الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Optimisation des systèmes dynamiques et application à la gestion de trésorerie

Préparé par :

AZIOUNE Mourad
BENARIFA Halima

Devant le jury

Khalfaoui Mohamed (MAA)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Azi Mourad (MAA)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Boufelgha Ibrahim (MAA)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2020\2021

DEDICACE

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore, je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragements.

*Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études, mon marie Mohcen, mes aimables amis, collègues d'étude et sœur de cœur Farida, Ranya , Khawla et bien sur mon binome **Mourad**.*

A tout mes enseignants et enseignantes et mon encadreur, Azi Mourad .

Enfin à toute personne qui m'aime.

HALIMA

DEDICACE

J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail réalisé grâce à
l''aide de Dieu Tout puissant tout d'abord a :
Mes adorables Parents, qui m'ont tout donné la vie, l'espoir,
l'amour et la bougie qui éclairé mon chemin depuis ma naissance,
à la source de ma vie.
Avec la patience et les prières de Maman qui ont été exhaussé par
Le Tout Puissant, et la compréhension et les sacrifices de mon Papa,
Qui m'ont mis l'abri du besoin, et m'ont donnée l'avantage de me
consacrer
Entièrement et uniquement à mes études.
Merci, merci et merci
Maman et Papa
A mes chères agréables sœurs : « Soumia et Chaima »
Et mes chères frères « Nadjib, Samir et Youcef ».
A tout ma famille petites et grandes et je vous souhaite le bonheur et la
réussite.
Bien sûr sans oublier Mes meilleures amies et mes collègues de travail
A mon binôme HALIMA et toute sa famille.
A tous les étudiants de la promotion 2020/ 2021
ESPECIALYY**ONE**
Et enfin pour ceux qui ne sont pas sur les lignes mais dans le cœur
Je vous dis : « mille merci ».

MOURAD

Remerciements

Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et la force pour mener ce travail à terme.

Toute nos reconnaissance à notre encadreur ***Mrs Azi Mourad*** *qui a accepté de diriger ce travail, pour sa présence, son aide, nous ne peux que nous exprimons notre gratitude et notre profond respect.*

Nos remerciements s'adressent aussi aux ***membres de jury*** *pour avoir accepté d'examiner ce modeste travail.*

Nous présentons notre vif remerciement à ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Nos remerciements les plus sincères à tous les enseignants et administrateurs de l'institut des science et de la technologie.

Table des matières

Introduction Générale **4**

1 Introduction à la théorie de contrôle optimal **6**

Introduction 6

1.1 Théorie du contrôle 6

1.1.1 Formulation mathématique 6

1.1.2 Classe des commandes admissible 7

1.1.3 Contrôlabilité des systèmes dynamiques 7

1.1.4 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes 9

1.1.5 Contrôlabilité des systèmes non linéaires 10

1.2 Problème de contrôle optimal 11

1.2.1 Critère de qualité 11

1.2.2 Les types de problème de contrôle optimal 12

1.3 Conditions d'optimalités d'un problème de contrôle optimal 13

1.3.1 Principe du maximum de Pontriaguine sans contraintes sur l'état 13

1.3.2 Principe du maximum de pontriaguine avec contrainte sur l'état 14

1.4 Conditions suffisantes d'optimalité 15

1.5 Problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires 16

1.5.1 Condition nécessaire d'optimalité 17

2 Gestion financière d'entreprise **20**

2.1 La dynamique des cycles dans l'entreprise 20

2.1.1 Le cycle d'exploitation 21

2.1.2 Le cycle d'investissement 21

2.1.3 Le cycle de financement 22

2.2 La fonction financière au niveau de l'entreprise 22

2.2.1 Les contraintes financières 22

2.2.2 La fonction objectif de l'entreprise 23

2.3 Le circuit financier 24

2.4 La décision de financement et coûts de capitaux 25
2.4.1 Principales sources de financement 25
2.4.2 Coûts des capitaux 27
2.4.3 Le choix des sources de financement 29
2.5 Décision d'investissement 29
2.5.1 Les déterminants de l'investissement 30
2.5.2 L'investissement et la croissance 30
2.5.3 Critères classiques du choix d'investissement 32
2.6 Gestion de la trésorerie 34
2.6.1 La trésorerie 34
2.6.2 Gestion de trésorerie 34
2.6.3 Trésorerie et équilibre financier de la firme 35
2.6.4 La prévision des flux de trésorerie 38
2.6.5 Le placement des excédents de trésorerie 39

3 Modèles de contrôle optimale en finance d'entreprise 41
3.1 Modèle de financement optimal 42
3.2 Modèle de financement optimal 42
3.2.1 Description du modèle 42
3.3 Modèle dynamique d'entreprise 43
3.3.1 Description du modèle 44
3.4 Modèle de gestion de la trésorerie 46
3.4.1 Description du modèle 46
3.4.2 Résolution du modèle de gestion de la trésorerie 48

Bibliographie 99

Table des figures

1.1 Ensemble accessible 8

2.1 Le cycle d'exploitation 21
2.2 Le cycle d'investissement 22
2.3 Le circuit financier de l'entreprise 24

Introduction générale

La gestion financière est un outil de gestion prévisionnel, elle est nécessaire et indispensable au pilotage d'une entreprise. La fonction financière d'une entreprise a le rôle d'agir et d'adapter les ressources financières aux besoins, de respecter les contraintes, mais aussi de rechercher la concordance entre la fonction objectif de l'entreprise et celle des actionnaires et des prêteurs.

La finance d'entreprise inclut l'ensemble des décisions des entreprise. En matière de prise de décision, il n'y a qu'un seul objectif en finance d'entreprise : maximiser la valeur de l'entreprise. Cette dernière s'intéresse non seulement à la façon dont elle gère ses actifs, mais aussi à la façon dont elle traite le problème des investissements et des nouveaux actifs.

La théorie du contrôle optimale permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance sur un domaine délimité par des contraintes. On considère que la théorie du contrôle optimal a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien (nous en sommes souvent inconscients), ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches.

Ce mémoire a pour but d'étudier les modèles de contrôle optimal qui décrivent les différents problèmes posés au niveau d'une entreprise, de résoudre ensuite ces modèles en appliquant une méthode de contrôle .

Ce mémoire est composé d'une introduction générale, et trois chapitres, une conclusion, et une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous présentons les aspects théoriques de la théorie de contrôle optimal, dont on s'intéresse aux fondements théorique du contrôle optimal, ainsi que les conditions d'optimalités.

Dans le deuxième chapitre, on présente brièvement les différentes notion de la financière d'entreprise, où nous décrivons en première lieu, les cycles d'opération dans l'entreprise, la fonction objectif de l'entreprise. Par la suite, nous exposons les décisions de financement et d'investissement, finalement, nous présentons la gestion de la trésorerie des entreprises.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation et à la résolution de quelques modèles de contrôle optimale en économie financière, telque : le modèle de financement optimale, le modèle dynamique d'entreprise et le modèle de gestion de la trésorerie qui s'intéresse à la gestion optimale des réserves de liquidité.Le modèle de gestion de trésorerie qu'on va étudier est celui développé dans [2], ce modèle propose une extension de Sethi, en supposant que les découverts bancaires en une vente à découvert d'action sont autorisées mais pour des durées limitées.

Chapitre 1

Introduction à la théorie de contrôle optimal

Introduction

La théorie du contrôle optimal permet d'amener un système dynamique d'un état initial donné à un certain état final, tout en optimisant certains critères.

Historiquement, la théorie du contrôle est liée part au calcul des variations, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, elle a vue une autre dimension dans les années 50 après l'apparition du principe du maximum de pontriaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales.

1.1 Théorie du contrôle

1.1.1 Formulation mathématique

La formulation d'un problème de contrôle exige une description mathématique du processus à contrôler, une proclamation des contraintes physiques à imposer au système et la détermination du critère de performance.

Après la modélisation, généralement on obtient un système avec beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées $x_i(t), i = 1, ..., n$ où t désigne le temps définit dans un intervalle $\hat{\mathbb{T}} = [0, t^*]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(x, t, u), \tag{1.1}$$

où f est un vecteur de n composantes, les fonctions $f_i, i = 1, ..., n$, pouvant être linéaire ou non linéaire. La variable $u \in \mathbb{R}^{\mathbf{r}}$, généralement constante par morceaux, est appelée commande (contrôle).

Définition 1.1.1. *Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.*
Dont l'état initial du système $x(0) = x^0$ qui est un vecteur donné dans un plan de phase.

1.1.2 Classe des commandes admissible

Généralement, les commandes admissibles peuvent être non borné, borné ou de type bang-bang.

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les commandes $u_j(t)$, $1 \leq j \leq r$, par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

Commande bang-bang

Un commande $u \in \mathbb{R}^{\mathbf{r}}$ est appelé contrôle bang-bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, ..., m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande bang-bang est une commande qui bascule brusquement entre deux valeurs et qui possède au moins un instant de commutation.

1.1.3 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener d'un état initial x^0 à un état final x^1 en un temps fini. La contrôlabilité des systèmes linéaires se base essentiellement sur le critère de Kalman .

L'ensemble accessible

Considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \forall t \in \mathbb{T}, \\ x(t) = x^0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.1.2. *L'ensemble des points accessibles à partir de x^0 en un temps $t^* > 0$ est défini par :*

$$Acc(x^0, t^*) = \{x_u(t^*)/u \in \mathbb{R}^r)\},$$

où $x_u(.)$ est la solution du système (1.2) associée au contrôle u.
Autrement dit, $Acc(x^0, t^*)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.2) au temps t^*.

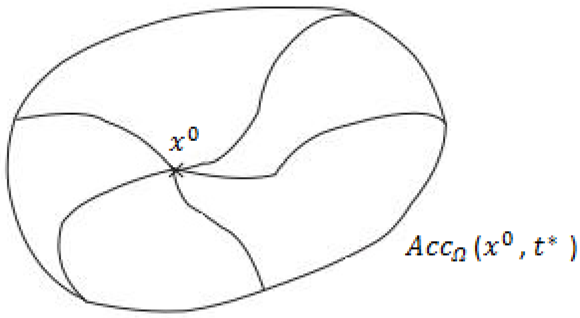

FIGURE 1.1 – Ensemble accessible

Contrôlabilité des systèmes linéaires

Les théorèmes d'existence de solutions d'équation différentielle nous assurent que, pour tout contrôle u, le système (1.2) admet une unique solution $x(.) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, u absolument continue. Soit $F(.) : \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{R})$, la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définit par :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = A(t)F(t), \\ f(0) = Id. \end{cases}$$

Notons que si $A(t) = A$ est constante sur $\mathbb{T}$, alors $F(t) = e^{At}$. La solution $x(t)$ du système (1.2) associée au contrôle u est donnée par :

$$x(t) = F(t)(x_0 + \int_0^t F(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds), \quad t \in [0, t^*].$$

Définition 1.1.3. *(La contrôlabilité)*

Le système de contrôle $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ *est dit contrôlable en temps* t^* *si*

$$Acc(x^0, t^*) = \mathbb{R}^n \ .$$

i.e. pour tous x^0, $x^1 \in \mathbb{R}^n$, *il existe un contrôle* u *tel que la trajectoire associée relie* x^0 *à* x^1 *en temps* t^*.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité des systèmes linéaires :

Théorème 1.1.1. *[11]*

Le système $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$, *est contrôlable en temps* t^* *si et seulement si la matrice :*

$$C(t^*) = \int_0^{t^*} F(t)^{-1}B(t)B(t)^T(F(t)^{-1})^T dt, \tag{1.3}$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.
Cette condition ne dépend pas de x^0, *c'est-à-dire, si un système linéaire est contrôlable en temps* t^* *depuis* x^0, *alors il est contrôlable en temps* t^* *depuis tout point.*

1.1.4 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Cas sans contraintes sur le contrôle (condition de Kalman) :

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante explicite de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 1.1.2. *[1] (Critère explicite de contrôlabilité)*

Le système autonomes $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ *est contrôlable en temps* t^* *si et seulement si :*

$$rangC = rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n.$$

La matrice C d'ordre $n \times rn$ est appelée matrice de contrôlabilité de Kalman, et la condition $rangC = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque 1.1.1. *La condition de Kalman ne dépend ni de* t^* *ni de* x^0 . *Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps* t^* *depuis* x^0, *alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Cas avec contraintes sur le contrôle

Dans le théorème (1.1.2) on n'a pas mis de contrainte sur le contrôle. Cependant, en adaptant le théorème on obtient aisément le résultat suivant.

Corollaire 1.1.1. *Considérons le système :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), u \in U. \tag{1.4}$$

Sous la condition de Kalman précédente, pour $r = 0$ et pour $0 \in intU$, l'ensemble accessible $Acc(x^0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $e^{tA}x^0$.

Théorème 1.1.3. *Pour le système (1.4) tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la condition de Kalman est satisfaite pour la paire (A, B) et toutes les valeurs propres de la matrice A ont de partie réelle négative ou nulle.*

1.1.5 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Se prononcer sur la contrôlabilité des systèmes non linéaires reste jusqu'à présent une tache très difficile. Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé, partant du fait que la contrôlabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale. La non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité du système non linéaire. Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Proposition 1.1.1. *Considérons le système (1.5) avec $f(x^0, u^0) = 0$.*
Notons

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0).$$

Si

$$rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n,$$

alors le système (1.5) est localement contrôlable en x^0.

1.2 Problème de contrôle optimal

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x^0, u \in U. \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2.1 Critère de qualité

Lors de la formulation d'un problème de contrôle optimale, l'objectif est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état désirable.En d'autre terme, le problème de contrôle optimal à pour but d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, tout en optimisant un critère de qualité.
Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule :

$$\min_{u \in U, t^* \in \mathbb{R}} J(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt. \tag{1.7}$$

Où :
$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x(t^*), t^*$ peuvent être fixé ou libre.

On peut classer les fonctions objectifs en trois critères physiques de performance :

Temps optimal

On parle d'un problème en temps minimal lorsque $F(x(t), u(t), t) = 1, G(t^*, x^*) = 0$ et le temps final t^* est libre dans l'expression :

$$\min_{t^*} \int_0^{t^*} 1 dt.$$

Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t^* est fixé dans l'expression :

$$\min_{u \in U} Z(u(t)) = G(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt.$$

Evidament, il existe des problèmes qui combinent les deux critères de qualité précédents, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal.

1.2.2 Les types de problème de contrôle optimal

Selon le critère de qualité, on distingue généralement trois types de problèmes de contrôle optimal :

a) **Problème de Lagrange**

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \tag{1.8}$$

où les contrôles $u(.)$ sont des fonctions définies de $[0, t^*]$ dans $U \subset \mathbb{R}^{\mathbf{r}}$, et la fonction coût $F : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \times U \times [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$, est comme suit :

$$\max_{u \in U, t^* \in \mathbb{R}} \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \tag{1.9}$$

avec $x(0) = x^0$ est une condition initiale donné.

b) **Problème de Mayer**

Dans ce cas, le critère à optimiser dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. Soit la fonction $G : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors le problème de Mayer peut être définit par :

$$\begin{cases} \max_{u \in U, t^* \in \mathbb{R}} Z(x(t), u(t), t) = G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.10}$$

c) **Problème de Bolza**

L'avantage du problème de Bolza est que, il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer).

Soient $F : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \times U \times [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}$, et $G : \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors, le problème de Bolza est défini par :

$$\begin{cases} \max\limits_{u\in U, t^*\in\mathbb{R}} Z(x(t), u(t), t) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt + G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.11}$$

1.3 Conditions d'optimalités d'un problème de contrôle optimal

1.3.1 Principe du maximum de Pontriaguine sans contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant, avec un temps terminal t^* fixé :

$$\begin{cases} \min\limits_{u\in U} Z(u) = G(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(t, x(t), u(t))dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ u(t) \in U, \quad t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{1.12}$$

où U est un ensemble compact de de $\mathbb{R}^{\mathbf{r}}$ et G, F, f sont des fonctions de classe C^1.
Le principe de maximum se base essentiellement sur la maximisation du Hamiltonien, définit comme suit :

$$H = H(x(t), \psi(t), u(t), t) = -F(x(t), u(t), t) + \psi'(t)f(x(t), u(t), t),$$

où le vecteur $\psi : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ est appelé vecteur d'état adjoint.

Théorème 1.3.1. *[1] (Principe du minimum de Pontriaguine sans contrainte sur l'état)*
Soit $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$, alors il existe un vecteur $\psi^*(t)$ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t), \qquad \psi(t^*) = G_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) \geq H(x^*(t), \psi^*(t), u(t), t), \quad \forall u(t) \in U, \quad t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{1.13}$$

avec :

$$H_x(x^*(t),\psi^*(t),u^*(t),t) = \frac{\partial H(x(t),\psi(t),u(t),t)}{\partial x}|_{x(t)=x^*(t),\quad u(t)=u^*(t),\quad \psi(t)=\psi^*(t)},$$

$$G_x(x^*(t^*)) = \frac{\partial G(x(t^*))}{\partial x}|_{x(t^*)=x^*(t^*)}.$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global du Hamiltonien $H(x^*(t),\psi^*(t),u(t),t)$ pour $u(t) \in U$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (1.13) sont appelées "Principe du maximum".

1.3.2 Principe du maximum de pontriaguine avec contrainte sur l'état

Ici nous imposons au problème précédent des contraintes sur l'état et les variables de contrôle.

Plus précisément, pour chaque instant $t \in [0,t^*]$, le couple $(x(t),u(t))$ doit satisfaire la contrainte

$$g(x,u,t) \geq 0, \quad \forall t \in [0,t^*], \tag{1.14}$$

où $g : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{r}} \times [0,t^*] \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$.

Ainsi, le problème à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbb{R}^{\mathrm{r}}} Z(u) = G(x(t^*),t^*) + \int_0^{t^*} F(t,x(t),u(t))dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0,t^*], \\ u \in \mathbb{R}^{\mathrm{r}}, \qquad g(x,u,t) \geq 0, \quad \forall t \in [0,t^*]. \end{cases} \tag{1.15}$$

Introduisons le Lagrangien définit par :

$$L(x,\psi,u,t) = H(x,\psi,u,t) + \lambda' g(x,u,t), \tag{1.16}$$

Les composantes λ_i du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs de Lagrange doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\lambda_i(t) \geq 0, \quad \lambda_i(t)g_i(x,u,t) = 0, \quad \forall i = 1,...,m, \forall t \in [0,t^*]. \tag{1.17}$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\psi}(t) = -L_x(x(t),\psi(t),u(t),t), \quad \psi(t^*) = G_x(x^*(t^*)). \tag{1.18}$$

Théorème 1.3.2. *[1] (Principe du minimum de Pontryagin avec contrainte sur l'état)*

Soient $u^*(t) \in \mathbb{R}^r$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$, alors il existe un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un multiplicateur de Lagrange λ^* tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*, u^*(t), t), \quad x^*(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi^*(t) u^*(t), t), \qquad \psi(t^*) = G_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t) \leq H(x^*(t), \psi^*(t), u(t), t), \quad \forall u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, t^*], \\ \dfrac{L}{\partial u}|_{u(t)=u^*(t)} = \dfrac{\partial(H + \lambda g)}{\partial u}|_{u(t)=u^*(t)} = 0, \\ g(x^*(t), u^*(t), t) \geq 0, \quad t \in [0, t^*], \\ \lambda_i^*(t) \geq 0, \quad \lambda_i^*(t) g_i(x^*, u^*, t) = 0, \quad \forall i = 1, ..., n, \quad t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{1.19}$$

1.4 Conditions suffisantes d'optimalité

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{u \in U} Z = G(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = 0, \\ u(t) \in U, t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{1.20}$$

U est un ensemble compact de $\mathbb{R}^r$.

Le résultat de condition suffisante nécessite le concept de fonction convexe.

Définition 1.4.1. *Un ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si :*

$$\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in K.$$

Définition 1.4.2. *Une fonction $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définit sur un ensemble convexe K est dite convexe si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y),$$

Elle est dite strictement convexe si l'inégalité stricte est vérifiée pour tout $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$.

Définition 1.4.3. *Une fonction $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définit sur un ensemble convexe K, est dite concave si et seulement si $(-F)$ est convexe.*

Définisons la fonction H^0 :
$H^0(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v(t), t)$.

Théorème 1.4.1. *(Condition suffisante)*
Si $(x^*(t), \psi(t)^*, u^*(t))$ satisfait les conditions nécessaires (1.13) pour tout $t \in [0, t^*]$ et si la fonction $H^0(x(t), \psi(t), u(t), t)$ est convexe en x pour tout $t \in [0, t^*]$ et si la fonction $G(x(t^*))$ et convexe en $x(t^*)$, alors $u^*(t)$ est une commande optimale du problème (1.20).

1.5 Problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires

D ans cette section, nous présentons le principe du maximum pour un problème de contrôle optimal avec contraintes aux instants intermédiaires.

Soit $t_0 < t_1 < ... < t_k$ des nombres réels positifs, et définissons le vecteur :

$$p = ((t_0, x(t_0)), (t_1, x(t_1)), ..., (t_k, x(t_k))).$$

Considérons sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min J = \varphi_0(p), \\ \dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U, \\ \eta_j(p) = 0, \quad j = 1, ..., q, \\ \varphi_i(p) \leq 0, \quad i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{1.21}$$

où les nombres $t_0, t_1, ..., t_k$ peuvent ne pas être fixes, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r$, la fonction $x(.)$ est absolument continue et $u(.)$ est une fonction mesurable et borné.

Le problème (1.21) contient des contraintes d'égalité et d'inégalité qui dépendent des valeurs de la variable d'état non seulement aux extrémités de $[t_0, t^*]$ mais aussi aux points intermédiaires t_1, t_2, t_{k-1}. Si $k = 1$, le problème (1.21) devient le problème classique bien connu de type Pontriaguine.

L'objectif de ce travail est de présenter une extension du principe du maximum de Pontryagin à une classe de problème avec contraintes sur l'état à des points intermédiaires.

Considérons les hypothèses suivantes :
la fonction f est définie et continue sur l'ensemble ouvert $Q \subset \mathbb{R}^{n+r+1}$, les dérivées

partielles f_t, f_x existent sur cet ensemble et sont continus dans tous les arguments, les fonctions $\varphi_i(p)$ et $\eta_j(p)$ sont définies sur l'ensemble ouvert $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{(v+1)(n+1)}$ et ont des dérivés continues sur cet ensemble.

Définition 1.5.1.

Le vecteur $w = (x(t), u(t), p)$ est appelé processus admissible s'il vérifie toutes les contraintes, c'est-à-dire, il existe un compacte $\Omega \subset Q$ tel que $(x(t), v(t), t) \in \Omega$ presque partout sur $\Delta = [t_0, t_k]$.

Définition 1.5.2.

Le processus admissible $w = (x(t), u(t), p)$ est un processus optimal (atteindre le minimum global) du problème (1.21) si $J(w) \leq J(w)$ pour tout processus w admissible.

1.5.1 Condition nécessaire d'optimalité

Théorème 1.5.1. *[6]*

Supposons que le problème (1.21) atteint un minimum sur le processus $w = (x(t), u(t), p), t \in \Delta$, Alors il existe un vecteur $\lambda = (\alpha, \beta, \psi_x(.), \psi_t(.))$, où $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q) \in \mathbb{R}^q, \psi^x(.)$ et $\psi^t(.)$ sont des fonctions de Lipschitzienne par morceaux sur $\Delta = [t_0, t_k]$, pour lequel nous construisons :

Le Hamiltonien

$$H(\psi_t, \psi_x, t, x, u) = \langle \psi^x, f(t, x, u) \rangle + \psi^t,$$

et la fonction de Lagrange aux points intermédiaires

$$l(p) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(p) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \eta_j(p),$$

où les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) la condition de non-trivialité : $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$;

(b) la condition de non-négativité : $\alpha_i \geq 0, \quad i = 0, ..., m;$

(c) la condition de complémentarité : $\alpha_i \varphi_i(p) = 0, \quad i = 1, ..., m;$

(d) l'équation conjuguée : presque partout sur Δ :

$$\dot{\psi}^x(t) = -H_x = -\psi_x(t) f_x(t, x(t), u(t)),$$

$$\dot{\psi}^t(t) = -H_t = -\psi_x(t) f_t(t, (t), u(t));$$

(e) la condition de transversalité aux extrémités de l'intervalle :

$$\begin{array}{lllllll} \psi^x(t_0) & = & \frac{\partial L(p)}{\partial x(t_0)} & = & l_{x(t_0)}(p), & \psi^x(t_k) & = & -l_{x(t_k)}(p), \\ \psi^t(t_0) & = & \frac{\partial L(p)}{\partial t_0} & = & l_{t_0}(p), & \psi^t(t_k) & = & -l_{t_k}(p); \end{array}$$

(f) la condition de discontinuité de ψ^x *et* ψ^t *en des points intermédiaires :*

$$\begin{array}{lllll} \Delta\psi^x(t_k) & = & \psi^x(t_k + 0) - \psi^x(t_k - 0) & = & l_{x(t_k)}(p), \\ \Delta\psi^t(t_k) & = & \psi^t(t_k + 0) - \psi^t(t_k - 0) & = & l_{t_k}(p); \end{array}$$

(g) pour presque tout $t \in \Delta$:

$$H(\psi^t(t), \psi^x(t), x(t), u(t), t) = 0;$$

(h) la condition de maximalité de H pour tout $t \in \Delta$:

$$\max_{u \in C(t)} H(\psi^t(t), \psi^x(t), x(t), u(t), t) = 0,$$

où $C(t) = \{u \in U | (t, x^0(t), u) \in Q\}$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés au problème de contrôle optimal, dont nous avons présenté les notions de contrôlabilité du système dynamique, par la suite, nous avons exposé le principe du maximum de pontriaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité. Finalement, nous avons terminé le chapitre par l'étude des problèmes de contrôle optimale avec contraintes intermédiaires.

Chapitre 2

Gestion financière d'entreprise

Introduction

Le champ de la finance d'entreprise comprend deux grands types de décision, l'investissement et le financement. Autrement dit, la fonction financière se préoccupe de la recherche et de l'allocation des ressources financières. L'objectif poursuivi est la création de la valeur ou l'enrichissement des actionnaires.

Ce chapitre propose un panorama de la gestion financière de l'entreprise en avenir certain. Son objectif n'est pas de rentrer dans les détails mais de proposer une vision globale, pour se familiariser avec le vocabulaire utilisé en finance et pour mieux comprendre la suite de ce mémoire et les différents axes de la gestion financière de l'entreprise. Après avoir présenté les différents cycles dans l'entreprise et la fonction financière, ainsi l'interaction entre toutes les décisions financières (décision de financement, d'investissement) sous forme d'un circuit financier, nous abordons la décision de financement et de choix d'investissement. Finalement on termine ce chapitre par quelques éléments de la gestion de trésorerie.

2.1 La dynamique des cycles dans l'entreprise

La notion de cycle renvoie à une suite d'opérations qui se renouvellent dans un ordre stable ou prévisible, cette notion s'inscrit dans une perspective qui permet d'analyser les activités de l'entreprise d'une manière dynamique et non pas d'une manière statique. On distingue trois types de cycles d'opération dans la dynamique de l'entreprise : le cycle d'exploitation, le cycle d'investissement et le cycle de financement.

2.1.1 Le cycle d'exploitation

Le cycle d'exploitation représente l'ensemble des opérations nécessaires à la production et à la vente des biens ou services. C'est un cycle court car ses éléments résultent de décision ayant d'effet à court terme. Il correspond aux phases : Approvisionnement - Production - Commercialisation.
Le schéma ci-dessous reproduit le cycle d'exploitation d'une entreprise industrielle :
Ce schéma met en évidence les trois phases du cycle d'exploitation :

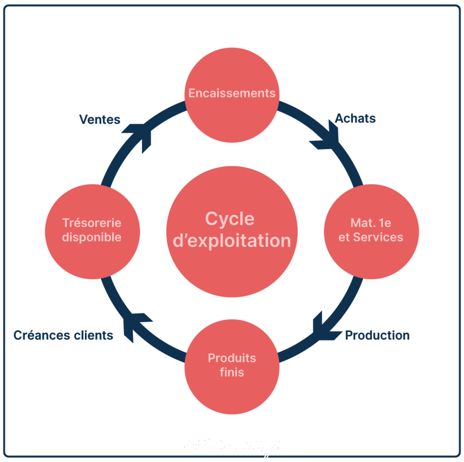

FIGURE 2.1 – Le cycle d'exploitation

- **la phase approvisionnement** correspond à l'acquisition auprès des fournisseurs de biens et de services qui sont nécessaires à la production ;

- **la phase de production** est articulée sur la mise en oeuvre d'un processus technologique qui exige des inputs : un capital économique, un savoir faire et des biens ou des services à transformer ;
- **la phase de commercialisation** commence généralement avec les stocks de produits finis et se termine avec la vente des produits, cette phase se traduit par un encaissement.

2.1.2 Le cycle d'investissement

L'investissement est la création d'un capital économique nécessaire à la mise en oeuvre de la production à travers un cycle d'exploitation. D'un point de vue financier, l'investissement s'analyse comme une affectation de fonds à la création ou à l'acquisition d'actifs physiques ou d'actifs financiers destinés à êtres utilisés dans le cadre du cycle d'exploitation. Dans l'entreprise les opérations d'investissement ont l'objectif de maintenir ou d'améliorer l'encaissement dans le futur, de baisser les coûts ou de faire face à l'évolution des marchés. Le schéma (2.2) reproduit le cycle d'investissement d'une entreprise.

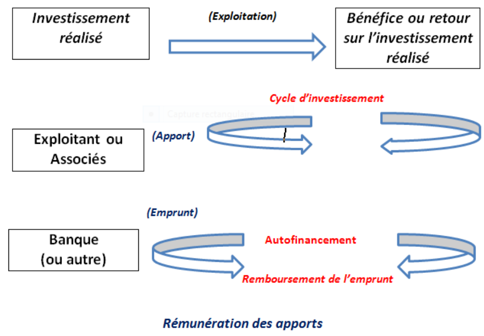

Figure 2.2 – Le cycle d'investissement

2.1.3 Le cycle de financement

Les cycles d'exploitation et d'investissement se traduisent par des flux de trésorerie (décaissement et encaissement). Si le solde de trésorerie est négatif cette dernière est financée par des fonds externes, provenant des actionnaires ou des banquiers (fonds d'emprunts).

Le cycle de financement résulte de l'évolution de la trésorerie, engendrée par les autres cycles.Ainsi, les cycles sont en interactions et ne peuvent être analysés séparément.

2.2 La fonction financière au niveau de l'entreprise

La fonction financière est celle qui, au sein de l'entreprise, prépare et exécute les décisions financières. Elle a le rôle d'agir et d'adapter les ressources financières aux besoins, de respecter les contraintes, mais aussi de rechercher l'adéquation entre la fonction objectif de l'entreprise et celle des actionnaires et des prêteurs.

2.2.1 Les contraintes financières

L'étude des mécanismes financiers nous permet de mettre en évidence les contraintes fondamentales qui pèsent sur la vie financière de l'entreprise. Toute activité économique repose sur une procédure d'échanges qui exige la disposition de capital monétaires. Mais toute détention de capital comporte un coût. L'entreprise doit en même temps disposer d'un capital et assurer la rémunération des capitaux immobilisés. En effet, toute entreprisene ne peut s'échapper à cette double contrainte :

La solvabilité

La solvabilité est l'aptitude (capacité) de l'entreprise à assurer le paiement de ses dettes. L'incapacité de l'entreprise à rembourser ses dettes est suivie généralement par la cessation de paiements vis à vis l'ensemble des relations qu'elle entretient avec ses partenaires économiques. En effet, ces situations mènent à la disparition de l'entreprise ou au départ de ses dirigeants.

La rentabilité

La rentabilité est une notion qui s'applique à toute action économique mettant en oeuvre des moyens matériels, humains ou financiers. Elle s'exprime par la différence entre le revenu obtenu ou prévu et les ressources employées pour l'obtenir.

. Quand on analyse s'il faut investir dans un actif ou dans un projet, on évalue la valeur future de l'actif et on la compare à son coût d'acquisition. Ainsi, l'existence d'un niveau minimum de rentabilité est une contrainte très importante avant chaque décision d'investissement.

2.2.2 La fonction objectif de l'entreprise

Aucune discipline ne peut se développer de manière cohérente sans avoir un corps d'objectif unifié. L'objectif principal dans la théorie financière est de maximiser la valeur de l'entreprise. Par conséquent, toute décision d'investissement et de financement qui augmente la valeur de l'entreprise est une bonne décision. Mais rien n'empêche qu'il y a des firmes qui ont d'autres objectifs que celui de maximiser leurs valeurs.

L'objectif de maximiser la valeur de l'entreprise

Si l'objectif de la finance d'entreprise est de maximiser la valeur de la firme, alors qu'est ce qui détermine la valeur de l'entreprise ? Dans un premier temps, on peut dire que la valeur d'une entreprise est ce qu'on est prêt à payer pour l'acquérir. Les comptables utilisent souvent cette approche de la valeur et ils l'appellent valeur comptable. Cette définition pose deux problèmes. Le premier est que si un actif en particulier a été acheté dans le passé, son prix historique ne reflète pas fidèlement sa valeur actuelle. Le second est que cette définition dissimule presque entièrement la valeur créée par un investissement futur.

L'objectif de maximiser les cours des actions

Dans la finance classique, les dirigeants de la firme ont seulement besoin de se concentrer sur l'objectif de maximisation du prix des actions.

L'objectif de maximiser les profits

Certaines firmes ont des objectifs qui portent plus sur la rentabilité que sur la valeur.

L'objectif du bien être social

Centaines firmes, spécialement celles du secteur public, ont pour objectif le bien être social.

2.3 Le circuit financier

La meilleure façon pour comprendre le fonctionnement financier de l'entreprise est de regrouper les interactions entre les différentes décisions financière de l'entreprise. Nous les résumons sous forme d'un "circuit" dans le schéma ci-après.

La partie supérieure du schéma correspond aux origines et aux utilisations des capitaux manipulés par l'entreprise. La partie inférieure traduit les coûts et les revenus de ces capitaux. Ce schéma propose de mettre en évidence les différents flux de

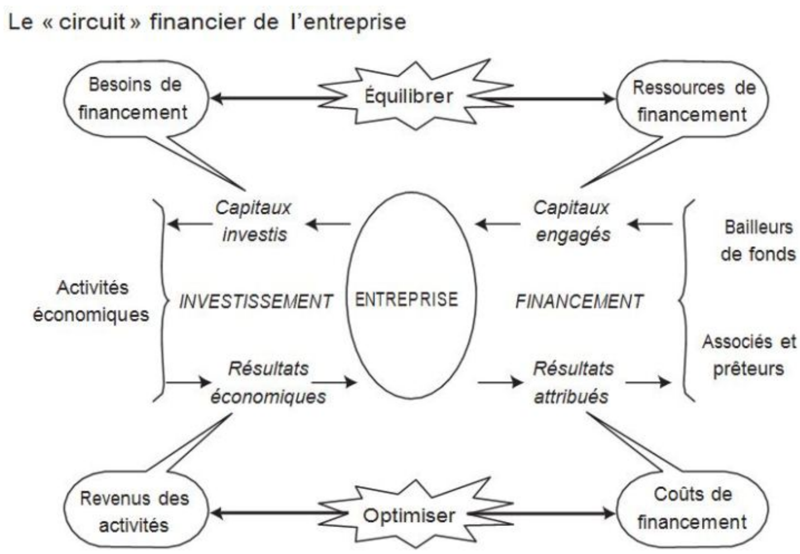

FIGURE 2.3 – Le circuit financier de l'entreprise

trésorerie associés aux différentes décisions financières.

Dans une première phase (Capitaux Engagés), des agents économiques disposant de liquidités, apportent à l'entreprise les fonds qui lui sont nécessaires pour réaliser ses

opérations d'investissement.
Dans une seconde phase (Capitaux Investis), les dirigeants de l'entreprise décident de l'allocation des fonds collectés, en acquérant des actifs : il s'agit du flux lié à l'opération d'investissement.
L'acquisition des actifs industriels et commerciaux est réalisée en vue d'obtenir ultérieurement des flux de liquidités provenant des opérations d'exploitation et des actifs financiers, ceci est classé comme une troisième phase (Résultats économique).

Finalement (Résultats Attribué), les flux de liquidités des résultats économiques sont soit utilisés, pour rembourser les créanciers, soit versés aux actionnaires sous forme de dividendes, ou bien réinvestis dans l'entreprise.

La première problématique financière au niveau d'une entreprise est celle de" l'équilibre", qui s'instaure entre les besoins et les ressources. La seconde problématique financière est celle de l'optimisation, qui s'intéresse à la relation entre les revenus économiques et le coût moyen des capitaux.

2.4 La décision de financement et coûts de capitaux

2.4.1 Principales sources de financement

Les ressources de financement peuvent être classées en deux grandes catégories : les ressources propres (fonds propres) et les ressources étrangères (fonds de tiers).

Dans ce qui suit, nous examinons l'ensemble de ces moyens avec leurs principales particularités. Ainsi, en premier lieu nous allons décrire les différentes composantes du financement par capitaux propres. Puis nous exposons le financement par dettes.

Financement par capitaux propres

Les capitaux propres (fonds propres) qui sont constitués généralement par les apports des actionnaires et auxquels on peut ajouter l'autofinancement. Ils favorisent la stabilité, renforce la position concurrentielle et réduit le risque de faillite de l'entreprise.

1. **L'action et le capital social**
   L'action est un titre de propriété (valeur mobilière) qui représente la part du capital qu'un actionnaire détient dans l'entreprise lors de sa création ou lors de l'augmentation de son capital social. Les détenteurs de ces titres sont collectivement propriétaire juridiques de l'entreprise et ce qui leur donne le droit au :
   – dividende lorsque l'entreprise réalise un résultat net positif et que l'assemblée générale décide d'en distribuer une partie aux actionnaires ;

– droit préférentiel de souscription des anciens actionnaires lors de l'augmentation du capital ;
– bonus de liquidation en cas de faillite.

On comprend aisément que ces titres représentent un capital à risque car ils donnent à leurs détenteurs un droit de créance résiduel.

2. **Subventions d'investissement**

   Comme autre ressources propres d'origine externe, on peut citer les subventions d'investissement qui correspondent à l'appui financier que les pouvoirs publics versent à l'entreprise, sans contrepartie, au vu de l'intérêt économique et social.

3. **L'autofinancement**

   Outre le capital social et les subventions, l'entreprise peut recourir pour ses investissements à des ressources internes générées par toutes ses activités. L'autofinancement se définit comme étant la somme des bénéfices (dividendes) non distribuées et les dotations annuelles d'amortissement et de provision.

Financement par dettes

L'endettement constitue une deuxième source de financement à laquelle les entreprises font souvent appel. On distingue, selon la durée, les dettes à long terme et les dettes à court terme.

1. **Dettes à long terme**

   Pour les entreprises, les dettes à long terme peuvent prendre plusieurs formes :

   – **Emprunt bancaire**

     Il s'agit d'un prêt à long terme (plus d'un an) accordé par un établissement de crédit à une entreprise, laquelle s'engage à le rembourser à une échéance bien déterminée.

   – **Emprunts obligataires**

     C'est un emprunt à long terme représenté par des titres de créance, susceptibles d'être placés en public et d'être négociable. Ces emprunts sont souvent des montants élevés, et pour la non-unicité du prêteur ces montants sont divisés en fractions égales appelées obligation. L'entreprise qui émet un emprunt obligataire s'engage à payer aux obligataires des intérêts périodiques, généralement annuels, appelés coupons et de rembourser la valeur nominale, appelée le principal, à l'échéance de ces titres.

   – **Crédit bail (leasing)**

     Il s'agit d'un contrat de location avec option d'achat à un prix fixé d'avance.

L'entreprise loue le bien acheté par une société spécialisée qui est propriétaire. Ce contrat s'étend sur une ou plusieurs années et s'accompagne d'une série de versements fixes de la part de l'entreprise.

2. **Financement par des dettes à court terme**
   Il s'agit d'une source de financement dont l'échéance de remboursement ne dépasse pas un exercice comptable. l'entreprise dispose de plusieurs sources de fonds dont les plus importantes sont :
   - Emprunts bancaires à court terme, Il s'agit d'ouvertures de crédits dont bénéficient les entreprises pour faire face au problème immédiat de liquidités ;
   - Les dettes fournisseurs, à partir du moment où les fournisseurs acceptent de mettre à la disposition de leurs clients les stocks dont ils ont besoin, et qu'ils acceptent d'être payés après que les clients aient vendu et encaissé les recettes ;
   - Le découvert bancaire est un crédit à court terme, accordé par la banque à l'entreprise, il permet à l'entreprise d'avoir de la liquidité même si non son compte bancaire est nul.
   - L'affacturage est une technique de financement par laquelle une entreprise cède la propriété de ses créances à une autre entreprise (le factor) en échange de liquidités immédiates ;
   - La vente à découvert est la vente de titres que l'entreprise ne possède pas.

   Les crédits de trésorerie (à court terme) correspondent des fois à des crédits en blanc. Cela veut dire que l'entreprise peut avoir un crédit sans aucune justification à donner à la banque.

2.4.2 Coûts des capitaux

Quel que soit le mode de financement choisi, ce dernier a un coût pour l'entreprise. Ainsi, le coût de capital représente pour toute entreprise, le coût qu'elle doit supporter en utilisant de ce capital pour financer son activité.

Mathématiquement, le coût du capital est défini comme la moyenne pondérée des coûts des différentes sources de financement (fonds propres "CP", fonds de tiers "D"). Il est appelé Coût Moyen Pondéré du Capital (CMPC), ou Weighted Average Cost of Capital(WACC), il s'exprime par la relation suivante :

$$CMPC = \frac{r_p CP + r_d D}{CP + D} \tag{2.1}$$

où :

r_p :coûts des capitaux propres et r_d :coût de la dette.

Il reste à souligner que le coût du capital dépend du choix de la structure financière entres capitaux propres et capitaux empruntés. Le coût de chaque source de financement est donné par la perte d'opportunité.

Coûts des capitaux propres

Le coût du capital est une évaluation de la contrainte que fait peser l'actionnaire sur l'entreprise. Cette contrainte s'exprime par une attente en matière de dividendes mais aussi en termes de progression des cours de l'action. Pour mieux comprendre sa logique, présentons l'approche principale d'évaluation du coût des capitaux propres appelée modèle de Gordon-Shapiro.

Le modèle de Gordon et Shapiro :

Dans ce modèle, on suppose que le taux de rendement d'une action est r, le dividende D taux de croissance constant g. En tenant compte du prix d'action P_0, le rendement d'une action est donné par :

$$r = \frac{D}{P_0} + g \tag{2.2}$$

Dans le cas d'une nouvelle émission d'action, le coût net du financement par capitaux social est donné par :

$$r_p = \frac{D}{P_0(1-f)} + g \tag{2.3}$$

où :

f : frais d'émission après impôt des actions ordinaire en pourcentage du prix de vente.
g : taux de croissance à long terme de l'entreprise.

Le coût des bénéfices non répartis est inférieur au coût d'une nouvelle émission d'actions ordinaires, car l'entreprise ne subit pas de frais d'émission.

Coût de la dette

- ⋆ **Coût de la dette à court terme :**

  Le coût des dettes à court terme est établi en fonction du taux d'intérêt assumé par l'entreprise sur sa marge de crédit. Comme nous savons que les intérêts sont déductibles d'impôt, alors le coût de la dette à court terme est :

$$K_d = [(1+\frac{i}{c})^c - 1] * (1 - T_c), \tag{2.4}$$

où :

i : taux d'intérêt nominal chargé sur l'emprunt à court terme ;

c : nombre de capitalisation annuelles ;

T_c : taux d'imposition effectif de la société.

⋆ **Coût des obligations :**

Pour recourir au financement obligataire, une entreprise doit tenir compte des taux de rendement (r) du marché offerts pour des titres ayant le même niveau de risque, de sont taux d'imposition (T_c) et des frais d'émission (f). La détermination du coût de l'obligation (k_0) ce fait par la relation suivante :

$$K_0 = \frac{r(1 - T_c)}{1 - f(1 - T_c)}. \tag{2.5}$$

Pour le coût d'endettement bancaire à long terme il se calcul de la même manière que celui à court terme.

2.4.3 Le choix des sources de financement

Parmi les différentes sources de financement de l'entreprise, le choix de financement se fait de plusieurs manières :

- la règle de l'endettement maximum implique que le montant des dettes financière à moyen et à long terme n'excède pas le montant des capitaux propres ;
- la règle de la capacité de remboursement exige, généralement, que le montant de l'endettement financier ne doit pas dépasser 3 ou 4 fois la capacité d'autofinancement annuelle ;
- la règle du minimum d'autofinancement indique que l'entreprise soit capable de financer une partie des investissements pour lesquels elle sollicite des crédits ;
- la règle de la maximisation de la rentabilité financière se résume par la maximisation de la richesse des actionnaires. Ceci revient à maximiser le rapport entre la rentabilité net et les capitaux propres.

2.5 Décision d'investissement

La décision d'investissement constitue la décision financière la plus importante car elle joue un rôle déterminant dans la création de valeur par l'entreprise. L'investissement est réalisé en vue d'accroître la richesse des propriétaires de l'entreprise et, par conséquent, la valeur de l'entreprise. L'accroissement de valeur signifie que la rentabilité de l'investissement est positive.

2.5.1 Les déterminants de l'investissement

On appelle les déterminants de l'investissement les raisons qui incitent le chef d'entreprise à investir. Généralement, en distingue quatre facteur agissent sur l'investissement :

La demande anticipée

Cette demande anticipée joue un rôle fondamental dans le système capitaliste où les entreprises produisent pour vendre en faisant des profits. Si le chef d'entreprise prévoit que la demande de son produit augmentera, il semble logique qu'il cherche à produire plus pour augmenter son chiffre d'affaire et ses profits.

Le coût relatif du capital et du travail

Si le coût salarial augmente plus vite que le coût du capital, les entreprise préféreront, substituer du capital à du travail, et donc automatise la production plutôt qu'embaucher.

La rentabilité

L'entreprise décide d'investir si elle prévoit un certain taux de profit sur le capital investi. Plus précisément, le rendement économique doit être nettement supérieur au coût réel des emprunts.

La situation financière

Tant que le rendement économique de l'investissement est supérieur au taux d'intérêt, l'entreprise est incitée à emprunter pour investir. Mais ce comportement a ses limites. L'augmentation des dettes peut finir par menacer la survie de l'entreprise.

2.5.2 L'investissement et la croissance

L'investissement permet l'accumulation du capital, c'est-à-dire l'accumulation de bien dont la durée de vie dépasse plusieurs périodes et qui ne sont pas entièrement détruits lors de leur utilisation. Néanmoins, les biens peuvent connaître une certaine usure : on parle alors de dépréciation du capital [5]. Si on note pour la période t, δ_t le taux de dépréciation du capital, I_t l'investissement brut et K_t le capital en début de période, on peut alors traduire le processus d'accumulation du capital par rapport à la dépréciation et l'investissement par l'équation :

$$K_{t+1} = k_t - \delta_t K_t + I_t \tag{2.6}$$

Cette relation illustre que le capital est un stock et l'investissement est un flux. Cette propriété est encore plus évidente si on considère l'investissement net $I_{Nt} = I_t - \delta_t K_t$. L'équation (2.6) devient alors :

$$K_{t+1} - K_t = I_{Nt} \tag{2.7}$$

Cette équation montre que la variation du stock de capital est égale au flux d'investissement net.

L'accumulation du capital par les entreprises est un processus leur permettant d'augmenter leurs capacités productives dan le futur. Ainsi, ce processus ne peut être analyse que en abordant la notion de facteur de production et de fonction de production.

Facteurs de production

L'analyse microéconomique suppose que l'objectif principale de producteur et de maximiser son profit, donc à la fois de mettre en oeuvre la combinaison de facteur de production efficace pour produire à moindre coût, et atteindre un niveau de production optimal.

Le plus souvent, pour analyser la production (quantité de produit) on se ramène à étude les facteurs de production : le travail (la quantité de travail est généralement notée L) ; et le capital qui comprend tous les autres inputs les machine, énergie et matière première (la quantité de capital est généralement notée K).

Ainsi, l'investissement peut se représenter comme le comportement du producteur visant à fixer le niveau de facteurs de production nécessaire pour assurer un certain niveau de production. On distingue ainsi trois types d'investissements :

- **l'investissement productif (capacité)** : il vise à garantir ou à augmenter un niveau de production de bien et service en augmentant le niveau de facteurs de production ;
- **l'investissement de remplacement** : il vise à renouveler le capital amorti ou vieillissant pour maintenir un niveau de production équivalent ;
- **l'investissement de substitution** : il vise à augmenter le niveau de production en modifiant la productivité des facteurs de production en substituant l'un par les autres.

Fonction de production

La fonction de production est une relation technique qui indique, à partir de la quantité de facteur mis en oeuvre par le producteur, la quantité de produit qu'il peut obtenir (Q). Ainsi, $Q = f(K, L)$ si on a utilisé le capital et le travail comme moyens de production. En effet, pour pouvoir produire, l'entreprise va devoir payer les facteurs de production qu'il utilise. Si le travail et le capital sont les seuls facteurs variables. En notant w le salaire versé pour chaque unité de travail utilisée et r le taux de rémunération du capital, le coût de production sera donné :

$$C(K, L) = wL + rK + f, \tag{2.8}$$

où f représente la rémunération de l'ensemble des facteurs fixe de l'entreprise. Le profit étant défini comme la différence entre le chiffre d'affaires réalisé et les coûts, il s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\Pi(K, L) = pQ(K, L) - wL - rK - f \tag{2.9}$$

où p représente le prix du bien ou du service produit.

2.5.3 Critères classiques du choix d'investissement

Les critères classiques du choix d'investissement sont des outils permettant de mesurer la pertinence d'un investissement. Nous présenterons ici les principaux critères du choix en avenir certain : la valeur actuelle nette (VAN), et le taux interne de rentabilité(TIR), et avant de faire, nous aborderons tout d'abord la notion d'actualisation et de capitalisation.

Actualisation et capitalisation

Le taux d'actualisation peut se définir comme étant le taux de rendement à exiger sur un projet d'investissement.
Les concepts d'actualisation et de capitalisation peuvent être utilisés pour comparer des sommes non disponibles au même instant et recherche l'équivalent de chacune d'elles à une date commune, par exemple la période initiale. Pour ce faire, un taux de dépréciation monétaire est utilisé (en raison de la perte de valeur de la monnaie : inflation, dépréciation du futur).
Les fondements des calculs de l'actualisation sont les mêmes que ceux de la capitalisa-

tion. Avec l'actualisation, on se déplace de l'avenir vers le présent et inversement pour la capitalisation. Au taux ρ constant, la valeur actuelle d'un montant x_t disponible à l'instant " t " années est égale à :

$$x^0 = \frac{x^t}{(1+\rho)^t}. \tag{2.10}$$

Systématiquement, la valeur future d'un montant x^0 capitalisée au taux ρ durant t années est égale à :

$$x^t = x^0(1+\rho)^t \tag{2.11}$$

Lorsque l'on décide de la capitalisation à des taux proportionnels au taux de la période de référence, la valeur acquise diffère. Cette valeur acquise est en fonction du nombre de capitalisation par période de référence. Si le nombre de capitalisation tends vers l'infini, ou encore si la durée de la période inter-capitalisation tend vers zéro, on parle de capitalisation continue.
Dans le cas de la capitalisation continue, nous avons la relation suivante :

$$x_t = x_0.e^{it}. \tag{2.12}$$

La Valeur Actuelle Nette (VAN)

Le critère de la valeur actuelle nette (VAN) est le critère de référence en matière de choix d'investissement. Elle se définit, pour un projet d'investissement dont la durée de vie est égale à T années, de la manière suivante :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+\rho)^t}, \tag{2.13}$$

où :
I_0 : montant de l'investissement initial ;
CF_t : cash-flow attendu de l'investissement pour la période t ;
ρ : taux d'actualisation qui est, généralement, estimé par les coûts de capitaux.

Ainsi, si la VAN est positive, l'investissement contribue à accroître la valeur de l'entreprise et doit être effectué. Si elle est négative, l'investissement ne doit pas être réalisé. Une VAN positive montre que l'entreprise va :

- récupérer le capital investi ;
- rémunérer les fonds immobilisés à un taux égal au taux d'actualisation ;
- dégager des surplus dont la valeur actuelle est égale à la VAN du projet.

Critère de Taux Interne de Rentabilité (TIR)

Le taux interne de rentabilité (TIR) et le taux actuariel pour lequel la VAN du projet est nulle, ansi, il ce calcule à l'aide de l'equation suivante :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+TIR)^t} = 0, \tag{2.14}$$

où :
I_0 : montant de l'investissement initial ;
CF_t : cash-flow attendu de l'investissement pour la période t.

Lorsque le TIR du projet est supérieur au taux d'actualisation de l'entreprise, l'investissement doit être réalisé, la rentabilité des fons engagés étant supérieure à leur coût d'opportunité. Ainsi, Le classement entre plusieurs projets s'effectue dans l'ordre décroissant des TIR, avec pour limite le taux d'actualisation de l'entreprise.

2.6 Gestion de la trésorerie

2.6.1 La trésorerie

La trésorerie représente l'argent disponible sur le compte bancaire, une fois vos recettes encaissées et vos dépenses payées. Elle peut être excédentaire : dans ce cas, les recettes dépassent les dépenses et le solde du compte bancaire est créditeur. Il peut alors être utile d'étudier une formule de placement dit de "trésorerie". Elle peut être déficitaire ou négative : dans ce cas, les dépenses dépassent les recettes et le solde du compte bancaire est débiteur. Il peut alors être nécessaire de mener une action afin de revenir en situation créditrice ou d'obtenir un financement à court terme de votre partenaire bancaire.

2.6.2 Gestion de trésorerie

La gestion de la trésorerie s'attache au traitement des encaissements et décaissements de liquidités.
Une bonne gestion de la trésorerie consiste à assurer la solvabilité de l'entreprise au moindre coût, cela signifie que l'entreprise doit être en mesure d'honorer ses échéances financières à tout moment. Par ailleurs, elle doit chercher à minimiser le coût de crédits de trésorerie auxquels elle peut faire appel, ou au contraire à maximiser le rendement

des placements de ses excédents de trésorerie éventuels. La gestion de la trésorerie repose par conséquent sur le couple (Risque/Rentabilité).
Pour parer au risque d'illiquidité ou d'insolvabilité, l'entreprise doit maintenir un certain niveau de trésorerie. Dans le même temps, elle doit viser à réduire l'impact négatif de cette trésorerie sur la rentabilité (coût des crédits, frais financiers, etc.) ou améliorer la rentabilité en assurant de bons placements financiers.

Généralement, l'objectifs de la trésorier est de :
- prévoir l'évolution des soldes débiteurs ou créditeurs des comptes de l'entreprise ;
- réduire au minimum les fonds immobilisé ;
- assurer le meilleur placement des excédents ;
- financer les besoins au moindre coût.

Et avant tout ça il faut mettre un budget de trésorerie qui a pour but de déterminer les besoins excédents de trésorerie en montant et en durée.

2.6.3 Trésorerie et équilibre financier de la firme

La trésorerie réalise l'équilibre financier à court terme entre le fonds de roulement *FR* et le besoin en fonds de roulement *BFR*.

Besoin en fonds de roulement *BFR*

Le besoin en fonds de roulement (*BFR*) est un élément essentiel à calculer lorsqu'on crée une entreprise ou lorsqu'on veut la développer, par exemple en lançant de nouveaux produits ou de nouvelles prestations. Ce qu'on appelle *BFR* correspond aux variations des flux de trésorerie entre des dépenses et des rentrées d'argent.

⋆ **Le besoin en fonds de roulement d'exploitation**

L'entreprise a besoin de financement qui est lié au décalage naturel qui existe entre les recettes et les dépenses de cycle d'exploitation (achat-production-vente).

Généralement, une entreprise doit disposer des capitaux nécessaires pour financer ce cycle d'exploitation : c'est ce que l'on appelle le besoin en fonds de roulement.

La différence entre les actifs d'exploitation (emplois) et les passifs d'exploitation (ressources) constitue le besoin en fonds de roulement ;

Les emplois sont constitués par l'ensemble des charges d'exploitation contractées non encore consommées ou vendues et les ventes non encore payées ;

Les ressources sont constituées par les charges contractées non encore payées et par les recettes d'exploitation sur des produits non encore livrés (dette d'exploitation).

⋆ **Le besoin en fonds de roulement hors d'exploitation**

Les décalages de trésorerie liés aux opérations hors exploitation (investissements, charges et produits exceptionnels. . .) forment ce que l'on appelle le besoin en fonds de roulement hors exploitation.

fonds de roulement *FR*

Le Fonds de roulement est défini comme l'excédent de capitaux stables, par rapport aux emplois stable, il peut être définit de deux manières :
FR liquidité = ressources à plus d'une an- emplois (besoins) à plus d'un an.
FR Fonctionnel = ressources stable - emplois stables.

Quant au *BFR*, il n'a véritablement de sens que dans une optique fonctionnelle. Il représente le besoin de financement généré par le cycle d'exploitation de l'entreprise. Il se calcule généralement ainsi :

BFR = Stocks + créances clients (argent dues à l'entreprise par ses clients) - dette d'exploitation.

Analyse des situations possibles du BFR

On distingue trois cas relatifs à la « situation » du Besoin de Fonds de Roulement :

1. **si le Besoin de Fonds de Roulement est négatif** : alors les ressources d'exploitation sont supérieures aux emplois d'exploitation ;
2. **si le Besoin de Fonds de Roulement est positif** : dans ce cas les emplois d'exploitation sont supérieures aux ressources d'exploitation, le solde est positif et il doit être alors financé ;
3. **si le Besoin de Fonds de Roulement est nul** : les ressources d'exploitation sont égales aux emplois d'exploitation ;

La gestion du besoin en fonds de roulement

Le besoin en fonds de roulement est un investissement comme un autre et de ce fait il doit être géré. Le BFR résulte d'un arbitrage entre liquidité et marge.

Au-delà des gaspillages assez simples à éliminer mais qui nécessitent de la détermination et de la continuité dans l'effort, la réduction du *BFR* ne peut se faire qu'au détriment du résultat d'exploitation ou au prix d'investissements pour modifier le modèle économique de l'entreprise.

En période de crise, l'entreprise met l'accent sur la réduction du *BFR* afin de générer des liquidités utiles pour se désendetter ou s'autofinancer, l'impact sur la marge est négligé. En période de bonne conjoncture économique, l'entreprise pense plus à la croissance des ventes et des marges qu'au *BFR*.

L'équilibre financier

L'entreprise doit maintenir un équilibre entre ses ressources financières et les emplois qu'elle en fait, ainsi qu'un équilibre interne entre les sources de financement utilisées.

En simplifiant à l'extrême, nous affirmons que l'étude de l'équilibre financier reposant sur le besoin en fonds de roulement (*BFR*) et le fonds de roulement (*FR*) et la trésorerie (T), il permet de porter un jugement sur la trésorerie de la firme, sa politique financière et par conséquent, sur les faits générateurs de risque. En d'autres termes, le fonds de roulement net doit être égal au fonds de roulement normatif pour assurer l'équilibre financier.

Ainsi, l'excédent de la trésorerie (T) se définit comme la différence entre le fonds de roulement et le besoin en fonds de roulement :

$$T = FR - BFR.$$

Si l'entreprise dispose de plusieurs opportunités de financement, les choix effectués seront en fonction des coûts associés à chacun d'eux, et des risques liés à leurs modalités. Les critères étudiés seront les taux actuariels, la valeur actuelle nette des fonds propres, le taux interne de rentabilité des fonds propres et les flux monétaires annuels équivalents.

Le budget de trésorerie

Le budget de trésorerie donne une prévision des excédent et des déficits de trésorerie, en montant et en durée, c'est le principal instrument de cette prévisions financières à court terme, il permet d'établir pour des périodes plus ou moins longues (année, mois, semaine, jour) les prévisions des flux financiers et d'envisager les ajustements nécessaires pour combler les insuffisances ou pour placer les excédents de trésorerie.

Le budget de trésorerie s'appuie sur des données établies avec rigueur. Une distinction est établie entre les recettes et les dépenses liées au processus d'exploitation (vente de marchandises, de produits finis, achat de matières premières, règlement des salaires, etc.) et au processus d'investissement (cession d'immobilisations), ou à la politique de financement de l'entreprise (remboursements d'emprunt,... etc.).

Les budgets flexibles "la prise en compte de l'incertitude"

Le budget de trésorerie constitue l'aboutissement d'autres budgets (ventes, achats, autres charges,. . . etc.). Des facteurs aussi bien endogènes (variation de la productivité, etc.) ou exogènes (évolution de la conjoncture économique ou sectorielle, etc.) peuvent venir perturber les prévisions établies. Si l'entreprise peut agir sur les premiers facteurs, par contre, les seconds échappent à son contrôle.

C'est ainsi qu'il est possible d'adopter la méthode des budgets flexibles. Elle consiste à établir des budgets variables en fonction de plusieurs hypothèses, en général au nombre de trois : optimiste (niveau fort), moyenne (niveau vraisemblable) ou pessimiste (niveau bas).

Le budget de trésorerie par la méthode des emplois-ressources

La méthode consiste à établir des situations mensuelles prévisionnelles, à déterminer le fonds de roulement *FR*, le besoin de fonds de roulement *BFR*, et la trésorerie nette prévisionnelle correspondante. Lorsqu'il existe des éléments hors exploitation, on peut déterminer séparément le *FR*, le *BFR* et la trésorerie d'exploitation et hors exploitation.

La sommation de la trésorerie d'exploitation et hors exploitation donnera la trésorerie nette.

2.6.4 La prévision des flux de trésorerie

Les horizons de prévision

Les entreprises prévoient les flux en grandes masses pour des périodes lointaines et affinent leurs anticipations lorsque les échéances se rapprochent.

Les prévisions sont affinées sur des périodes allant de 1 à 6 mois, donnant lieu à des budgets de trésorerie glissants le plus souvent mensuels. Ces documents permettent d'actualiser les budgets annuels en s'appuyant sur les encaissements et les décaissements prévus, et non plus sur le compte de résultat prévisionnel.

Une fois les prévisions établies, on pourra apprécier la trésorerie prévisionnelle qui sera soit négative (décaissements > encaissements), soit positive (encaissement > décaissements). L'entreprise devra alors prévoir les ajustements nécessaires.

Dans les deux cas, il s'agit d'améliorer indirectement la rentabilité de l'entreprise, soit en minimisant le coût des crédits de trésorerie à solliciter, soit en optimisant l'utilisation des excédents de la trésorerie.

2.6.5 Le placement des excédents de trésorerie

Excédent de trésorerie

L'excédent de trésorerie est le solde ou la différence entre les recettes et les dépenses d'une entreprise. Il est généralement considéré comme l'un des indicateurs pertinents qui servent à suivre et à contrôler la capacité de l'entreprise à procréer des liquidités grâce à son activité d'exploitation au cours d'une période. L'évolution de cet indicateur doit être positif parce qu'il représente une assurance pour l'entreprise et une prévention des risques de défaillances ou un outil d'autofinancement.

Investissement (placement) des excédents de trésorerie

Outre les placements sous forme d'action d'obligation, l'entreprise peut faire d'autre forme de placements financiers tels que :

- les dépôts à terme (DAT) sont des dépôt bancaire qui ne peuvent être retirés qu'à l'échéance d'un certain terme ou d'une certaine période et qui consistent à bloquer pendant une durée des fonds sur un compte spécial rémunéré (la durée et le taux sont connus d'avance),
- les titres de créances négociables qui sont des titres financiers émis au gré de l'émetteur, négociables sur un marché réglementé ou de gré à gré, avec les billets de trésorerie et les bons du trésor notamment,
- les placements dans les $SIVAC$ sont des véhicules de but spéciale qui achètent des obligations à long terme, plaçant ceci avec par publier la dette courte ou à moyen terme et qui consistent à prendre une participation dans une société de portefeuille,
- et les placements dans des fonds communs de placement qui sont des organismes de détention collective d'actifs financiers .

Gestion des excédents de trésorerie

Afin de gérer au mieux vos excédents de trésorerie, il faut commencer par établir un budget de trésorerie, qui vous permettra de mesurer à court ou au moyen terme la trésorerie minimale dont vous aurez besoin dans le cadre de votre activité. Ensuite, il convient d'établir l'inventaire des solutions à votre disposition pour placer votre trésorerie, de comparer leur rémunération et leur contrainte (durée du placement minimale, disponibilité des fonds placés. . .). Une fois que vous avez une idée précise des options à prendre, validez vos choix avec votre expert-comptable.

Conclusion

Le domaine de la finance se reporte aux questions de choix d'investissement, de financement et de l'équilibre financier. La fonction financière et le circuit financier que on a discutées ont permet de mettre point sur les flux de trésorerie associés aux différentes décisions financières.

L'étude des décisions d'investissement nous a permet de comprendre que l'investissement conditionne la dynamique d'accumulation du capital, et donc la croissance à long terme. Les critères de choix d'investissement (VAN) qui mesure la valeur créée par l'investissement nous a amené à mettre en évidence que le taux d'actualisation correspond au coût moyen pondéré du capital CMP est inférieure au taux de rentabilité interne d'un projet d'investissement.

Cependant, toutes décision financement ou d'investissement doit prendre en compte la contrainte de l'équilibre financier qui est liée étroitement à la gestion de liquidité. Une gestion efficace de la trésorerie consiste au : premier lieu, à déterminer le niveau optimal de réserve de liquidité ; en second lieu, à maximiser autant que possible le rendement des surplus de liquidité.

Chapitre 3

Modèles de contrôle optimale en finance d'entreprise

Introduction

Les méthodes de contrôle optimal ont des applications importantes dans la finance. Au cours du dernier demi-siècle, de nombreux problèmes d'optimisation ont été soulevées dans des domaines tels que la gestion financière, de l'ingénierie, de l'informatique, de la bilogie, l'industrie et l'économie.

Les modèles présentés dans ce chapitre analyse les relations dynamiques entre l'investissement des entreprises, les politiques financières et les dividendes. Dans un premier lieu, nous discutons un modèle de financement optimal qui cherche le décision de financer les investissements par les bénéfices non répartis et des fonds propres externes, afin de maximiser la valeur des dividendes versée aux actionnaires Dans un second lieu, nous discutons un modèle dynamique d'entreprise qui englobe les décisions financiers de l'entreprise, afin de maximiser sa valeur.

Finalement nous discutons le modèle de gestion de la trésorerie qui s'intéresse à la gestion optimale des réserves de liquidité. Le modèle de gestion de trésorerie qu'on va étudier est celui développé dans [2], ce modèle propose une extension de Sethi, en supposant que les découverts bancaires en une vente à découvert d'action sont autorisées mais pour des durées limitées, et nous résolvons cette modèle d'une manière générale.

3.1 Modèle de financement optimal

Dans la présente section, nous discutons un modèle d'entreprise qui doit financer ses investissements par une combinaison optimale des dividendes (bénéfices) non répartis et fonds propres externes. Ce modèle a été discuté par Krouse et lee (1973), avec des modifications et des extensions par Sethi (1978). Pour des raisons de simplicité et de facilité, ce modèle ne prend pas en considération la dette en tant que source de financement, mais il permet comme moyen de financement des proportions des bénéfices non répartis et des fonds propres externes.

3.2 Modèle de financement optimal

Dans la présente section, nous discutons un modèle d'entreprise qui doit financer ses investissements par une combinaison optimale des dividendes (bénéfices) non répartis et fonds propres externes. Ce modèle a été discuté par Krouse et lee (1973), avec des modifications et des extensions par Sethi (1978). Pour des raisons de simplicité et de facilité, ce modèle ne prend pas en considération la dette en tant que source de financement, mais il permet comme moyen de financement des proportions des bénéfices non répartis et des fonds propres externes.

3.2.1 Description du modèle

Pour construire le modèle de financement optimal nous utilisons les notations suivantes :
$x(t)$ = le rendement sur le capital investi ;
$y(t)$ = le capital investi jusqu'à l'instant t ;
r = est taux de rendement des capitaux investis ;
g = est la borne supérieure du taux de croissance des actifs de l'entreprise.
A chaque instant t, l'entreprise peut prendre deux décisions de financement, soit par des dividendes non distribués $v(t)$, soit par des fonds propres externes (augmentation de capital) $u(t)$, engendrant des frais de transaction $(1-c)$ pour chaque unité de capital.

Compte tenu de ces notations, le rendement courant est $x = ry$, la variation des revenus est donné par :

$$\dot{x} = r\dot{y} = r(cu + v)x, \qquad x(0) = x^0. \tag{3.1}$$

En outre, la borne supérieure sur le taux de croissance du capital investi implique la contrainte suivante sur les variables de contrôle :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{(cu+v)x}{(x/r)} = r(cu+v) \leq g. \tag{3.2}$$

Enfin, l'objectif de l'entreprise est de maximiser sa valeur, qui est considérée comme la valeur actuelle des flux de dividendes futurs qui s'accumulent à partir de l'instant $t = 0$. Pour obtenir cette expression, notons que :

$$\int_0^{t^*} (1-v)xe^{-it}dt,$$

est la valeur des dividendes distribués par l'entreprise jusqu'à l'instant t^*. Une partie de ces dividendes revient aux apporteurs des capitaux propres externes. Ces dividendes sont évalués par :

$$\int_0^{t^*} uxe^{-it}dt.$$

Ainsi, la valeur actualisée nette des dividendes futurs versée aux actionnaires est la différence des deux expressions précédentes, c'est-à-dire :

$$J = \int_0^{t^*} (1-v-u)x\mathrm{e}^{-it}dt. \tag{3.3}$$

Ainsi, le modèle étudie par Krouse et lee est le suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{v,u} J = \int_0^{t^*} (1-v-u)x\mathrm{e}^{-it}dt, \\ \dot{x} = r\dot{y} = r(cu+v)x, \qquad x(0) = x^0, \\ r(cu+v) \leq g, \\ u \geq 0, \qquad 0 \leq v \leq 1. \end{cases}$$

3.3 Modèle dynamique d'entreprise

Les modèles dynamiques de l'entreprise sont des thèmes de recherche en microéconomie. Plusieurs de ces modèles décrivent les différents facteur qui influent sur l'activité et la valeur d'entreprise. L'un des premiers modèles dynamiques de ce genre est le modèle classique de Jorgensen (1967). Ce modèle propose que le problème de l'entreprise est de choisir le niveau de sa production, son utilisation de main-oeuvre et le montant de ses investissements de manière à maximiser sa valeur.

Après le modèle de Jorgensen, plusieurs autres modèles ont été étudiés, tout en tenant en compte d'autres facteurs. Le modèle que nous exposons ici, cherche à déterminer les politiques optimales en matière d'investissements, d'utilisation de facteurs de production, de dépréciation et de distribution des dividendes.

3.3.1 Description du modèle

Examinons le comportement d'une entreprise sur un intervalle de temps fini $T = [0, t^*]$, où t^* est un horizon de planification. A chaque instant, l'entreprise produit une quantité de bien $Q = Q(t) = qk(t)$, où $k = k(t)$ de production est le capital de l'entreprise accumulé à instant t et q est la productivité du capital. La production est vendue sur le marché et entraîne un chiffre d'affaires notée $S = S(qk(t))$. Le capital de l'entreprise se décompose en capitaux propres $x = x(t)$ et en montant de l'emprunt (dette) $y = y(t)$:

$$k(t) = x(t) + y(t), t \in T. \tag{3.4}$$

En outre, nous supposons que les capitaux empruntés sont non négatifs et ne dépassent pas la valeur des capitaux propres, ce qui est traduit par la contrainte suivante :

$$0 \leq y(t) \leq bx(t), \qquad 0 \leq b \leq 1. \tag{3.5}$$

La variation du capital en fonction de taux de dépréciation α est donne par :

$$\dot{k} = -\alpha k + I, \tag{3.6}$$

où I est l'investissement brut.
Cette équation exprime la dynamique du taux de variation du capital de production qui est, à tout instant t, égal aux nouveaux investissements entrepris à l'instant t, moins la portion du capital de production qui se trouve dépréciée au même moment.
La variation du capital propres en fonction du revenu $S(Q)$ (vente de produit) et l'amortissement $\alpha k(t)$, l'intérêt des emprunts $ry(t)$ (r est le taux d'intérêt), paiements des salaires $wL(t)$ ($w > 0$ est le taux de salaire de la main-d'oeuvre), $L = L(t) = lk(t)$ est la quantité de travail employée, les dividendes $D(t)$ et les taxes est décrite par l'équation :

$$\dot{x} = (1 - f)(S - \alpha k - wL - ry) - D. \tag{3.7}$$

Pour $S = S(qk)$, et en utilisant l'équation (3.4) et la relation $L = lk(t)$, nous éliminons les variables y et L, ce qui nous donne :

$$\dot{x} = (1 - f)(S(qk) - (\alpha + r + wl)k) - D. \tag{3.8}$$

Et d'après (3.4) et (3.5), nous obtenons les contraintes sur les variables d'état suivants :

$$x(t) \leq k(t) \leq (1 + b)x(t), \qquad 0 < b < 1, \qquad t \in T. \tag{3.9}$$

Dans les équations différentielles (3.6) et (3.8) les variables x et k sont considérées comme des variables d'état. Les variables de contrôle sont les dividendes D et l'investissement I.

Les dividendes $D(t)$ et les investissements $I(t)$ obéissent aux contraintes directes suivantes :

$$0 \leq D(t) \leq D_{max}, \qquad I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}, \qquad t \in T. \tag{3.10}$$

Où $D_{max} > 0$, $I_{min} \geq 0$ et I_{max} sont des constantes.

Nous supposons que les commandes admissibles de l'entreprise est déterminée par la maximisation de la valeur détenue par les actionnaires (la valeur de l'entreprise) à l'instant t^*, qui est considérée ici comme la somme des dividendes distribués plus la valeur actualisée des capitaux propres à l'instant t^*. En introduisant un taux d'actualisation constant $i > 0$, la valeur finale de l'entreprise est alors donnée par :

$$V(D, I) = \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{-it} D(t)dt + \mathrm{e}^{-it} x(t^*). \tag{3.11}$$

Les commandes admissibles $D^*(t)$ et $I^*(t), t \in T$ sont dites optimales si :

$$V(D^*, I^*) = \max_{D,I} V(D, I).$$

Ainsi, le problème de construction de la politique optimale pour l'entreprise est le suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{D,I} V(D, I) = \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{-it} D(t)dt + \mathrm{e}^{-it} x(t^*) \\ \dot{k}(t) = -\alpha k(t) + I(t), \qquad k(0) = k^0, \\ \dot{x}(t) = (1 - f)(S(q^{-1}k(t)) - \alpha k, k(t) - wlq^{-1}k(t) - r(k(t) - x(t))\} - D(t), \qquad x(0) = x^0 \\ (1 + b)x(t) - k(t) \geq 0, \\ 0 \leq D(t) \leq D_{max}, \qquad I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}. \end{cases}$$

3.4 Modèle de gestion de la trésorerie

Le problème de la gestion de trésorerie, dans sa forme la plus simple, est un problème qui cherche à établir des règles de décision qui permettent de gérer la trésorerie de façon optimale tout on respectons sa demande de liquidité.
Dans ce qui suit, nous présentons un modèle déterministe de gestion de trésorerie développé par Sethi et al, avec une extension développé dans[2], cette extension suppose que la vente à découvert d'actions et les découverts bancaire sont autorisés mais pour des durées limitées.

3.4.1 Description du modèle

Prenons une entreprise qui veut gérer le processus de sa trésorerie d'une manière optimale sur un intervalle du temps $[0, t^*]$. Cette gestion consiste à répartir le mieux possible les réserves de liquidités entre argent liquide (placement à court terme) et des titres quasi-liquides (action, obligation). Si l'entreprise conserve trop de liquidités, elle perd de l'argent en termes de coût d'opportunité, dans la mesure ou elle peut gagner un rendement supérieur en achetant des actions. D'autre part, si le solde de caisse est trop petit, l'entreprise doit vendre des titres pour répondre à la demande de liquidités. Ce transfert d'argent entre le compte bancaire, l'achat et la vente d'actions encourt le payement d'une commission de courtier. D'une façon générale, pour formuler le problème, nous introduisons les notations suivantes :
$x(t)$ = le montant de la réserve de liquidités investi en compte bancaire(le solde de trésorerie) à l'instant t ;
$y(t)$ = le montant de la réserve de liquidités investi en action à l'instant t ;
$r_1(t)$ = le taux d'intérêt perçu du placement en banque ;
$r_2(t)$ = le gain finances sur le capital investie en actions ;
$d(t)$ = la demande de liquidités ;
A chaque instant t, l'entreprise reçoit une demande $d(t)$. Cette dernière peut être positive ou négative : une demande positive représente les flux d'encaissement (recette ou entrée de liquidités), et celle négative reflète les flux de décaissement (dépense ou sortie de liquidités).
Pour répondre à la demande de liquidités et pour mieux répartir les fonds, l'entreprise peut prendre la décision d'engager un montant $u = u(t)$ en vendant des actions, une valeur négative de $u(t)$ représente un achat. En outre, la variable de contrôle $u(t)$ est

bornée, c'est-à-dire :

$$M_1 \leq u(t) \leq M_2, \text{où} M_1 \geq 0, M_2 \geq 0. \tag{3.12}$$

Pour chaque unité d'action qui est achetée ou vendue u(t), l'entreprise verse une valeur positive d'une commission de courtier $\alpha \mid u(t) \mid$.
En effet, la variation des montants investis en compte bancaire et donnée par :

$$\dot{x} = r_1 x - d + u - \alpha \mid u(t) \mid, \qquad x(0) = x^0, \tag{3.13}$$

et la variation de montant de la réserve de liquidités investi en action est :

$$\dot{y} = r_2 y - u, \qquad y(0) = y^0. \tag{3.14}$$

Si nous n'imposons aucune autre contrainte sur les variables d'état $x(t)$ et $y(t)$. Cela signifie que les découverts sur les liquidités et la vente à découvert d'actions sont autorisés.
L'objectif de l'entreprise est de gérer le niveau de solde de trésorier à un coût minimal, une formulation équivalente peut être obtenue en terme de maximisation de la valeur terminale des actifs. Dans ce cas, la fonction objectif s'écrit :

$$\max J = x(t^*) + y(t^*). \tag{3.15}$$

Pour plus de commodité, le modèle optimal de gestion de la trésorerie se représente comme suit :

$$\begin{cases} \max J = x(t^*) + y(t^*) \\ \dot{x} = r_1 x - d + u - \alpha \mid u(t) \mid, \qquad x(0) = x^0, \\ \dot{y} = r_2 y - u, \qquad y(0) = y^0, \\ M_1 \leq u(t) \leq M_2, \text{où} M_1 \geq 0, M_2 \geq 0, t \in [0, t^*]. \end{cases}$$

Pour surmonter le problème de la valeur absolue, on suppose que l'entreprise peut vendre des actions à un montant $u_1 \geq 0$ et peut vendre au même temps des actions à un montant $u_2 \geq 0$ et on trouve les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2), \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - u_1 + u_2. \end{cases}$$

Dans [2] les auteurs ont proposé des extensions du modèle de Sethi et all, en supposant que les découverts bancaires sont autorisés pour une duré h_1 limité pour simplifier

cette condition, ils ont imposé la contrainte suivante :
$x_1(t_i) \geq 0, \quad \forall t_i \in [0, t^*], \quad i \in S = 1, ..., m$
avec $t_i - t_{i-1} = h_1$,
De la même manière, ils ont supposé que que la vente à découvert d'actions est autorisé pour une une durée h_2 limité, alors on retrouve la contrainte :
$x_2(t_i^{'}) \geq, \quad \forall t_i^{'} \in [0, t^*], \quad i \in S = 1, ..., m^{'}$ avec $t_i - t_{i-1} = h_2$,
En considérant ces hypothèses le modèle de la gestion optimale de la trésorerie prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \max V = x_1(t^*) + x_2(t^*), \\ \dot{x}_1 = r_1 x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2), \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - u_1 + u_2, \\ x_1(t_i) \geq 0, \qquad i \in S = 1, ..., m, \\ x_2(t_i') \geq 0, \qquad i \in S = 1, ..., m', \\ 0 \leq u_1(t) \leq M_1, \qquad 0 \leq u_2(t) \leq M_2, \qquad t \in [0, t*]. \end{cases} \tag{3.16}$$

Ce problème est connu sous le nom de problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires sur l'état.

3.4.2 Résolution du modèle de gestion de la trésorerie

Dans ce qui suit, nous appliquons le principe du maximum pour un problème de contrôle optimal avec des contraintes aux points intermédiaires pour résoudre le modèle (3.16). Ce modèle a été présenté à la conférence internationale (MFOA'2019) [4]. Ici, nous allons présenter un exemple illustratif. Nous développons, maintenant, les conditions d'optimalité pour le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état aux instants intermédiaires fixes suivants :

$$\begin{cases} \min V = -x_1(t^*) - x_2(t^*), \\ \dot{x}_1 = r_1 x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2), \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 - u_1 + u_2, \\ -x_1(t_i) \leq 0, \qquad i \in S = 1, ..., m, \\ -x_2(t_i') \leq 0, \qquad i \in S = 1, ..., m', \\ 0 \leq u_1(t) \leq M_1, \qquad 0 \leq u_2(t) \leq M_2, \qquad t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{3.17}$$

Le problème (3.17) est un problème de contrôle optimal linéaire, alors les conditions nécessaires d'optimalité sont également suffisantes.
Pour développer les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de ce problème, nous définissons tout d'abord le Hamiltonien :

$$H = \psi^{x_1}(r_1x_1 + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2) - d) + \psi^{x_2}(r_2x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t.$$

et la fonction de Lagrange aux instants intermédiaires :
$L(p) = \alpha_0(-x_1(t^*) - x_2(t^*)) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{x_1}(t_i) - \sum_{j=1}^{m'} \alpha_j^{x_2}(t'_j) + \beta_1(-x_1(0) - x_1^0) + \beta_2(-x_2(0) - x_2^0) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i(t_i - c_i) + \sum_{j=1}^{m'} \delta_j(t'_j - c'_j)$.
Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

1. la condition non-triviale :

$$(\alpha_0, \alpha^{x_1}, \alpha^{x_2}, \beta_1, \beta_2, \delta) \neq (0, 0, 0, 0, 0);$$

2. la condition de non-négativité :

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_i^{x_1} \geq 0, \alpha_j^{x_2} \geq 0, \quad i = 1...m, j = 1...m';$$

3. la condition de complémentarité :

$$\alpha_i^{x_1}(x_1(t_i)) = 0, \quad \forall i = 1...m,$$

$$\alpha_j^{x_2}(x_2(t_i)) = 0, \quad \forall j = 1...m';$$

4. les équations conjuguées :

$$\begin{array}{lllll} \dot{\psi}^{x_1} & = & -H^0_{x_1} & = & -r_1(t)\psi^{x_1}, \\ \dot{\psi}^{x_2} & = & -H^0_{x_2} & = & -r_2(t)\psi^{x_2}, \\ \dot{\psi}^{t} & = & -H^0_{t} & = & 0; \end{array}$$

5. les conditions de transversalité aux extrémités de l'intervalle :

$$\begin{array}{ll} \psi^{x_1}(t_0) = \beta_1, & \psi^{x_1}(t^*) = \alpha_0, \\ \psi^{x_2}(t_0) = \beta_2, & \psi^{x_2}(t^*) = \alpha_0, \\ \psi^{t}(t_0) = \delta_0, & \psi^{t}(t^*) = -\delta_m - \delta_{m'}; \end{array}$$

6. les conditions de discontinuité pour ψ^{x_1}, ψ^{x_2} et ψ^t aux points intermédiaires :

$$\begin{aligned}
&\Delta\psi^{x_1}(t_i) = -\alpha_i^{x_1}, \quad && i = 1...m,\\
&\Delta\psi^{x_2}(t'_j) = -\alpha_j^{x_2}, \quad && j = 1...m',\\
&\Delta\psi^{t}(t_i) = \delta_i, && i = 1...m,\\
&\Delta\psi^{t}(t'_j) = \delta'_j, && j = 1...m';
\end{aligned}$$

7. pour presque tous $t \in [0, t^*]$ on a :

$$H(x_1^*(t), x_2^*(t), \psi^{x_1}(t), \psi^{x_2}(t), \psi^t(t), u^*(t), t) = 0.$$

8. La condition de maximalité pour tous $t \in [0, t^*]$:

$$\max_u(\psi^{x_1}(r_1x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2)) + \psi^{x_2}(r_2x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t) = 0$$

Nous allons, maintenant, illustrer les étapes de la résolution de ce modèle en traitant un exemple.

Exemple

$$\begin{cases}
\min V = -x_1(t^*) - x_2(t^*),\\
\dot{x}_1 = r_1x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2), \qquad x_1(0) = x_1^0,\\
\dot{x}_2 = r_2x_2 - u_1 + u_2, \qquad x_2(0) = x_2^0,\\
-x_1(t_1) \leq 0,\\
-x_2(t_1) \leq 0,\\
-x_1(t_2) \leq 0,\\
-x_2(t_2) \leq 0,\\
0 \leq u_1(t) \leq M_1, \qquad 0 \leq u_2(t) \leq M_2, \qquad t \in [0, t^*].
\end{cases}$$

D'après le théorème (1.5.1) , nous pouvons construire les grandeurs suivantes :
l' Hamiltonien du problème :

$$H = \psi^{x_1}(\dot{x}_1) + \psi^{x_2}(\dot{x}_2) + \psi^t.$$

D'o*ù* :

$$H = \psi^{x_1}(r_1x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2)) + \psi^{x_2}(r_2x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t.$$

La fonction de Lagrange aux points intermédiaires :
$L(p) = -\alpha_2^{x_1} x_1(t^*) - \alpha_2^{x_2} x_2(t^*) - \alpha_1^{x_1} x_1(t_1) - \alpha_2^{x_1} x_1(t_2) - \alpha_1^{x_2} x_2(t_1) - \alpha_2^{x_2} x_2(t_2) + \beta_1(x_1(t_0) - x_1^0) + \beta_2(x_2(t_0) - x_2^0) + \delta_0 t_0$.

(a) la condition non-triviale :

$$(\alpha_i^{x_1}; \alpha_i^{x_2}; \beta_i; \delta_j) \neq (0,0,0,0), \quad \forall i = \overline{1,2}, \quad j = \overline{0,2}.$$

(b) la condition de non-négativité :

$$\alpha_i^{x_1} \geq 0, \alpha_i^{x_2} \geq 0, i = \overline{1,2}.$$

(c) les conditions de complémentarité :

$$\alpha_1^{x_1} x_1(t_1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{x_1} > 0 \ \ et \ \ x_1(t_1) = 0, \\ \alpha_1^{x_1} = 0 \ \ et \ \ x_1(t_1) > 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\alpha_1^{x_2} x_2(t_1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{x_2} > 0 \ \ et \ \ x_2(t_1) = 0, \\ \alpha_1^{x_2} = 0 \ \ et \ \ x_2(t_1) > 0, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\alpha_2^{x_1} x_1(t_2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2^{x_1} > 0 \ \ et \ \ x_1(t_2) = 0, \\ \alpha_2^{x_1} = 0 \ \ et \ \ x_1(t_2) > 0, \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\alpha_2^{x_2} x_2(t_2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2^{x_2} > 0 \ \ et \ \ x_2(t_2) = 0, \\ \alpha_2^{x_2} = 0 \ \ et \ \ x_2(t_2) > 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

(d) les équations conjuguées :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^{x_1} &= -H_{x_1}^0 &= -r_1 \psi^{x_1}, \\ \dot{\psi}^{x_2} &= -H_{x_2}^0 &= -r_2 \psi^{x_2}, \\ \dot{\psi}^{t} &= -H_{t}^0 &= 0; \end{aligned}$$

(e) les conditions de transversalité aux extrémités de l'intervalle :

$$\begin{aligned} &\psi^{x_1}(t_0) = L_{x_1(t_0)}(p_0) = \beta_1, && \psi^{x_1}(t^*) = -L_{x_1(t^*)}(p_0) = \alpha_2^{x_1}, \\ &\psi^{x_2}(t_0) = L_{x_2(t_0)}(p_0) = \beta_2, && \psi^{x_2}(t^*) = -L_{x_2(t^*)}(p_0) = \alpha_2^{x_2}, \\ &\psi^{t}(t_0) = L_{t_0}(p_0) = \delta_0, && \psi^{t}(t^*) = L_{t^*}(p_0) = -\delta_2, \end{aligned}$$

(f) les conditions de discontinuité à instant t_1 :

$$\begin{aligned} \Delta\psi^{x_1}(t_1) = \quad & L_{x_1(t_1)}(p_0) = & -\alpha_1^{x_1}, \\ \Delta\psi^{x_2}(t_1) = \quad & L_{x_2(t_1)}(p_0) = & -\alpha_1^{x_2}, \\ \Delta\psi^{t}(t_1) = \quad & L_{t_1}(p_0) = & \delta_1; \end{aligned}$$

(g) pour presque tous $t \in [0, t^*]$ on a :

$$H = \psi^{x_1}(r_1x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2)) + \psi^{x_2}(r_2x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t = 0;$$

(h) la condition de maximalité pour tous $t \in [0, t^*]$:

$$\max H = \max \left[\psi^{x_1}(r_1x_1 - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2)) + \psi^{x_2}(r_2x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t\right] = 0$$

avec $u_1 \in [0, M_1]\,, u_2 \in [0; M_2]\,.$

Cette condition nous donne :

$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0, \\ \text{arbitraire} & \text{si} \quad (1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0, \\ M_1 & \text{si} \quad (1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0, \\ \text{arbitraire} & \text{si} \quad (1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0, \\ M_2 & \text{si} \quad (1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0. \end{cases}$$

Les équations conjugués et les conditions de transversalité nous donnent :

$$\begin{aligned} &\psi^{x_1}(t_0) = \beta_1, && \dot{\psi}^{x_1} = -r_1\psi^{x_1} \quad \text{et} && \psi_{x_1}(t^*) = \alpha_2^{x_1} \\ &\psi^{x_2}(t_0) = \beta_2, && \dot{\psi}^{x_2} = -r_2\psi^{x_2} \quad \text{et} && \psi_{x_2}(t^*) = \alpha_2^{x_2} \end{aligned}$$

par intégration on obtient :

$$\psi^{x_1}(t) = \begin{cases} \beta_1 e^{-r_1(t-t_0)} & \text{si} \quad t \in [t_0, t_1[, \\ \alpha_2^{x_1} e^{-r_1(t-t_2)} & \text{si} \quad t \in]t_1, t^*], \end{cases}$$

$$\psi^{x_2}(t) = \begin{cases} \beta_2 e^{-r_2(t-t_0)} & \text{si} \quad t \in [t_0, t_1[, \\ \alpha_2^{x_2} e^{-r_2(t-t_2)} & \text{si} \quad t \in]t_1, t^*]. \end{cases}$$

D'après les conditions de discontinuité, on trouve :

$$\beta_1 = \alpha_2^{x_1} e^{-r_1(t_0-t_2)} + \alpha_1^{x_1} e^{-r_1(t_0-t_1)}.$$

$$\beta_2 = \alpha_2^{x_2} e^{-r_2(t_0-t_2)} + \alpha_1^{x_2} e^{-r_2(t_0-t_1)}.$$

en effet, on aura les fonctions suivantes :

$$\psi^{x_1}(t) = \begin{cases} (\alpha_2^{x_1} e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1}) e^{-r_1 t} & \text{si} \quad t \in [t_0; t_1[, \\ \alpha_2^{x_1} e^{-r_1(t-t_2)} & \text{si} \quad t \in]t_1; t^*], \end{cases}$$

$$\psi^{x_2}(t) = \begin{cases} (\alpha_2^{x_2} e^{r_2 t_2} + \alpha_1^{x_2} e^{r_2 t_1}) e^{-r_2 t} & \text{si} \quad t \in [t_0; t_1[, \\ \alpha_2^{x_2} e^{-r_2(t-t_2)} & \text{si} \quad t \in]t_1; t^*]. \end{cases}$$

Par conséquent nous trouvons :

$$\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = \begin{cases} (\alpha_2^{x_1} e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1}) e^{-r_1 t} - (\alpha_2^{x_2} e^{r_2 t_2} + \alpha_1^{x_2} e^{r_2 t_1}) e^{-r_2 t} & \text{si} \quad t \in [t_0; t_1[, \\ \alpha_2^{x_1} e^{-r_1(t-t_2)} - \alpha_2^{x_2} e^{-r_2(t-t_2)} & \text{si} \quad t \in]t_1; t^*]. \end{cases}$$

On utilise la formule de Cauchy suivante :

$$x(t) = F(t)(x^0 + \int_0^t F^{-1}(s)(Bu(s) + r(s))ds) \in [t_0, t^*],$$

Telque :

$F(t) = e^{At}$

$F(-s) = e^{-As}$

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -1-\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, r(s) = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \end{pmatrix}, u(s) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} [(1-\alpha)u_1 + (-1-\alpha)u_2 - d]\, e^{-r_1 s} \\ [-u_1 + u_2]\, e^{-r_2 s} \end{pmatrix} ds \right] \tag{3.22}$$

D'après les relations (3.18), (3.19) ,(3.20) et (3.21), nous pouvons avoir $(2^2)^2 = 16$ classes de solution possibles.

1. Pour $(\alpha_1^{x_1} > 0,\ \ \alpha_1^{x_2} > 0,\ \ \alpha_2^{x_1} = \alpha_2^{x_2} = 0)$:
   Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$:
   $(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1-\alpha)\alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1} e^{-r_1 t} - \alpha_1^{x_2} e^{r_2 t_1} e^{-r_2 t} = (1-\alpha)\alpha_1^{x_1} e^{-r_1(t-t_1)} - \alpha_1^{x_2} e^{-r_2(t-t_1)}$.
   La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

   $$t_1^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}} \right] + t_1.$$

   $(1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1} e^{-r_1 t} - \alpha_1^{x_2} e^{r_2 t_1} e^{-r_2 t} = (1+\alpha)\alpha_1^{x_1 - r_1(t-t_1)} - \alpha_1^{x_2} e^{-r_2(t-t_1)}$.
   La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

   $$t_2^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}} \right] + t_1.$$

   Par conséquent, la commande qui maximise l'Hamiltonien a deux points de commutation. Donc nous avons les quatre cas suivants :

   - Si $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_0, t_1^*]$; $\ (1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_1^*, t_1[$
     et
     $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_0, t_2^*]$; $\ (1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_2^*, t_1[$ on a :

     $$(u_1, u_2) = \begin{cases} (M_1, 0) & \text{sur} \quad [t_0, t_2^*], \\ (M_1, M_2) & \text{sur} \quad [t_2^*, t_1^*], \\ (0, M_2) & \text{sur} \quad [t_1^*, t_1[, \end{cases} \tag{3.23}$$

   - Si $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_0, t_1^*]$; $\ (1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_1^*, t_1[$
     et
     $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_0, t_2^*]$; $\ (1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_2^*, t_1[$ on a :

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (M_1, M_2) & \text{sur} \quad [t_0, t_2^*], \\ (M_1, 0) & \text{sur} \quad [t_2^*, t_1^*], \\ (0, 0) & \text{sur} \quad [t_1^*, t_1[, \end{cases} \tag{3.24}$$

- Si $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_0, t_1^*]$; $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_1^*, t_1[$
  et
  $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_0, t_2^*]$; $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_2^*, t_1[$ on a :

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (0, 0) & \text{sur} \quad [t_0, t_2^*], \\ (0, M_2) & \text{sur} \quad [t_2^*, t_1^*], \\ (M_1, M_2) & \text{sur} \quad [t_1^*, t_1[, \end{cases} \tag{3.25}$$

- Si $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_0, t_1^*]$; $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_1^*, t_1[$
  et
  $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0$ sur $[t_0, t_2^*]$; $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_2^*, t_1[$ on a :

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (0, M_2) & \text{sur} \quad [t_0, t_2^*], \\ (0, M_2) & \text{sur} \quad [t_2^*, t_1^*], \\ (M_1, 0) & \text{sur} \quad [t_1^*, t_1[, \end{cases} \tag{3.26}$$

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$:

$$(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = 0.$$

Ainsi la commande qui maximise l'Hamiltonien est :

$$(u_1, u_2) = (arbitraire, arbitraire). \tag{3.27}$$

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) et (3.27) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$

$$(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)} - e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right) +$$

$$\left.\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right) + x_1^0\right] = 0,$$

$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\right.$$

$$\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)} - e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right) +$$

$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right) + x_2^0\right] = 0,$$

$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1 + (-1-\alpha)u_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) > 0,$$

$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1 + u_2)(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) > 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) et (3.27) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-1\right)+\right.$$

$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)$$

$$\left.+\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+x_1^0\right]=0.$$

$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-1\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+x_2^0\right]=0.$$

$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1+(-1-\alpha)u_2-d)(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_1})\right)>0,$$

$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1+u_2)(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_1})\right)>0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) et (3.27) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\right.$$
$$\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+x_1^0\right]=0.$$

$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+x_2^0\right]=0.$$

$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1+(-1-\alpha)u_2-d)(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_1})\right)>0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1+u_2)(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_1})\right)>0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) et (3.27) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) =^{r_{-1}t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)\right.$$
$$M_2-d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+\frac{1}{-r_1}$$
$$\left.((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+x_1^0\right]=0.$$
$$*x_2(t_1)=e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-1\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}\right]+t_1\right)}\right)+x_2^0\right]=0.$$
$$*x_1(t_2)=e^{r_1t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1+(-1-\alpha)u_2-d)(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_1})\right)>0,$$
$$*x_2(t_2)=e^{r_2t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1+u_2)(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_1})\right)>0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

De la même façon, on trouve les conditions des cas suivants pour les quelles les commandes sont admissibles :

2. Pour ($\alpha_1^{x_1}>0,\ \ \alpha_2^{x_2}>0,\ \ \alpha_2^{x_1}=\alpha_1^{x_2}=0$) :
   Sur l'intervalle $[t_0,t_1[$:
   La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0,t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_1^*=\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right].$$

   La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0,t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_2^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}} + r_2 t_2 - r_1 t_1\right].$$

Par conséquent, la commande qui maximise l'Hamiltonien a deux points de commutation. Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$:

$$(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) < 0.$$

Ainsi la commande qui maximise l'Hamiltonien est :

$$(u_1, u_2) = (0, M_2). \tag{3.28}$$

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - 1\right) + \right.$$

$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)$$

$$\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right) +$$

$$\left.\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right) + x_1^0\right] = 0.$$

$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\right.$$

$$\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - \exp^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right) +$$

$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1} - e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right) + x_2^0\right] > 0.$$

$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_1})\right] > 0,$$

$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2t_2} - e^{-r_2t_1})\right] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - 1\right)\right.$$
$$+\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)$$
$$\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)$$
$$\left.+\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - 1\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)} - e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_1})\right] > 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2t_2} - e^{-r_2t_1})\right] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\right.$$

$$\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+$$

$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+x_1^0\right]=0.$$

$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\right.$$

$$\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+$$

$$\left.\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+x_2^0\right]>0.$$

$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_1})\right]>0,$$

$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_1})\right]=0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}-1\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)$$
$$\left(e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+x_1^0\right]=0.$$

$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}-1\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2\left(\frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}}+r_2t_2-r_1t_1\right]\right)}\right)+x_2^0\right]>0.$$

$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_1})\right]>0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_1})\right]=0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

3. Pour $(\alpha_2^{x_1}>0,\ \alpha_1^{x_2}>0,\ \alpha_1^{x_1}=\alpha_2^{x_2}=0)$:
   Sur l'intervalle $[t_0,t_1[$:
   La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0,t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_1^* = \frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right]+t_1.$$

   La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0,t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_2^* = \frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right]+t_1.$$

   Par conséquent, la commande qui maximise l'Hamiltonien a deux points de commutation. Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$:

$$(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) > 0.$$

Ainsi la commande qui maximise l'Hamiltonien est :

$$(u_1, u_2) = (M_1, 0), \tag{3.29}$$

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] = 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] > 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] > 0,$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0,$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] = 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] > 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right)\right] > 0,$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_1}-e^{-r_2 t_1^*}\right)\right] = 0,$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1-d)(e^{-r_1 t_2}-e^{-r_1 t_1})+x_1^0\right] = 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2}-e^{-r_2 t_1})+x_2^0\right] > 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right)+x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1}-e^{-r_2 t_1^*}\right)+x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1-d)(e^{-r_1 t_2}-e^{-r_1 t_1})\right] = 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2}-e^{-r_2 t_1})\right] > 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

4. Pour $(\alpha_2^{x_1} > 0,\ \alpha_2^{x_2} > 0,\ \alpha_1^{x_1} = \alpha_1^{x_2} = 0)$:
Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$:
La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_1^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_2^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

Par conséquent, la commande qui maximise l'Hamiltonien a deux points de commutation. Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$:

$(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1-\alpha)\alpha_2^{x_1}e^{-r_1(t-t_2)} - \alpha_2^{x_2}e^{-r_2(t-t_2)}$.

La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_3^* qui est écrit comme suit :

$$t_3^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

$(1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\alpha_2^{x_1}e^{-r_1(t-t_2)} - \alpha_2^{x_2}e^{-r_2(t-t_2)}$.

La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_4^* qui est écrit comme suit :

$$t_4^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 sur l'intervalle $[t_0, t_1[$

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right)] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1} - e^{-r_2t_1^*}\right) + x_2^0] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_4^*} - e^{-r_2t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2t_3^*} - e^{-r_2t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2} - e^{-r_2t_3^*}\right)] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1} - e^{-r_2t_1^*}\right) + x_2^0] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2t_4^*} - e^{-r_2t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_3^*} - e^{-r_2t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 +\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\Big] > 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right) +$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1}-e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\Big] > 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_4^*}-e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*}-e^{-r_1 t_4^*}\right) +$
$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2}-e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*}-^{-r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_2}-e^{-r_2 t_3^*}\right)\Big] = 0.$

ou :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 +\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\Big] > 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right) +$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1}-e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\Big] > 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*}-e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)$
$\left(e^{-r_1 t_3^*}-e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2}-^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_4^*}-e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*}-e^{-r_2 t_4^*}\right) +$
$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2}-^{-r_2 t_3^*}\right)\Big] = 0.$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right) +$
$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\Big] > 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*}-1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*}-e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 +\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*}-e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2}-e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*}-e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*}-e^{-r_2 t_4^*}\right) +$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2}-e^{-r_2 t_3^*}\right)\Big] = 0.$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_4^*} - e^{-r_2t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_3^*} - e^{-r_2t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^* - -r_2t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2} - e^{-r_2t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_2 - -r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_4^* - e^{-r_2t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*} - e^{-r_2t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2 - -r_2t_3^*}\right)] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^* - r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*-{-r_2t_4^*}}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_2-{-r_1t_3^*}}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_4^*-e^{-r_2t_1}}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2-{-r_2t_3^*}}\right)\right] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

5. Pour $(\alpha_1^{x_1}=0,\ \ \alpha_2^{x_1}>0,\ \ \alpha_1^{x_2}>0,\ \ \alpha_2^{x_2}>0)$:
   Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$:
   La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :
   $$t_1^* = \frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2 r_2t_2}-\alpha_1^{x_2}\exp^{r_2t_1}}{(1-\alpha)\alpha_2^{x_1}e^{r_1t_2}}\right].$$
   La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :
   $$t_2^* = \frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}e^{r_2t_2}-\alpha_1^{x_2}e^{r_2t_1}}{(1+\alpha)\alpha_2^{x_1}e^{r_1t_2}}\right].$$

Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$:

La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $]t_1, t_2]$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_3^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $]t_1, t_2]$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_4^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \right.$
$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^* - -r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$

ou :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$
$\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$
$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)] = 0.$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$
$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] > 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)] = 0.$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_3^* - -r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - ^{-r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0] > 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\right]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\right.$$
$$\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1t_2 - -r_1t_3^*}\right)]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_4^* - e^{-r_2t_1}}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2 - -r_2t_3^*}\right)]=0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\right.$$
$$\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0]>0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+\right.$$
$$(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_4^*}-e^{-r_2t_1}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\right.$$
$$\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0]>0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_4^*}-e^{-r_2t_1}\right)+\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)\right]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)$$
$$\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0\Big]>0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\Big]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\Big[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\Big]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*}-{}^{-r_2t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)\Big]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)$$
$$\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0\Big]>0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\Big]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)$$
$$\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_2}-{}^{-r_1t_3^*}\right)\Big]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_4^*-e^{-r_2t_1}}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)+$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2}-{}^{-r_2t_3^*}\right)\Big]=0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

6. Pour ($\alpha_2^{x_1}=0,\ \ \alpha_1^{x_1}>0,\ \ \alpha_1^{x_2}>0,\ \ \alpha_2^{x_2}>0$) :
   Sur l'intervalle $[t_0,t_1[$:
   La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0,t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_1^* = \frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}e^{r_2t_2}-\alpha_1^{x_2}e^{r_2t_1}}{(1-\alpha)\alpha_1^{x_1}\exp^{r_1t_1}}\right].$$

   La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1}-\psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0,t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_2^* = \frac{1}{r_2-r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2r_2t_2}-\alpha_1^{x_2}e^{r_2t_1}}{(1+\alpha)\alpha_1^{x_1}e^{r_1t_1}}\right].$$

Donc on obtient les même commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$:

$$(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) < 0.$$

Ainsi la commande qui maximise l'Hamiltonien est (3.28)

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)$$
$$(e^{-r_1 t_1} - e{-r_1 t_1^*}) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(\exp^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] > 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] = 0.$$

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] > 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] = 0.$$

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\,left(^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\,(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] > 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] = 0.$$

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) et (3.28) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) =^{r_1 t_1} \left[\frac{1}{-r_1} \left((-1-\alpha)M_2 - d\right) \left({}^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1} \left((-1-\alpha)M_2 - d\right) \right.$$
$$\left({}^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1} \left((1-\alpha)M_1 - d\right) \left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*} t\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1} \left[\frac{1}{-r_2} M_2 \left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2} M_2 \left({}^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{r_2} M_1 \left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2} \left[\frac{1}{-r_1} ((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1}) \right] > 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2} \left[\frac{1}{-r_2} M_2 (e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1}) \right] = 0.$$

7. Pour $(\alpha_1^{x_2} = 0,\ \alpha_1^{x_1} > 0,\ \alpha_2^{x_1} > 0,\ \alpha_2^{x_2} > 0)$:

Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$:
La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_1^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[\frac{\alpha_2^{x_2} e^{r_2 t_2}}{(1-\alpha)(\alpha_2^{x_1} e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1})} \right].$$

La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_2^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[\frac{\alpha_2^{x_2} e^{r_2 t_2}}{(1+\alpha)(\alpha_2^{x_1} e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1})} \right].$$

Par conséquent, la commande qui maximise l'Hamiltonien a deux points de commutation. Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$
La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $]t_1, t_2]$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_3^* qui est écrit comme suit :

$$t_3^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_2^{x_1}} \right] + t_2.$$

La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $]t_1, t_2]$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_4^* qui est écrit comme suit :

$$t_4^* = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_2^{x_1}} \right] + t_2.$$

Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 sur l'intervalle $[t_0, t_1[$

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) +$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\Big] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) +$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\Big] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) +$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\Big] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) +$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) +$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\Big] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) +$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - ^{-r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 +\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) +$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] > 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)$
$\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) +$
$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)] = 0.$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) +$
$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 +\right.$
$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) +$
$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)] = 0.$

ou :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) +$
$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) +$
$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$

ou :

$$*x_1(t_1)=e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0]=0.$$
$$*x_2(t_1)=e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2^*}-1\right)+\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+x_2^0\right]>0.$$
$$*x_1(t_2)=e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)]=0.$$
$$*x_2(t_2)=e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*-r_2t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)\right]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1)=e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0]=0.$$
$$*x_2(t_1)=e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2^*}-1\right)+\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+x_2^0\right]>0.$$
$$*x_1(t_2)=e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\right.$$
$$\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_2-r_1t_3^*}\right)]=0.$$
$$*x_2(t_2)=e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_4^*-e^{-r_2t_1}}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2-r_2t_3^*}\right)]=0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0,t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1)=e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0]=0.$$
$$*x_2(t_1)=e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\right]>0.$$
$$*x_1(t_2)=e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+\right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)]=0.$$
$$*x_2(t_2)=e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_4^*}-e^{-r_2t_1}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_3^* - -r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1} d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2} M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2} M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)$$
$$\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0\Big]=0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\Big]>0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\Big]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_1}\Big[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_4^*}-e^{-r_2t_1}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)+$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)\Big]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)$$
$$\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0\Big]=0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\Big]>0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\Big]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_4^*}-e^{-r_2t_1}\right)+\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)\right]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)$$
$$\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1-d\right)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right)+x_1^0\Big]=0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2^*-1}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right)+$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right)+x_2^0\Big]>0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\Big[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right)+$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d\right)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\Big]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*}-^{-r_2t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)\right]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\right.$$
$$\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] > 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\right.$$
$$\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

8. Pour $(\alpha_2^{x_2} = 0,\ \ \alpha_1^{x_1} > 0,\ \ \alpha_2^{x_1} > 0,\ \ \alpha_1^{x_2} > 0)$:
   Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$:
   La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_1^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2}\exp^{r_2 t_1}}{(1-\alpha)(\alpha_2^{x_1}e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1}e^{r_1 t_1})}\right].$$

   La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_2^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_1^{x_2 r_2 t_1}}{(1+\alpha)(\alpha_2^{x_1}e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1}e^{r_1 t_1})}\right].$$

   Par conséquent, la commande qui maximise l'Hamiltonien a deux points de commutation. Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

   Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$:

$$(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) > 0.$$

   Ainsi la commande qui maximise l'Hamiltonien est (3.29)

   a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] = 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] > 0.$$

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] = 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] > 0.$$

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\right.$$
$$(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*} + x_2^0 = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] = 0,$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] > 0.$$

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) et (3.29) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$
$\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$
$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right] = 0,$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{+r_2}M_1(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right] > 0.$

9. Pour $(\alpha_1^{x_1} > 0, \;\; \alpha_2^{x_1} > 0, \;\; \alpha_1^{x_2} > 0, \;\; \alpha_2^{x_2} > 0)$:

Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$:
La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_1^* qui est écrit comme suit :

$$t_1^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}e^{r_2 t_2} + \alpha_1^{x_2}e^{r_2 t_1}}{(1-\alpha)(\alpha_2^{x_1}e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1}e^{r_1 t_1})}\right].$$

La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $[t_0, t_1[$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_2^* qui est écrit comme suit :

$$t_2^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}\exp^{r_2 t_2} + \alpha_1^{x_2 r_2 t_1}}{(1+\alpha)(\alpha_2^{x_1}e^{r_1 t_2} + \alpha_1^{x_1}e^{r_1 t_1})}\right].$$

Par conséquent, la commande qui maximise l'Hamiltonien a deux points de commutation. Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$

La fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $]t_1, t_2]$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_3^* qui est écrit comme suit :

$$t_3^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1-\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

La fonction $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ est monotone sur $]t_1, t_2]$, donc elle peut s'annuler en un seul point t_4^* qui est écrit comme suit :

$$t_4^* = \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left[\frac{\alpha_2^{x_2}}{(1+\alpha)\alpha_2^{x_1}}\right] + t_2.$$

Donc on obtient les mêmes commandes du cas 8 sur l'intervalle $[t_0, t_1[$

a. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.23) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_4^*}-e^{-r_2t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_4^*}-e^{-r_2t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_3^*}-e^{-r_2t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_1^*}-e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_1}-e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2^*}-1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1^*}-e^{-r_2t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1}-e^{-r_2t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_4^*}-e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_3^*}-e^{-r_1t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_2}-e^{-r_1t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*-r_2t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2}-e^{-r_2t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\right.$$
$$\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

b. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.24) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + \right.$$
$$(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*}-^{-r_2t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2} - e^{-r_2t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_2}-^{-r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_4^*-e^{-r_2t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_3^*} - e^{-r_2t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_2}-^{-r_2t_3^*}\right)] = 0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

c. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.25) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_1^*} - e^{-r_1t_2^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_1} - e^{-r_1t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_1^*} - e^{-r_2t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_1} - e^{-r_2t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1t_4^*} - e^{-r_1t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$(-1-\alpha)M_2 - d)\left(e^{-r_1t_3^*} - e^{-r_1t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1t_2} - e^{-r_1t_3^*}\right)] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2t_4^*} - e^{-r_2t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2t_3^*} - e^{-r_2t_4^*}\right) + \right.$$
$$\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2t_2} - e^{-r_2t_3^*}\right)] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right)+x_1^0\right]=0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_1}-e^{-r_2 t_1^*}\right)+x_2^0\right]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_4^*}-e^{-r_1 t_1}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1 t_3^*}-e^{-r_1 t_4^*}\right)+\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2}-e^{-r_1 t_3^*}\right)\right]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*}-e^{-r_2 t_1}\right)+\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*}-e^{-r_2 t_4^*}\right)\right]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right)+x_1^0\right]=0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_1}-e^{-r_2 t_1^*}\right)+x_2^0\right]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_4^*}-e^{-r_1 t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_3^*}-e^{-r_1 t_4^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_2}-e^{-r_1 t_3^*}\right)\right]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^* - -r_2 t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_2}-e^{-r_2 t_3^*}\right)\right]=0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2^*}-1\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_1^*}-e^{-r_1 t_2^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1+(-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_1}-e^{-r_1 t_1^*}\right)+x_1^0\right]=0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*}-e^{-r_2 t_2^*}\right)+\frac{1}{-r_2}(-M_1+M_2)\left(e^{-r_2 t_1}-e^{-r_2 t_1^*}\right)+x_2^0\right]=0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\left(e^{-r_1 t_4^*}-e^{-r_1 t_1}\right)+\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2-d)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_3^*}-e^{-r_1 t_4^*}\right)+\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1-d)\left(e^{-r_1 t_2 - -r_1 t_3^*}\right)\right]=0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right)+\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*}-e^{-r_2 t_4^*}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2 - -r_2 t_3^*}\right)\right]=0.$$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

d. D'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.26) sont admissibles sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + \right.\right.$$
$$\left.(-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\Big] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_4^*} - e^{-r_2 t_1}\right) + \frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\right.$$
$$\left.\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0\right] = 0.$$
$$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0\right] = 0.$$
$$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left[\frac{1}{r_1}d\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 + (-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_3^*}\right)\right] = 0.$$
$$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - ^{-r_2 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_2}(-M_1 + M_2)\left(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_3^*}\right)\right] = 0.$$

ou :

$*x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2^*} - 1\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)$
$\left(e^{-r_1 t_1^*} - e^{-r_1 t_2^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_1} - e^{-r_1 t_1^*}\right) + x_1^0] = 0.$
$*x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_2^* - 1}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_1^*} - e^{-r_2 t_2^*}\right) +$
$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_1} - e^{-r_2 t_1^*}\right) + x_2^0] = 0.$
$*x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\Big[\frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)\left(e^{-r_1 t_4^*} - e^{-r_1 t_1}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((-1-\alpha)M_2 - d\right)$
$\left(e^{-r_1 t_3^*} - e^{-r_1 t_4^*}\right) + \frac{1}{-r_1}\left((1-\alpha)M_1 - d\right)\left(e^{-r_1 t_2 - ^{-r_1 t_3^*}}\right)] = 0.$
$*x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\Big[\frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_4^* - e^{-r_2 t_1}}\right) + \frac{1}{-r_2}M_2\left(e^{-r_2 t_3^*} - e^{-r_2 t_4^*}\right) +$
$\frac{1}{r_2}M_1\left(e^{-r_2 t_2 - ^{-r_2 t_3^*}}\right)] = 0.$

Si non les commandes ne sont pas admissibles.

10. Pour $(\alpha_1^{x_1} > 0,\ \ \alpha_1^{x_2} = 0,\ \ \alpha_2^{x_1} > 0,\ \ \alpha_2^{x_2} = 0)$:
    Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$ et dans ce cas nous avons :
    $(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1-\alpha)(\alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1} + \alpha_2^{x_1} e^{r_1 t_2})e^{-r_1 t}$ pour tous t $\in [t_0, t_1[$,
    et on'a aussi :
    $(1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)(\alpha_1^{x_1} e^{r_1 t_1} + \alpha_2^{x_1} e^{r_1 t_2})e^{-r_1 t}$ pour tous t $\in [t_0, t_1[$.
    Les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont positives sur $[t_0, t_1[$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.29) sur $[t_0, t_1[$.

    Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$ et dans ce cas nous avons :
    $(1-\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1-\alpha)\alpha_2^{x_1} e^{-r_1(t-t_2)}$ pour tous t $\in]t_1, t_2]$,
    et on'a aussi :
    $(1+\alpha)\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t) = (1+\alpha)\alpha_2^{x_1} e^{-r_1(t-t_2)}$ pour tous t $\in]t_1, t_2]$.
    Les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont positives sur $[t_0, t_1[$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.29) sur $[t_0, t_1[$.
    Alors, d'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.29) sont admissible si les conditions suivantes sont vérifiées :
    $*\ x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_1} - 1) + x_1^0\right) = 0,$
    $*\ x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left(\frac{1}{-r_2}(-M_1)(e^{-r_2 t_1} - 1) + x_2^0\right) > 0,$
    $*\ x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) = 0,$
    $*\ x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-M_1)(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) > 0.$
11. Pour $(\alpha_1^{x_1} > 0,\ \ \alpha_1^{x_2} = 0,\ \ \alpha_2^{x_1} = 0,\ \ \alpha_2^{x_2} = 0)$:

Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont positives sur $[t_0, t_1[$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.29) sur $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0$ sur $]t_1, t_2]$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.27) sur $]t_1, t_2]$.

Alors, d'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.27) et (3.29) sont admissible si les conditions suivantes sont vérifiées :

* $x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_1} - 1) + x_1^0\right) = 0,$
* $x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left(\frac{1}{-r_2}(-M_1)(e^{-r_2 t_1} - 1) + x_2^0\right) > 0,$
* $x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1 + (-1-\alpha)u_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) > 0,$
* $x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1 + u_2)(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) > 0.$

12. Pour $(\alpha_1^{x_1} = 0,\ \ \alpha_1^{x_2} = 0,\ \ \alpha_2^{x_1} > 0,\ \ \alpha_2^{x_2} = 0)$:

Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $[t_0, t_1[$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.29) sur $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0$ sur $]t_1, t_2]$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.29) sur $]t_1, t_2]$.

Alors, d'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.29) sont admissibles si les conditions suivantes sont vérifiées :

* $x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_1} - 1) + x_1^0\right) > 0,$
* $x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left(\frac{1}{-r_2}(-M_1)(e^{-r_2 t_1} - 1) + x_2^0\right) > 0,$
* $x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)M_1 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) = 0,$
* $x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-M_1)(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) > 0.$

13. Pour $(\alpha_1^{x_1} = 0,\ \ \alpha_1^{x_2} > 0,\ \ \alpha_2^{x_1} = 0,\ \ \alpha_2^{x_2} > 0)$:

Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont négatives sur $[t_0, t_1[$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.28) sur $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont négatives sur $]t_1, t_2]$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.28) sur $]t_1, t_2]$.

Alors, d'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.28) sont admissibles si les conditions suivantes sont vérifiées :

* $x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left(\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_1} - 1) + x_1^0\right) > 0,$
* $x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left(\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_1} - 1) + x_2^0\right) = 0,$
* $x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) > 0,$
* $x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) = 0.$

14. Pour $(\alpha_1^{x_1} = 0,\ \ \alpha_1^{x_2} > 0,\ \ \alpha_2^{x_1} = 0,\ \ \alpha_2^{x_2} = 0)$:

Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont négatives sur $[t_0, t_1[$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.28) sur $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0$ sur $]t_1, t_2]$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.27) sur $]t_1, t_2]$.

Alors, d'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.27) et (3.28) sont admissibles si les conditions suivantes sont vérifiées :

* $x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left(\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_1} - 1) + x_1^0\right) > 0,$
* $x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left(\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_1} - 1) + x_2^0\right) = 0,$
* $x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1 + (-1-\alpha)u_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) > 0,$
* $x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1 + u_2)(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) > 0.$

15. Pour $(\alpha_1^{x_1} = 0,\ \ \alpha_1^{x_2} = 0,\ \ \alpha_2^{x_1} = 0,\ \ \alpha_2^{x_2} > 0)$:

Sur l'intervalle $[t_0, t_1[$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont négatives sur $[t_0, t_1[$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.28) sur $[t_0, t_1[$.

Sur l'intervalle $]t_1, t_2]$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2}$ sont négatives sur $]t_1, t_2]$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.28) sur $]t_1, t_2]$.

Alors, d'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.28) sont admissibles si les conditions suivantes sont vérifiées :

* $x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left(\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_1} - 1) + x_1^0\right) > 0,$
* $x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left(\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_1} - 1) + x_2^0\right) > 0,$

$* \; x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((-1-\alpha)M_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) > 0,$

$* \; x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}M_2(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) = 0.$

16. Pour $(\alpha_1^{x_1} = 0, \;\; \alpha_1^{x_2} = 0, \;\; \alpha_2^{x_1} = 0, \;\; \alpha_2^{x_2} = 0)$:

Sur les deux intervalles $[t_0, t_1[$ et $]t_1, t_2]$ et dans ce cas nous avons :

les fonction $(1-\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0$ et $(1+\alpha)\psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0$, par conséquent, les commandes qui maximise l'Hamiltonien sont (3.27) sur $[t_0, t_1[$ et $]t_1, t_2]$.

Alors, d'après les relations (3.18),(3.19) ,(3.20) et (3.21), les commandes (3.27) sont admissibles si les conditions suivantes sont vérifiées :

$* \; x_1(t_1) = e^{r_1 t_1}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1 + (-1-\alpha)u_2 - d)(e^{-r_1 t_1} - 1) + x_1^0\right) > 0,$

$* \; x_2(t_1) = e^{r_2 t_1}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1 + u_2)(e^{-r_2 t_1} - 1) + x_2^0\right) > 0,$

$* \; x_1(t_2) = e^{r_1 t_2}\left(\frac{1}{-r_1}((1-\alpha)u_1 + (-1-\alpha)u_2 - d)(e^{-r_1 t_2} - e^{-r_1 t_1})\right) > 0,$

$* \; x_2(t_2) = e^{r_2 t_2}\left(\frac{1}{-r_2}(-u_1 + u_2)(e^{-r_2 t_2} - e^{-r_2 t_1})\right) > 0.$

Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présentés des modèles dynamique de contrôle optimale de différentes questions financières au niveau d'une entreprise. Premièrement, nous avons présentés un modèle dynamique de financement optimal qui cherche à maximiser la valeur de l'entreprise. Par la suite, avons présentés un modèle dynamique d'entreprise qui cherche à maximiser la valeur de les actionnaires et nous avons trouvé une relation entre les paramètres et les conditions d'admissibiltés.

Conclusion générale

L'objectif principal de ce mémoire est de faire une synthèse des travaux sur les modèle des contrôles en finance d'entreprise, et ensuite d'applique le principe du maximum de Pontriaguine pour résoudre l'un de ces modèles.

Pour cela, dans le premier chapitre nous avons présentés les concepts de la théorie du contrôle optimale qui permet de déterminer la commande qui minimise (ou maximise) un critère de performance, ainsi que les conditions d'optimalité pour différents problèmes.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté l'essentiel de la gestion financière de l'entreprise, qui repose sur l'étude des stratégies d'investissement, des politiques de financement et de la gestion de trésorerie.

Dans le dernière chapitre, nous avons présentés en premier temps, le modèle de financement optimal, nous avons exposés. En deuxième lieu, le modèle de dynamique d'entreprise qui cherche les décisions d'investissement de financement, afin de maximiser la valeur de l'entreprise. Finalement nous avons discuté le modèle de gestion optimale de trésorerie qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat des actions, afin de maximiser la valeur finale de ces excédents, cette modèle est développé par Sethi et al, avec une extension développé dans [2], cette extension suppose que la vente à découvert d'actions et les découverts bancaire sont autorisés mais pour des durées limitées, puis, nous avons traité une solution d'une manière générale en appliquant le principe du maximum.

Bibliographie

[1] M. Azi, *Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière* , Mémoire de magister, Université A. Mira de Béjaia, 2010.

[2] M. Azi and M. O. Bibi, *Optimal control of a dynamical system with intermediate phase constraints and applications in cash management,numerical algebra, control and optimization*, doi : 10.3934/naco.2021005.

[3] M. Azi and M. O. Bibi,*Optimal control of linear dynamical system with intermediate phase constraints, In proc. of the 11th conference on the optimization and information systems (COSI 2014)*, Bejaia, 347 – 356, 2014.

[4] M. Azi and M. O. Bibi,*Optimal cash management with intermediate phase constraints, In proc. of the international conference on financial mathematics tools and applications (MFOA 2019)*, Bejaia, October 28-29, 14-23, 2019.

[5] A. Benabdallah, F. A. Khodja, *Une introduction à la théorie du contrôle*, 2005.

[6] A. V. Dmitruk, A. M. Kaganovich, *Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraintes*, Computational Mathematics and Modeling, Vol. 22, No. 2, April, 2011.

[7] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle.* Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 5, no. 4, 437-451, 1999.

[8] D. Hiber, *Contrôlabilité exacte d'un fluide visqueux imcompressible dans un cylindre infini - cas densité homogène et cas densité non - homogène* , Thèse de Doctorat d'etat, Université D'Oran, 2010/2011.

[9] J. Legrand, *Introduction à la théorie du contrôle : Étude du pendule* , Rapport De stage, Magister De Mathématique De Rennes, 2017.

[10] C. Lobry, T. Sari, *Introduction à la théorie du contrôle*, 2004

[11] K. Louage, *Résolution des problèmes paramétrés de contrôle optimal*, Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2012.

[12] N. Moussouni, *Controle optimal : Optimisation d'une production céréalière* , thèse en cotutelle internationale, Université de Tizi-Ouzou, 2012.

[13] D. Ouidja, *Principe du maximum et méthode de Tir*, Mémoire de Magister, Tizi-Ouzou, 2011.

[14] P. Pedregal, *Introduction to optimization*, Springer-New York, 1963.

[15] L. S. Pontriagin, *Mathematical theory of optimal processus* , Interscience, New York, 1962.

[16] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et application, Vuibert*, collection Mathématiques concrêtes, Paris, 2005.

[17] E. Trélat, *Contrôle optimal Vuibert* , Master de Mathématiques, Université d'Orléans, 2008.

[18] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et application* , Paris, 2016.

Résumé

L'objectif de ce travail est de faire une synthèse des travaux sur le modèle de contrôle en finance d'entreprise. Premièrement, nous avons donné des notions générales sur la théorie de contrôle optimale aussi nous avons mentionné le principe du maximum de Pontriaguine. Deuxièment, nous avons présentés l'essentiel de la gestion financière de l'entreprise. Finalement nous avons présenté quelques modèles des contrôles optimales en finance d'entreprise, et aussi nous avons étudié une extension développés dans [2], dans cette extension on a supposé que la vente à découvert d'actions et les découverts bancaires sont autorisés mais pour des durées limite, la solution générale dépend d'une manière direct par les paramètres du modèle.

Mots clés : Contrôle optimale, contrainte intermédiaire, principe du maximum, finance d'entreprise, gestion optimale de trésorerie, vente à découvert, découverts bancaires.

Abstract

The objective of this work is to synthesize the work on the control model in company finance. Firstly, we have given general notions on the theory of optimal control also we have mentioned the principle of the maximum of Pontriaguine. Second, we presented the essentials of the financial management of the company. Finally we presented some models of the optimal controls in company finance, and also we studied an extension developed in [2], in this extension it was assumed that short selling of shares and bank overdrafts are allowed but for limit durations, the general solution depends in a direct way by the parameters of the model.

Keywords: Optimal control, intermediate constraint, maximum principle, company finance, optimal cash management, short selling, bank overdrafts.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تجميع العمل على نموذج التحكم في تمويل الشركات . أولاً، لقد قدمنا مفاهيم عامة حول نظرية التحكم الأمثل كما ذكرنا مبدأ الحد ،الأقصى لـ بونترياغين. ثانياً، قدمنا أساسيات الإدارة المالية للشركة. أخيرًا قدمنا بعض نماذج الضوابط المثلى في تمويل الشركات، ودرسنا أيضًا امتدادًا تم تطويره في [2]، في هذا الامتداد، افترضنا أن البيع على المكشوف للأسهم والسحب على المكشوف مسموح به ولكن لفترات محددة، يعتمد الحل العام بطريقة مباشرة من خلال معلمات النموذج.

الكلمات المفتاحية: التحكم الأمثل، القيد الوسيط، المبدأ الأقصى، تمويل الشركات، الإدارة المثلى للنقد، البيع على المكشوف، السحب على المكشوف من البنوك.