الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de MILA


**Centre Universitaire**
**Abd Elhafid Boussouf Mila**

**Institut des Sciences et Technologie** **Département de Mathématiques et Informatique**


## Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de

## Master en Mathématiques

Spécialité**:** Mathématiques Appliquées

# Les théorèmes du point fixe dans les espaces métriques et applications


**Préparé par :**

Chahra Zed Mazzi
Khaoula Smaili


**Soutenue devant le jury:**

| | | |
|---|---|---|
| Président : Laib hafida | M. C. B | C. U. Abd Elhafid Boussouf |
| Encadreur: Amiour moufida | M. C. B | C. U. Abd Elhafid Boussouf |
| Examinatrice: Boubellouta khadidja | M. C. B | C. U. Abd Elhafid Boussouf |

**Année Universitaire: 2020/2021**

Remerciements

Nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donné, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin de bonnes personnes et nous a confiés à de bonnes mains.

Nous tenons d'abord à exprimer nos plus vifs remerciements à Mme AMIOUR Moufida qui a supervisé avec enthousiasme ce travail dans toutes ses étapes et a collaboré de manière importante à la réalisation.

Nous adressons aussi nos remerciements aux membres du jury qui ont avoir bien voulu juger ce travail.

Nos remerciements vont aussi à toutes nos familles, nos parents, nos sœurs, nos frères et nos amis pour ses encouragements.

Nous témoignons toute notre gratitude à tous les membres du département de Mathématiques et spécialement aux enseignants qui ont contribué à notre formation et qui nous ont permise de travailler dans de bonnes conditions.

Merci infiniment à tous.

# *Dédicace*

C'est avec une pensée pleine de reconnaissance inspirée par la générosité et la gentillesse

que nous dédions ce modeste travail :

Nos chers parents.

Nos chers frères .

Nos chéres sœurs.

A tous ceux qui nous ont aidés, conseiller, et a tous ceux que nous aimons et m'aime et que nous portons dans nos cœurs.

**Chahrazed, Khaoula.**

## Résumé

Dans ce mémoire, on a étudier certaines théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder, Kannan, Chatterjea et Zamfirescu avec certaines de leurs applications. On s'intéresse donner des conditions qui assure l'existence d'un point fixe d'une fonction $f$ définie d'un ensemble $E$ dans lui même et certainement l'unicité de ce point fixe, aussi d'appliquer le principe de contraction de Banach aux quelques types d'équation intégrales et au théorème de Cauchy Lipschitz.



## Abstract

In this thesis, we have studied some fixed point theorems of Banach, Brouwer, Schauder, Kannan, Chatterjea and Zamfirescu with some of their applications. We are interested in giving conditions that ensure the existence of a fixed point of a function $f$ defined of a set $E$ in itself and certainly the uniqueness of this fixed point, also to apply Banach contraction principle to the few types of integral equations and to the Cauchy Lipschitz theorem.



## ملخص

في هذه الأطروحة، درسنا بعض نظريات النقطة الثابتة لباناخ، براور، شودار، كانان، شاتارجيا و زامفيروسكي مع بعض تطبيقاتها. نحن مهتمون بإعطاء شروط تضمن وجود نقطة ثابت لدالة $f$ معرفة على مجموعة $E$ في نفسها وأحيانا وحدانية هذه النقطة الثابتة، و أيضا بتطبيق مبدأ باناخ على بعض أنواع المعادلات التكاملية ونظرية كوشي ليبشيتز.

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Un point fixe d'une application $f$ définie d'un espace $E$ dans lui-même est un élément $x \in E$ qui vérifie $f(x) = x$.

Le théorème du point fixe est l'une des techniques mathématiques qui nous permet de résoudre des nombreux problèmes.

Généralement trouver des solution pour des équations différentielles ou intégrales revient à trouver des points fixes pour des opérateurs associés à ces dernières.

En 1992, Stephane Banach à prouvé un théorème très fort qui garantie l'existence et l'unicité d'un point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique dans lui-même, ce théorème est connu sous le nom principe de contraction de Banach et il a de nombreux applications, notamment en analyse numérique et dans le théorie des équation différentielles.

Le concept du point fixe à été développé par plusieurs mathématiciens donc nous citons Brouwer, Shauder, Kannan, Chatterjea et Zamfirescu.

Le théorème de Brouwer et un théorème qui garantie que l'existence du point fixe et il exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Ce théorème à été généraliser par Shauder en dimension infini, il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique.

Kannan à garantie l'existence et l'unicité du point fixe pour les applications non-continue, ce théorème est le plus simple et le plus connu, en 1971 Chatterjea à obtenu la variante du théorème de Kannan, et en 1972 Zamfirscu à montrer que dans un espace métrique complet s'il ya des points qui vérifient la condition de Kannan et autres vérifient la condition de Chatterjea l'application admet un point fixe.

Cette mémoire est constitué en 3 chapitres.

Le première chapitre est consacré à des notions de base en topologie que nous avons utilisé au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les théorèmes de point fixe (Banach, Brouwer, Shauder, Kannan, Chatterjea et Zamfirscu).

Le troisième chapitre est dédit aux quelques applications du théorème du point fixe aux quelques équations intégrales et au théorème de Cauchy Lipschitz.

# CHAPITRE 1

# PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions de base et certains propriétés en topologie qui seront utilisé tout au long de ce mémoire. Nous basons sur les références suivantes [4, 7, 11, 16, 18].

## 1.1 Espaces métriques

**Définition 1.1.1** *On appelle distance $d$ sur un ensemble $E$ toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

*1)* $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

*2)* $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie),*

*3)* $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

**Définition 1.1.2** *Un espace métrique est un couple $(E, d)$ si $E$ est un ensemble et $d$ est une distance sur $E$.*

**Exemple 1.1.3** 1) *L'ensemble des réel muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.*

2) *Soit* $E=\mathbb{R}^n$ *et soit* $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *et* $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ *deux éléments de E chacun des expressions suivantes définit une distance sur E.*

(*i*) $d_1(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$.

(*ii*) $d_2(x,y)=(\sum\limits_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|)^2)^{\frac{1}{2}}$.

(*iii*) $d_p(x,y)=(\sum\limits_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|)^p)^{\frac{1}{p}}$ , $(p\geq 2)$.

(*iv*) $d_\infty(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$.

3) *Soient* $a,b\in\mathbb{R}$, $E=C([a,b],\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $f,g\in E$

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$$

*est une distance sur* $E$.

4) *Soit* $E\neq\emptyset$ *un ensemble quelconque. Soit l'application définie de* $E\times E$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & si\ x\neq y\\ 0 & si\ x=y\end{cases}$$

$\delta$ *est une distance sur E (distance discrète).*

### 1.1.1 Boules, Sphères

Soit $(E,d)$ un espace métrique, soit $x_0\in E$ et soit $r>0$.

**Définition 1.1.4** *On appelle boule ouvert (resp boule fermé) de centre* $x_0$ *et de rayon* $r$ *l'ensemble*

$$B(x_0,r)=\{x\in E,\ d(x,x_0)<r\},$$

*resp*

$$B^{'}(x_0,r)=\{x\in E,\ d(x,x_0)\leq r\}.$$

*On appelle sphère de centre* $x_0$ *et de rayon* $r$ *l'ensemble*

$$S(x_0,r)=\{x\in E,\ d(x,x_0)=r\}.$$

**Exemple 1.1.5** *Soit* $\mathbb{R}$ *l'ensemble des réels muni de la distance usuelle* $d(x,y) = |x-y|,\ (x,y) \in \mathbb{R}$ *donc*

*1.* $B(x_0, r) = ]x_0 - r,\ x_0 + r[$.

*2.* $B(x_0, r) = [x_0 - r,\ x_0 + r]$.

*3.* $S(x_0, r) = \{x_0 - r,\ x_0 + r\}$.

**Définition 1.1.6** *(Espace topologique) On appelle topologie sur un ensemble* $E$ *une famille* $\tau$ *de partie de* $E(\subset \mathcal{P}(E))$ *vérifiant les propriétés suivants*

$O_1)$ $\emptyset,\ E \in \tau,$

$O_2)$ $\forall (U_i)_{i\in I} \subset \tau,\ \bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau,$

$O_3)$ $\forall (U_i)_{1\leq i\leq n} \subset \tau,\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau.$

*Les éléments de* $\tau$ *sont appelle ouverts de la topologie.*

*Le couple* $(E, \tau)$ *est appelé espace topologique.*

### 1.1.2 Topologie des espaces métriques

Soit $O \subset E$ tel que $(E, d)$ un espace métrique.

**Définition 1.1.7** *On dit que* $O$ *est un ouvert dans* $E$ *si*

$$\forall x \in O,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset O.$$

**Proposition 1.1.8** *Toute boule ouverte est un ouvert.*

**Preuve.**

Soit $B(x, r)$ est un ensemble ouvert dans $E$. Soit $y \in B(x, r)$, on a $d(x, y) < r$, et on pose

$$r' = \frac{r - d(x, y)}{2}.$$

Alors $B(y,r')$ est inclus dans $B(x,r)$, en effet pour $z \in B(y,r')$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + \frac{r - d(x,y)}{2} \leq \frac{r + d(x,y)}{2} < r.$$

**Corollaire 1.1.9** *Un ensemble ouvert $A$ dans $E$ est une union quelconque des boules ouvertes.*

**Preuve.**

$A$ ouvert dans $E$ donc $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A$ (par définition). Le réel strictement positif $r_x = \sup\{r > 0,\ B(x,r_x) \subset A\}$ est bien défini pour tout $x \in A$ et on a

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x,r_x).$$

### 1.1.3 Fermés

**Définition 1.1.10** *Un ensemble $F \subset E$ sera dit fermé dans $E$ si son complémentaire est un ouvert.*

**Proposition 1.1.11**

$F_1)$ *Toute intersection des fermés est un fermé.*

$F_2)$ *Une réunion finie des fermés est un fermé.*

$F_3)$ *$\emptyset$ et $E$ sont des fermés.*

**Définition 1.1.12** *Soit $(E,d)$ un espace métrique et $\emptyset \neq A \subset E$.*

*On appelle diamètre de $A$ la quantité suivante*

$$diam(A) = \sup\{d(x,y),\ x,y \in A\}.$$

### 1.1.4 Voisinages

Soit $(E,d)$ un espace métrique et $x \in E$.

**Définition 1.1.13** *On appelle voisinage de $x$ dans $E$, toute partie de $E$ contenant un ouvert contenant $x$. On note $V(x)$ l'ensemble de voisinage de $x$*

$$V(x) = \{V \in \mathcal{P}(E),\ \exists U \in \tau,\ x \in U \subset V\}.$$

*Dans cette définition nous réduirons une caractérisation simple et utile des ouverts d'un espace métrique $(E, d)$.*

*Une partie $A \subset E$ est un ouvert si seulement si elle est voisinage de chacun de ses points c.a.d*

$$\forall x \in A,\ \exists B(x, r) \subset A.$$

### 1.1.5 Adhérence et intérieur

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$.

**Définition 1.1.14** *Un point $x \in A$ est dite intérieur à $A$ ( dans $(E, d)$) s'il*

$$\exists r > 0,\ B(x, r) \subset A.$$

*L'ensemble de tout points intérieurs à $A$ s'appelle l'intérieur de $A$ et se note $\overset{\circ}{A}$*

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A.$$

**Proposition 1.1.15** *Soit $(E, d)$ un espace métrique*

*1) $\forall A \subset E$, $A$ ouvert $\Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = A$.*

*2) $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans $A$.*

**Définition 1.1.16** *On appelle adhérence de $A$ et on note $\bar{A}$ le sous ensemble de $E$ défini par*

$$\bar{A} = \{x \in E,\ d(x, A) = 0\}.$$

*Par définition, il est clair que $A \subset \bar{A}$.*

**Proposition 1.1.17** *On a*

1) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

2) *A fermé* $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

3) $\overline{A}$ *est un fermé et c'est le plus petit fermé qui contient* $A$.

### 1.1.6 Suites

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique $(E,d)$.

**Définition 1.1.18** *On dit que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $x \in E$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

*On note* $x_n \longrightarrow x$ *(ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$*).*

**Proposition 1.1.19** *(l'unicité de la limite dans un espace métrique) Si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans un espace métrique* $(E,d)$ *alors la limite est unique.*

**Preuve.**

Si on a $x_1, x_2$ dans $E$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon' \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon',\ d(x_n, x_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour $n \geq \sup\{N_\varepsilon,\ N_\varepsilon'\}$, on a

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_n, x_1) + d(x_n, x_2) \leq \varepsilon,$$

et donc

$$d(x_1, x_2) \leq \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

D'où $d(x_1, x_2) = 0$ ce qui donne $x_1 = x_2$.

**Proposition 1.1.20** *Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(E, d)$ alors on a*

*1) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = x$.*

*2) $A$ fermé si et seulement si $A$ contient les limites de touts ses points convergent c.a.d*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x \Rightarrow x \in A.$$

### 1.1.7 Continuité

**Définition 1.1.21** *Soit $(E, d)$, $(E^{'}, d^{'})$ deux espaces métriques et soit $a \in E$, on dit que une application $f : E \longrightarrow E^{'}$ est continue au point $a$ si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

*c'est à dire*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ d(x, a) < \delta \Rightarrow d^{'}(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

**Définition 1.1.22** *On dit que $f : E \longrightarrow E^{'}$ est continu sur $(E, d)$ si elle est continue en tout point de $E$.*

**Définition 1.1.23** *Une application $f : E \longrightarrow E^{'}$ est dite uniformément continue sur $E$ si elle vérifier*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in E,\ d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d^{'}(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.1.24** *On dit que* $f : E \longrightarrow E^{'}$ *est Lipschitzienne de rapport* $k \in \mathbb{R}_+$ *sur* $E$ *(K- Lipschitzienne) si*

$$\forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y) \leq kd(x, y).$$

**Proposition 1.1.25** *f Lipschitzienne* $\Longrightarrow$ *f uniformément continue* $\Longrightarrow$ *f continue .*

## 1.2 Espaces métriques compacts

Soit $(E, d)$ un espace métrique.

**Définition 1.2.1** *(Recouvrement) Une famille d'ensemble* $(U_i)_{i\in I}$ *est une recouvrement de* $E$ *si*

$$E = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

**Définition 1.2.2** *On dit qu'un espace métrique* $(E, d)$ *est compact si de toute recouvrement ouverts on peut extraire un recouvrement fini i.e*

$$\left(E = \bigcup_{i\in I} U_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J\ \subset I,\ J fini,\ E = \cup_{i\in J} U_i\right).$$

**Proposition 1.2.3** *Pour une partie* $C$ *d'un espace métrique* $(E, d)$*, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1) $C$ *compacte.*

2) *Toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'élément de* $C$*, on peut extraire une sous suite convergente dans* $C$*.*

**Théorème 1.2.4** *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique et* $A \in E$

1) *Si* $(A, d)$ *un compact alors* $A$ *fermé dans* $E$*.*

2) *Si* $(E, d)$ *un compact et* $A$ *fermé alors* $(A, d)$ *est un compact.*

### 1.2.1 Ensembles convexe

On dit que $K \subset E$ est un ensemble convexe si

$$\forall x, y \in K^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda) y \in K.$$

## 1.3 Espaces métriques complets

**Définition 1.3.1** *(Suite de Cauchy) On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique $(E,d)$ est de Cauchy si elle vérifier*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N_\varepsilon,\ d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

**Proposition 1.3.2** *Dans un espace métrique $(E,d)$ on a*

1) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

3) *Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente converge.*

**Preuve.**

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $x$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a

$$\forall p, q \geq \mathbb{N}_\varepsilon,\ d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite de Cauchy.

2) Choisissons $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0,\ d(x_p, x_q) \leq 1.$$

En particulier

$$\forall n \geq n_0,\ d(x_p, x_{n_0}) \leq 1.$$

Ce qui montre que la suite est bornée.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et soit $(x_{\varepsilon(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite extraire qui converge vers $x$.

Soit $\varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon,\ d(x_{\varepsilon(n)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

comme $(x_n)_{n\in N}$ est de Cauchy il existe un rang $N_\varepsilon^{'}$ tel que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ (p \geq N_\varepsilon^{'})\ et\ (q \geq N_\varepsilon^{'}),\ d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

en particulier, si $n \geq max(N_\varepsilon, N_\varepsilon^{'})$, on en déduit que

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\varepsilon(n)}) + d(x_{\varepsilon(n)}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui preuve la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $x$.

**Définition 1.3.3** *(Espace complet) Un espace métrique $(E,d)$ est dite complet si tout suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E$ converge dans $E$.*

**Exemple 1.3.4** 1) $(\mathbb{R}, |.|)$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *sont complet.*

2) $(\mathbb{Q}, |.|)$ *n'est pas complet, car il existe dans $\mathbb{Q}$ une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $x_n = \frac{E(2^n\sqrt{2}-1)}{2^n}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.*

*En effet ,on a $(2^n\sqrt{2}-1) < x_n \leq \sqrt{2}$ d'où $x_n \longrightarrow \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$.*

*Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Par ailleurs, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'unicité de la limite implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.*

**Proposition 1.3.5** *On a*

1) *Dans un espace métrique $(E,d)$, toute partie complète est fermée.*

2) *Dans un espace métrique* $(E, d)$, *les parties fermées sont des parties complètes.*

**Preuve.**

1) Soit $F$ une partie complète d'un espace métrique $(E, d)$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $F$ converge dans $E$. Donc elle est de Cauchy dans $(E, d)$ et donc de Cauchy dans $(F, d_F)$.

Comme $F$ est complète donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $F$. Donc $F$ est fermée.

2) $\Longrightarrow$) Supposons que $F$ est fermée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(F, d_F)$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E, d)$. Comme $(E, d)$ est complet alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $E$. Comme $F$ est fermée cette limite appartient à $F$.

$\Longleftarrow$) Dans un espace métrique $(E, d)$ toute partie complète est fermée.

## 1.4 Espaces vectoriels normés

### 1.4.1 Normes

**Définition 1.4.1** *Soit* $E$ *un espace vectoriel sur un coup* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Une norme sur* $E$ *est une application* $N : E \longrightarrow R$ *vérifier les propriétés suivante*

1) $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$

3) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

*Pour* $x \in E$, $N(x)$ *est Appelé norme de* $x$. $N(x)$ *est noté* $||x||$.

**Exemple 1.4.2** 1) *La valeur absolue est une norme sur* $\mathbb{R}$.

2) *Les applications* $||.||_1$, $||.||_2$ ,..., $||.||_\infty$ *sont des normes sur* $E = \mathbb{R}^n$.

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ ||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}},\ ||x||_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \text{ ou } x = (x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n).$$

**Définition 1.4.3** *On appelle espace vectoriel normé (e.v.n) le couple* $(E, ||.||)$ *ou* $E$ *est un espace vectoriel et* $||.||$ *est un norme sur* $E$.

**Proposition 1.4.4** 1) *Tout espace normé est un espace métrique.*

2) *Tout espace vectoriel normé de dimension fini est complet.*

**Définition 1.4.5** *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

**Exemple 1.4.6** • $(\mathbb{R}, |.|)$ *est un espace de Banach.*

### 1.4.2 Point fixe et applications contractantes

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $f : E \longrightarrow E$.

**Définition 1.4.7** *(Point fixe) On appelle point fixe de f tout $x \in E$ tel que f(x)=x.*

**Définition 1.4.8** *On dit que $f : E \longrightarrow E$ est application contractante si*

$$\exists k \in [0, 1[\,,\ \forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

# CHAPITRE 2

# QUELQUES TYPES DU POINT FIXE

Dans ce chapitre nous étudions quelques théorèmes du point fixe. On commence par le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes, le théorème du point fixe de Brouwer et le théorème de Schauder suit par le théorème de Kannan et Chatterjea, et on termine par le théorème de Zamfirescu.
Nous basons sur les références suivants [1, 2, 3, 5, 6, 12, 14, 15, 17, 19, 20] .

## 2.1 Théorème du points fixe de Banach

Voir [2, 3, 20].

**Théorème 2.1.1** *(Point fixe de Banach 1922) Soit* $(E, d)$ *un espace métrique complet et* $f : E \longrightarrow E$ *une application contractante avec la constante de contraction k, alors* $f$ *a un unique point fixe* $x \in E$. *De plus nous avons la propriété suivante qui est importante*

1) *Si* $x_1 = f(x_0)$ *et pour* $n \geq 1$, $x_n = f(x_{n-1})$

*alors*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

*et*

$$d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{(1-k)} d(x_1, x_0) \ , \ n \geq 1,$$

*$x$ étant le point fixe de $f$.*

**Preuve.**

<u>*Existence :*</u> *Soit $y \in E$ un point arbitraire dans $E$. Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ donnée par*

$$\begin{cases} x_n &= f(x_{n-1}), \ n \geq 1 \\ x_0 &= y. \end{cases}$$

*On doit prouver que $(x_n)$ est une suite de Cauchy dans $E$.*

*Pour $m \leq n$*

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n).$$

*Puisque $f$ est une contraction, on a*

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(f(x_{p-1}), f(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p) \ , \ \textit{pour } p \geq 1.$$

*Par itération on a*

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m (1 + k + ... + k^{n-m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \tfrac{k^m}{(1-k)} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

*On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $E$ qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers $x$ dans $E$.*

*Par ailleurs puisque $f$ est continue, on a*

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}) = f(x).$$

*Donc $x$ est un point fixe de $f$ ( i.e f(x)=x ).*

<u>***Unicité :***</u> *Supposons qu'il existe deux points $x, y \in E$ tel que $x \neq y$, x=f(x) et y=f(y). Alors on a*

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)),$$

*donc*

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = 1.$$

*D'autre part on a*

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq k \leq 1.$$

*Ce qui contradiction d'ou l'unicité existe.*

**Exemple 2.1.2** 1) *Soit* $E = \mathbb{R}$ *et l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

*Alors f est contractante et admet un unique point fixe x=2.*

2) $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$*, ne possède pas de point fixe (on a pas* $f([0, 1]) \subset [0, 1]$*).*

**Remarque 2.1.3** 1) *Les hypothèses du théorème du Banach est réellement utilisé si nous a négligions seulement une, alors le point fixe n'existe pas.*

*a) E n'est pas stable pour f : f(x)=*$\sqrt{x^2 + 1}$ *sur* $E = [0, 1]$*. On a E est fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc complet ( car* $\mathbb{R}$ *est complet ). De plus* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ *ce qui implique que* $\sup\limits_{x \in E} |f^{'}(x)| < 1$ *donc f est contractante. Mais f n'admet pas de point fixe car* $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}] \not\subset [0, 1]$*, i.e E n'est pas stable par f.*

*b) Si f n'est pas contractant :* $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ *sur* $E = [0, +\infty[$*.*

*On a* $f : E \longrightarrow E$*, et E est un fermé de* $\mathbb{R}$ *qui est complet donc E est complet. Mais f n'admet pas de point fixe car* $\sup\limits_{x \in E} |f^{'}(x)| = 1$ *donc f n'est pas contractante.*

*c) E n'est pas complet :* $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ *sur* $E = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$*.*

*On a* $f(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ *, et* $\sup\limits_{x \in E} |f^{'}(x)| = \frac{1}{2} < 1$*, donc f est contractante. Mais n'admet pas de point fixe car E n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc E n'est pas complet.*

2) *Si f est une application Lipschitzienne ( pas nécessairement une contraction ) mais l'une de ces itérées* $f^p$ *est une contraction, alors f a encore un point fixe et un*

*seul. Ceci résulte de l'unicité.*

*En effet, soit x l'unique point fixe de $f^p$ on a*

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x),$$

*ce qui convient dire que f(x) est aussi un point fixe de $f^p$ et grâce à l'unicité f(x)=x. Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.*

3) *Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace E mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant qui est la version local du théorème de Banach.*

**Théorème 2.1.4** *Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : B(x_0, r) \longrightarrow E$ une contraction de constante k avec*

$$d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r.$$

*Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.*

**Preuve.**

On a $d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r$ donc il existe $r_0$ tel que $0 \leq r_0 \leq 1$ et

$$d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r_0.$$

On montre que $f : \overline{B(x_0, r_0)} \longrightarrow B'(x_0, r_0)$.

Soit $x \in B'(x_0, r_0)$ alors

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1 - k)r_0 \\ &\leq kr_0 + (1 - k)r_0 \\ &= r_0. \end{aligned}$$

Donc l'application $f : \overline{B(x_0, r_0)} \longrightarrow B^{'}(x_0, r_0)$ est contractante avec $B^{'}(x_0, r_0)$ est un espace complet. Par suite l'application le théorème de Banach à f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$. Comme $B^{'}(x_0, r) \subset B(x_0, r)$ et $f$ contractante sur $B(x_0, r)$ ce point fixe reste unique dans $B(x_0, r)$.

## 2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de la topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie. (Voir [14, 15] ).

**Théorème 2.2.1** *Soit* $C \subset E$ *une partie non vide compact convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : C \longrightarrow C$ *une fonction continue. Il existe alors* $x \in E$ *tel que f(x)=x.*
*Le théorème de Brouwer prends plusieurs formes selon le contexte d'utilisation, pour n=1 le théorème de Brouwer prend la forme suivante*

**Théorème 2.2.2** *Si* $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *continue, alors il existe* $x \in [a, b]$ *tel que f(x)=x.*

**Remarque 2.2.3** *Dans* $\mathbb{R}$ *les partie compactes et convexes sont les segments.*

**Preuve.**
Si $f$ est continue sur $[a, b]$ dans lui même, la fonction $g(x) = f(x) + x$ est continue de plus

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \; et \; g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un point $x_0$ tel que $g(x_0) = x_0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$ ( $x_0$ est le point fixe de $f$ ).

**Théorème 2.2.4** *Tout application f continue du disque fermé dans lui même admet au moins un point fixe.*

**Remarque 2.2.5** *Dans le plan, les parties compactes et convexes sont des disques fermés ou bien des boules fermées.*

**Preuve.**

On va donner un squelette de la démonstration. Si $C$ le domaine de définition de $f$ d'intérieure vide. C'est un segment. Sinon, $C$ est semable à une boule unité fermée. Le terme semable signifie qu'il existe un homéomorphisme $\phi$ de la boule unité vers $C$. L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire si $g = f \circ \phi$, g(x)=x. Autrement dit, on peut supposer que $C$ est la boule unité fermée.

On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associer la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact $C$, l'ensemble $[-1,1] \times [-1,1]$, sans perte de généralité.

Si l'on définit la fonction h comme suit

$$\begin{array}{rcl} h : [-1,1] \times [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \times [-1,1] \\ x & \longmapsto & h(x) = g(x) - x, \end{array}.$$

Cela revient à montrer que la fonction g atteint le vecteur nul sur $[-1,1] \times [-1,1]$.

Si $f_k$, pour $k$ =1, 2 sont les deux fonctions cordonnées de $f$, cela revient à montrer l'existence d'un point $x_0$, tel que $h_1$, $h_2$, admettent toutes deux pour zéro de la valeurs $x_0$.

La fonction $h_1$ est une fonction de $[-1,1] \times [-1,1]$ dans $[-1,1]$. Sur $\{-1\} \times [-1,1]$. L'altitude est positive. En revanche sur $\{1\} \times [-1,1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui parte d'un point $[-1,1] \times \{1\}$ pour finir sur un point de $[-1,1] \times \{-1\}$. Le même raisonnement appliquée à $h_2$ laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point de $\{-1\} \times [-1,1]$ pour terminer sur un point de $\{1\} \times [-1,1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $f \circ \phi$.

**Remarque 2.2.6** *Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le Théorème de Browder du foit que chaque point de $C$ est un point fixe de l'application identité.*
*Il est possible de généraliser en toute dimension finie. Donc dans un espace euclidien, on retrouve.*

**Théorème 2.2.7** *Toute application $f$ continue de la boule unité fermé de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet un point fixe. Ce point fixe n'est pas forcement unique.*

## 2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.
Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.
Schauder a généraliser le résultat de Brouwer en dimension infinie.

**Théorème 2.3.1** [22] *Soit $C$ un sous ensemble non vide, compact convexe dans un espace Banach $E$ et supposons $f : C \to C$ une application continue. Alors $f$ admet un point fixe.*

**Preuve.**
Soit $C$ un sous ensemble compact convexe d'un espace de Banach $E$, et soit $f : C \to C$ une application continue. Comme $C$ est un compact, $f$ est uniforme continue donc, fixons $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in C$, on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

de plus il existe $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \subset C$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{1 \leq j \leq l} B(x_j, \delta)$.
soit $L := Vect(f(x_j))_{1 \leq j \leq l}$ alors L est de dimension fini et $C^* := C \bigcap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq \ell$, on définit les fonctions continues $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & si \quad ||x - x_j|| \geq \delta \\ 1 - \frac{||x - x_j||}{\delta} & sinon \quad , \end{cases}$$

il est clair que $\psi_j$ est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle ailleurs. On a donc pour tout $x \in C$,

$$\sum_{j=1}^{l} \psi_j(x) > 0.$$

Ainsi, on peut définir sur $C$ les fonctions continues positives $\varepsilon_j$ paré

$$\varepsilon_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum\limits_{k=1}^{\ell} \psi_k}$$

pour les quelles, on a $\sum\limits_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) = 1$, pour tout $x \in C$.
Posant, pour $x \in C$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) f(x_j)$$

La fonction $g$ est continue et prend ses valeurs dans $C^*$.

Le théorème de Brouwer assure que la restriction $g/_{C^*} : C^* \to C^*$ possède un point fixe $z \in C^*$.

De plus

$$\begin{aligned} f(z) - z &= f(z) - g(z). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) f(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) f(x_j). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z)[f(z) - f(x_j)]. \end{aligned}$$

On a si $\varepsilon_j(z) \neq 0$ alors $\|z - x_j\| < \delta$, et par suite $\|f(z) - f(x_j)\| < \epsilon$. On a donc pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(z) - z\| &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z)\|f(z) - f(x_j)\|. \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier m, en peut trouver un point $y_m \in C$ tel que

$$\|f(z_m) - z_m\| < 2^{-m},$$

et puisque $C$ est compact, on peut extraire une sous suite $(z_{mk})$ de la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et qui converge vers un point $z^* \in C$.

Alors $f$ étant continue, la suite $(f(z_{mk}))$ converge vers $f(z^*)$, et on conclut par la suite que $f(z^*) = z^*$ i.e $z^*$ est un point fixe de $f$ sur $C$.

### 2.3.1 Théorème de Kannan

**Théorème 2.3.2** *(R. Kannan 1968)*[12] *Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application. Supposons qu'il existe $a \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in E$, on a*

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \tag{2.1}$$

*Alors $f$ admet un point fixe unique dans $E$.*

**Preuve.**

<u>Existence</u> Soit $x_0 \in E$, on définit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots,$$

en utilisant la condition (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})], \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (\frac{a}{1-a})d(x_{n-1}, x_n).$$

Par récurrence sur n, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (\frac{a}{1-a})^n d(x_0, x_1).$$

On pose $r = \frac{a}{1-a}$. Si $n, p$ sont deux entiers naturels, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \cdots + r^{n+p-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq \tfrac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $a \in [0, \frac{1}{2}[$ on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme $E$ est complet, il existe $u \in E$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = u$. $u$ est un point fixe de $E$ car

$$\begin{aligned} d(u, f(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + a[d(x_n, x_{n-1}) + d(u, f(u))], \end{aligned}$$

et donc

$$d(u, f(u)) \leq \frac{1}{1-a} d(u, x_n) + \frac{a}{a-1} d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers u, il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$n \geq N \geq 1 \Rightarrow d(u, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}$$

et

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}.$$

Il en résulte que

$$d(u, f(u)) \leq \frac{\varepsilon}{1+a} + \frac{\varepsilon a}{1+a} = \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon$ est arbitraire, on déduit que $f(u) = u$.

Unicité Soit $v$ est un autre point fixe de $f$, alors

$$\begin{aligned} d(v, u) &\leq a[d(u, f(u)) + d(v, f(v))] \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $u = v$, ce qui achève la preuve.

**Exemple 2.3.3** *Soit $E = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow E$ une application définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 2 \\ -\frac{1}{2} & si \quad x > 2. \end{cases}$$

*Alors :*

*1. $f$ n'est pas continue,*

*2. $f$ satisfait la condition (1) avec $a = \frac{1}{5}$ et par conséquent, d'après le théorème de Kannan, $f$ admet un point fixe unique $u = 0$ dans $E$.*

## 2.4 Théorème du point fixe de Chatterjea

En 1971 Chatterjea a obtenu la variante du théorème de point fixe de Kannan suivant

**Théorème 2.4.1** [6] *Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ tel que pour tous $x, y \in E$ on a*

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(y)) + d(y, f(x))] \tag{2.2}$$

.

*Alors $f$ admet un point fixe unique dans $E$.*

**Preuve.**

<u>Existence</u> soit Soit $x_0$ arbitraire, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0),\ n = 1, 2, ...,$$

en utilisant la condition (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n) \\ &\leq a[d(x_{n-1}, f(x_n)) + d(x_n, f(x_{n-1}))] \\ &= a[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (\frac{a}{1-a})^n d(x_0, x_1)$$

On pose $r = \frac{a}{1-a}$ Si $n, p$ sont deux entiers naturels, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + ... + r^{n+p-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq \tfrac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme $E$ est complet, il existe $u \in E$. u est un point fixe de $E$ car

$$\begin{aligned} d(u, f(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + a[d(x_{n-1}, x_n) + d(u, f(u))]. \end{aligned}$$

et donc

$$d(u, f(u)) \leq \frac{a}{1-a} d(u, x_n) + \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u$, il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$n \geq N \geq 1 \Longrightarrow d(u, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a} \text{ et } d(x_{n-1}, u) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}.$$

Il en résultat que

$$d(u, f(u)) \leq \frac{\varepsilon}{1+a} + \frac{\varepsilon a}{1+a}$$

Comme $\varepsilon$ est arbitraire, on déduit que $f(u) = u$.

Unicité Supposons que $v$ est un autre point fixe de $f$. En suite, nous avoir $f(v) = v$ et

$$\begin{aligned} d(u, v) &= d(f(u), f(v)) \\ &\leq a[d(u, f(v)) + d(v, f(u))]. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$d(u, v) \leq 2ad(u, v).$$

Donc $u = v$, d'où l'unicité.

## 2.5 Théorème de Zamfirescu

Dans un espace métrique, il se peut qu'il ya des points de cet espace qui vérifient la condition du théorème de Banach , autres points celle de Kannan et autres points la condition de Chatterjea. En 1972, Zamfirescu montre dans ce cas que l'application admet un point fixe unique.

**Théorème 2.5.1** *(T. Zamfirescu 1972 )*[21] *Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose qu'il existe des nombres réels $\alpha, \beta$ et $\gamma$ satisfont $0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ et $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ tels que, pour tous $x,\ y \in E$, au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée*

$(Z_1)$ *d(f(x), f(y))*$\leq \alpha$ *d(x, y),*

$(Z_2)$ *d(f(x), f(y))*$\leq \beta$ *[d(x, f(x)) + d(y, f(y))],*

$(Z_3)$ *d(f(x), f(y))*$\leq \gamma$ *[d(x, f(y)) + d(y, f(x))].*

*Alors f admet un point fixe unique dans E.*

**Preuve.**

On fixe d'abord $x, y \in E$. Si la condition $(Z_2)$ est satisfaite, alors on a

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \\ &\leq \beta(d(x, f(x)) + [d(y, x) + d(x, f(x)) + d(f(x), f(y))]). \end{aligned}$$

Ainsi

$$(1-\beta)d(f(x), f(y)) \leq 2\beta d(x, f(x)) + \beta d(x, y),$$

donc

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2\beta}{1-\beta} d(x, f(x)) + \frac{\beta}{1-\beta} d(x, y).$$

Si la condition $(Z_3)$ est vérifiée, alors similairement, on obtient

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2\gamma}{1-\gamma} d(x, f(x)) + \frac{\gamma}{1-\gamma} d(x, y).$$

On note par

$$\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\},$$

donc on a $0 \leq \delta < 1$, il s'en suit que pour tous $x, y \in E$, l'inégalité suivante

$$d(f(x), f(y)) \leq 2\delta d(x, f(x)) + \delta d(x, y)$$

est vérifiée. D'une façon similaire, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq 2\delta d(x, f(y)) + \delta d(x, y),$$

pour tous $x, y \in E$.

On va prouver que $f$ admet un point fixe unique. Soit $x_0 \in E$ un élément arbitraire et $(x_n)_{n\geq 0}$ tel que $x_n = f^n(x_0)$. Si $x = x_n$ et $y = x_{n-1}$, alors la dernière inégalité donne

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \delta d(x_n, x_{n-1}).$$

De cela on déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle admet une limite $u \in E$ puisque $E$ est complet. En particulier, on a

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(u, f(u)) &\leq d(u, x_{n+1}) + d(f(x_n), f(u)) \\ &\leq d(u, x_{n+1}) + \delta d(u, x_n) + 2\delta d(x_n, f(x_n)). \end{aligned}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient

$$d(u, f(u)) = 0 \Leftrightarrow u = f(u).$$

Ce qui montre que $u$ est un point fixe pour $f$. L'unicité est triviale.

# CHAPITRE 3

# APPLICATIONS

Dans ce chapitre nous présentons quelques applications. Nous basons sur [9, 10]

.

## 3.1 Equation intégrale de Fredholm

Soit K : $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue pour laquelle il existe $q \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < q < 1$, tel que $|K(x,t)| \leq q, \ \forall x, \ t \in [0,1]$, et soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

On aimeraient trouver une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue satisfaisant l'équation intégrale de Fredholm suivant

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^1 K(x,t) f(t) dt.$$

Cela se ramène facilement à la recherche d'un point fixe on définissant l'application $F$ par

$$F : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1], \mathbb{R})$$

$$g \longmapsto (Fg)(x) = \phi(x) + \int_0^1 K(x,t) g(t) dt.$$

On vérifiant facilement que 1. $F$ est bien définie. En effet, $\phi$ est continue et l'intégrale du produit de deux fonctions continues est continue.

2. $F$ est contractante, de constante de contraction q, si on munit $C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme$\|.\|_\infty$. En effet, soit $f,g\in C([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |(Ff)(x)-(Fg)(x)| &= |\int_0^1 K(x,t)(f(t)-g(t))dt| \\ &\leq \int_0^1 |K(x,t)||(f(t)-g(t))|dt \\ &\leq q\int_0^1 |(f(t)-g(t))|dt \\ &\leq q\|f-g\|_\infty, \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |(Ff)(x)-(Fg)(x)| \leq q\|f-g\|_\infty.$$

C'est à dire

$$\|Ff-Fg\|_\infty \leq q\|f-g\|_\infty.$$

D'où $F$ est contractante.

Puisque $C([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet, on peut appliquer le théorème 2.1.1 ce qui implique que l'équation intégrale ci-dessus possède une unique solution et nous fournit une méthode pour approcher cette solution.

On peut par exemple itérer $F$ sur la fonction nulle. En particulier, dans le cas où $\phi\equiv 0$ l'unique solution est $f\equiv 0$.

## 3.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local

**Définition 3.2.1** *(Cylindre de sécurité) Soit $I$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. $f: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une fonction continue et $h,r>0$.*

*On considère l'équation différentielle $x'(t)=f(t,x(t))$ ou $(t,x)\in I$ et $(t_0,x_0)$ un point de $I$.*

*On dit que $C=[x_0-h,x_0+h]\times B(x_0,r)$ est un cylindre de sécurité pour l'équation* *différentielle si toute fonction* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $x(t_0) = x_0$ *avec* $I \subset [x_0 - h, x_0 + h]$ *reste continue dans* $B^{'}(x_0, r)$.

**Définition 3.2.2** *Soit* $I$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. $f \in C^0(I, \mathbb{R}_n)$ *est dite localement lipschitzienne par rapport à le deuxième variable lorsque pour tout* $(t_0, x_0) \in I$ *il existe un voisinage* $U \subset I$ *de* $(t_0, x_0)$ *et* $k > 0$ *tel que*
$\forall (t, x), (t^{'}, x^{'}) \in U \ ||f(t, x) - f(t^{'}, x^{'})|| \leq k||x - x^{'}||$.

**Théorème 3.2.3** [10] *Soit* $(t_0, x_0) \in I$. *On considère le problème*

$$\begin{cases} x^{'}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Alors il existe $h > 0$ et $x \in C^1(U_h, \mathbb{R}^n)$ tels que $\Gamma(x) \in I$ et $x$ solution du problème sur l'intervalle $U_h := [t_0 - h, t_0 + h]$.

**Preuve.**

Dire que $(U^{'}, x)$ est une solution du problème équivaut à vérifier $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du$ sur $U^{'}$. On peut donc voir $x$ comme le point fixe d'un certain opérateur non linéaire, qu'on va maintenant chercher à définir sur un espace adapté. On pose $B_r = B^{'}(x_0, r)$, et l'espace métrique complet $F = (C^0(U_h, B_r), ||.||_\infty)$. On fixe en outre $h, r > 0$ tels que $U_h \times B_r \subset K$ un cylindre de $I$ où $f$ est k-lipschitzienne sur la seconde variable. Ce cylindre étant inclus dans $I$ le domaine de définition de $f$, on peut définir l'opérateur suivant :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & C^1(U_h, \mathbb{R}^n) \\ x & \longmapsto & \left[t \longrightarrow x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du\right]. \end{array}$$

Par continuité sur un compact, on considère $M = ||f||L_\infty(U_h \times B_r) < \infty$. Soient alors $x \in F$ et $t \in U_h$. On a la majoration

$$\begin{aligned} ||\Phi(x)(t) - x_0|| &= ||\int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du|| \\ &\leq |\int_{t_0}^{t} ||f(u, x(u))||du| \\ &\leq |t - t_0|M, \end{aligned}$$

donc quitte à remplacer h par $min(h, \frac{r}{M})$ on a $\Phi(x) \in F$. $\Phi$ est un opérateur sur l'espace métrique $F$, et on a la majoration

$$||\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)|| = |\int_{t_0}^{t} ||f(u, x(u)) - f(u, y(u))||du| \leq hk||x - y||_\infty.$$

Quitte à remplacer h par min $(h, \frac{k}{2})$, on obtient bien un opérateur contractant. Par le théorème du point fixe de Banach, $\Phi$ admet un unique point fixe sur $U_h$ ; il existe une unique solution au problème sur $U_h$ donnée par ce point fixe.

**Corollaire 3.2.4** *(Version globale) Supposons de plus que $I = I_0 \times \mathbb{R}^n$ et que $f$ est localement en temps globalement lipschitzienne sur sa seconde variable*

$$\forall J \subset I_0,\ \exists k > 0,\ \forall t \in J,\ f_t\ est\ k - lipschitzienne.$$

*Alors il existe une unique solution au problème précédent, définie globalement sur $I_0$. C'est en particulier le cas des équations différentielles linéaires, où $[t \longrightarrow f_t] \in C^0(I_0, L(\mathbb{R}^n))$*

## 3.3 Équation intégrale de Voltera

On se donne les fonctions $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ continues. On cherche une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui vérifie

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x K(x,t) f(t) dt, \tag{3.1}$$

c'est à dire qu'on cherche un point fixe de l'opérateur intégral définie par

$$F : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1], \mathbb{R})$$

$$g \longmapsto (Fg)(x) = \varphi(x) + \int_0^x K(x,t) g(t) dt.$$

Nous allons montrer par récurrence sur $n$ que, $\forall x \in [0,1]$ :

$$|F^n(g_1)(x) - F^n(g_2)(x)| \leq \frac{x^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty,$$

où $M = \sup\{K(x,t); x,t \in [0,1]\}$. Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|F(g_1)(x) - F(g_2)(x)| &= \int_0^x K(x,t)(g_1(t) - g_2(t))dt \\
&\leq \int_0^x |K(x,t)||(g_1(t) - g_2(t))|dt \\
&\leq \sup_{x,t\in[0,1]} |K(x,t)| \int_0^x |(g_1(t) - g_2(t))|dt \\
&\leq M \int_0^x |(g_1(t) - g_2(t))|dt \\
&\leq M\|g_1 - g_2\|_\infty \int_0^x dt \\
&\leq xM\|g_1 - g_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Supposons-la vraie pour n et montrons quelle est vraie pour $n + 1$

$$\begin{aligned}
|F^{n+1}(g_1)(x) - F^{n+1}(g_2)(x)| &= |F(F^n(g_1))(x) - F(F^n(g_2))(x)| \\
&= |\int_0^x K(x,t)(F^n(g_1))(t)dt - \int_0^x K(x,t)(F^n(g_2))(t)dt| \\
&\leq \int_0^x |K(x,t)|\ |(F^n(g_1)) - (F^n(g_2))| \\
&\leq \int_0^x \sup_{x,t\in[0,1]} |K(x,t)|\ |(F^n(g_1)) - (F^n(g_2))|dt \\
&\leq M\tfrac{t^n}{n!}M^n\|g_1 - g_2\|_\infty \\
&= M\tfrac{1}{n!}M^n\|g_1 - g_2\|_\infty \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}M^{n+1}\|g_1 - g_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|(F^n(g_1))(x) - (F^n(g_2))(x)\|_\infty \leq \frac{x^n}{n!}M^n\|g_1 - g_2\|_\infty.$$

Et comme $\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$ c'est à dire $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq N, \frac{M^n}{n!} < \varepsilon$, si on choisit $\varepsilon = q$ avec $0 < q < 1$ donc il existe N tel que si $\frac{M^N}{N!} < q$ alors $F^N$ sera contractante, de constante de contraction $q$. On peut donc affirmer que l'équation intégrale (3.1) admet une unique solution, que l'on peut obtenir par itération de $F$.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Abbas, Etude de quelques théorèmes du point fixe et leurs applications, mémoire master 2015, Université de Saïda .

[2] Q. M. Ansari, Metric Spaces Including Fixed Point Théory and Set Valued Maps. Norosa publishing House, New Delhi(2010).

[3] S. Banach, Sur les opérateurs dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math, 3(1922), 133-181.

[4] C. Berger, Topologie pour la licence (cours et exercices) Université de Vice Sophia Anti polis 2004.

[5] N. Boulacheb, Etude de certains théorèmes du point fixe (Exemples et applications ) mémoire master 2019, Université Oum El Bouaghi.

[6] S. Chatterjea, Fixed Point theorems, C. R. Acad. Bulgare. Sci. 25(1972), 727-730.

[7] G. Choquet, Cours d'analyse. Tome II, Masson, Paris, 1964.

[8] J. Córnicki, Fixed point theorem for Kannan type mappings, Fixed Point Theory App. 19, 2145-2152(2017).

[9] H. E. Djabri, S. Haddadi, Sur la théorie du point fixe dans les espaces métriques et applications, mémoire master 2015, Université Abderrahmane Miro-

Béjaia.

[10] J. Denailly, Analyse numérique et équations différentielle. Presses Universitaire de Grenoble, 1996.

[11] N. El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, Z.I des hautes, no. dition 54692, Rue fond des Fourches 21, juillet 2011.

[12] R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calculta. Math, Soc, Go(1968), 71-76.

[13] A. Malceski, K. Anervska, Existence of Kannan and Chatterjea, Fixed point theorems on complete metric spaces, J. Math.17(1) :1-10, 2016.

[14] A. Monier, Théorème du point fixe de Brouwer, j. des élèves, ENS Lyon, vol 1, 1998, no 4, p 202-206.

[15] J. Nachbar, fixed point theorems. Econ 511 (2010), 1-16.

[16] F. Neir, D. Iftinie, Introduction à la topologie. Université de Renne 1.

[17] N. Redjel, Quelques résultats de points fixes et applications, mémoire doctorat, Université Mentouri Constantine 1, 2016.

[18] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, Paris 1998.

[19] K. Taibi, La théorie du point fixe et leurs applications, mémoire master 2017, Université Oum El Bouaghi.

[20] S. Willard, General topology, Adison Wesley(1970).

[21] T. Zamfirescu, Fixed point theorems in metric spaces, Arch. Math. (23)(1972), 292-298.

[22] E. Zielder, Nonlineair anelysis and its application fixed point theoreme, Springer Verlage, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[23] K. Zennir, Théorèmes du point fixe et ses applications, mémoire doctorat, Université Annaba, 2010.