCH(1,1).

Bibliographie

- [1] Afuecheta.E, Ruiz.D.A.P, Utazi.C, Nwosu.C. 2016 : On the flexibility of GARCH-family models with an application to the brics stock indices. Communications in statistics : case studies, data analysis and applications. ISSN :2373-7484. VOL.2. pp : 49.
- [2] AUE.A, BERKES.I, HORVATH.L. 2006 : Strong approximation for the sums of squares of augmented GARCH sequences. Bernoulli 12(4). pp : 584.
- [3] Ali.G. 2013 : EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH, AVGARCH, NGARCH, IGARCH and APARCH Models for Tathogens at Marine Recreational Site. Journal of Statistical and Econometric Methode. vol.2, No.3. ISSN : 2051-5057. pp :60.
- [4] Bolerslev. 1986 : Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of Econometrics 31. pp :309-311.
- [5] Bougrol.P, Picard.N. 1992 : Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. Journal of Econometrics 52. pp :117-119.
- [6] Brandt.A. 1986 : The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients. Humboldt-Universitiit zu Berlin. pp :211.
- [7] Francq.C, Zakoïan.J.M. 2006 : Mixing properies of a general class of GARCH(1,1) models without moment assumptions on the observes process. Econometric Theory. pp : 819.
- [8] Francq.C, Zakoïan.J.M : GARCH models structure, statistical inference and financial applications. John Wiley and Sons Ltd. 2010. ISBN :978-0-470-68394-0. pp : 24-36-64.
- [9] Francq.C, Wintenberger.O.Zakoïan.J.M. 2012 : Garch models without positivity constraints : exponential or log garch. MPRA. pp : 8-10.
- [10] HÖRMANN.S. 2008 : Augmented GARCH sequences : Dependence structure and asymptotics. Bernoulli 14(2). pp : 546.

Bibliographie

- [11] He.C, Teräsvirta.T. 1999 : Properties of moments of a family of GARCH processes. *Journal of Econometrics*. 92. pp :174-179.
- [12] He.C, Teräsvirta.T, Malmsten.H. 2002 : Moment structure of a family of first-order exponential GARCH models. *Econometric Theory*. Vol. 18, No. 4. pp :870.
- [13] Hentschel.L. 1995 : All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models. *Journal of Financial Economics* 39. pp :81.
- [14] Hwang.E. 2021 : Limit Theory for Stationary Autoregression with Heavy-Tailed Augmented GARCH Innovations. MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations. pp : 2-3.
- [15] Jánský.I, Rippel.M. 2011. Value at Risk forecasting with the ARMA-GARCH family of models in times of increased volatility ; IES Working Paper ; No. 27 ; pp : 2.
- [16] Ling.S, McAleer.M. 2002 : Stationarity and the existence of moments of a family of GARCH processes. *Journal of Econometrics*. 106. pp :111-112.
- [17] Lütkepohl.H : *Handbook of Matrices*. Copyright by John Wiley and Sons Ltd. 1996. ISBN :0471966886 :0471970158 (pbk). pp :117.
- [18] Mitez.M. 2005 : A necessary and sufficient condition for the strict stationarity of a family of GARCH processes. *SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance*. No.601. pp :2-3.
- [19] Nelson.D.B. 1990 : Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. Printed in the United States of America. Vol.6, No.3. pp : 320.
- [20] Nelson.D.B. 1991 : Conditional heteroskedasticity in asset returns : a new approach. *Econometrica*, Vol. 59, No. 2. pp :351.
- [21] Robert.F, Victor.K. 1993 : Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *the journal of finance*. VOL. XLVIII, NO.5. pp : 1751.
- [22] Salman Khan.M, Iqbal Khan.K, Mahmood.S, Sheeraz.M. 2019 : Symmetric and Asymmetric Volatility Clustering Via GARCH Family Models : An Evidence from Religion Dominant Countries. *Paradigms*. ISSN : 1996-2800. Vol. 13, No. 1. pp : 22.
- [23] Xu.J, Zhang.Z, Zhao.L, Ai.D. 2011 : *School of Mathematics and Physics*. pp :2660.
- [24] Zakoian.J.M. 1994 : Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control* 18. pp : 936-937.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié au premier lieu la stationnarité stricte et l'ergodicité de la famille des modèles GARCH(1,1). Au second lieu, nous allons étudier les moments non conditionnel, Kurtosis non conditionnel et la fonction l'autocorrélation de la famille des modèles GARCH(1,1). Comme une application on va faire la simulation des trois sous modèles (GARCH(1,1), TGARCH(1,1) et EGARCH(1,1)) estimer en utilisant le langage **R**.

Mots-clé

Le modèle GARCH(1,1), le modèle EGARCH(1,1), le modèle TGARCH(1,1), la stationnarité stricte, ergodicité, les moments et le Kurtosis.

Abstract

In this paper, we first study the strict stationarity and ergodicity of the family GARCH(1,1). In the second place, we will study the unconditional moment, Kurtosis unconditional and function autocorrelation of the family GARCH(1,1). As an application we will simulate the three models (GARCH (1,1), TGARCH (1,1) and EGARCH (1,1)) using the R language.

Keywords

GARCH(1,1) model, EGARCH(1,1) model, model TGARCH(1,1), strict stationarity and ergodicity, the moment and Kurtosis.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا اولا بدراسة الاستقرار القوي و الحيوي لعائلة نموذج GARCH(1,1). ثانيا قمنا بدراسة اللحظات الغير مشروطة، التفرطح الغير مشروطة ووظيفة الارتباط التلقائي لعائلة نموذج GARCH(1,1). كتطبيق قمنا بمحاكات لثلاثة نماذج (GARCH(1,1)، EGARCH(1,1) و TGARCH(1,1)) باستخدام برنامج R.

الكلمات المفتاحية

نموذج GARCH(1,1)، نموذج EGARCH و نموذج TGARCH(1,1)، الاستقرار القوي

و الحيوي ، اللحظات الزمنية و التفريط.