الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire de MILA

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Problèmes aux limites pour quelques équations aux q-différences non linéaires

Préparé par:

Bazoula Manal
Alouane Somia

Soutenue devant le jury

Kaouache Smail (M. C. A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Rihane Salah Eddine (M. C. B)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Hadad Nabila (M. C. B)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2020/2021

Dédicace

je dédie ce travail

A ma mère, pour son amour, ses encouragements

et ses sacrifiees

A mon père, pour son soutien, son affection

et laconfiance qu'il m'a accordé

A mes très chéres frère "Fiasel", pour leur

appui et leur encouragement

A mes très chéres sœurs " Madjda, Meryem, Assia et Hadil"

pour leurs encouragements permanents

et leur soutien moral

A les petites filles "kawther et Sondos"

A mon binôme " Somia " pour sa

patience et sa compréhension tout au long de ce projet

A tous les membres de ma famille

A toutes mes amies

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Manal

Dédicace

Je dédis ce modeste travail en premier lieu à mes parents :

Mon père et Ma mère pour les efforts qu'ils ont suscités en moi .

Ceux sans lesquelles ce travail n'aurait pas été possible.

A mon grand père que DIEU lui donne une longue vie .

A ma tante yamina l'ange de ma famille .

A mes chers frères :SALEH, ABDELMALEK , HAMZA et NASREDDINE .

A mes chères sœurs :MAREIM, HANANE, RAZIKA et WISSEM .

Je ne saurais oublier mes neveux et mes nièces chacun par son nom.

A mon oncle Chérif et sa petite famille et pour toute ma famille .

A mon fiancé SALAHADDINE et sa famille.

A mon amie Imane Fredj et sa famille .

Je dois également un grand merci à mes copines de chambres Karima et Fatima .

Sans oublier mon binôme Manal pour sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet .

Enfin , je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance et mes plus sincères remerciements à mon frèreABDELMALEK pour son indéfectible appui , pour ses suggestions pertinentes et pour ses précieux conseils durant toute ma vie .

Somia

Remerciements

Je remercie avant tous ALLAH pour m'a aidé, ses innombrable dons, ALLAH qui m'a donné la force, la volonté et le moral pour accomplir m'a étude en master en mathématique.

En second lieu, nous tenons à remercier mes parents, qui mon encouragé et aidé à arriver à ce stade de ma formation.

Je remercie du fond du coeur Monsieur RIHANE SALAHADDINE pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques,ses encouragement et ces conseils m'ont été précieux.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury a pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Il est important pour moi de remercier ma famille :

mes parents, mes soeurs, mes frères qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Également, un remerciement a tous mes collègues de promotion 2021 les bons moments qui nous avons passé ensemble.

"life is good only for two things, discovering mathematics and teaching mathematics."

Simeon Denis Poisson

Résumé

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire est l'étude l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes aux limites pour des équations aux q-différences non linéaires d'ordre deux est d'ordre trois.

Dans les deux problèmes les résultats d'existence des solution sont obtenues par applications de certains théorèmes du point fixe (Ascoli-Arzéla, l'alternative non linéaire de Leray-schauder, théorème du schauder).

Mots clés : Équation aux q-différences, théorèmes du point fixe, problème aux limites, q-dérivée, q-intégrale.

Abstact

The objective of the work presented in this thesis, is the study the existence and uniqueness solution of some boundary value problems for nonlinear q-difference equations of second and third order.

In both problems the existence of solutions are obtained by using certain fixed point theorems (Ascoli-Arzéla, Leray-Schauder nonlinear alternative, Schauder fixed point theorem)

Key words : q-difference equation, fixed point theorem, q-derivative, q-integral, boundary value problem.

ACRONYMES ET NOTATION

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres entiers réels.
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.
- $[x]$: la partie entière de x.
- $\|.\|$: désinge la norme sur un espace de Banach.
- $\overline{\Omega}$: fermetur de Ω.
- $C[0,1]$: espace des fonctions continues sur $[0,1]$.
- $e.v.n$: l'espace vectoriel normé.

Table des matières

Introduction Générale

L'histoire de l'étude du q-calcul peut être illustrée par sa grande variété d'applications en mécanique quantique, la physique, théorie analytique des nombres, fonctions thêta, fonctions hypergéométriques, théorie des différences finies, théorie des fonctions gamma, polynômes de Bernoulli et d'Euler, combinatoire, calcul ombral, fonctions hypergéométriques multiples, espaces de Sobolev, théorie des opérateurs, et plus récemment dans la théorie des fonctions univalentes analytiques et harmoniques (cf. [4, 5, 7, 8, 9, 10, 11])

Le sujet des équations aux q-différences a été introduit par Jackson en 1910 [12].

L'objectif de ce mémoire est d'étude l'existence et l'unicité des solutions pour certaines problèmes aux limites pour des équations aux q-différence non linéaires. Le contenu de ce mémoire est basé sur les travaux de B. Ahmad [2] et de C. Yu et J. Wang [15]

Ce mémoire se compose d'une introduction et quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations qui seront utiles dans la suite de travail. Nous présentons quelques notions concernant les espaces de Banach, les opérateurs non linéaires, le degré topologique de Leray-Schaudre ainsi que quelques théorèmes de point fixe.

Au deuxième chapitre, nous présentons quelques notions, définitions et théorèmes de q-calcul.

Dans le troisième chapitre on présente quelques résultats d'existences et d'unicité de solutions du problème aux limites pour l'équation aux q-différence non linéaire d'ordre trois suivant :

$$\begin{cases} D_q^3 u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I, \\ u(0) = 0, \\ D_q u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

où $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $I = \{q^n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0, 1\}, q \in]0, 1[$.

Le dernier chapitre a pour but l'étude le problème aux limites pour l'équation aux q-différence non linéaire d'ordre deux suivant :

$$\begin{cases} D_q^2 u(t) = f(t, u(t), D_q u(t)), \quad t \in I, \\ D_q u(0) = 0, \\ D_q u(1) = \alpha u(1). \end{cases}$$

Enfin, le mémoire sera clôturé par une Bibliographie

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de Banach

Tous les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps de base $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, sauf mention du contraire.

Définition 1.1. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Voici un corollaire immédiat et de la définition ci-dessus :

Corollaire 1.1. *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.2. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit donc E espace vectoriel normé de dimension finie et $e_1, \dots, e_n$ base de E. Notons, pour tout $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans cette base, et

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

La norme $\|x\| \mapsto \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty$ étant équivalente à la norme de E, on obtient un isomorphisme bi-continu $E \ni x \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Comme K^n muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet, E est complet. □

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions, importants en Analyse.

Soit F un espace de Banach, dont on note $|\cdot|_F$ la norme (par exemple, F est un espace vectoriel normé de dimension finie, K^N ou même K).

Exemple 1.1. $B(A, F)$, l'espace des applications bornées de $A \longrightarrow F$ où A est un ensemble, muni de la norme du sup :

$$\|f\|_B = \sup_{x \in A} |f(x)|_F.$$

Exemple 1.2. $C_b(X, F)$, l'espace des applications continues bornées de (X, d), espace métrique, à valeurs dans F, muni de la norme du sup$\|f\|_B$.

Exemple 1.3. $C_0(E, F)$, l'espace des applications continues tendant vers 0 à l'infini de E, espace vectoriel normé de dimension finie, à valeurs dans F, muni de la norme du $\sup\|f\|_B$.

Exemple 1.4. $C(K, F)$, l'espace des applications continues de (K, d), espace métrique compact, à valeurs dans F, muni de la norme du $\sup\|f\|_B$.

Proposition 1.1. *L'espace $B(A, F)$ muni de la norme $\sup\|f\|_B$ est un Banach. L'espace $C_b(X, F)$ est fermé dans $B(X, F)$ et l'espace $C_0(E, F)$ est fermé dans $B(E, F)$. Enfin $C(K, F) = C_b(K, F)$.*

Définition 1.2. *Dans un espace vectoriel normé, une série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est dite normalement convergente si la série $\sum_{n\geq 0}\|x_n\|$ est bornée (donc converge).*

Proposition 1.2. *Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.*

1.2 Généralités sur les opérateurs

Définition 1.3 (Opérateur borné)**.** *Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est borné si l'image de tout borné dans X par T est un borné de Y . i.e. pour tout ensemble D borné dans X, $T(D)$ est borné dans Y.*

Définition 1.4 (ensemble relativement compact)**.** *On dit qu'un ensemble M de X est relativement compact si son adhérence $\overline{M}$ est compact (ou encore si il existe un compact K de X tel que $M \subset K$).*

Définition 1.5. *Un opérateur T défini sur un espace de Banach X dans lui même (ou dans un autre espace de Banach Y) est dit opérateur complètement continu, s'il transforme tout ensemble borné en une ensemble relativement compact.*

Théorème 1.2 (d'Arzela)**.** *Pour qu'une famille F de fonctions continues et définies sur $[a; b]$ soit compacte dans $C[a; b]$, il faut et il suffit que les fonctions de F soient*

(i) uniformément bornées

(ii) équicontinues

Définition 1.6. *L'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit séquentiellement continu en $x \in X$, si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.*

T est dit continu sur un ensemble $A \subset X$ si T est séquentiellement continu en tout point $x \in A$.

Définition 1.7 (Opérateur compact)**.** *Un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit compact s'il est continu et possède la propriété : pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans X, la suite $(T(x_n))$ admet une sous-suite convergente.*

Théorème 1.3 (Théorème d'Ascoli-Arzéla)**.** *$M \subset C([a;b];\mathbb{R})$ est relativement compact si M est uniformément bornée et équicontinue.*

1.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 1.4 (L'alternative non linéaire de Leray-Schauder)**.** *[**?**] Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un convexe fermé, Ω un ouvert de C contenant 0 et*

$$T : \overline{\Omega} \longrightarrow C$$

opérateur complètement continu. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié

(i) *T admet un point fixe dans $\overline{\Omega}$ i. e $\exists x \in \overline{\Omega} : x = Tx$,*

(ii) *il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in [0,1]$ telle que $x = \lambda Tx$.*

Théorème 1.5. *Soit Ω un ouvert borné d'un espace de Banach E tel que $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ un opérateur compact. T a un point fixe dans $\overline{\Omega}$ si*

$$\| Tu - u \|^2 \geq \| Tu \|^2 - \| u \|^2, \quad u \in \partial\Omega.$$

Théorème 1.6 (Schauder)**.** *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach X et $K : C \longrightarrow C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.*

1.4 Degré topologique de Leray-Schauder

Définition 1.8. *Soit E un Banach et $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des triplets $(I - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de E, $y \in E$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est compact et telle que $y \notin (I - f)(\partial\Omega)$. Il existe une application $\deg : \mathcal{A}_c \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que*

(i) Normalisation : si Ω est un ouvert borné de E et $y \in \Omega$ alors

$$\deg(I, \Omega, y) = 1.$$

(ii) Additivité : si Ω *est un ouvert borné de* E, $y \in E$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ *est compact et* Ω_1, Ω_2 *sont des ouverts disjoints inclus dans* Ω *tels que* $y \notin (I-f)(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, *alors*

$$\deg(I-f,\Omega,y) = \deg(I-f,\Omega_1,y) + \deg(I-f,\Omega_2,y).$$

(iii) Invariance par homotopie : si Ω *est un ouvert borné de* E, $h : [0,1] \times \Omega \longrightarrow E$ *est compacte,* $y : [0,1] \longrightarrow E$ *est continue et, pour tout* $t \in [0,1]$, $y(t) \notin (I - h(t,\cdot))(\partial\Omega)$, *alors*

$$\deg(I-h(0,\cdot),\Omega,y(0)) = \deg(I-h(1,\cdot),\Omega,y(1)).$$

deg *est appelé le degré topologique de Leray-Schauder.*

Théorème 1.7. *Le degré topologique de Leray-Schauder vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Si $\deg(I-f,\Omega,y) \neq 0$, *alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $x - f(x) = y$.

(ii) Pour tout $z \in E$, $\deg(I-f,\Omega,y) = \deg(I-f-z,\Omega,y-z)$.

(iii) Pour tout $z \in E$, $\deg(I-f,\Omega,y) = \deg((I-f)(-z), z+\Omega, y)$.

1.5 Fonction S-Carathéodory

Définition 1.9. *Une fonction* $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est appelée fonction* S*-Carathéodory si et seulement si*

(i) pour chaque $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, *la fonction* $t \mapsto f(t,u,v)$ *est mesurable sur* I,

(ii) pour $t \in I$, *la fonction* $(u,v) \to f(t,u,v)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$,

(iii) pour tout $r > 0$, *il existe* $\varphi_r(t) \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ *avec* $t\varphi_r(t) \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ *sur* I *tel que* $\max\{|u|,|v|\} \leq r$ *implique* $|f(t,u,v)| \leq \varphi_r(t)$, *pour* $t \in I$, *où*

$$L^1(I,\mathbb{R}^+) = \left\{ u \in C_q : \int_0^1 u(t) d_q t \ \textit{existe} \right\}$$

et

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(t)| d_q t \quad \textit{pour tout } u \in L^1(I,\mathbb{R}^+).$$

Chapitre 2

Généralités sur le q-calcul

2.1 Notations et définitions en q-Calcul

Dans cette section nous introduisons quelques définitions de base de q-calcul que nous allons utiliser dans la suite.

Définition 2.1. *Soit $q > 0$. Pour tout entier n, on définit le q-entier $[n]_q$ par*

$$[n]_q := \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \textit{si } q \neq 1, \\ n, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 2.1. On a

$$[1]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q}{1-q}, & \text{si } q \neq 1, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1}$$

D'où

$$[1]_q = 1, \quad \forall q > 0. \tag{2.2}$$

Définition 2.2. *Soit $q > 0$. On définit le q-factoriel $[n]_q!$ de l'entier n par*

$$[n]_q := \begin{cases} [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q, & \textit{si } n \neq 0 \\ 1, & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Exemple 2.1. On a

$$[5]_{\frac{1}{2}}! := [5]_{\frac{1}{2}} \cdot [4]_{\frac{1}{2}} \cdot [3]_{\frac{1}{2}} \cdot [2]_{\frac{1}{2}} \cdot [1]_{\frac{1}{2}}.$$

Puisque

$$[n]_{\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

alors

$$\begin{aligned} [5]_{\frac{1}{2}}! &= \left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^1\right) \\ &= \left(2-\frac{1}{16}\right)\left(2-\frac{1}{8}\right)\left(2-\frac{1}{4}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{31}{16}\right)\left(\frac{15}{8}\right)\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{9765}{1024}. \end{aligned}$$

Définition 2.3. *Soit $q > 0$ et soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$. On définit les coefficients q-binomiaux par*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}. \tag{2.4}$$

Exemple 2.2. On a
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_{\frac{2}{3}} = \frac{[4]_{\frac{2}{3}}!}{\left([2]_{\frac{2}{3}}!\right)^2}.$$
Puisque
$$[n]_{\frac{2}{3}} = \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right),$$
donc
$$\begin{aligned}[4]_{\frac{2}{3}}! &= [4]_{\frac{2}{3}}! \cdot [3]_{\frac{2}{3}}! \cdot [2]_{\frac{2}{3}}! \cdot [1]_{\frac{2}{3}}! \\ &= 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \\ &= 27\left(\frac{65}{81}\right)\left(\frac{19}{27}\right)\left(\frac{5}{9}\right) \\ &= \frac{166725}{19683}\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}[2]_{\frac{2}{3}}! &= [2]_{\frac{2}{3}}! \cdot [1]_{\frac{2}{3}}! \\ &= 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \\ &= \frac{5}{3}.\end{aligned}$$
Par suite
$$[4]_{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{166725}{19683}}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{1500525}{492075}.$$

Théorème 2.1. *[4, page 2] Les coefficients q-binomiaux satisfaisons les relations récurrentes suivantes :*
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{2.5}$$
et
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.6}$$

Définition 2.4. *[4, page 2] Le q-analogue de $(1+x)_q^n$ est le polynôme*
$$(1+x)_q^n := \begin{cases} (1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x), & si\ n = 1, 2, \ldots \\ 1, & si\ n = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Définition 2.5. *[4, page 2] Le q-analogue de pochhammer symbole est défini par :*
$$(x;q)_0 = 1, \quad (x;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1-q^i x) \quad et \quad (x;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i x). \tag{2.8}$$

Définition 2.6. *[4, page 2] La formule q-binomial de Gauss :*

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right]_q q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j}. \tag{2.9}$$

Définition 2.7. *[4, page 2] La formule q-binomial de Heine :*

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n]_q[n+1]_q \cdots [n+j-1]_q}{[j]_q!} x^j. \tag{2.10}$$

Théorème 2.2. *[4, page 3] On a*

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right]_q (x-1)_q^j. \tag{2.11}$$

2.2 q-dérivée

Définition 2.8. *[3, page 5] Un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{C}$ est dit μ-géométrique, si $\mu t \in A$ pour tout $t \in A$.*

Remarque 2.2. Si A est μ-géométrique, alors A contient toute les suites géométrique $\{t\mu^n\}_{n\geq 0}$ tel que $t \in A$.

Exemple 2.3. L'ensemble

$$\{q^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

est un ensemble q-géométrique.

Définition 2.9. *[4, page 3] Soit f une fonction définie sur un ensemble q-géométrique A où $|q| \neq 1$. La q-dérivée $D_q f$ de la fonction f est donnée par :*

$$D_q f(t) := \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t}, \quad \textit{pour } t \in A - \{0\} \tag{2.12}$$

et

$$D_q f(0) := f'(0) \ \textit{si} \ f'(0) \ \textit{existe.} \tag{2.13}$$

Remarque 2.3. Notons que, si f et dérivable alors on a

$$\lim_{q\to 1} D_q f(t) = \lim_{q\to 1} \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t} = \frac{df(t)}{dt}. \tag{2.14}$$

Exemple 2.4. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$D_q(\ln t) = \frac{\ln t - \ln qt}{t - qt} = \frac{\ln\left(\frac{1}{q}\right)}{(1-q)t}$$

Exemple 2.5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$D_q(t^2) = \frac{t^2 - q^2t^2}{t - qt} = (1+q)t.$$

Exemple 2.6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$D_q(t^3) = \frac{t^3 - q^3t^3}{t - qt} = (1+q+q^2)t^2.$$

Théorème 2.3. *[3, page 5] La q-dérivée d'un fonction est un opérateur linéaire.*

Démonstration. En effet, si a et b deux constantes et si f et g deux fonctions q-géométriques alors

$$\begin{aligned} D_q((af+bg)(t)) &= \frac{(af+bg)(t) - (af+bg)(qt)}{(1-q)t} \\ &= a \cdot \frac{f(t) - f(qt)}{(1-q)t} + b \cdot \frac{g(t) - g(qt)}{(1-q)t} \\ &= aD_q(f(t)) + bD_q(g(t)). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.4. *[4, page 3] Soient f et g deux fonctions q-géométrique. Pour $t \neq 0$ on a*

$$D_q(f(t)g(t)) = f(qt)D_qg(t) + D_qf(t)g(t). \tag{2.15}$$

Démonstration. Comme $t \neq 0$, alors d'après la définition 2.9 on a

$$\begin{aligned} D_q(f(t)g(t)) &= \frac{f(qt)g(qt) - f(t)g(t)}{(q-1)t} \\ &= \frac{f(qt)g(qt) - f(qt)g(t) + f(qt)g(t) - f(t)g(t)}{(q-1)t} \\ &= \frac{f(qt)(g(qt) - g(t))}{(q-1)t} + \frac{(f(qt) - f(t))g(t)}{(q-1)t} \\ &= f(qt)D_qg(t) + D_qf(t)g(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.4. On a aussi

$$D_q(f(t)g(t)) = f(t)D_qg(t) + D_qf(t)g(qt). \tag{2.16}$$

Théorème 2.5. *[4, page 4] Soient f et g deux fonctions q-géométrique. Si $t \neq 0$ et $g(t) \neq 0$, alors on a*

$$D_q\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)D_qf(t) - f(t)D_qf(t)}{g(qt)g(t)} \tag{2.17}$$

Démonstration. En utilisant la définition 2.9, on obtient que

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) &= \frac{1}{(q-1)t}\left(\frac{f(qt)}{g(qt)} - \frac{f(t)}{g(qt)} + \frac{f(t)}{g(qt)} - \frac{f(t)}{g(t)}\right) \\ &= \frac{1}{g(qt)}\left(\frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}\right) + \frac{1}{(q-1)t}\left(\frac{f(t)g(t)-f(t)g(qt)}{g(qt)g(t)}\right) \\ &= \frac{1}{g(qt)}D_qf(t) + \frac{f(t)}{g(qt)g(t)}\left(\frac{g(t)-g(qt)}{(q-1)t}\right) \\ &= \frac{g(t)D_qf(t) - f(t)D_qf(t)}{g(qt)g(t)}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.5. La formule si-dessus peut s'écrit comme suit

$$D_q\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(qt)D_qf(t) - f(qt)D_qg(t)}{g(qt)g(t)}. \tag{2.18}$$

Notons qu'il n'existe pas une règle générale pour calculer la q-dérivée d'une fonction composée. Nous pouvons donner une règle pour les fonctions de la forme $f(u(t))$, où $u(t) = \alpha t^\beta$ avec α, β étant constante.

Théorème 2.6. *[4, page 4] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et posons $u(t) = \alpha t^\beta$. On a*

$$D_q(f(u(t))) = \big(D_{q^\beta}f\big)(u(t))D_q(u(t)). \tag{2.19}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} D_q\big(f(u(t))\big) &= D_q\big(f(\alpha t^\beta)\big) \\ &= \frac{f(\alpha q^\beta t^\beta) - f(\alpha t^\beta)}{(q-1)t} \\ &= \frac{f(\alpha q^\beta t^\beta) - f(\alpha t^\beta)}{\alpha q^\beta t^\beta - \alpha t^\beta}.\frac{\alpha q^\beta t^\beta - \alpha t^\beta}{(q-1)t} \\ &= \frac{f(q^\beta u) - f(u)}{q^\beta u - u}.\frac{u(qt)-u(t)}{(q-1)t} \end{aligned}$$

et, donc,

$$D_q(f(u(t))) = \big(D_{q^\beta}f\big)(u(t))D_q(u(t)).$$

□

Définition 2.10. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit les q-dérivées d'ordre supérieur par*

$$D_q^0 f(t) = f(t) \quad \textit{et} \quad D_q^n f(t) = D_q D_q^{n-1} f(t) \textit{ pour } n \geq 1. \tag{2.20}$$

Exemple 2.7. On a

$$D_q^0(t^2) = t^2, \quad D_q(t^2) = (1+q)t, \quad D_q^2(t^2) = 1+q \quad \text{et} \quad D_q^n(t^2) = 0 \text{ pour } n \geq 3.$$

Théorème 2.7. *[4, page 3] Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble q-géométrique. La règle de Leibniz pour l'opérateur q-dérivée est donnée par*

$$D_q^{(n)}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q D_q^{(k)} f(tq^{n-k}) D_q^{(n-k)} g(t). \tag{2.21}$$

Théorème 2.8. *[4, page 4] Pour $n \geq 1$, on a*

$$D_q(1+t)_q^n = [n]_q (1+qt)_q^{n-1} \tag{2.22}$$

et

$$D_q\left(\frac{1}{(1+t)_q^n}\right) = -\frac{[n]_q}{(1+t)_q^{n+1}}. \tag{2.23}$$

Preuve. Selon la définition de q-dérivée (2.9) on a

$$\begin{aligned} D_q(1+t)_q^n &= \frac{(1+qt)_q^n - (1+t)_q^n}{(q-1)t} \\ &= (1+qt)_q^{n-1} \frac{(1+q^n t - (1+t))}{(q-1)t} \\ &= [n]_q (1+qt)_q^{n-1}. \end{aligned}$$

D'après (2.17), on a

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{1}{(1+t)_q^n}\right) &= -\frac{D_q(1+t)_q^n}{(1+qt)_q^n (1+t)_q^n} \\ &= -\frac{[n]_q}{(1+q^n t)(1+t)_q^n} \\ &= -\frac{[n]_q}{(1+t)_q^{n+1}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.6. Supposons que $n \geq 1$ et $a, b, r, s \in \mathbb{R}$, alors par un calcul simple, on a immédiatement le suivant :

$$D_q(a+bt)_q^n = [n]_q b(a+bqt)_q^{n-1}, \tag{2.24}$$

$$D_q(at+b)_q^n = [n]_q a(at+b)_q^{n-1}, \tag{2.25}$$

et

$$D_q \frac{(1+at)_q^r}{(1+bt)_q^s} = [r]_q a \frac{(1+aqt)_q^{r-1}}{(1+bqt)_q^s} - b[s]_q \frac{(1+at)_q^r}{(1+bt)_q^{s+1}}. \tag{2.26}$$

2.3 Développement en q-série

Théorème 2.9. *[4, page 5] Pour $|t| < 1$ et $|q| < 1$ on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k} t^k = \frac{(1-at)_q^\infty}{(1-t)_q^\infty}, \tag{2.27}$$

où

$$(1-t)_q^\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1-q^k t). \tag{2.28}$$

Démonstration. Posons

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k} x^k.$$

Clairement

$$\begin{aligned} \frac{f_a(t)-f_a(qt)}{t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)_q^k}{(1-q)_q^k} \left(1-q^k\right) t^{k-1} \\ &= (1-a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-aq)_q^{k-1}}{(1-q)_q^{k-1}} t^{k-1} \\ &= (1-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-aq)_q^k}{(1-q)_q^k} t^k = (1-a) f_a(qt). \end{aligned}$$

d'où

$$f_a(t) - f_a(qt) = (1-a) t f_a(qt).$$

Ceci d'une part. D'autre part

$$\begin{aligned} f_a(t) - f_a(qt) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-qa)_q^{k-1}}{(1-q)_q^k} \left(1-a-1+aq^k\right) t^k \\ &= -at f_{aq}(t), \end{aligned}$$

donc,

$$f_a(t) = (1-at) f_{aq}(t)$$

En combinant les deux équations ci-dessus, on obtient

$$f_a(t) = \frac{(1-at)}{(1-t)} f_a(qt).$$

L'itération de cette relation n fois et faisons $n \to \infty$ on déduire que

$$f_a(t) = \frac{(1-at)_q^n}{(1-t)_q^n} f_a(q^n t) = \frac{(1-at)_q^\infty}{(1-t)_q^\infty}.$$

Ainsi on obtient le résultat souhaité. □

Corollaire 2.1. *[4, pages 6 et 7]*

(a) *Prenant $a = 0$ dans le théorème 2.9, on obtient*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(1-q)_q^k} = \frac{1}{(1-t)_q^\infty}, \qquad \text{où } |t| < 1 \text{ et } |q| < 1. \tag{2.29}$$

(b) *En remplaçant a par $\frac{1}{a}$ et t par at, et en prenant $a = 0$ dans le théorème 2.9, on déduire que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} t^k}{(1-q)_q^k} = (1-t)_q^\infty, \qquad \text{où } |q| < 1. \tag{2.30}$$

(c) *En prenant $a = q^N$ dans le théorème 2.9, alors*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N-k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \frac{1}{(1-t)_q^N}, \qquad \text{où } |t| < 1. \tag{2.31}$$

D'après (2.29), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(1-q)_q^k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)^k}{\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^3}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^k}{1-q}\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{1-q}\right)^k}{[k]_q!}.
\end{aligned}$$

qui ressemble à l'expression de Taylor de la fonction exponentielle classique e^t.

Définition 2.11. *Un q-analogue de la fonction exponentielle classique e^t est défini par*

$$e_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{[k]_q!}. \tag{2.32}$$

Remarque 2.7. En utilisant (2.29) et (2.30), on obtient

$$e_q\left(\frac{t}{1-q}\right) = \frac{1}{(1-t)_q^\infty}$$

et

$$e_q(t) = \frac{1}{(1-(1-q)t)_q^\infty}. \tag{2.33}$$

Définition 2.12. *Un autre q-analogue de la fonction exponentielle classique est définie par*

$$E_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{t^k}{[k]_q!} = (1 + (1-q)t)_q^{\infty}. \tag{2.34}$$

Les fonction q-exponentielles satisfaisons les propriétés suivantes

Théorème 2.10. *[4, page 7]*

$$D_q e_q(t) = e_q(t), \tag{2.35}$$

$$D_q E_q(t) = E_q(qt) \tag{2.36}$$

et

$$e_q(t)E_q(-t) = E_q(t)e_q(-t) = 1. \tag{2.37}$$

Remarque 2.8. Notons que pour $q \in]0,1[$ le développement en q-série de $e_q(t)$ a un rayon de convergence $\frac{1}{1-q}$. Par contraire, le développement en q-série de $E_q(t)$ converge pour chaque réel t.

2.4 q-intégrale

Après avoir défini la q-dérivée d'une fonction, la question se pose naturellement celle de la q-primitive d'une fonction donnée. En 1910, Jackson [13] a introduit une intégrale notée par

$$\int_a^b f(t) d_q t$$

comme un inverse de la q-dérivée. Cela équivaut à résoudre l'équation aux q-différences la plus simple suivante

$$D_q g(x) = f(x), \tag{2.38}$$

où f est une fonction connue. En utilisant (2.9), on peut réécrire l'équation aux q-différence (2.38) comme

$$\frac{1 - E_q}{(1-q)} g(x) = f(x), \quad \text{où } E_q h(x) = h(qx), \tag{2.39}$$

i. e

$$g(x) = (1 - E_q)^{-1} \left((1-q)xf(x)\right) = (1-q) \sum_{i=0}^{\infty} E_q^i (xf(x)) \tag{2.40}$$

i. e

$$g(x) = (1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x). \tag{2.41}$$

Le calcul précédent n'est clairement valable que si la série du membre de droite de (2.41) est convergente. Pour dire que la série du membre de droite de (2.41) est convergente, la fonction du membre de droite de cette égalité est une certaine primitive de $f(x)$, c'est-à-dire cette primitive s'annule en $x = x_0 = 0$. On peut donc écrire

$$\int_0^x f(x)d_qx := (1-q)\sum_{i=0}^{\infty} xq^i f(xq^i) \tag{2.42}$$

On voit facilement que l'expression du membre de droite de (2.42) est une somme de Riemann de la fonction f sur $[0, x]$ avec $x \neq \infty$ où la segmentation est donnée par le réseau géométrique q^s, $s = 0, \ldots, \infty$. Cela signifie que si $f(x)$ est Riemann intégrable autour de $x_0 = 0$, alors on peut naturellement donner sa primitive comme dans (2.42) qui est définie pour $x \in A$ et $x \neq \infty$.

Cependant, si la fonction f n'est pas Riemann intégrable autour de $x_0 = 0$ mais elle est Riemann intégrable autour de $x_0 = \infty$, alors on trouvera une primitive de f sous la forme

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^x f(x)d_qx &= (1-q^{-1})x\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} f(q^{-1-i}x)\\ &= (q-1)x\sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} f(q^{-i}x),\end{aligned} \tag{2.43}$$

qui est défini sur le réseau A sauf pour $x = 0$. De plus, si la fonction f n'est pas Riemann intégrable ni autour de $x_0 = 0$, ni autour de $x_0 = \infty$, mais Riemann intégrable autour de certains $x_0 = c = q^d$, où $d \in \mathbb{Z}$ alors la primitive de f est

$$\begin{aligned}\int_c^x f(x)d_qx &= (q-1)\sum_{i=d}^{s-1} q^i f(q^i)\\ &= (q-1)\sum_{t=c}^{q^{-1}x} tf(t),\end{aligned} \tag{2.44}$$

où $q^s = x \geq c = q^d$.

Notons que l'intégrale dans (2.42) est clairement un cas particulier de l'intégrale plus générale

$$\int_a^x f(x)d_qx = (x-a)(1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(a + q^i(x-a)). \tag{2.45}$$

Si $a = 0$, on obtient (2.42).

Soit $a = q^{\beta+1}$ et $b = q^{\alpha}$ tel que $a \leq b$ et Soit f une fonction définie sur un ensemble

q-géométrique. Le q-intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ est définie par

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d_qx &= (1-q)\sum_{i=\alpha}^{\beta} q^i f(q^i)\\ &= (1-q)\sum_{x=q^{-1}a}^{b} xf(x). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Si la fonction f est Riemann intégrable autour de $x_0=0$, alors (2.46) peut s'écrire autrement :

$$\int_a^b f(t)d_qt := \int_0^b f(t)d_qt - \int_0^a f(t)d_qt. \tag{2.47}$$

Exemple 2.8. Soit $f(x)=x^\alpha$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.

(i) Si $\alpha>-1$, alors f est Riemann intégrable autour 0. D'où

$$\begin{aligned}\int_0^x x^\alpha d_qx &= (1-q)x\sum_{i=0}^{\infty} q^i q^{\alpha i}x^\alpha\\ &= \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}x^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Pour $q\to1$, on obtient

$$\int_0^x x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

(ii) Si $\alpha<-1$, alors f est Riemann intégrable autour ∞. En utilisant (2.43) on obtient alors

$$\begin{aligned}\int_\infty^x x^\alpha d_qx &= (q-1)x\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i-1}q^{-(i+1)\alpha}x^\alpha\\ &= \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}x^{\alpha+1}.\end{aligned}$$

Pour $q\to1$, on obtient

$$\int_\infty^x x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

(iii) Si $\alpha=-1$. Dans ce cas la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$ n'est pas Riemann intégrable ni autour de $x_0=0$ ni autour de $x_0=1$. En utilisant (2.44), on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{d_qx}{x} &= (q-1)\sum_{i=0}^{s-1}1\\ &= (q-1)s\\ &= \frac{q-1}{\ln q}\ln x.\end{aligned}$$

Pour $q\to1$, on obtient

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x.$$

Théorème 2.11. *On a*

$$D_q\left(\int_a^x f(x)d_qx\right) = f(x) \tag{2.48}$$

et

$$\int_a^x D_qf(x)d_qx = f(x) - f(a). \tag{2.49}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} D_q\left(\int_a^x f(x)d_qx\right) &= D_q\left((1-q)\left(x\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) - a\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a)\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) - \sum_{i=0}^{\infty} q^{i+1} f(q^{i+1}x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_a^x D_qf(x)d_qx &= \int_a^x \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}d_qx \\ &= (1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f(q^i x) - f(q^{i+1}x)}{(1-q)xq^i} - (1-q)a\sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f(q^i a) - f(q^{i+1}a)}{(1-q)aq^i} \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.12. *La q-intégration par parties est donnée par*

$$\int_a^b f(x)D_qg(x)d_qx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(qx)D_qf(x)d_qx. \tag{2.50}$$

Démonstration. Considérons l'égalité

$$f(x)D_qg(x) = D_q(f(x)g(x)) - g(qx)D_qf(x).$$

Par suite

$$\int_a^b f(x)D_qg(x)d_qx = \int_a^b D_q(f(x)g(x))d_qx - \int_a^b g(qx)D_qf(x)d_qx.$$

Posons $h(x) = f(x)g(x)$. On a

$$\begin{aligned} \int_a^b D_qh(x)d_qx &= \sum_{i=0}^{\infty}(h(q^ib) - h(q^{i+1}b)) - \sum_{i=0}^{\infty}(h(q^ia) - h(q^{i+1}a)) \\ &= h(b) - h(a). \end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^b f(x)D_qg(x)d_qx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(qx)D_qf(x)d_qx.$$

□

Chapitre 3

Problème aux limites pour des équations aux q-différence non linéaire d'ordre trois

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions du problème aux limites pour des équation aux q-différence du troisième ordre suivante :

$$\begin{cases} D_q^3 u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I, \\ u(0) = 0, \\ D_q u(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

où f est une fonction continue donnée et $I = \{q^n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0, 1\}, q \in]0, 1[$.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus par B. Ahmad en 2011 (cf. [2]).

3.1 La Fonction de Green associée à l'équation aux q-différences $D_q^3 u(t) = f(t, u(t))$

Lemme 3.1. *[2, page 2] Les solutions de l'équation aux q-différences $D_q^3 u(t) = v(t)$ s'écrivent sous la forme*

$$u = \int_0^t \left(\frac{t^2 + q^3 s^2}{1+q} - qts \right) v(s) d_q s + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \tag{3.2}$$

Démonstration. Motivé par la solution d'une équation différentielle ordinaire classique d'ordre trois, nous pouvons écrire la solution de l'équation aux q-différence d'ordre trois

$$D_q^3 u(t) = v(t)$$

sous la forme

$$u = \int_0^t (\alpha_1(q) t^2 + \alpha_2(q) ts + \alpha_3(q) s^2) v(s) d_q s + a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \tag{3.3}$$

où a_0, a_1, a_2 sont des constantes arbitraires et $\alpha_1(q)$, $\alpha_2(q)$, $\alpha_3(q)$ peuvent être fixés de manière approchée.

Choisissons

$$\alpha_1(q) := \frac{1}{1+q}, \quad \alpha_2(q) := -q \quad \text{et} \quad \alpha_3 := \frac{q^3}{1+q}.$$

Alors, on a

$$u(t) = \frac{t^2}{1+q} \int_0^t v(s) d_q s - qt \int_0^t s v(s) d_q s + \frac{q^3}{1+q} \int_0^t s^2 v(s) d_q s + a_0 + a_1 t + a_2 t^2.$$

En utilisant le fait que

$$D_q(fg)(t) = g(t) D_q f(t) + f(qt) D_q g(t)$$

et

$$D_q\left(\int_0^t f(s)d_qs\right) = f(t)$$

on obtient

$$\begin{aligned} D_q\left(t^2\int_0^t v(s)d_qs\right) &= \left(\int_0^t v(s)d_qs\right)\left(D_qt^2\right) + q^2t^2\left(D_q\int_0^t v(s)d_qs\right) \\ &= (1+q)t\int_0^t v(s)d_qs + q^2t^2v(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_q\left(t\int_0^t sv(s)d_qs\right) &= \left(t\int_0^t sv(s)d_qs\right)\left(D_qt\right) + qt\left(D_q\int_0^t sv(s)d_qs\right) \\ &= \int_0^t sv(s)d_qs + qt^2v(t). \end{aligned}$$

D'où, il en résulte

$$\begin{aligned} D_qu(t) &= t\int_0^t v(s)d_qs + \frac{q^2}{1+q}t^2v(t) - q\int_0^t sv(s)d_qs - q^2t^2v(t) + \frac{q^3}{1+q}t^2v(t) + a_1 \\ &\quad +a_2(1+q)t \\ &= t\int_0^t v(s)d_qs - q\int_0^t sv(s)d_qs + a_1 + a_2(1+q)t. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} D_q^2u(t) &= \left(D_qt\right)\int_0^t v(s)d_qs + qt\left(D_q\int_0^t v(s)d_qs\right) - qD_q\left(\int_0^t sv(s)d_qs\right) + a_2(1+q) \\ &= \int_0^t v(s)d_qs + qtv(t) - qtv(t) + a_2(1+q) \\ &= \int_0^t v(s)d_qs + a_2(1+q) \end{aligned}$$

et

$$D_q^3u(t) = v(t).$$

Alors, les solutions de l'équation $D_q^3u(t) = v(t)$ s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t \left(\frac{t^2}{1+q} - qts + \frac{q^3s^2}{1+q}\right)v(s)d_qs + a_0 + a_1t + a_2t^2 \\ &= \int_0^t \left(\frac{t^2+q^3s^2}{1+q} - qts\right)v(s)d_qs + a_0 + a_1t + a_2t^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité. □

Lemme 3.2. *[2, pages 2 et 3] Le problème aux limites (3.1) est équivalent à l'équation intégrale :*

$$u = \Gamma u, \tag{3.4}$$

où

$$\Gamma u = \int_0^1 G(t,s;q) f(s,u(s)) d_q s \tag{3.5}$$

et $G(t,s;q)$ est la fonction de Green donnée par

$$G(t,s;q) := \frac{1}{1+q} \begin{cases} qs(1-t)[q^2 s(1+t) - (1+q)t], & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^2(1-qs)(q^2 s - 1), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Démonstration. D'après (3.2), les solutions de l'équation $D_q^3 u(t) = f(t, u(t))$ peuvent s'écrire :

$$u(t) = \int_0^t \left(\frac{t^2 + q^3 s^2}{1+q} - qts \right) f(s,u(s)) d_q s + a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \tag{3.7}$$

où a_0, a_1 et a_2 sont des constantes arbitraires. En utilisant les conditions aux bords (3.1), on obtient

$$\begin{cases} 0 = u(0) = a_0 \\ 0 = D_q u(0) = a_1 \\ 0 = u(1) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^2 + q^3 s^2}{1+q} - qts \right) f(s,u(s)) d_q s + a_0 + a_1 + a_2 \end{cases}$$

D'où

$$0 = a_0, \quad 0 = a_1 \quad \text{et} \quad a_2 = -\int_0^1 \left(\frac{1 + q^3 s^2}{1+q} - qts \right) f(s,u(s)) d_q s.$$

En substituant les valeurs de a_0, a_1 et a_2 en (3.7), on obtient

$$u(t) = \int_0^t \left(\frac{t^2 + q^3 s^2}{1+q} - qts \right) f(s,u(s)) d_q s - t^2 \int_0^1 \left(\frac{1 + q^3 s^2}{1+q} - qts \right) f(s,u(s)) d_q s.$$

Si $0 \leq s < t \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} G(t,s;q) &= \frac{t^2 + q^3 s^2}{1+q} - qts - t^2 \left(\frac{1 + q^3 s^2}{1+q} - qs \right) \\ &= \frac{qs(1-t)\big(q^2 s(1+t) - (1+q)t\big)}{1+q}. \end{aligned}$$

Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} G(t,s;q) &= -t^2 \left(\frac{1 + q^3 s^2}{1+q} - qs \right) \\ &= \frac{t^2(1-qs)(q^2 s - 1)}{1+q}. \end{aligned}$$

D'où

$$u(t) \int_0^1 G(t,s;q) f(s,u(s)) d_q s.$$

Où $G(t,s;q)$ est donné par

$$G(t,s;q) = \frac{1}{1+q}\begin{cases} qs(1-t)[q^2s(1+t)-(1+q)t], & 0 \le s \le t \le 1, \\ t^2(1-qs)(q^2s-1), & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

□

Remarque 3.1. Pour $q \to 1$, l'équation (3.7) prend la forme :

$$u = \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s,u(s))ds + a_0 + a_1 t + a_2 t_2,$$

qui est la solution d'une équation différentielle ordinaire du troisième ordre

$$u^{(3)}(t) = f(t,u(t))$$

et la fonction de Green associée pour le cas classique est donnée par

$$G(t,s) = \frac{1}{2}\begin{cases} s(1-t)[s(1+t)-2t], & \text{si } 0 \le s < t \le 1, \\ -t^2(1-s)^2, & \text{si } 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

3.2 Quelques résultats d'existence

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \int_0^t s^m d_q s \quad &:= \quad (1-q)t\sum_{n=0}^{\infty} q^n (tq^n)^m = (1-q)t^{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}(q^{m+1})^n \\ &= \quad \frac{1-q}{1-q^{m+1}}t^{m+1}. \end{aligned}$$

Alors On obtient que

$$G_1 := \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1 G(t,s;q)d_q s\right| = \frac{(1+q)q^2}{(1+q+q^2)^4} \tag{3.8}$$

Théorème 3.1. *[2, page 3] Supposons qu'il existe deux constantes $M_1 \ge 0$ et $M_2 > 0$ telles que $M_1 G_1 < 1$ et $|f(t,u)| \le M_1|u| + M_2$ pour tout $t \in [0,1]$, $u \in C([0,1])$, où G_1 est donné par (3.8) alors le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2, il suffit de montrer l'existence d'une solution $u \in C([0,1])$ telle que $u = \Gamma u$. Ainsi, il suffit de montrer que

$$\Gamma : \overline{B}_R \to C([0,1])$$

satisfait

$$u \neq \lambda \Gamma u, \quad \forall u \in \partial B_R \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{3.9}$$

où $B_R \subset C([0,1])$ est une boule convenable de rayon $R > 0$. Définissons

$$H(\lambda, u) = \lambda \Gamma u, \quad u \in C([0,1]) \quad \text{et} \quad \lambda \in [0,1].$$

Ensuite, par le théorème d'Arzela-Ascoli,

$$h_\lambda(u) = u - H(\lambda, u) = u - \lambda \Gamma u$$

est complètement continue. Si (3.9) est vrai, alors le degré de Leray-Schauder est bien défini et par l'invariance homotopie de degré topologique, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \deg(h_\lambda, B_R, 0) &= \deg(I - \lambda\Gamma, B_R, 0) \\ &= \deg(h_1, B_R, 0) \\ &= \deg(h_0, B_R, 0) \\ &= \deg(I, B_R, 0) \\ &= 1 \neq 0, \quad 0 \in B_r, \end{aligned}$$

où I désigne l'opérateur unitaire. Par la propriété non nulle du degré Leray-Schauder,on obtient

$$h_1(t) = u - \lambda \Gamma u = 0$$

pour au moins un $u \in B_R$. Définissons

$$B_R = \{u \in C([0,1]) : \max_{t \in [0,1]} |u(t)| < R\},$$

où R sera fixé plus tard. Afin de prouver (3.9), nous supposons que $u = \lambda \Gamma u$ pour certain $\lambda \in [0,1]$. On va montrer que Γ est complètement continu.

(i) Γ est continu. Soit $(u_n) \subset C([0,1])$ telle que : $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Alors, pour tout $t \in [0,1]$ et $\|u_n\|, \|u\| \leq R$ on a

$$\begin{aligned} |\Gamma u_n(t) - \Gamma u(t)| &= \int_0^1 G(t,s;q)(f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)))d_q s| \\ &\leq G^* \int_0^1 |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| d_q s. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} f(s,u_n(s)) = f(s,u(s))$$

et

$$\begin{aligned} |f(s,u_n(s)) = f(s,u(s))| &\leq |f(s,u_n(s))| + |f(s,u(s))| \\ &\leq M_1|u_n(s)| + M_2 + M_1|u(s)| + M_2 \\ &\leq 2(M_1R + M_2), \end{aligned}$$

alors $(f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))) \in L^1([0,1])$. Par passage à la limite, en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, et due au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \|\Gamma u_n - \Gamma u\| = 0.$$

Ce qui permet de conclure que Γ est un opérateur continu.

(ii) L'image de tout ensemble borné par Γ est un ensemble relativement compact. Soit

$$B_R = \{u \in C([0,1]) : \max_{t\in[0,1]} |u(t)| < R\}$$

un sous-ensemble borné.

a) Pour $t \in [0,1]$ et $u \in \overline{B_R}$ on trouve

$$\begin{aligned} |u(t)| = |\Gamma u(t)| &= \Big|\int_0^1 G(t,s;q) f(s,u(s)) d_q s\Big| \\ &\leq \int_0^1 G(t,s;q)|f(s,u(s))| d_q s \\ &\leq \int_0^1 G(t,s;q)|M_1|u| + M_2| d_q s \\ &\leq (M_1R + M_2)\int_0^1 G(t,s;q) d_q s \\ &\leq (M_1R + M_2)G_1. \end{aligned}$$

Alors

$$\|\Gamma u\| \leq (M_1R + M_2)G_1,$$

ce qui implique

$$\|u\| \leq \frac{M_2G_1}{1 - M_1G_1}.$$

D'où, $\Gamma(B_R)$ est uniformément borné.

b) $\Gamma(B_R)$ est équicontinu. En effet, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1]$ et $u \in \overline{B_R}$, tels que $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned}
|\Gamma u(t_2) - \Gamma u(t_1)| &= \Big|\int_0^1 G(t_2,s;q)f(s,u(s))d_qs - \int_0^1 G(t_1,s;q)f(s,u(s))d_qs\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 (G(t_2,s;q) - G(t_1,s;q))f(s,u(s))d_qs\Big| \\
&\leq \int_0^1 \Big|(G(t_2,s;q) - G(t_1,s;q))\Big|[M_1|u(s)| + M_2]d_qs \\
&\leq \int_0^1 \Big|(G(t_2,s;q) - G(t_1,s;q))\Big|[M_1R + M_2]d_qs \\
&\leq (M_1|u(s)| + M_2)\int_0^1 \Big|(G(t_2,s;q) - G(t_1,s;q))\Big|d_qs.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, lorsque $t_1 \longrightarrow t_2$ on obtient $|\Gamma t_2 - \Gamma t_1| \longrightarrow 0$, donc $\Gamma(B_R)$ est équicontinu.

D'après le théorème d'Arzela -Ascoli Γ est un opérateur complètement continu.

En prenant $R := \dfrac{M_2G_1}{1 - M_1G_1} + 1$, donc (3.9) est vrai. □

Exemple 3.1. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases}
D^3_{\frac{1}{2}}u(t) = \dfrac{M_1}{2\pi}\sin(2\pi u) + \dfrac{|u|}{1+|u|}, \quad 0 \leq t \leq 1, \\
u(0) = 0 \\
D_{\frac{1}{2}}u(0) = 0, \\
u(1) = 0.
\end{cases} \tag{3.10}$$

Dans cet exemple, on a

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(t,u) = \frac{M_1}{2\pi}\sin(2\pi u(t)) + \frac{|u(t)|}{1+|u(t)|}.$$

On a

$$\begin{aligned}
|f(t,u)| &= \left|\frac{M_1}{2\pi}\sin(2\pi u) + \frac{|u|}{1+|u|}\right| \\
&= \left|M_1\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi} + \frac{|u|}{1+|u|}\right| \\
&\leq M_1\left|\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi}\right| + \left|\frac{|u|}{1+|u|}\right| \\
&\leq M_1\left|\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi}\right| + \left|\frac{|u|+1-1}{1+|u|}\right| \\
&\leq M_1\left|\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi}\right| + \left|1-\frac{1}{1+|u|}\right| \\
&\leq M_1\left|\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi}\right| + 1 \\
&\leq M_1|u| + 1
\end{aligned}$$

et d'après (3.8), on a

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left.\frac{(1+q)q^2}{(1+q+q^2)^4}\right|_{q=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(1+\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2}{(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2)^4} \\
&= \frac{96}{2401}.
\end{aligned}$$

Clairement $M_2 = 1$ et on peut choisir $M_1 < \dfrac{1}{G1} = \dfrac{2401}{96}$, c'est-à-dire, $M_1 \leq 25$. Ainsi, le théorème 3.1 s'applique au problème (3.10).

Pour prouver le prochain résultat d'existence, nous avons besoin du théorème de point fixe connu suivant.

Théorème 3.2. *Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné d'un Espace de Banach E avec $0 \in \Omega$ et $B : \overline{\Omega} \to E$ est un opérateur compact. Alors, B a un point fixe dans $\overline{\Omega}$ à condition*

$$\|Bu - u\|^2 \geq \|Bu\|^2 - \|u\|^2, \quad u \in \partial\Omega$$

Théorème 3.3. *S'il existe une constante M_3 telle que*

$$|f(t,u)| \leq \frac{M_3}{G_1}, \quad \forall t \in [0,1] \text{ et } u \in [-M_3, M_3],$$

où G_1 est donné par (3.8), alors le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution.

Démonstration. Définissons

$$B_{M_3} = \{u \in C([0,1]) : \max_{t\in[0,1]} |u(t)| < M_3\}$$

D'après le théorème 3.2, il suffit de montrer que

$$\|\Gamma u\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in \partial B_{M_3}. \tag{3.11}$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $u \in \partial B_{M_3}$, on a

$$\begin{aligned}
|\Gamma u(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s;q) f(s,u(s)) d_q s \right| \\
&\leq \int_0^1 G(t,s;q) |f(s,u(s))| d_q s \\
&\leq \int_0^1 G(t,s;q) \left[\frac{M_3}{G_1}\right] d_q s \\
&\leq \frac{M_3}{G_1} \int_0^1 G(t,s;q) d_q s \\
&\leq \frac{M_3}{G_1} G_1 \leq M_3 \\
&\leq |u(t)|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\Gamma u\| \leq \|u\|.$$

Ainsi (3.11) est vrai. D'où le résultat. □

Remarque 3.2. Au vu de l'hypothèse $|f(t,u)| \leq M_1|u| + M_2$ du théorème 3.1, on trouve que

$$M_1|u| + M_2 = \frac{M_3}{G_1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
M_3 &= G_1(M_1|u| + M_2) \\
&\leq G_1(M_1 M_3 + M_2) \\
&\leq G_1 M_1 M_3 + M_2 G_1 \\
M_3 - G_1 M_1 M_3 &\leq M_2 G_1 \\
M_3(1 - G_1 M_1) &\leq M_2 G_1 \\
M_3 \leq \frac{M_2 G_1}{1 - G_1 M_1} &\leq \frac{M_2 G_1 (1 - G_1 M_1)^2}{1 - G_1 M_1} \\
M_3 &\leq M_2 G_1 (1 - G_1 M_1).
\end{aligned}$$

Alors $M_3 = M_2 G_1 (1 - M_1 G_1) - 1$.

Théorème 3.4. *Supposons que f de classe C^1 pour la deuxième variable et qu'il existe une constante $0 \leq M_4 < \frac{1}{G1}$ (G_1 est donnée par 3.8 telle que $|\frac{f}{du}(t, u(t))| \leq M_4$ pour tout $t \in [0,1]$ et $u \in C([0,1])$, alors (3.1) admet au moins une solution.*

Démonstration. Le problème aux limites (3.1) a une solution si et seulement si l'opérateur Γ admet un point fixe.

Pour $R > 0$, on définit

$$B_R = \{u \in C([0,1]) : \max_{t\in[0,1]} |u(t)| < R\},$$

un sous-ensemble borné.

Pour tout $t \in [0,1]$, on trouve que

$$\begin{aligned}
|\Gamma u(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s;q) f(s,u(s)) d_q s\right| \\
&\leq \left|\int_0^1 G(t,s;q)(\frac{\partial f}{\partial u}(s,u(s))u(s) + \nu)) d_q s\right| \\
&\leq \left|\int_0^1 G(t,s;q)(M_4\|u\| + \nu) d_q s\right| \\
&\leq \left|\int_0^1 G(t,s;q) d_q s\right| (M_4\|u\| + \nu) \\
&\leq G_1(M_4\|u\| + \nu) \leq M_4 G_1 \|u\| + \nu G_1 \\
&\leq M_4 G_1 \|u\| + \nu_1,
\end{aligned}$$

où $v_1 = G_1 \nu$ (ν est une constante positive). Par suite on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u\| &\leq M_4 G_1 \|u\| + \nu_1 \\
&\leq M_4 G_1 R + \nu_1 \\
&= R(M_4 G_1 + \tfrac{\nu_1}{R}) \\
&\leq R,
\end{aligned}$$

pour un R suffisamment grand. Donc, d'après le théorème du point fixe de Schauder, Γ est un point fixe. $\square$

Exemple 3.2. Considérons le problème :

$$\begin{cases}
D^3_{\frac{1}{4}} u(t) = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)\sin(2\pi t), \quad t \in I, \\[2ex]
u(0) = 0, \\[2ex]
D_{\frac{1}{4}} u(0) = 0, \\[2ex]
u(1) = 0.
\end{cases} \tag{3.12}$$

Clairement

$$f(t,u) = \frac{1}{12}\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\sin(2\pi t) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{4},$$

alors

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(1+q)q^2}{(1+q+q^2)^4} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{4})(\frac{1}{4})^2}{(1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2)^4} \\ &= \frac{5120}{194481}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial u}(t,u(t))\right| &= \left|\frac{1}{12}\left(\frac{-2(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\right)\sin(2\pi t)\right| \\ &= \left|\frac{1}{12}\left(\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\right)\sin(2\pi t)\right| \\ &\leq \left|\frac{4}{12}\left(\frac{|u|}{(1+u^2)^2}\right)\sin(2\pi t)\right| \\ &\leq \frac{1}{3}\left(\tfrac{|u|}{(1+u^2)^2}\right) \\ &< \frac{1}{G1} = \frac{194481}{5120}. \end{aligned}$$

Donc, par le théorème 3.1, il existe une solution pour le problème (3.12).

Le résultat final présenter dans ce chapitre traite l'unicité des solutions de (3.1).

Théorème 3.5. *Soit $f : [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant à la condition*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leq L|u-v|, \quad \forall t\in[0,1] \text{ et } u,v\in\mathbb{R},$$

où L est une constante de Lipschitz. Alors (3.1) admet une solution unique à condition que $L < 1/G_1$, où $G1$ est donné par (3.8).

Démonstration. Pour $t\in[0,1]$, on définit $\Gamma : C([0,1],\mathbb{R})\to C([0,1],\mathbb{R})$ par

$$\Gamma u = \int_0^1 G(t,s;q)f(s,u(s))d_qs,$$

où $G(t,s;q)$ est la fonction de Green donnée par (3.6).

Posons

$$M = \max_{t\in[0,1]}|f(t,0)|$$

et choisissons :

$$r \geq \frac{MG_1}{1-LG_1} \tag{3.13}$$

Maintenant, on montre que $\Gamma B_r \subset B_r$, où

$$B_r = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}) : \|u\| \leq r\}.$$

Pour $u \in B_r$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u\| &= \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^1 G(t,s;q) f(s,u(s)) d_q s\right| \\
&= \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^1 G(t,s;q) \Big[(f(s,u(s)) - f(s,0)) + f(s,0)\Big] d_q s\right| \\
&= \max_{t\in[0,1]} \Big|\int_0^1 G(t,s;q)[L\|u\| + M] d_q s\Big| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \Big|\int_0^1 G(t,s;q) d_q s\Big| (L\|u\| + M) \\
&\leq G_1(Lr + M) \\
&\leq r\Big(G_1 L + \tfrac{M}{r}\Big) \leq r,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (3.13). Maintenant, pour $u, v \in \mathbb{R}$ et pour chaque $t \in [0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma u) - (\Gamma v)\| &= \max_{t\in[0,1]} |(\Gamma u)(t) - (\Gamma v)(t)| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \Big|\int_0^1 G(t,s;q) f(s,u(s)) - G(t,s;q) f(s,v(s)) d_q s\Big| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \Big|\int_0^1 G(t,s;q)\Big[f(s,u(s)) - f(s,v(s))\Big] d_q s\Big| \\
&\leq L \max_{t\in[0,1]} \Big|\int_0^1 G(t,s;q) d_q s\Big| \|u - v\| \\
&\leq L G_1 \|u - v\|.
\end{aligned}$$

Comme $L < 1/G_1$, donc Γ est une contraction. Ainsi, la conclusion du théorème suit le principe de contraction. $\square$

Exemple 3.3. Considérons le problème

$$\begin{cases}
D_{\frac{3}{4}}^{3} u(t) = L(\cos t + \tan^{-1} u), \quad t \in I, \\
u(0) = 0, \\
D_{\frac{3}{4}} u(0) = 0, \\
u(1) = 0.
\end{cases} \tag{3.14}$$

Avec

$$f(t,u) = L(\cos t + tan^{-1} u),$$

on trouve que

$$\begin{aligned}
|f(t,u)-f(t,v)| &= |L(\cos t+\tan^{-1}u)-L(\cos t+\tan^{-1}v)| \\
&= |L\cos t+L\tan^{-1}u-L\cos t-L\tan^{-1}v| \\
&= |L(\tan^{-1}u-\tan^{-1}v)| \\
&\leq L|\tan^{-1}u-\tan^{-1}v| \\
&\leq L|u-v|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{q^2(1+q)}{(1+q+q^2)^4}\Big|_{q=3/4} \\
&= \frac{(\frac{3}{4})^2(1+\frac{3}{4})}{(1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2)^4} \\
&= \frac{64512}{1874161}.
\end{aligned}$$

En fixant $L < \frac{1}{G_1} = \dfrac{1874161}{64512}$, il s'ensuit par le théorème 3.5 le problème aux limites (3.14) admet une solution unique.

Remarque 3.3. Si $q \to 1$, les résultats ci-dessus se réduisent à ceux du problème aux limites classique d'ordre trois suivant

$$\begin{cases}
u'''(t) = f(t,u(t)) \quad t \in [0,1] \\
u(0) = 0, \\
u'(0) = 0, \\
u(1) = 0.
\end{cases}$$

Chapitre 4

Problème aux limites pour des équations aux q-différence non linéaire d'ordre deux

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour le problème aux limites avec des équations aux q-différences non linéaires d'ordre deux suivante :

$$\begin{cases} D_q^2 u(t) = f(t, u(t), D_q u(t)), \quad t \in I, \\ D_q u(0) = 0, \\ D_q u(1) = \alpha u(1). \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $I = \{q^n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0, 1\}, q \in]0, 1[$ et $\alpha \neq 0$ est un nombre réel fixe.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques résultats d'existence et d'unicité pour le problème aux limites (4.1).

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites 4.1 sont obtenus en utilisant le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et quelques théorèmes standards du point fixe.

4.1 Résultats préliminaires

Lemme 4.1. *Soit $y \in C[0, 1]$, alors la solution de l'équation aux q-différence d'ordre deux*

$$D_q^2 u(t) = y(t) \tag{4.2}$$

s'écrit sous la forme

$$u(t) = \int_0^t (t - qs) y(s) d_q s + a_1 t + a_0, \tag{4.3}$$

où a_1, a_0 sont des constantes arbitraires.

Démonstration. En intégrant l'équation aux q-différences 0 de à t, on obtient

$$D_q u(t) = \int_0^t y(s) d_q s + a_1. \tag{4.4}$$

$$u(t) = t \int_0^t y(s) d_q s - q \int_0^t s y(s) d_q s + a_1 t + a_0.$$

On obtient

$$\begin{aligned} D_q\Big(t \int_0^t s y(s) d_q s\Big) &= \Big(t \int_0^t y(s) d_q s\Big)\Big(D_q t\Big) + qt\Big(D_q \int_0^t y(s) d_q s\Big) \\ &= \int_0^t y(s) d_q s + qty(t). \end{aligned}$$

et

$$D_q\Big(\int_0^t s y(s) d_q s\Big) = t y(t).$$

D'où, il en résulte

$$\begin{aligned} D_q u(t) &= \int_0^t y(s)d_qs + qty(t) - qty(t) + a_1 t + a_0 \\ &= \int_0^t y(s)d_qs + a_1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_q^2 u(t) &= D_q\bigg(\int_0^t y(s)d_qs\bigg) \\ &= y(t). \end{aligned}$$

Alors,les solution de l'équation $D_q^2 u(t) = y(t)$ s'écrit sous la forme

$$u(t) = \int_0^t (t - qs)y(s)d_qs + a_1 t + a_0. \tag{4.5}$$

□

Théorème 4.1. *Soit $y \in C[0,1]$, alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} D_q^2 u(t) = y(t), \quad 0 \le t \le 1, \\ D_q u(0) = 0, \\ D_q u(1) = \alpha u(1), \end{cases} \tag{4.6}$$

admet une unique solution :

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s;q)vy(s)d_qs, \tag{4.7}$$

où

$$G(t,s;q) = \frac{1}{\alpha}\begin{cases} 1 - \alpha + \alpha t, & s \le t, \\ 1 - \alpha + \alpha q, & t \le s. \end{cases} \tag{4.8}$$

Démonstration. D'après le lemma 4.1, le problème aux limites (4.8) admet une unique solution :

$$u(t) = \int_0^t (t - qs)y(s)d_qs + a_1 t + a_0. \tag{4.9}$$

où a_1, a_0 sont des constantes arbitraires. En utilisant les conditions aux bords (4.8) avec les équations (4.4) et (4.9), on obtient

$$0 = D_q u(0) = a_1$$

et

$$\alpha\left(\int_0^1 (1 - qs)y(s)d_qs + a_1 + a_0\right) = \alpha u(1) = D_q u(1) = \int_0^1 y(s)d_qs + a_1.$$

D'où $a_1 = 0$ et

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 y(s)d_qs - \int_0^1 (1-qs)y(s)d_qs \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + qs\right) y(s)d_qs. \end{aligned}$$

En substituant les valeurs de a_0 et a_1 en (4.9), on obtient

$$u(t) = \int_0^t (t-qs)y(s)d_qs + \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + qs\right) y(s)d_qs. \tag{4.10}$$

Si $0 \leq s \leq t \leq 1$,alors

$$G(t,s;q) = t - qs + \frac{1}{\alpha} - 1 + qs = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \alpha + \alpha t\right).$$

Si $0 \leq t \leq s \leq 1$, alors

$$G(t,s;q) = \frac{1}{\alpha} - 1 + qs = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \alpha + \alpha qs\right).$$

D'où le résultat. □

Remarque 4.1. Pour $q \to 1$, l'éqaution(3.18) prend la forme :

$$u(t) = \int_0^t (t-qs)f(s,u(s),D_qu(s))d_qs + a_1t + a_0,$$

qui est la solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre deux classique $u(t) = f(s,u(s),D_qu(s))$ et la forme associée de la fonction de Green pour le cas classique est

$$G(t,s) = \frac{1}{\alpha}\begin{cases} 1 - \alpha + \alpha t, & si \quad s \leq t, \\ 1 - \alpha + \alpha s, & si \quad t \leq s. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on considère l'espace de Banach $C_q = C(I,\mathbb{R})$ muni de la norme standard

$$\|u\| = \max\{\|u\|_\infty, \|D_qu\|\}, \quad u \in C_q, \tag{4.11}$$

où

$$\|\cdot\|_\infty = \sup\{\|\cdot\|, t \in I\}. \tag{4.12}$$

Définissons l' opérateur intégral $T : C_p \to C_p$ par :

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s;q)f(s,u(s),D_qu(s))d_qs \qquad (4.13) \\ &= \int_0^t (t-qs)f(s,u(s),D_qu(s))d_qs + \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + qs\right)f(s,u(s),D_qu(s))d_qs, \end{aligned}$$

où $t \in I$ et $u \in C_q$. L'opérateur T est bien défini et $u \in C_q$ est une solution au problème aux limite (4.1) si et seulement si u est un point fixe de T.

4.2 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie, nous appliquons divers théorèmes de point fixe au problème aux limites (4.1). Tout d'abord, nous donnons le résultat d'unicité basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 4.2. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $L_1(t), L_2(t) \in C([0,1],[0,+\infty[)$ tels que*

$$|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| \leq L_1(t)|u_1 - u_2| + L_2(t)|v_1 - v_2|, \tag{4.14}$$

pour tout $t \in I$ et $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in \mathbb{R}^2$. De plus, supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée

(H_1) $\Lambda < |\alpha|$ *si* $0 < |\alpha| < 1$,

(H_2) $\Lambda < 1$ *si* $|\alpha| \geq 1$,

où

$$\Lambda = \max_{t\in[0,1]}\{L_1(t) + L_2(t)\}. \tag{4.15}$$

Alors, le problème aux limites (4.1) admet une solution unique.

Démonstration. **Cas 1 :** $0 < |\alpha| < 1$. Posons

$$M_0 := \sup_{t\in I}|f(t,0,0)| \tag{4.16}$$

et choisissons

$$r \geq \frac{M_0}{|\alpha|(1-\delta)}, \tag{4.17}$$

où δ est un nombre réel vérifie $\dfrac{\Lambda}{|\alpha|} \leq \delta < 1$.
Montrons maintenant que $TB_r \subset B_r$, où

$$B_r = \{u \in C_q : \|u\| \leq r\}.$$

Pour tout $u \in B_r$, on a

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \sup_{t\in I}\left|\int_0^t (t-qs)f(s,u(s),D_qu(s))d_qs + \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + qs\right)f(s,u(s),D_qu(s))d_qs\right| \\
&\leq \sup_{t\in I}\left|\int_0^t (t-qs)(|f(s,u(s),D_qu(s)) - f(s,0,0)| + |f(s,0,0)|)d_qs\right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + qs\right)(|f(s,u(s),D_qu(s)) - f(s,0,0)| + |f(s,0,0)|)d_qs\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (4.14) avec les equations (4.11), (4.15) et (4.16), on obtient

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \sup_{t\in I}\left|\int_0^t (t-qs)(L_1(s)|u(s)|+L_2(s)|D_qu(s)|+|f(s,0,0)|)d_qs\right.\\
&\quad \left.+\int_0^1\left(\frac{1}{\alpha}-1+qs\right)(L_1(s)|u(s)|+L_2(s)|D_qu(s)|+|f(s,0,0)|)d_qs\right|\\
&\leq (\Lambda\|u\|+M_0)\sup_{t\in I}\left|\int_0^t (t-qs)d_qs+\int_0^1\left(\frac{1}{\alpha}-1+qs\right)d_qs\right|\\
&\leq (\Lambda\|u\|+M_0)\sup_{t\in I}\left\{\left|\frac{t^2}{1+q}+\frac{1}{\alpha}-1+\frac{q}{1+q}\right|\right\}\\
&\leq (\Lambda\|u\|+M_0)\frac{1}{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

De (4.17) et le fait que $\delta \geq \dfrac{\Lambda}{|\alpha|}$, on déduit que

$$|Tu(t)| \leq (\Lambda r+M_0)\frac{1}{|\alpha|} \leq \left(\frac{\Lambda}{|\alpha|}+(1-\delta)\right)r \leq r.$$

D'autre part, puisque

$$D_qTu(t)=\int_0^t f(s,u(s),D_qu(s))d_qs,$$

donc

$$\begin{aligned}
|D_qTu(t)| &\leq \sup_{t\in I}\left|\int_0^t f(s,u(s),D_qu(s))d_qs\right|\\
&\leq \sup_{t\in I}\int_0^t(|f(s,u(s),D_qu(s))-f(s,0,0)|+|f(s,0,0)|)d_qs\\
&\leq \sup_{t\in I}\int_0^t(L_1(s)|u(s)|+L_2(s)|D_qu(s)|+|f(s,0,0)|)d_qs\\
&\leq (\Lambda\|u\|+M_0)\\
&\leq (\Lambda r+|\alpha|(1-\delta)r)\\
&\leq \left(\frac{\Lambda}{|\alpha|}+(1-\delta)\right)r \leq r.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons que $\|Tu\| \leq r$, donc $TB_r \subset B_r$.

Maintenant nous montrons que T est une contraction. Pour $u, v \in C_q$ et pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
|Tu(t)-Tv(t)| &\leq \sup_{t\in I}|Tu(t)-Tv(t)| \\
&\leq \sup_{t\in I}\bigg|\int_0^t (t-qs)|f(s,u(s),D_qu(s))-f(s,v(s),D_qv(s))|d_qs \\
&\quad + \int_0^1\left(\frac{1}{\alpha}-1+qs\right)|f(s,u(s),D_qu(s))-f(s,v(s),D_qv(s))|d_qs\bigg| \\
&\leq \sup_{t\in I}\bigg|\int_0^t (t-qs)\Big(L_1(s)|u(s)-v(s)|+L_2(s)|D_qu(s)-D_qv(s)|\Big)d_qs \\
&\quad + \int_0^1\left(\frac{1}{\alpha}-1+qs\right)\Big(L_1(s)|u(s)-v(s)|+L_2(s)|D_qu(s)-D_qv(s)|\Big)d_qs\bigg| \\
&\leq \Lambda\sup_{t\in I}\left\{\left|\frac{t^2}{1+q}+\frac{1}{\alpha}-1+\frac{q}{1+q}\right|\right\}\|u-v\| \\
&\leq \frac{\Lambda}{|\alpha|}\|u-v\| < \|u-v\|,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|D_qTu(t)-D_qTv(t)| &\leq \sup_{t\in I}|D_qTu(t)-D_qTv(t)| \\
&\leq \sup_{t\in I}\left|\int_0^t |f(s,u(s),D_qu(s))-f(s,v(s),D_qv(s))|d_qs\right| \\
&\leq \sup_{t\in I}\left|\int_0^t (L_1(s)|u(s)-v(s)|+L_2(s)|D_qu(s)-D_qv(s)|)d_qs\right| \\
&\leq \Lambda\|u-v\| \leq \frac{\Lambda}{|\alpha|}\|u-v\| < \|u-v\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons que $\|Tu-Tv\| < \|u-v\|$, donc T est une contraction. Ainsi, la conclusion du théorème suit par le principe de contraction de Banach.

Cas 2 : $|\alpha| \geq 1$. C'est similaire à la preuve du cas 1. □

Corollaire 4.1. *Supposons que $f : I\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et qu'il existe deux constantes positives L_1, L_2 telles que*

$$|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)| \leq L_1|u_1-u_2|+L_2|v_1-v_2|, \quad t\in I, (u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\mathbb{R}^2.$$

De plus, supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée

(H_3) $L_1+L_2 < |\alpha|$ *si* $0<|\alpha|<1$,

(H_4) $L_1+L_2 < 1$ *si* $|\alpha|\geq 1$.

Alors problème aux limites (4.1) *admet une solution unique.*

Corollaire 4.2. *Supposons que $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et qu'il existe deux fonctions $L_1(t), L_2(t) \in L^1(I, R^+)$ telles que*

$$|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leq L_1|u_1 - u_2| + L_2|v_1 - v_2|, \quad t \in I, (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2.$$

De plus, supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée

(H_5) $A + Bq|\alpha| < |\alpha|$ *si* $0 < |\alpha| < 1$,

(H_6) $A < 1$ *si* $|\alpha| \geq 1$,

où

$$A = \int_0^1 [L_1(s) + L_2(s)]d_q s \quad et \quad B = \int_0^1 s[L_1(s) + L_2(s)]d_q s.$$

Alors problème aux limites (4.1) admet une solution unique.

Démonstration. Elle est similaire à la preuve du théorème 4.2. □

Le prochain résultat d'existence est basé sur le théorème alternatif non linéaire de Leray-Schauder.

Lemme 4.2. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction S-Carathéodory. Alors $T : C_q \longrightarrow C_q$ est complètement continu.*

Démonstration. La preuve consiste en deux étapes.

Étape 1 : T transforme un ensemble borné au un ensemble borné dans C_q.

Soit $B_r = \{u \in C_q : \|u\| \leq r\}$ un ensemble borné dans C_q et $u \in B_r$. On a donc

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq \int_0^t |t - qs| \Big| f(s, u(s), D_q u(s)) \Big| d_q s + \int_0^1 \left| \frac{1}{\alpha} - 1 + qs \right| \Big| f(s, u(s, D_q u(s))) \Big| d_q s \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right) \int_0^1 \varphi_r(s) d_q s \\ &= \left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right) \|\varphi_r\|_{L^1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |D_q Tu(t)| &\leq \int_0^t |f(s, u(s), D_q u(s))| d_q s \\ &\leq \int_0^1 \varphi_r(s) d_q s \\ &= \|\varphi_r\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|Tu\| \leq \max\{\|Tu\|_\infty, \|D_q Tu\|_\infty\} \leq \left(1 + \frac{1}{|\alpha|}\right) \|\varphi_r\|_{L^1}.$$

Étape 2 : T transforme un ensemble borné au un ensemble équicontinu dans C_q.

Soit $r_1, r_2 \in I$ tels que $r_1 < r_2$, et soit B_r un ensemble borné de C_q comme à l'étape 1. Alors, pour $u \in B_r$, on a

$$\begin{aligned}
|Tu(r_2) - Tu(r_1)| &= \Big| \int_0^{r_2} (r_2 - qs) f\Big(s, u(s), D_q u(s)\Big) d_q s \\
&\quad - \int_0^{r_1} (r_1 - qs) f\Big(s, u(s), D_q u(s)\Big) d_q s \Big| \\
&= \Big| \int_0^{r_1} (r_2 - r_1) f\Big(s, u(s), D_q u(s)\Big) d_q s \\
&\quad + \int_{r_1}^{r_2} (r_2 - qs) f\Big(s, u(s), D_q u(s)\Big) d_q s \Big| \\
&\leq \int_0^{r_1} |r_2 - r_1| \varphi_r(s) d_q s + \int_{r_1}^{r_2} |r_2 - qs| \varphi_r(s) d_q s,
\end{aligned}$$

d'où, si $r_2 - r_1 \to 0$, alors $|Tu(r_2) - Tu(r_1)| \to 0$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|DqTu(r_2) - D_q Tu(r_1)| &= \Big| \int_0^{r_2} f\Big(s, u(s), D_q u(s)\Big) d_q s - \int_0^{r_1} f\Big(s, u(s), D_q u(s)\Big) d_q s \Big| \\
&= \Big| \int_{r_1}^{r_2} f\Big(s, u(s), D_q u(s)\Big) d_q s \Big| \\
&\leq \int_{r_1}^{r_2} \varphi_r(s) d_q s,
\end{aligned}$$

donc $|DqTu(r_2) - D_q Tu(r_1)| \to 0$ si $r_2 - r_1 \to 0$.

En conséquence du théorème d'Ascoli-Arzela, nous pouvons conclure que $T : C_q \to C_q$ est complètement continu. $\square$

Théorème 4.3. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction S-Carathéodory. Supposons qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que*

$$\frac{|\alpha| M}{\Big(1 + |\alpha|\Big) \|\varphi_r\|_{L^1}} > 1$$

où

$$\|\varphi_r\|_{L^1} := \int_0^1 \varphi_r(s) d_q s \neq 0.$$

Alors problème aux limites (4.1) admet au moins une solution.

Démonstration. Puisque $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction S-Carathéodory, alors d'après le lemme 4.2, l'opérateur $T : C_q \to C_q$ est complètement continu.

Soit $\lambda \in]0,1[$ et $u = \lambda Tu$. Alors, pour $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= |\lambda Tu(t)| \\
&\leq \int_0^t |t-qs|\Big|f\Big(s,u(s),D_qu(s)\Big)\Big|d_qs + \int_0^1 \left|\frac{1}{\alpha}-1+qs\right|\Big|f\Big(s,u(s),D_qu(s)\Big)\Big|d_qs \\
&\leq \left(1+\frac{1}{|\alpha|}\right)\int_0^1 \varphi_r(s)d_qs \\
&= \left(1+\frac{1}{|\alpha|}\right)\|\varphi_r\|_{L^1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|D_qu(t)| &= |D_q\lambda Tu(t)| \\
&\leq \int_0^t \Big|f\Big(s,u(s),D_qu(s)\Big)\Big|d_qs \\
&\leq \int_0^1 \varphi_r(s)d_qs \\
&= \|\varphi_r\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

D'où, par conséquent,

$$\frac{|\alpha|\cdot\|u\|}{\Big(1+|\alpha|\Big)\|\varphi_r\|_{L^1}} \leq 1.$$

Il existe donc $M>0$ tel que $\|u\| \neq M$. Posons

$$U = \{u \in C_q : \|u\| < M\}.$$

Notons que l'opérateur

$$T : \overline{U} \to C_q$$

est complètement continu. Du choix de U, il n'y a pas de $u \in \partial U$ tel que $u = \lambda Tu$ pour certains $\lambda \in]0,1[$. Par conséquent, par le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, on déduit que T admet un point fixe $u \in \overline{U}$ qui est une solution du problème aux limites (4.1). $\square$

Le prochain résultat d'existence est basé sur le théorème de Leray-Schauder.

Théorème 4.4. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction S-Carathéodory. Supposons qu'il existe d'autre fonctions $p(t), q(t), r(t) \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ avec $tp(t) \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ telles que*

$$\Big|f(t,u,v)\Big| \leq p(t)|u| + q(t)|v| + r(t), \qquad \textit{pour tout } t \in I \textit{ et } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Alors le problème aux limites (4.1) *admet au moins une solution à condition* $(N+1)P + P_1 + Q < 1$, *où*

$$N := \max\left\{\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}\right\}, \quad P := \int_0^1 p(s)d_qs,$$
$$P_1 := \int_0^1 sp(s)d_qs, \qquad Q := \int_0^1 q(s)d_qs.$$

Démonstration. Considérons l'espace

$$\mathcal{P} := \{u \in C_q : D_qu(0) = 0,\ D_qu(1) = \alpha u(1)\}$$

et définissons l'opérateur $T_1 : \mathcal{P} \times [0,1] \to \mathcal{P}$ par

$$T_1(u,\lambda) = \lambda Tu = \lambda \int_0^1 G(t,s;q)f(s,u(s),D_qu(s))d_qs, \quad t \in I. \tag{4.18}$$

C'est clair que $\mathcal{P} \subset C_q$. D'après le lemme 4.2, pour tout $\lambda \in [0,1]$, l'opérateur $T_1(u,\lambda)$ est complètement continu dans $\mathcal{P}$.

Il est clair que $u \in \mathcal{P}$ est une solution de problème aux limites (4.1) si et seulement si u est un point fixe de $T_1(\cdot,1)$.

Clairement aussi que $T_1(u,0) = 0$ pour chaque $u \in \mathcal{P}$. Si pour chaque $\lambda \in [0,1]$ les points fixes de $T_1(\cdot,1)$ dans $\mathcal{P}$ appartiennent à une boule fermée de $\mathcal{P}$ indépendante de λ, alors le théorème de continuité de Leray-Schauder donne le résultat.

Ensuite, nous montrons que le point fixe de $T_1(\cdot,1)$ a priori borne M, qui est indépendante de λ. Supposons que $u = T_1(u,\lambda)$ et posons

$$R := \int_0^1 r(s)d_qs.$$

D'après (4.8) on

$$|G(t,s;q)| \le N \quad \text{pour chaque } \alpha \neq 0.$$

Pour tout $u \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= \left|u(1) - \int_t^1 D_qu(s)d_qs\right| \\
&\le \left|\frac{1}{\alpha}D_qu(1)\right| + \left|\int_t^1 D_qu(s)d_qs\right| \\
&\le \Big(N + 1 - t\Big)\|D_qu\|_\infty \\
&\le \Big(N + 1 + t\Big)\|D_qu\|_\infty, \quad t \in I,
\end{aligned}$$

et donc on obtient que

$$\begin{aligned}\|D_qu\|_\infty &\leq \Big\|\lambda f\Big(s,u(s),D_qu(s)\Big)\Big\|_{L^1}\\ &\leq \Big\|f\Big(s,u(s),D_qu(s)\Big)\Big\|_{L^1}\\ &\leq \Big\|p(t)|u(s)|+q(t)|D_qu(s)|+r(s)\Big\|_{L^1}\\ &\leq \Big((N+1)P+P_1+Q\Big)\|D_qu\|_\infty+R,\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\|D_qu\|_\infty \leq \frac{R}{1-\Big((N+1)P+P_1+Q\Big)}:=M_1.$$

Ceci d'une part. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}|u(t)| &\leq \lambda\left|\int_0^1 G(t,s,q)f\Big(s,u(s),D_qu(s)\Big)d_qs\right|\\ &\leq N\int_0^1\Big|f\Big(s,u(s),D_qu(s)\Big)d_qs\Big|\\ &\leq N\int_0^1\Big(p(t)|u(s)|+q(t)|D_qu(s)|+r(s)\Big)d_qs\\ &\leq NP\|u\|_\infty+NQ\|D_qu\|_\infty+NR,\quad t\in I,\end{aligned}$$

donc on obtient

$$\|u\|_\infty \leq \frac{N(QM_1+R)}{1-NP}:=M_2.$$

Posons $M:=\max\{M_1,M_2\}$, qui est indépendant de λ. Alors, le problème aux limites (4.1) admet au moins une solution. □

4.3 Exemples

Exemple 4.1. Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_q^2u(t)=e^t+\dfrac{1}{4}\sin(u(t))+\dfrac{1}{8}\tan^{-1}(D_qu(t)), \quad t\in I,\\ D_qu(0)=0,\\ D_qu(1)=\dfrac{1}{2}u(1).\end{cases} \tag{4.19}$$

Dans cet exemple on a

$$f(t,u(t),D_qu(t))=e^t+\frac{1}{4}\sin(u(t))+\frac{1}{8}\tan^{-1}(D_qu(t)) \quad \text{et} \quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

Clairement

$$\begin{aligned}|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)| &= \left|\frac{1}{4}\left(\sin u_1-\sin u_2\right)+\frac{1}{8}\left(\tan^{-1}v_1-\tan^{-1}v_2\right)\right|\\ &\leq \frac{1}{4}|\sin u_1-\sin u_2|+\frac{1}{8}|\tan^{-1}v_1-\tan^{-1}v_2|\\ &\leq \frac{1}{4}|u_1-u_2|+\frac{1}{8}|v_1-v_2|.\end{aligned}$$

Fixons

$$L_1 := \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad L_2 := \frac{1}{8}.$$

Puisque

$$L_1+L_2=\frac{3}{8}<\frac{1}{2}:=\alpha,$$

alors, d'après corollaire 4.1, on obtient que le problème aux limites (4.19) admet une solution unique.

Exemple 4.2. Considérons le le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D^2_{\frac{1}{2}}u(t)=\dfrac{t}{20}\sin(u(t))+\dfrac{1}{(2+\sqrt{2})\sqrt{t}}(D_{\frac{1}{2}}u(t))^{\beta}+\frac{3}{2}t, \quad t\in I, 0<\beta<1,\\ D_{\frac{1}{2}}u(0)=0,\\ D_{\frac{1}{2}}u(1)=\dfrac{1}{2}u(1).\end{cases} \tag{4.20}$$

Dans cet exemple on a

$$f(t,u,v)=\frac{t}{20}\sin u+\frac{1}{(2+\sqrt{2})\sqrt{t}}v^{\beta}+\frac{3}{2}t, \quad q=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

On a

$$|f(t,u,v)|\leq\frac{t}{20}|u|+\frac{1}{(2+\sqrt{2})\sqrt{t}}|v|+\frac{3}{2}t.$$

Posons

$$p(t)=\frac{t}{20}, \quad q(t)=\frac{1}{(2+\sqrt{2})\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad r(t)=\frac{3}{2}t.$$

En utilisant le fait que

$$\int_O^t t^m d_qt=\frac{1-q}{1-q^{m+1}}t^{m+1},$$

on obtient alors

$$P=\int_0^1\frac{t}{20}d_qt=\frac{1}{20(1+q)}=\frac{1}{30},$$

$$P_1=\int_0^1\frac{t^2}{20}d_qt=\frac{1}{20(1+q+q^2)}=\frac{1}{35},$$

$$Q=\int_0^1 \frac{1}{(2+\sqrt{2})\sqrt{t}}d_qt=\frac{1+\sqrt{q}}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

et

$$N=\max\{2,-1\}=2.$$

Puisque

$$(N+1)P+P_1+Q=\frac{1}{10}+\frac{1}{35}+\frac{1}{2}=\frac{22}{35}<1.$$

Par le théorème (4.4), on obtient que le problème aux limites (4.20) admet au moins une solution.

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des aux q-différence non linéaire d'ordre deux et d'ordre trois.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe.

Les résultats présentés dans ce mémoire sont souvent illustrés par des exemples d'application.

Bibliographie

[1] C. R. Adams, *On the linear ordinary q-difference equation.* Annals Math. **30**, 195–205 (1928).

[2] B. Ahmad, *Boundary-value problems for nonlinear third-order q-difference eqyations*, Electron J Diff Equ. **2011.94**, 1-7 (2011).

[3] M. H. Annaby et Z. S. Mansour, *q-fractional calculus and equations*, springer, New York, 2012.

[4] A. Aral, V. Gupta et R. P. Agarwal, *Applications of q-calculus in operator theory*, springer, New York, 2013.

[5] G. Bangerezako, *Variational q-calculus*, J Math Anal Appl. **289**, 650–665 (2004).

[6] R. D. Carmichael, *The general theory of linear q-difference equations*, American J Math. **34**, 147–168 (1912).

[7] T. Ernst, *A Comprehensive Treatment of q-Calculus,* springer, New York, 2012.

[8] R. Finkelstein, and E. Marcus, *Transformation theory of the q-oscillator*, J Math Phys. **36**, 2652–2672 (1995).

[9] R. Finkelstein, *The q-Coulomb problem*, J Math Phys. **37**, 2628–2636 (1996).

[10] R. Floreanini and L. Vinet, *Automorphisms of the q-oscillator algebra and basic orthogonal polynomials*, Phys Lett A. **180**, 393–401 (1993).

[11] R. Floreanini and L. Vinet, *Symmetries of the q-difference heat equation*, Lett Math Phys. **32**, 37–44 (1994).

[12] F. H. Jackson,*On q-difference equations*, American J Math. **32**, 305–314 (1910).

[13] F. H. Jackson, *On q-definite integrals*, Quart. J. Pure Appl. Math. **41**, 193–203 (1910).

[14] V. Kac et P. Cheung, *Quantum calculus*, springer, New York, 2002.

[15] C. Yu et J. Wang, *Existence of solutions for nonlinear second-order q-difference equations with first-order q-derivatives*, Advances in Difference Equations 2013, 2013 :124.