الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :...............

Centre Universitaire
AbdElhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées

Les familles cosinus, comparaison et application

Préparé par : Loucif Aicha

Soutenue devant le jury

Sekhane Chafika	MAA	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Président
Ahmed-Yahia Rakia	MAA	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Benhabiles Hanane	MAA	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Examinateur

Année universitaire : 2020/2021

Remerciement

Je tiens à remercier avant tout **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail.

Je remercie chaleureusement mon encadreur Madame **AHMED-YAHIA RAKIA** pour son aide précieuse et ses conseils éclairés dans la direction de mon travail, ainsi que sa disponibilité et sa gentillesse.

Je remercie également les membres du jury qu'ont accepté de juger mon travail, et tous mes enseignants du département de Mathématiques et Informatique.

Enfin, je tiens à remercier toute personne ayant participé de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes parents.

Mon frére.

Mes soeurs.

Mes amis.

Aicha

Résumé

Dans ce mémoire, on s’est intéressé à la théorie des familles cosinus. Il s’agit de définir les familles cosinus et leurs propriétés, de les comparer aux semi-groupes et d’indiquer leur domaine d’application.

Mots clé : semi- groupes, générateur infinitesimal , cosinus.

Abstract

This thesis deals with cosine families theory . It serves to define cosine families and their properties , comparing them to semi-groups though and indicate their domain of application.

keywords: semi-groups, infinitesimal generator ,cosine .

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بنظرية عائلات جيب التمام. يتعلق الأمر بتعريف عائلات جيب التمام وخصائصها ، ومقارنتها بأنصاف الزمر وبيان مجال تطبيقها.

الكلمات المفتاحية : أنصاف الزمر, مولد متناهي الصغر، جيب التمام.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GENERAL

C'est en **1821** que Cauchy a demontré que les seules solutions continues $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle de d'Alembert

$$C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s) \quad , \quad s, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$C(0) = I$$

ont la forme $C(t) = \cos at$, $C(t) = \cosh at$ (avec $a \in \mathbb{R}$) ou $C(t) = I$ selon que C est borné-non constant, non borné ou constant sur $\mathbb{R}$. Le probléme : prouver des théorèmes de représentation au théorèmes des semi-groupes, discuter des équations fonctionnelles relatives (en particulier celles définissant la paire de fonctions sinus et cosinus), étudier la relation entre les solutions de (1) et de l'équation fonctionnelle de l'exponentielle de Cauchy, ont depuis lors constitué une partie importante de la théorie des équations fonctionnelles à valeur scalaire, comme on peut le voir par exemple dans l'excellente monographie d'Aczel [7].

Cependant des semi-groupes, la théorie des fonctions cosinus à valeur opératorielle n'a attiré que peu d'attention. Ceci est d'ailleurs plus surprenant vue que la théorie des semi-groupes d'opérateurs a été étudiée de trés prés par de nombreux auteurs au cours des trente dernières années à la suite des travaux pionniers de Hille-Yoshida et Phillips. Une quantité extraordinaire d'informations détaillées concernant ces systèmes d'opérateurs a été donné ce qui a conduit (entre autres applications) à une théorie structurelle des équations d'évolution.

L'une des raisons pour lesquelles les fonctions cosinus (qui peuvent être appliquées directement aux problèmes linéaires du second ordre) ont été négligées etait le fait que dans de nombreux cas, les équations différentielles du second ordre peuvent être réduites à des problèmes du premier ordre. Ce qui rend la théorie des semi-groupes applicable.

Bient plus tard, on montra q'il existe une autre approche pour le problème abstrait du second ordre, basée sur la résolution d'équations ordinaires du second ordre, qui implique des fonctions cosinus et sinus. Cette approche fait appel à deux familles d'opérateurs linéaires bornés : les familles cosinus et sinus, dont les propriétés ressemblent beaucoup aux propriétés des fonctions cosinus et sinus des nombres réels. Les premiers résultats de ce travail sont apparus à la fin des années **1960**, avec les preuves de Da Prato [10], Giusti [6] et Fattorini [8] [9].

Ainsi, on montrera dans la suite que chaque équation différentielle abstraite du second ordre de la forme $u''(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$ qui est bien posée dans un certain sens donne lieu à une famille de cosinus fortement continue d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal A, et inversement, toute famille de cosinus fortement continue d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal A peut être associée à l'équation différentielle du second ordre bien posée $u''(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ce mémoire se divise en quatre chapitres essentiels :

Le premier chapitre sera consacré aux plus importants concepts en rapport avec la théorie des semi-groupes qui sont les semi-groupes uniformément continus et fortement continus. On a utilisé des définitions, des propositions, théorèmes dont les plus importants dans ce présent chapitre sont théorème de Hille-Yoshida et théorème de Lumer-phillips. Aussi la caractérisation du générateur infinitésimal et le problème de cauchy abstrait.

Le deuxième chapitre portera sur la théorie des familles de cosinus où on a abordé les fonctions des opérateurs cosinus et sinus et leurs générateurs infinitésimaux ainsi que leurs propriétés principales. On a présenté aussi, les fonctions de l'opérateur C_0-cosinus uniformement continu.

Le troisième chapitre consiste à une comparaison entre les semi-groupes et les familles cosinus.

Le dernier chapitre est une application des familles de cosinus aux équations différentielles abstraites non linéaires du second ordre.

CHAPITRE 1

THÉORIE DES SEMI-GROUPES

1.1 Introduction

Les résultats fondamentaux pour les semi-groupes de classe C_0 dans les espaces de Banach ont été obtenus par Hille-Yosida et Lumer-phillips qui ont crée la théorie des C_0 semi-groupes et de leurs générateurs.

1.2 semi-groupes uniformément continus et semi-groupes fortement continus

Soit X un espace de Banach. On désigne par $\mathscr{L}(X)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés sur X et par I_X l'opérateur d'identité sur X.

1.2.1 semi-groupes uniformément continus

Définition 1.2.1 *[3]*

Une famille à un paramétre $T(t)$, $0 < t < +\infty$, d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :

(i) $T(0) = I$ *(I est l'opérateur identité de X).*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *pour tout* $t,s \geq 0$ *(équation de cauchy , également appelée équation exponentielle).*

le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés T(t) est uniformément continu si :

$$\lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \|T(h) - I\| = 0 \tag{1.1}$$

Définition 1.2.2 *[3]*

L'opérateurs linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{T(h)x - x}{h} \quad existe \right\} \tag{1.2}$$

et

$$Ax = \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \frac{d^+T(t)}{dt} x \Big|_{t=0}, \quad x \in D(A). \tag{1.3}$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$, $D(A)$ *est le domaine de A.*

Remarque 1.2.1 *[3]*
De la définition 1.2.1 d'un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés T(t)
on peut déduire que :

$$\lim_{s \to t} \|T(s) - T(t)\| = 0$$

Théoréme 1.2.1 *[3]*
Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Preuve 1.2.1 *[3]*

Soit A un opérateur linéaire borné sur X et soit

$$T(t) \quad = \quad e^{tA} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \tag{1.4}$$

le second membre de (1.4) qui est une série normalement convergente pour tout $t \geq 0$*, et définit un opérateur linéaire borné T(t). Il est clair que*

$$T(0) = I \quad et \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0$$

En estimant la série (1.4) on aura :

$$\|T(t) - I\| \leq t\|A\|e^{t\|A\|}$$

et

$$\left\|\frac{T(t) - I}{t} - A\right\| \leq t\|A\|^2 e^{t\|A\|}$$

ce qui prouve que T(t) est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X et que A est son générateur infinitésimal.
Soit T(t) un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés dans X.
Pour $\rho > 0$ *fixé assez petit tel que*

$$\left\|I - \rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\right\| \leq 1$$

ce qui implique que $\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds$ *est inversible et de là* $\int_0^\rho T(s)ds$ *sera aussi inversible alors on aura :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\Big(T(h) - I\Big)\Big(\int_0^\rho T(s)ds\Big) &= h^{-1}\Big(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds\Big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\Big) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{T(h) - I}{h} = \Big(\frac{1}{h}\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)ds\Big)\Big(\int_0^\rho T(s)ds\Big)^{-1} \tag{1.5}$$

par passage à la limite quand $h \longrightarrow 0$ *(1.5) on montre que* $\frac{1}{h}(T(h) - I)$ *converge en norme et donc fortement vers l'opérateurs linéaire borné* $\Big(T(\rho) - I\Big)\Big(\int_0^\rho T(s)ds\Big)^{-1}$.

Remarque 1.2.2 *[3]*
De la définition 1.2.2 il est clair qu'un semi-groupe $T(t)$ *a un unique générateur infinitésimal. Si T(t) est uniformément continu alors son générateur infinitésimal est un opérateurs linéaire borné. Comme nous l'avons démontré précédemment on sait que tout opérateur linéaire borné est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu la question qui se pose est : Ce semi-groupe est-il unique ? ? la réponse est affirmative comme on peut le voir dans ce qui suit :*

Théoréme 1.2.2 *[3]*
Soient T(t) et S(t) deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés si :

$$\lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{T(h)-I}{h} \quad = \quad A \quad = \quad \lim_{h \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{S(h)-I}{h} \tag{1.6}$$

Alors $T(t) = S(t)$ *pour* $t \geq 0$.

Preuve 1.2.2 *[3]*
On va montrer que pour $T > 0$ *donné*

$$T(t) = S(t) \quad pour \quad 0 \leq t \leq T$$

Soit $T > 0$ *fixé. Alors puisque les applications* $t \hookrightarrow \|T(t)\|$ *et* $t \hookrightarrow \|S(t)\|$ *sont continues il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|T(t)\|\|S(s)\| \leq C \quad pour \quad 0 \leq t, s \leq T$$

Alors pour $\varepsilon > 0$ *et d'aprés (1.6) il existe* $\delta > 0$ *telle que :*

$$\frac{1}{h}\|T(h) - S(h)\| < \frac{\varepsilon}{TC} \quad pour \quad 0 \leq h \leq \delta \tag{1.7}$$

Soit $0 \leq t \leq T$ *et choisissons* $n \geq 1$ *telle que* $\frac{t}{n} \leq \delta$, *donc de la propriété du semi-groupe et de (1.7) on a :*

$$\begin{aligned}
\left\|T(t) - S(t)\right\| &= \left\|T\left(\frac{nt}{n}\right) - S\left(\frac{nt}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\|T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right\|\left\|T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|\left\|S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\| \\
&\leq nC\frac{\varepsilon}{TC}\frac{t}{n} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

puisque $\varepsilon > 0$ *est arbitraire alors*

$$T(t) = S(t) \quad pour \quad 0 \leq t \leq T$$

Corollaire 1.2.1 *[3]*
Soit T(t) un semi-groupes uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés. Alors :

(a) *Il existe une constante* $\omega \geq 0$ *telle que :*

$$||T(t)|| \leq e^{\omega t}$$

(b) *Il existe un unique opérateur linéaire borné A telle que :*

$$T(t) \quad = \quad e^{tA}$$

(c) *L'opérateur A dans (b) n'est autre que le générateur infinitésimal de T(t).*

(d) $t \hookrightarrow T(t)$ *est différentiable en norme et*

$$\frac{dT(t)}{dt} \quad = \quad AT(t) \quad = \quad T(t)A$$

On peut trouver la preuve dans [3]

1.2.2 semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés

Dans toute la suite X désigne un espace de Banach

Définition 1.2.3 *[3]*
Un semi-groupe $T(t)$, $0 \leq t < +\infty$, *d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit semi-groupe fortement continu si :*

$$\lim_{t \overset{>}{\longrightarrow} 0} T(t)x \quad = \quad x \quad , \quad \forall x \in X \tag{1.8}$$

un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X est appelé un semi-groupe de classe C_0 *ou simplement un* C_0 *semi-groupe.*

Théoréme 1.2.3 *[3]*
Soit $T(t)$ *un* C_0 *semi-groupe, alors il existe des constantes* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *telle que :*

$$||T(t)|| \quad \leq \quad Me^{\omega t} \quad , \quad pour \quad 0 \leq t < +\infty \tag{1.9}$$

Preuve 1.2.3 *[3]*
On va montrer d'abord qu'il existe $\eta > 0$ *telle que :*
$||T(t)||$ *est borné pour* $0 \leq t \leq \eta$ *et Supposons que ceci n'est pas vrai donc il existerait une suite* $\left\{t_n\right\}$ *telle que :*
$t_n \geq 0$, $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$ *et* $||T(t_n)|| \geq n$.

Alors d'aprés le principe de la borne uniforme, il d'ensuit que pour un certain $x \in X$, $\|T(t_n)x\|$ *est non borné ce qui est contraire à (1.8). Donc* $\|T(t)\| \leq M$ *pour* $0 \leq t \leq \eta$ *et puisque* $\|T(0)\| = 1$ *donc* $M \geq 1$. *Soit* $\omega = \eta^{-1}\log M \geq 0$ *pour* $t \geq 0$ *on a* $t = n\eta + \delta$ *où* $0 \leq \delta < \eta$ *et de la propriété du semi-groupe on a :*

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{t/\eta} = Me^{\omega t}$$

Corollaire 1.2.2 *[3]*
Soit T(t) est un C_0 *semi-groupe alors pour tout* $x \in X$, $t \hookrightarrow T(t)x$ *est une fonction continue de* $\mathbb{R}_0^+$ *dans X.*

Preuve 1.2.4 *[3]*
Soient $t, h \geq 0$ *la continuité de* $t \hookrightarrow T(t)x$ *se déduit de :*

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

pour $t \geq h \geq 0$

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{\omega t}\|x - T(h)x\| \end{aligned}$$

Théoréme 1.2.4 *[3]*
Soit T(t) un C_0 *semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal. Alors :*

(a) *Pour* $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \quad ds = T(t)x \tag{1.10}$$

(b) *Pour* $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ *et*

$$A\Big(\int_0^t T(s)xds\Big) = T(t)x - x \tag{1.11}$$

(c) *Pour* $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ *et*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax \tag{1.12}$$

(d) *Pour* $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\zeta)Ax \quad d\zeta = \int_s^t AT(\zeta)x \quad d\zeta \tag{1.13}$$

Preuve 1.2.5 *[3]*
(a) se déduit directement du Corollaire précédent $\Big($*ie : de la continuité de la fonction* $t \hookrightarrow T(t)x\Big)$.
Prouvons (b) soit $x \in X$ *et* $h > 0$*, alors :*

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t \Big(T(s+h)x - T(s)x\Big)ds \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds \end{aligned}$$

et puisque le second membre tend vers $T(t)x - x$ *quand* $h \longrightarrow 0$ *ce qui prouve (b).*
Pour démontrer (c) on prend $x \in D(A)$ *et* $h > 0$*. Alors :*

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\Big(\frac{T(h)-I}{h}\Big)x \longrightarrow T(t)Ax \quad \text{quand} \quad h \longrightarrow 0 \tag{1.14}$$

alors $T(t)x \in D(A)$ *et* $AT(t)x = T(t)Ax$ *et (1.14) implique aussi que*

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

ie : que la dérivée à droite de $T(t)x$ *est* $T(t)Ax$*. Pour démontrer (1.12) il ne reste qu'à prouver que la dérivée à gauche de* $T(t)x$ *existe pour* $t > 0$*, et est égal à* $T(t)Ax$*, ce qui découle directement de :*

$$\lim_{h\to 0^+}\Big(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\Big) = \lim_{h\to 0^+} T(t-h)\Big(\frac{T(h)x - x)}{h} - Ax\Big) + \lim_{h\to 0^+}\Big(T(t-h)Ax - T(t)Ax\Big)$$

puisque $x \in D(A)$ *et* $\|T(t-h)\|$ *est borné sur* $0 \le h \le t$*, donc :*

$$\lim_{h\to 0^+} T(t-h)\Big(\frac{T(h)x - x)}{h} - Ax\Big) = 0$$

et puisque T(t) est un C_0 *semi-groupe, alors :*

$$\lim_{h\to 0^+}\Big(T(t-h)Ax - T(t)Ax\Big) = 0$$

d'où

$$\lim_{h\to 0^+}\Big(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\Big) = 0$$

ce qui termine la démonstration de (c).
(d) est une conséquence directe de (c) par une simple intégration de (1.12) de s à t.

Corollaire 1.2.3 *[3]*

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ alors :

(i) *$D(A)$ le domaine de A est dense dans X.*

(ii) *A est un opérateur linéaire fermé.*

Preuve 1.2.6 *[3]*
Pour tout $x \in X$ soit

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds$$

D'aprés la partie (b) du théoréme 1.2.4 on a

$$x_h \in D(A) \quad pour \quad h > 0$$

et de la partie (a) du méme théoréme 1.2.4 on sait que $x_h \longrightarrow x$ quand $h \longrightarrow 0$ donc $\overline{D(A)} = X$.
La linéarité de A est évidente elle découle directement de la définition de A donc il reste à montrer que A est fermé, ie :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_n & \longrightarrow & x \\ Ax_n & \longrightarrow & y \end{array} \right\}$$

$n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow x \in D(A)$ *et* $Ax = y$

D'aprés la partie (d) du théoréme 1.2.4 on a :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds \qquad (*)$$

puisque $Ax_n \longrightarrow y$ ce qui implique que $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$ uniformément sur tout intervalle fermé borné et par conséquent par passage à la limite dans (*) on aura :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds \qquad (**)$$

donc si on divise les deux membres de (**) par $t > 0$ et en passant à la limite lorsque $t \longrightarrow 0$ on voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ ce qui démontre que A est fermé.

Théoréme 1.2.5 *[3]*
Soient $T(t)$ et $S(t)$ deux C_0 semi-groupes d'opérateurs linéaires continus et A, B leurs générateurs infinitésimaux respectifs.
Si $A = B$ alors $T(t) = S(t)$ pour $t \geq 0$.

Preuve 1.2.7 *[3]*
Soit $x \in D(A) = D(B)$. D'aprés le théoréme 1.2.4 partie (c) on peut facilement voir que la

fonction $s \hookrightarrow T(t-s)S(s)x$ *est différentiable et que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est - à - dire que la fonction $s \hookrightarrow T(t-s)S(s)x$ *est constante et en particulier ses valeurs pour* $s = 0$ *et* $s = t$ *coincident donc :*

$$T(t)x = S(t)x$$

et ceci est vrai $\forall x \in D(A)$ *et puisque D(A) est dense dans X et T(t), S(t) sont borné alors :*

$$T(t)x = S(t)x \qquad \forall x \in X$$

Théoréme 1.2.6 *[3]*
Soit A le générateurs infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Si* $D(A^n)$ *est le domaine de* A^n*, alors* $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ *est dense dans X.*

lemme 1.2.1 *[3]*
Soit A le générateurs infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t) telle que :*

$$\|T(t)\| \leq M_0 \quad pour \quad t \geq 0$$

Si $x \in D(A^2)$ *alors :*

$$\|Ax\|^2 \leq 4M_0^2\|A^2x\|\|x\| \tag{1.15}$$

Preuve 1.2.8 *[3]*
En utilisant la relation (1.13) de la partie (d) du théoréme (1.2.4) on peut facilement vérifier que pour $x \in D(A^2)$ *on a :*

$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2xds$$

d'où

$$\|Ax\| \leq \frac{1}{t}\Big(\|T(t)x\| + \|x\|\Big) + \frac{1}{t}\int_0^t (t-s)\|T(s)A^2x\|ds$$

$$\leq \quad \frac{2M_0}{t}\|x\| + \frac{M_0 t}{2}\|A^2x\|. \tag{1.16}$$

où on a utilisé $M_0 \geq 1$ *car* $\Big(\|T(0) \quad = \quad 1\|\Big)$

- *Si* $A^2x = 0$ *donc de (1.16) on déduit que* $Ax = 0$ *et (1.15) est satisfaite.*
- *Si* $A^2x \neq 0$ *on peut prendre* $t = \frac{2\|x\|^{\frac{1}{2}}}{\|A^2x\|^{\frac{1}{2}}}$.

dans (1.16) et (1.15) s'ensuit.

Exemple 1.2.1 *[3]*
Soit X l'espace de Banach des fonctions uniformément continues bornées sur $]-\infty,\infty$ *avec la norme supremum. Pour* $f \in X$ *on définit*

$$(f(t)f)(s) \quad = \quad f(t+s)$$

Il est facile de vérifier que $T(t)$ *est un* C_0 *semi-groupe satisfaisant* $\Big\|T(t)\Big\| \leq 1$ *pour* $t \geq 0$. *Le générateur infinitésimal de* $T(t)$ *est défini sur* $D(A) = \Big\{f : f \in X, f' \quad existe \quad , f' \in X\Big\}$ *et* $(Af)(s) = f'(s)$ *pour* $f \in D(A)$. *Du lemme 1.2.1 on obtient l'inégalité de Landau*

$$\Big(\sup|f'(s)|\Big)^2 \quad \leq \quad 4\Big(\sup|f''(s)|\Big)\Big(\sup|f(s)|\Big) \tag{1.17}$$

où les $\sup$ sont repris $]-\infty,\infty[$. L'exemple 1.2.1 peut être facilement modifié dans le cas où $X = L^p(-\infty,\infty)$, $1 < p < \infty$.

1.2.3 Théoréme de Hille-Yosida

Soit T(t) un C_0 semi-groupe. D'aprés le théoréme 1.2.3 on sait qu'il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$
telle que :

$$\|T(t)\| \quad \leq \quad Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \qquad\qquad (*)$$

Définition 1.2.4 *[3]*
Si dans (*) on a $\omega = 0$ *alors le* C_0 *semi-groupe T(t) est appelé un* C_0 *semi-groupe uniformement borné et si de plus* $M = 1$ *alors il est appelé un* C_0 *semi-groupe de contractions.*

dans la suite on va caractériser le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction

Définition 1.2.5 *[3]*
Si A est un opérateur linéaire dans X (pas nécessairement borné) l'ensemble résolvant $\rho(A)$ *de A est l'ensemble des nombres complexes* λ *telle que* $\lambda I - A$ *est inversible. ie :* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est un opérateur linéaire borné dans X. qu'on note par :*

$$R(\lambda; A) \quad = \quad (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A)$$

qui est appelé la résolvante de A.

Théoréme 1.2.7 ***(Hille-yosida)****[3]*
Un opérateur linéaire A est le générateurs infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe de contractions T(t),* $t \geq 0$ *si et seulement si :*

(i) *A est fermé et* $\overline{D(A)} = X$.

(ii) *l'ensemble résolvant de A contient* $\mathbb{R}^+$ *et* $\forall \lambda > 0$ *on a :*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{1.18}$$

Preuve 1.2.9 *[3]*
La condition nécessaire :
Soit A le générateurs infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe d'aprés le Corollire 1.2.3 A est fermé et* $\overline{D(A)} = X$.
pour $\lambda > 0$ *et* $x \in X$ *soit*

$$R(\lambda)x \quad = \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \tag{1.19}$$

puisque $t \hookrightarrow T(t)x$ *est une fonction continue et uniformément bornée donc l'intégrale dans (1.19) existe, comme étant une intégrale impropre de riemann, qui définit un opérateur linéaire* $R(\lambda)$ *telle que :*

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|T(t)x\| \quad dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\| \tag{1.20}$$

En plus, pour $h > 0$

$$\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x \quad = \quad \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\Big(T(t+h)x - T(t)x\Big)dt$$

$$= \quad \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \quad dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{h} e^{-\lambda t} T(t)x dt \tag{1.21}$$

lorsque $h \overset{>}{\to} 0$ *le second membre de (1.21) converge vers* $\lambda R(\lambda)x - x$. *Ce qui implique que* *pour tout* $x \in X$ *et* $\lambda > 0$ *on a*

$$R(\lambda)x \in D(A) \quad et \quad AR(\lambda) \quad = \quad \lambda R(\lambda) - I$$

ie :

$$(\lambda I - A)R(\lambda) \quad = \quad I \tag{1.22}$$

Pour $x \in D(A)$ *on a aussi :*

$$R(\lambda)Ax \quad = \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)Axdt \quad = \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}AT(t)xdt$$

$$= \quad A\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x \quad dt\Big) \quad = \quad AR(\lambda)x \tag{1.23}$$

(où on a utilisé le fait que $AT(t)x = T(t)Ax$ *et que* A *est fermé) donc de (1.22) et (1.23) on peut déduire que*

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x \quad = \quad x \quad , \quad \forall x \in D(A) \tag{1.24}$$

Donc $R(\lambda)$ *est l'inverse de* $\lambda I - A$*, qui existe pour tout* $\lambda > 0$ *et satisfait à (1.18)*
Pour démontrer que les conditions (i) et (ii) sont suffisantes pour que A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe de contractions on a besoin de qulques résultats.*

lemme 1.2.2 *[3]*
Soit A un opérateur qui satisfait les conditions (i) et (ii) du théoréme 1.2.7 et soit

$$R(\lambda; A) \quad = \quad (\lambda I - A)^{-1}$$

Alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda; A)x \quad = \quad x \quad , \quad \forall x \in X \tag{1.25}$$

Preuve 1.2.10 *[3]*
Supposons que $x \in D(A)$ *alors*

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \quad &= \quad \|AR(\lambda; A)x\| \quad = \quad \|R(\lambda; A)Ax\| \\ &\leq \quad \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \quad \longrightarrow 0 \quad , \quad \lambda \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

et puisque $\overline{D(A)} = X$ *et que* $\|\lambda R(\lambda; A)\| \leq 1$
donc $\lambda R(\lambda; A)x \quad \longrightarrow \quad x$ *lorsque* $\lambda \longrightarrow +\infty$, $\forall x \in X$.

Définissons maintenant, pour tout $\lambda > 0$, l'approximation Yosida de A par :

$$A_\lambda \quad = \quad \lambda AR(\lambda; A) \quad = \quad \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I \tag{1.26}$$

(régularisée Yosida) A_λ est une approximation de A dans le sens qui suit :

lemme 1.2.3 *[3]*
Soit A un opérateur qui satisfait aux conditions (i) et (ii) du théoréme 1.2.7.
Si A_λ est l'approximation Yosida de A, alors :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x \quad = \quad Ax \quad , \quad \forall x \in D(A) \tag{1.27}$$

Preuve 1.2.11 *[3]*
Pour $x \in D(A)$ on a d'aprés le lemme 1.2.2 et la définition de A_λ (ie : (1.26))

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x \quad = \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda; A)Ax \quad = \quad Ax$$

lemme 1.2.4 *[3]*
Soit A un opérateur qui satisfait aux conditions (i) et (ii) du théoréme 1.2.7.
Si A_λ est l'approximation Yosida de A, alors A_λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu de contractions et de plus on a

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\| \quad \leq \quad t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \tag{1.28}$$

$$\forall x \in X \quad , \quad \lambda, \mu > 0.$$

Preuve 1.2.12 *[3]*
De la relation (1.26) il est clair que A_λ est un opérateur linéaire borné donc c'est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $e^{tA\lambda}$ et on a aussi :

$$\|e^{tA_\lambda}\| \quad = \quad e^{-\lambda t}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)}\|$$

ie :

$$\|e^{tA_\lambda}\| \quad \leq \quad e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda;A)\|} \leq 1 \tag{1.29}$$

donc e^{tA_λ} est un semi-groupe de contractions.
Il est clair que d'aprés les définitions de A_λ, A_μ, e^{tA_λ} et e^{tA_μ} commutent entre eux et par

conséquent

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\Big(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\Big) \quad ds\right\| \\ &\leq \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\| \quad ds \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x)\| \end{aligned}$$

Preuve 1.2.13 *du Théoréme 1.2.7[3]*
La réciproque :
Soit $x \in D(A)$. *Alors*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \quad \leq \quad t\|A_\lambda x - A_\mu x)\| \quad \leq \quad t\|A_\lambda x - Ax)\| + t\|A_\mu x - Ax)\| \tag{1.30}$$

Donc de (1.30) et du lemme 1.2.3 on peut déduire que pour $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ *converge lorsque* $\lambda \longrightarrow +\infty$ *et que la convergence est uniforme sur tout intervalle borné. Puisque D(A) est dense dans X et* $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$ *il s'ensuit que*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x \quad = \quad T(t)x \quad , \quad \forall x \in X \tag{1.31}$$

Cette limite dans (1.31) est aussi uniforme sur tout intervalle borné. De (1.31) il est bien clair que la limite T(t) satisfait aux propriétés du semi-groupe, (ie : que $T(0) = I$ *et* $\|T(t)\| \leq 1$*), on a aussi* $t \hookrightarrow T(t)x$ *est continue pour* $t \geq 0$ *comme limite uniforme des fonctions continues* $t \hookrightarrow e^{tA_\lambda}x$. *Donc T(t) est un* C_0 *semi-groupe de contractions.*
Pour terminer la démostration il reste à montrer que A est effectivement le générateur infinitésimal de T(t).
Soit $x \in D(A)$ *donc en utilisant la relation (1.31) et le théoréme 1.2.4 (b) on a :*

$$T(t)x - x \quad = \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \Big(e^{tA_\lambda}x - x\Big) \quad = \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds \quad = \quad \int_0^t T(s)Axds \tag{1.32}$$

la derniére égalité vient du fait que la convergence de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ *vers* $T(t)Ax$ *est uniforme sur tout intervalle borné.*
Soit B le générateur infinitésimal de T(t) et soit $x \in D(A)$. *En divisant (1.32) par* $t > 0$ *et en passant à limite lorsque* $t \xrightarrow{>} 0$ *on voit que* $x \in D(A)$ *et que* $Bx = Ax$ *donc* $A \subseteq B$. *Puisque B est le générateur infinitésimal de T(t), alors d'aprés la condition nécessaire du théoréme 1.2.7* $1 \in \rho(B)$ *et d'un autre coté d'aprés (ii)* $1 \in \rho(A)$ *et puisque* $A \subseteq B$ *donc*

$$(I - B)D(B) \quad = \quad (I - A)D(A) \quad = \quad X$$

Ce qui implique que

$$D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$$

et alors

$$A = B$$

Corollaire 1.2.4 *[3]*

Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe de contractions T(t). Si* A_λ *est l'approximation Yosida de A alors :*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x \quad , \quad \forall x \in X \tag{1.33}$$

Preuve 1.2.14 *[3]*
Dans la démonstration du théoréme 1.2.7 nous avons montré que le second membre de (1.33) définit un semi-groupe fortement continu S(t) telle que A est le générateur infinitésimal alors il s'ensuit que
$T(t) = S(t)$ *(d'aprés le théoréme 1.2.5)*

Corollaire 1.2.5 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe de contractions T(t).*
L'ensemble résolvant de A contient le demi-plan ouvert $\left\{\lambda, Re\lambda > 0\right\}$
ie : $\rho(A) \supseteq \left\{\lambda, Re\lambda > 0\right\}$
et pour de tels λ *on a :*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda} \tag{1.34}$$

Preuve 1.2.15 *[3]*
L'opérateur $R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x \quad dt$ *est bien défini pour* λ *telle que* $Re\lambda > 0$ *et dans la démonstration du théoréme 1.2.7 on a montré que* $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ *ce qui prouve que* $\rho(A) \supseteq \left\{\lambda, Re\lambda > 0\right\}$.
l'estimation 1.34 est évidente.

Remarque 1.2.3 *[3]*
Soit T(t) un C_0 *semi-groupe qui satisfait*

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \qquad (pour \quad un \quad \omega > 0)$$

donc si on considére $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$, *S(t) serait un* C_0 *semi-groupe de contractions.*
Si A est le générateur infinitésimal du C_0 *semi-groupe T(t) alors* $A - \omega I$ *est le générateur*

infinitésimal de S(t).
D'un autre côté si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions S(t), alors $A + \omega I$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe telle que

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$$

En effet $T(t) = e^{\omega t}S(t)$ ce qui nous permettra de caractériser le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe satisfaisant à

$$\|T(t)\| \quad \leq \quad e^{\omega t}$$

Corollaire 1.2.6 *[3]*
Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe tel que

$$\|T(t)\| \quad \leq \quad e^{\omega t}$$

si et seulement si :

(i) *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient la demi-droite $\left\{\lambda : Im\lambda = 0 \quad , \quad \lambda > \omega\right\}$ et*

$$\|R(\lambda; A)\| \quad \leq \quad \frac{1}{\lambda - \omega} \tag{1.35}$$

1.2.4 Théoréme de Lumer-Plillips

Dans la section précédent d'aprés le théoréme de Hille-Yosida on a pu caractéser le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe. De même dans cette section on va donner une autre caractérisation pour de tels générateurs infinitésimaux.
Pour cela on a besoin de quelques préliminaires. Soit X un espace de banach et soit X^* son dual.

Définition 1.2.6 ***[3]***
Pour tout $x \in X$ on définit l'ensemble de dualité $F(x) \subseteq X^*$ par :

$$F(x) \quad = \quad \left\{f \in X^* / \langle f, x\rangle \quad = \quad \|x\|^2 \quad = \quad \|f\|^2\right\} \tag{1.36}$$

D'aprés le théoréme de Hahn-Banach on sait que

$$F(x) \quad \neq \quad \emptyset \quad , \quad \forall x \in X$$

Définition 1.2.7 *[3]*
Un opérateur linéaire A est dissipatif si pour tout $x \in D(A)$ il exixte $f \in F(x)$ tel que

$$Re\langle f/Ax\rangle \quad \leq \quad 0$$

Théoréme 1.2.8 *[3]*
Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si

$$||(\lambda I - A)|| \quad \geq \quad \lambda||x|| \quad , \quad \forall x \in D(A) \quad et \quad \forall \lambda > 0 \tag{1.37}$$

Preuve 1.2.16 *[3]*
Soit A un opérateur dissipatif, $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$
Si $f \in F(x)$ et :

$$Re\langle f, Ax\rangle \leq 0$$

alors

$$\begin{aligned} ||\lambda x - Ax||||x|| \quad &\geq \quad |\langle f/\lambda x - Ax\rangle| \\ &\geq \quad Re\langle f/\lambda x - Ax\rangle \\ &\geq \quad \lambda||x||^2 \end{aligned}$$

ie : (1.37) est vérifiée.
Réciproquement : soit $x \in D(A)$ et supposons que

$$\lambda||x|| \quad \leq \quad ||\lambda x - Ax|| \quad , \quad \forall \lambda > 0$$

si $f_\lambda \in F(\lambda x - Ax)$ et $g_\lambda = f_\lambda/_{||f_\lambda||}$
alors $||g_\lambda|| = 1$ et on a :

$$\begin{aligned} \lambda||x|| \quad &\leq \quad ||\lambda x - Ax|| \quad = \quad \langle g_\lambda/\lambda x - Ax\rangle \\ &\leq \quad \lambda Re\langle g_\lambda/x\rangle - Re\langle g_\lambda/Ax\rangle \\ &\leq \quad \lambda||x|| - Re\langle g_\lambda/Ax\rangle \end{aligned}$$

pour tout $\lambda > 0$. Donc

$$Re\langle g_\lambda/Ax\rangle \quad \leq \quad 0$$

et

$$Re\langle g_\lambda/x\rangle \quad \geq \quad ||x|| - \frac{1}{\lambda}||Ax|| \tag{1.38}$$

Puisque la boule unité de X^* *est compacte pour la topologie faible* $*$ *donc de la suite* (g_λ) *on peut en extraire une sous suite convergente vers* $g^* \in X^*$*, quand* $\lambda \longrightarrow +\infty$ *pour la topologie faible* $*$ *et* $\|g^*\| \leq 1$.
De la relation (1.38) il s'ensuit alors que $Re\langle g/Ax\rangle \leq 0$ *et que* $Re\langle g/x\rangle \geq \|x\|$*, mais on sait que*

$$Re\langle g/x\rangle \quad \leq \quad |\langle g/x| \leq \|x\|$$

ie :

$$\langle g/x\rangle \quad = \quad \|x\|$$

prenons $f = \|x\|g$ *on aura* $f \in F(x)$ *et*

$$Re\langle f/Ax\rangle \quad \leq \quad 0$$

ie : que A est dissipatif.

Théoréme 1.2.9 *(lumer-plillips)[3]*
Soit A un opérateur linéaire à domaine D(A) dense dans X.

(a) *Si A est dissipatif et qu'il existe* $\lambda_0 > 0$ *telle que* $R(\lambda_0 I - A) = X$*, alors A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions dans X.*

(b) *Si A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions dans X, alors* $R(\lambda I - A) = X$*,* $\forall \lambda > 0$ *et A est dissipatif.*
de plus pour tout $x \in D(A)$ *et tout* $f \in F(x)$*,* $Re\langle f/Ax\rangle \leq 0$

Preuve 1.2.17 *[3]*
Soit $\lambda > 0$*, puisque A est dissipatif donc d'aprés le théoréme 1.2.8 on a :*

$$\|\lambda_0 x - Ax\| \quad \geq \quad \lambda_0\|x\| \quad , \quad \forall \lambda_0 > 0 \quad , \quad \forall x \in D(A) \tag{1.39}$$

puisque $R(\lambda_0 I - A) = X$*, il s'ensuit de (1.39) pour* $\lambda = \lambda_0$ *que* $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ *est un opérateur linéaire borné donc fermé. Et alors* $\lambda_0 I - A$ *serait fermé donc A est aussi un opérateur fermé.*
Si $R(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$ *donc*

$$\Big]0, +\infty\Big[\subset \rho(A) \quad et \quad \|R(\lambda; A)\| \quad \leq \quad \frac{1}{\lambda}$$

$\Big($ *d'aprés (1.39)*$\Big)$*. Donc d'aprés le théoréme de Hille-Yossida A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions.*
Pour terminer la preuve de (a) il faut montrer que

$$R(\lambda I - A) \quad = \quad X \quad , \quad \forall \lambda \quad > \quad 0$$

considérons l'ensemble :

$$\Lambda = \left\{\lambda : 0 < \lambda < \infty \quad et \quad R(\lambda I - A) = X\right\}$$

Soit $\lambda \in \Lambda$. *Donc d'aprés (1.39)* $\lambda \in \rho(A)$
puisque $\rho(A)$ *est ouvert alors il existe un voisinage de* λ *qui est contenu dans* $\rho(A)$ *et donc l'intersection de ce voisinage avec la droite réelle est dans* Λ *ie :* Λ *serait ouvert.*
D'autre part soit

$$(\lambda_n) \subset \Lambda \quad , \quad \lambda_n \longrightarrow \lambda$$

alors pour $y \in X \quad , \quad \exists (x_n) \in D(A)$ *telle que*

$$\lambda_n x_n - A x_n = y \tag{1.40}$$

Donc de (1.39) il s'ensuit que

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|y\| \leq c$$

pour un certain $c > 0$. *Alors*

$$\begin{aligned}\lambda_m\|x_n - x_m\| &\leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m|\|x_n\| \leq c|\lambda_n - \lambda_m| \end{aligned} \tag{1.41}$$

donc $\left\{x_n\right\}$ *est une suite de cauchy alors* $\exists x \in X$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$ *donc de (1.40)* $Ax_n \longrightarrow \lambda x - y$ *et puisque* A *est fermé donc* $x \in D(A)$ *et* $\lambda x - Ax = y$ *comme* $R(\lambda I - A) = X$, *alors* $\lambda \in \Lambda$. *donc* Λ *est aussi un fermé dans* $\left]0, +\infty\right[$. *et puisque* $\lambda_0 \in \Lambda$ *par hypothése* $\Lambda \neq \emptyset$ *alors* $\Lambda = \left]0, +\infty\right[$ *ce qui termine la démonstration de (a).*
Montrons maintenant (b). Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe de contractions T(t) sur X, alors d'aprés le théoréme de Hille-Yossida* $\left]0, +\infty\right[\subset \rho(A)$ *et donc* $R(\lambda I - A) = X \quad , \quad \forall \lambda > 0$
Donc si $x \in D(A)$ *et* $f \in F(x)$ *alors*

$$\begin{aligned}|\langle f, T(t)x\rangle| &\leq \|f\|\|T(t)x\| \\ &\leq \|x\|^2\end{aligned}$$

et de là :

$$Re\langle f, T(t)x - x\rangle = Re\langle f, T(t)x\rangle - \|x\|^2 \leq 0 \tag{1.42}$$

en divisant (1.42) par $t > 0$ *et en passant à la limite* $t \overset{>}{\rightarrow} 0$ *on aura :*

$$Re\langle f / Ax\rangle \leq 0 \quad , \quad \forall f \in F(x) \tag{1.43}$$

Ce qui termine la démonstration de (b).

Corollaire 1.2.7 *[3]*
Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense. Si A et A^* sont dissipatifs alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X.

Preuve 1.2.18 *[3]*
D'aprés le théoréme 1.2.9 il est suffisant de montrer que $R(\lambda I - A) = X$, puisque A est dissipatif et fermé $R(I - A)$ est un sous-espace fermé de X. Si $R(I - A) \neq X$ alors il existe $f \in X^*$ (d'aprés un corollaire du théoréme de Hauh-Banach) $f \neq 0$ telle que

$$\langle f / x - Ax \rangle \quad = \quad 0 \quad , \quad \forall x \in D(A)$$

ce qui implique que $f - A^* f = 0$. Puisque A^* est aussi dissipatif donc $f = 0$ ce qui donne une contradiction et de là $R(I - A) = X$
Donnons maintenant quelques propriétés des opérateurs dissipatifs.

Théoréme 1.2.10 *[3]*
Soit A un opérateur dissipatif dans X.

(a) *Si pour un certain $\lambda_0 > 0$ $\;Im(\lambda_0 I - A) = X$, alors*

$$Im(\lambda I - A) = X \quad , \quad \forall \lambda > 0$$

(b) *Si A est un fermable alors $\overline{A}$, la fermeture de A, est aussi dissipatif.*

(c) *Si $\overline{D(A)} = X$ alors A est fermable.*

Preuve 1.2.19 *[3]*
(a) se démontre de la même maniére que dans la partie (a) du théoréme 1.2.9.
Pour montrer (b) soit $x \in D(\overline{A})$, $y = \overline{A}x$ alors il existe une suite $\{x_n\} \subset D(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \longrightarrow y = \overline{A}x$ du théoréme 1.2.9 il s'ensuit que

$$\|\lambda x_n - Ax_n\| \quad \geq \quad \lambda \|x_n\| \quad , \quad \lambda > 0$$

par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ on aura :

$$\|\lambda x - \overline{A}x\| \quad \geq \quad \lambda \|x\| \quad , \quad \forall \lambda > 0 \tag{1.44}$$

Puisque (1.44) est vraie pour tout $x \in D(\overline{A})$ alors $\overline{A}$ est dissipatif d'aprés le théoréme 1.2.8. Pour montrer (c) supposons que A n'est pas fermable. Alors on peut trouver une suite

$\{x_n\} \subset D(A)$ $x_n \longrightarrow 0$ *et* $Ax_n \longrightarrow y$ *avec* $\|y\| = 1$. *D'aprés le théoréme 1.2.8 on a pour tout* $t > 0$ *et* $x \in D(A)$

$$\|(x + t^{-1}x_n) - tA(x + t^{-1}x_n)\| \quad \geq \quad \|(x + t^{-1}x_n)\|$$

par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ *et* $t \longrightarrow 0$ *on aura :*

$$\|x - y\| \quad \geq \quad \|x\| \quad , \quad \forall x \in D(A)$$

Mais ceci est impossible si D(A) est dense dans X et par suite A est fermable.

Théoréme 1.2.11 *[3]*
Soit A un opérateur dissipatif tel que $R(I-A) = X$. *Si X est un espace réflexif alors* $\overline{D(A)} = X$

Preuve 1.2.20 *[3]*
Soit $f \in X^*$ *telle que* $\langle f / x \rangle = 0 \quad , \quad \forall x \in D(A)$.
On doit montrer que $f = 0$. *Puisque* $R(I-A) = X$ *il est suffisant de montrer que* $\langle f / x - Ax \rangle = 0 \quad , \quad \forall x \in D(A)$ *ce qui est équivalent à* $\langle f / Ax \rangle = 0$ *pour tout* $x \in D(A)$. *Soit* $x \in D(A)$ *d'aprés le théoréme 1.2.10 (a) il existe* $x_n \in D(A)$ *telle que* $x = x_n - \frac{1}{n}Ax_n$.
Puisque $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$ *alors* $x_n \in D(A^2$ *et* $Ax = Ax_n - \frac{1}{n}A^2x_n$
ie : $Ax_n = (I - \frac{1}{n}A)^{-1}Ax$.
Du théoréme 1.2.8 on sait que

$$\left\|\left(I - (\frac{1}{n})A\right)^{-1}\right\| \leq 1$$

alors

$$\|Ax_n\| \quad \leq \quad \|Ax\|$$

de même

$$\|x_n - x\| \quad \leq \quad \frac{1}{n}\|Ax_n\| \quad \leq \quad \frac{1}{n}\|Ax\|$$

ce qui prouve que $x_n \longrightarrow x$. *Puisque* $\|Ax_n\| \leq c$ *et que X est réflexif alors il existe une sous-suite* $\left\{Ax_{n_k}\right\}$ *qui est faiblement convergente*
ie : $Ax_{n_k} \longrightarrow y \qquad faiblement$
Puisque aussi A est fermé il s'ensuit que $y = Ax$
Finalement, puisque $\langle f / z \rangle = 0 \quad , \quad \forall z \subset D(A)$
On a

$$\langle f / Ax_{n_k} \rangle \quad = \quad x_k \langle f / x_{n_k} - x \rangle \quad = \quad 0$$

Par passage à la limite on aura :

$$\langle f / Ax \rangle \quad = \quad 0 \quad , \quad \forall x \subset D(A)$$

ie : $f = 0$ *et donc* $\overline{D(A)} = X$.

1.2.5 Caractérisation du générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe

Dans les précédentes sections nons avons pu caractériser le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, et par la même Caractérisation nons sommes arrivés à donner une Caractérisation du générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés qui satisfont à $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. On va maintenant essayer de donner une Caractérisation d'un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe en général. En utilisant les mêmes arguments que précédemment, nous montrons que pour caractériser le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe uniformément bornés. Ceci est possible en équipant l'espace de Banach X par une autre norme équivalent pour laquelle le C_0 semi-groupe uniformément borné sera un C_0 semi-groupe de contractions pour la nouvelle norme et ensuite on utilise la Caractérisation déjà donnée pour le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions.

lemme 1.2.5 *[3]*
Soit A un opérateur linéaire tel que $\left]0, +\infty\right[\subset \rho(A)$ *si :*

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n\| \quad \leq \quad M \quad , \quad \forall \lambda > 0 \quad , \quad \forall n = 1, 2, ... \tag{1.45}$$

Alors il existe une norme $|.|$ *sur X, équivalente à la norme originale dans X,* $\|.\|$ *et qui satisfait :*

$$\|x\| \quad \leq \quad |x| \quad \leq \quad M\|x\| \quad , \quad \forall x \in X \tag{1.46}$$

et

$$|\lambda R(\lambda; A)x| \quad \leq \quad |x| \quad , \quad \forall x \in X \quad , \quad \forall \lambda > 0 \tag{1.47}$$

Preuve 1.2.21 *[3]*
Soit $\mu > 0$ *et*

$$\|x\|_\mu \quad = \quad \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu; A)^n x\| \tag{1.48}$$

alors il est évident que

$$\|x\| \quad \leq \quad \|x\|_\mu \quad \leq \quad M\|x\| \tag{1.49}$$

et

$$\|\mu R(\mu; A)\|_\mu \quad \leq \quad 1 \tag{1.50}$$

on peut aussi voir que

$$\|\lambda R(\lambda; A)\|_\mu \quad \leq \quad 1 \quad , \quad 0 < \lambda \leq \mu \tag{1.51}$$

En effet si $y = R(\lambda; A)x$ *alors*

$$y = R(\mu; A)\Big(x + (\mu - \lambda)y\Big)$$

et de (1.50) on peut déduire que

$$\|y\|_\mu \leq \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)\|y\|_\mu$$

donc

$$\lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu.$$

De (1.49) et (1.51) il s'ensuit que

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda; A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu \quad , \quad pour \quad 0 < \lambda \leq \mu \tag{1.52}$$

prenons le sup *sur* $n \geq 0$ *au premier membre de la relation (1.52) ce qui donne*

$$\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu \quad pour \quad 0 < \lambda \leq \mu.$$

Finalement on définit

$$|x| = \lim_{\mu \to +\infty} \|x\|_\mu \tag{1.53}$$

alors (1.46) découle directement de (1.49) prenons $n = 1$ *dans (1.52) on aura :*

$$\|\lambda R(\lambda; A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

et (1.47) s'ensuit en passant à la limite quand $\mu \longrightarrow +\infty$.

Théoréme 1.2.12 *[3]*
Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t), qui satisfais* $\|T(t)\| \leq M \quad \big(M \geq 1\big)$ *si et seulement si :*

(i) *A est fermé et D(A) est dense dans X.*

(ii) *l'ensemble résolvant* $\rho(A)$ *contient* $\big]0, +\infty\big[$ *et*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq M/\lambda^n \quad pour \quad \lambda > 0 \quad , \quad n = 1, 2, ... \tag{1.54}$$

Preuve 1.2.22 *[3]*
Soit T(t) un C_0 *semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si la norme de X est changée par une norme équivalent* $\big(T(t)\big)$ *restera aussi un* C_0 *semi-groupe sur X pour la nouvelle norme. Le générateur infinitésimal A lui aussi ne changera pas il restera fermé et à domaine dense lorsque on passe à une norme équivalente. Soit A le générateur infinitésimal du* C_0

semi-groupe tele que $\|T(t)\| \leq M$.
définissons alors :

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| \tag{1.55}$$

Alors

$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\| \tag{1.56}$$

et donc $|.|$ *est une norme sur X qui est équivalente à la norme* $\|.\|$*, en plus on a :*

$$\begin{aligned} |T(t)x| &= \sup_{s\geq 0} \|T(s)T(t)x\| \\ &\leq \sup_{s\geq 0} \|T(s)x\| = |x| \end{aligned} \tag{1.57}$$

c'est-à-dire que T(t) est un C_0 *semi-groupe de contractions sur X muni de la norme* $|.|$.
Donc d'aprés le théoréme de Hille-Yossida A est fermé et à domaine dense et des relations (1.56) et (1.57) on aurra

$$|R(\lambda; A)| \leq \lambda^{-1} \quad , \quad \forall \lambda > 0$$

par conséquent on aura :

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)^n x\| &\leq |R(\lambda; A)^n x| \\ &\leq \frac{1}{\lambda^n}|x| \\ &\leq \frac{M}{\lambda^n}\|x\| \end{aligned}$$

et donc les conditions (i) et (ii) sont nécessaires.
Supposons que les condition (i) et (ii) sont satisfaites. D'aprés le lemma1.2.5 il existe une norme $|.|$ *dans X qui satisfait (1.46) et (1.47). Donc si on considére X muni de cette nouvelle norme. A est fermé à domaine dense avec* $\left]0, +\infty\right[\subset \rho(A)$ *et* $|R(\lambda; A)| \leq \frac{1}{\lambda}$ $\quad , \quad \forall \lambda > 0$ *d'aprés le théoréme de Hille-Yossida A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions sur X muni de la norme* $|.|$.
Si on revient à la norme initiale A est aussi le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t) et*

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|$$

ie : $\|T(t)\| \leq M$.
Si T(t) est un C_0 *semi-groupe en générale on sait d'aprés le théoréme 1.2.3 qu'il existe* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *telle que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

considérons le C_0 *semi-groupe* $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ *alors* $\|S(t)\| \leq M$ *et A est le générateur infini-*

tésimal de T(t) si et seulement si $A-\omega I$ est le générateur infinitésimal de S(t). En utilisant ces remarques et le théoréme 1.2.12 (précédent) on obtient le théoréme suivant :

Théoréme 1.2.13 *[3]*
L'opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe T(t) , qui satisfais $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ si et seulement si :

(i) *A est fermé et D(A) est dense dans X.*

(ii) *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ contient $\left]\omega,+\infty\right[$ et*

$$\|R(\lambda;A)^n\| \quad \leq \quad \frac{M}{\lambda-\omega}^{n} \quad pour \quad \lambda > \omega \quad , \quad n = 1,2,.... \tag{1.58}$$

Remarque 1.2.4 *[3]*
La condition : $\forall\lambda \;,\; \lambda > \omega \;,\; \lambda \in \rho(A)$ et que l'estimation (1.58) est vérifiée implique que $\forall\lambda$ complexe qui satisfait $Re(\lambda) > \omega$, $\lambda \in \rho(A)$ et que

$$\|R(\lambda;A)^n\| \quad \leq \quad \frac{M}{Re\lambda-\omega}^{n} \quad pour \quad Re\lambda > \omega \quad , \quad n = 1,2,.... \tag{1.59}$$

Théoréme 1.2.14 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe T(t) sur X. Si A_λ est l'approximation Yossida de A. ie : $A_\lambda = \lambda AR(\lambda;A)$ alors

$$T(t)x \quad = \quad \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$$

1.2.6 Deux formules exponentielles

Comme nous l'avons va précédemment théoréme 1.2.14, si T(t) est un C_0 semi-groupe donc en quelque sorte il est égal à e^{tA} oú A est le générateur infinitésimal de T(t) . L'égalité a bien lieu si A est borné. Dans le cas oú A est non-borné le théoréme 1.2.14 donne une interprétation pour laquelle T(t) est considéré comme e^{tA}.
On va donner encore deux formules de la même nature, ie : qui peuvent donner une interprétation exponentielle au C_0 semi-groupe T(t).

Théoréme 1.2.15 *[3]*
Soit T(t) un C_0 semi-groupe sur X. Si

$$A(h)x \quad = \quad \frac{T(h)x-x}{h} \tag{1.60}$$

alors pour tout $x \in X$ on a :

$$T(t)x \quad = \quad \lim_{h \to 0} e^{tA(h)}x \tag{1.61}$$

et la limite est uniforme en t dans tout intervalle borné [0 , T].

Preuve 1.2.23 *[3]*
Soit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ telle que $\omega \geq 0$ et soit A le générateur infinitésimal de T(t).
Puisque pour tout $h > 0$ A(h) est borné, $e^{tA(h)}$ est bien défini et encore plus puisque A(h) commute avec T(t) alors T(t) commute avec $e^{tA(h)}$.
On a aussi :

$$\begin{aligned} \|e^{tA(h)}\| &\leq e^{-\frac{t}{h}} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{t}{h})^k \frac{\|T(hk)\|}{k!} \\ &\leq Mexp\Big\{\frac{t}{h}\Big(e^{\omega h} - 1\Big)\Big\} \end{aligned}$$

donc pour tout h, $0 < h \leq 1$, on a :

$$\|e^{tA(h)}\| \quad \leq \quad Me^{t(e^{\omega}-1)}$$

Il est facile de vérifier que pour $x \in D(A)$, $e^{(t-s)A(h)}T(s)x$ est différentiable en s et que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big(e^{(t-s)A(h)}T(s)x\Big) &= -A(h)e^{(t-s)A(h)}T(s)x + e^{(t-s)A(h)}AT(s)x \\ &= e^{(t-s)A(h)}T(s)(Ax - A(h)x). \end{aligned}$$

par conséquent, pour $0 < h \leq 1$ et $x \in D(A)$ on a :

$$\begin{aligned} \|T(t)x - e^{tA(h)}x\| &= \|\int_0^t \frac{d}{ds}\Big(e^{(t-s)A(h)}T(s)x\Big)ds\| \\ &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)A(h)}\|\|T(s)\|\|Ax - A(h)x\|ds \\ &\leq tM^2e^{t(e^{\omega}+\omega-1)}\|Ax - A(h)x\| \end{aligned} \tag{1.62}$$

en passant à la limite quand $h \longrightarrow 0$ alors on déduit que (1.61) est vraie pour $x \in D(A)$. Puisque $\|e^{tA(h)}\|$ et $\|T(t)\|$ sont uniformément borné sur tout intervalle borné en t et puisque D(A) est dense dans X alors (1.61) est aussi vraie pour tout $x \in X$

Théoréme 1.2.16 *(la forme exponentielle)[3]*
Soit T(t) un C_0 semi-groupe. Si A est le générateur infinitésimal de T(t) alors

$$T(t)x \quad = \quad \lim_{n \to +\infty} \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} x$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{n}{t}R\Big(\frac{n}{t};A\Big)\Big]^n x \quad , \quad \forall x \in X \tag{1.63}$$

et la limite est uniforme en t sur tout intervalle borné.

1.2.7 Différentiabilité

Définition 1.2.8 *[3]*
Soit T(t) un C_0 semi-groupe sur un espace de Banach X. Le semi-groupe T(t) est dit différentiable pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$, $t \hookrightarrow T(t)x$ est différentiable s'il est différentiable pour $t > 0$.
On sait que d'aprés le théoréme 1.2.4 partie (c) que si T(t) est un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal et $x \in D(A)$ alors $t \hookrightarrow T(t)x$ est différentiable pour $t \geq 0$. Si en plus T(t) est différentiable alors pour tout $x \in X$, $t \hookrightarrow T(t)x$ est différentiable pour $t > 0$. Notons que si $t \hookrightarrow T(t)x$ est différentiable pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$ alors $D(A) = X$ et puisque A est fermé il est nécessairement borné.

lemme 1.2.6 *[3]*
Soit T(t) un C_0 semi-groupe qui est différentiable pour $t > t_0$ et soit A son générateur infinitésimal alors

(a) *Pour $t > nt_0$, $n = 1, 2, ..$ $T(t) : X \longrightarrow D(A^n)$ et $T^n(t) = A^nT(t)$ est un opérateur linéaire borné.*

(b) *Pour $t > nt_0$, $n = 1, 2, ..$ $T^{n-1}(t)$ est continu pour la topologie uniforme des opérateurs.*

Corollaire 1.2.8 *[3]*
Soit T(t) un C_0 semi-groupe qui est différentiable pour $t > t_0$. Si $t > (n+1)t_0$ alors T(t) est n fois différentiable pour la topologie uniforme des opérateurs.

Corollaire 1.2.9 *[3]*
Si T(t) est un C_0 semi-groupe différentiable alors T(t) est indéfiniment différentiable pour la topologie uniforme des opérateurs.

lemme 1.2.7 *[3]*
Soit T(t) un C_0 semi-groupe différentiable et soit A son générateur infinitésimal alors

$$T^n(t) \quad = \quad \Big(AT(\frac{t}{n})\Big)^n \quad = \quad \Big(T'(\frac{t}{n})\Big)^n \quad , \quad n = 1, 2, .. \tag{1.64}$$

lemme 1.2.8 *[3]*
Soit T(t)un C_0 *semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal, si T(t) est différentiable pour* $t > t_0$ *et* $\lambda \in \sigma(A)$, *alors*

$$\lambda e^{\lambda t} \in \sigma(T(t)A)$$

Théoréme 1.2.17 *[3]*
Soit T(t) un C_0 *semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal. Si* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ *alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe* $t_0 > 0$ *telle que T(t) est différentiable pour* $t > t_0$.

(ii) *Il existe des constantes a, b et c telle que* $b > 0$ *et* $c > 0$

$$\rho(A) \supset \Sigma \quad = \quad \left\{\lambda : Re\lambda \geq a - blog|Im\lambda|\right\} \tag{1.65}$$

et

$$\|R(\lambda;A)\| \quad \leq \quad c|Im\lambda| \quad , \quad pour\lambda \in \Sigma \quad , \quad Re\lambda \leq \omega. \tag{1.66}$$

Théoréme 1.2.18 *[3]*
Soit T(t) un C_0 *semi-groupe satisfaisant* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ *et soit A son générateur infinitésimal. T(t) est différentiable si et seulement si pour tout* $b > 0$ *il existe des constantes* a_b *réelles et* C_b *positives telle que*

$$\rho(A) \supset \Sigma_b \quad = \quad \left\{\lambda : Re\lambda \geq a_b - b\log|Im\lambda|\right\} \tag{1.67}$$

et

$$\|R(\lambda;A)\| \quad \leq \quad C_b|Im\lambda| \quad , \quad pour\lambda \in \Sigma_b \quad , \quad Re\lambda \leq \omega \tag{1.68}$$

Théoréme 1.2.19 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t) satisfaisant* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. *Si pour un certain* $\mu \geq \omega$

$$\lim_{|\tau| \to +\infty} \sup log|\tau|\|R(\mu + i\tau;A)\| \quad = \quad c < +\infty. \tag{1.69}$$

alors T(t) est différentiable pour $t > 3c$

Corollaire 1.2.10 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t) satisfaisant* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. *Si pour un certain* $\mu \geq \omega$

$$\lim_{|\tau| \to +\infty} \sup log|\tau|\|R(\mu + i\tau;A)\| \quad = \quad 0 \tag{1.70}$$

alors T(t) est un semi-groupe différentiable.

Théoréme 1.2.20 *[3]*
Soit T(t) un C_0 *semi-groupe satisfaisant* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. *S'il existe* $C > 0$ *et* $\delta_0 > 0$ *telle que*

$$\|T(t) - I\| \quad \leq \quad 2 - Ct\log(\frac{1}{t}) \quad , \quad 0 < t < \delta_c \tag{1.71}$$

alors T(t) est différentiable pour $t \geq \frac{3M}{C}$

Corollaire 1.2.11 *[3]*
Soit T(t) un C_0 *semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal. Si A est non borné alors*

$$\limsup_{t \searrow o} \|I - T(t)\| \quad \geq \quad 2 \tag{1.72}$$

1.3 Probléme de cauchy abstrait

1.3.1 Probléme de cauchy homogéne :

Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire défini de $D(A) \subset X$ dans X. Pour $x \in X$ donné le probléme de cauchy abstrait pour A avec la condition initiale x consiste à chercher une solution u(t) pour le probléme de cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) \quad , \quad t > 0 \\ u(0) &= x \end{cases} \tag{1.73}$$

où on eutend par solution une fonction u(t) à valeurs dans X telle que u(t) est continue pour $t \geq 0$, continûment différentiable et $u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et que u(t) satisfais (1.73). Notons que puisque $u(t) \in \underline{D(A)}$ pour $t > 0$ et u est continue au point $t = 0$, (1.73) ne peut avoir de solution pour $x \notin \overline{D(A)}$.
D'aprés les résolutions précédent si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe T(t), le probléme de cauchy abstrait pour A admet une solution, à savoir $u(t) = T(t)x$ pour tout $x \in D(A)$ (théoréme 1.2.4).
Il n'est pas assez difficile de voir que pour $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ est la sule solution du probléme (1.73).
Réellement, l'unicité de la solution est garantie par des conditions beaucoup plus faibles comme nous le verrons par la suite.
Donnons d'abord un lemme qu'on utilisera par la suite.

lemme 1.3.1 *[3]*

Soit u(t) une fonction à valeurs dans X continue sur [0 , T]. Si

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s) ds \right\| \quad \leq \quad M \quad pour \quad n \quad = 1, 2, .. \tag{1.74}$$

alors $u(t) = 0$ *sur [0 , T].*

Théoréme 1.3.1 *[3]*
Soit A un opérateur linéaire à domaine dense. Si $R(\lambda; A)$ *existe pour tout réel* $\lambda \geq \lambda_0$ *et*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-1} log \|R(\lambda; A)\| \quad \leq \quad 0 \tag{1.75}$$

Alors le probléme de cauchy (1.73) admet au plus une solution pour tout $x \in X$.

Preuve 1.3.1 *[3]*
Notons d'abord que u(t) est une solution de (1.73) si et seulement si $e^{\alpha t} u(t)$ *est une solution du probléme de cauchy*

$$\frac{dv}{dt} = (A + \alpha I) v \quad , \quad v(0) = x$$

c'est-à-dire on peut toujours translater A par une constante multipliée par l'identité et supposer que $R(\lambda, A)$ *existe pour tout réel* λ, $\lambda \geq 0$ *et que (1.75) est satisfais.*
Soit u(t) une solution de (1.73) qui satisfait $u(0) = 0$. *On démontre que* $u(t) = 0$.
Considérons la fonction $t \hookrightarrow R(\lambda; A) u(t$ *pour* $\lambda > 0$ *puisque u(t) est solution de (1.73) alors :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R(\lambda; A) u(t) \quad &= \quad R(\lambda; A) A u(t) \\ &= \quad \lambda R(\lambda; A) u(t) - u(t) \end{aligned}$$

ie :

$$R(\lambda; A) u(t) \quad = \quad - \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u(\tau) d\tau \tag{1.76}$$

Donc de (1.75) on peut facilement voir que pour $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda; A)\| \quad = \quad 0$$

donc il s'ensuit de (1.76) que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)} u(\tau) d\tau \quad = \quad 0 \tag{1.77}$$

Alors d'aprés le lemme 1.3.1 on déduit que

$$u(\tau) \quad = \quad 0 \quad pour \quad 0 \leq \tau \leq t - \sigma$$

et puisque t et σ sont arbitraires alors

$$u(t) \quad = \quad 0 \quad pour \quad t \geq 0$$

Du théoréme précédent il s'ensuit que pour obtenir l'unicité de la solution du probléme de cauchy (1.73) il n'est pas nécessaire de supposer que A est un générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe ou ce qui est équivalent à ce que pour un certain* $\omega \in \mathbb{R}$, $\rho(A) \supset \left]\omega, +\infty\right[$ *et*

$$\|(\lambda - \omega)^n R(\lambda; A)^n\| \quad \leq \quad M \quad pour \quad \lambda > \omega$$

ce qui est beaucoup moins suffisant pour l'unicité.
De même pour l'existence de la solution de (1.73) il n'est pas nécessaire de supposer que A est aussi générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe. En choisissant l'ensemble D des condition initiales, la solution de (1.73) peut exister sous des hypothéses beaucoup plus faibles . Cependant pour obtenir l'existence et l'unicité pour tout* $x \in D(A)$ *comme étaut une solution différentiable sur* $\left[0, +\infty\right[$. *On doit supposer que A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe. Ce qui est donné dans le théoréme suivant.*

Théoréme 1.3.2 *[3]*
Soit A un opérateur linéaire à domaine dense tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. *Le probléme de cauchy (1.73) admet une unique solution u(t), continûment différentiable sur* $\left[0, +\infty\right[$, *pour toute condition initiale* $x \in D(A)$ *si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe T(t).*

Dans le théoréme suivant on va donner un résultat d'existence et d'unicité pour le probléme de cauchy (1.73) où la condition initiale $x \in X$.

Théoréme 1.3.3 *[3]*
Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe différentiable alors pour tout* $x \in X$ *Le probléme de cauchy (1.73) avec la condition initiale* $x \in X$ *admet une unique solution.*

Preuve 1.3.2 *[3]*
L'unicité de la solution découle du théoréme 1.3.1. Si $x \in D(A)$ *l'existence découle du théoréme 1.3.1 (précédent). Si* $x \in X$ *alors de la différentiabilité de* $T(t)x$ *il s'ensuit que pour tout* $x \in X$

$$\frac{d}{dt}\Big(T(t)x\Big) \quad = \quad AT(t)x \quad pour \quad t > 0$$

et $AT(t)x$ *continue pour* $t > 0$ *et donc* $T(t)x$ *est la solution du probléme de cauchy (1.73).*

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe qui n'est pas différentiable.
En général si $x \notin D(A)$, le probléme de cauchy (1.73) n'a pas de solution. La fonction $t \hookrightarrow T(t)x$ est alors une solution " généralisée " du probléme (1.73) qu'on appelle aussi solution faible. Il existe différentes façons de définir la solution " généralisée " du probléme (1.73), mais toutes les définitions ont un rapport direct avec $T(t)x$. L'une des définitions de la solution généralisée est donnée comme suit :
Une fonction continue sur $\left[0, +\infty\right[$ est une solution généralisée de (1.73) s'il existe $x_n \in D(A)$ tels que $x_n \longrightarrow u(0) \quad , \quad n \longrightarrow +\infty$ et $T(t)x_n u(t)$ uniformément sur des intervalles bornés. Il est évident que cette définition de la solution " généralisée " est indépendante de la suite $\left\{x_n\right\}$, cette solution généralisée est unique et si $u(0) \in D(A)$ elle donne la solution du probléme (1.73). Il est clair que pour cette définition de la solution " généralisée ", le probléme (1.73) admet une solution généralisée pour tout $x \in X$ et que cette solution généralisée est $T(t)x$.

1.3.2 Probléme de cauchy non homogéne :

Considérons le probléme de cauchy non homogéne suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{du(t)}{dt} & = & Au(t) + f(t) \quad , \quad t > 0 \\ u(0) & = & x \end{array}\right. \tag{1.78}$$

où $f : [0, T[\quad \longrightarrow \quad X$.
Dans toute la suite on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe T(t), et donc le probléme homogéne correspondant admet une unique solution pour toute condition initiale $x \in D(A)$.

Définition 1.3.1 *[3]*
Une fonction $u : [0, T[\quad \longrightarrow X$ *est une solution (classique) du probléme (1.78) sur* $[0, T[$, *continûment différentiable sur* $]0, T[$. $u(t) \in D(A)$ *pour* $0 < t < T$ *et (1.78) est satisfait sur* $[0, T[$. *Soit T(t) le* C_0 *semi-groupe généré par A et soit u la solution de (1.78). Alors la fonction* $g(s) = T(t-s)u(s)$, *qui est à valeurs dans X, est différentiable pour* $0 < s < t$ *et*

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s) \end{aligned} \tag{1.79}$$

Si $f \in L^1\big(0,T;X\big)$ *alors* $T(t-s)f(s)$ *est intégrable et si on intége (1.79) de 0 à t on aura :*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{1.80}$$

Par conséquent on a :

Corollaire 1.3.1 *[3]*
Si $f \in L^1\big(0,T;X\big)$ *alors pour tout* $x \in X$ *le probléme de cauchy (1.78) non homogéne au plus une solution. S'il admet une solution elle est donnée par (1.80).*

Pour tout $f \in L^1\big(0,T;X\big)$ le second membre de (1.80) est une fonction continue sur $\big[0,T\big]$, il est naturel de la considérer comme une solution généralisée du probléme (1.78) même si elle n'est pas différentiable et ne satisfais pas l'éuqtion au sens strict de la définition 1.3.1. Alors on peut donner la définition suivante :

Définition 1.3.2 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Soit* $x \in X$ *et* $f \in L^1\big(0,T;X\big)$.
La fonction $u \in C\big([0,T];X\big)$ *donnée par*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad 0 \leq t \leq T$$

est appelée solution généralisée du probléme de cauchy (1.78) sur $\big[o,T\big]$.

La définition de la solution généralisée du probléme non homogéne (1.78) coïncide avec la définition $T(t)x$, lorsque $f = 0$, de la solution généralisée du probléme homogéne correspondant. Donc il est clair que toute solution généralisée peut ne pas être solution même si $f \equiv 0$.
Pour $f \in L^1\big(0,T;X\big)$ le probléme de cauchy non homogéne (1.78) admet, d'aprés la définition 1.3.2 une unique solution généralisée.
Dans ce qui suit on va imposer plus de conditions sur f(t) et prendre $x \in D(A)$ et on arrive à montrer que la solution généralisée deviendra alors la solution classique du probléme non homogéne (1.78).

Remarque 1.3.1 *[3]*
On peut facilement voir que la continuité de f n'est pas, en général, suffisante pour assurer l'existence de la solution de (1.78) pour $x \in D(A)$. *En effet soit A le générateur infinitésimal*

d'un C_0 *semi-groupe T(t), et soit* $x \in X$ *telle que* $T(t)x \notin D(A)$, $\forall t > 0$. *Soit* $f(s) = T(s)x$ *alors f(s) est continue pour* $s \geq 0$, *considérons le probléme de cauchy suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + T(t)x \\ u(0) &= 0 \end{cases} \tag{1.81}$$

on peut voir facilement que le probléme (1.81) n'a pas de solution même que $u(0) = 0 \in D(A)$. *En effet, la solution généralisée de (1.81) est*

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x$$

mais $tT(t)x$ *ne peut être différentiable pour* $t > 0$ *et par suite ne peut être la solution de (1.81).*
Pour pouvoir démontrer l'existence de la solution du probléme de cauchy (1.78) on doit imposer à f d'autres condition plus que la continuité.

Théoréme 1.3.4 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Soit* $f \in L^1\big(0, T; X\big)$ *une fonction continue sur* $\big]o, T\big]$ *et soit*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad 0 \leq t \leq T \tag{1.82}$$

Le probléme de cauchy non homogéne (1.78) admet une solution u sur $\big[o, T\big[$ *pour tout* $x \in D(A)$ *si l'une des deux conditions est satisfais :*
(i) *v(t) est continûment différentiable sur* $\big]o, T\big[$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ *pour* $0 < t < T$ *et Av(t) est continue sur* $\big]o, T\big[$

Si (1.78) admet une solution u sur $\big[o, T\big[$ *pour un* $x \in D(A)$ *alors v satisfait les deux conditions (i) et (ii) en même temps.*

Preuve 1.3.3 *[3]*
Si le probléme de cauchy (1.78) admet une solution u pour $x \in D(A)$ *alors cette solution est donnée par (1.80) et par conséquent* $v(t) = u(t) - T(t)x$ *est différentiable pour* $t > 0$ *comme somme de deux fonctions différentiables et on a* $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$ *qui est aussi une fonction continue sur* $\big]o, T\big[$ *et donc (i) est satisfaite. De même si* $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ *pour* $t \geq 0$ *et donc*

$$v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A) \qquad pour \quad t > 0$$

et

$$\begin{aligned} Av(t) &= Au(t) - AT(t)x \\ &= u'(t) - f(t) - T(t)Ax \end{aligned}$$

qui est une fonction continue sur $\left]o, T\right[$ *et donc (ii) est aussi satisfaite*
D'autre part il est facile de vérifier que pour $h > 0$

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) ds \tag{1.83}$$

De la continuité de f il est clair que le second terme du second membre de (1.83) tend vers f(t) lorsque $h \longrightarrow 0$.
Donc si v(t) est continûment différentiable sur $\left]o, T\right[$ *alors de (1.83) il s'ensuit que* $v(t) \in D(A)$ *pour* $0 < t < T$ *et* $Av(t) = v'(t) - f(t)$.
Puisque $v(0) = 0$ *alors* $u(t) = T(t)x + v(t)$ *est la solution du probléme de cauchy (1.78) pour* $x \in D(A)$. *Si* $v(t) \in D(A)$ *de la relation (1.83) on peut déduire que la dérivation à droite* $D^{+}v(t)$ *de v satisfait la relation suivante :*

$$D^{+}v(t) = Av(t) + f(t)$$

donc $D^{+}v(t)$ *serait une fonction continue alors v(t) est continûment différentiable et* $v'(t) = Av(t) + f(t)$ *et puisque aussi* $v(0) = 0$ *alors on en déduit que* $u(t) = T(t)x + v(t)$ *est la solution du probléme de cauchy (1.78) pour* $x \in D(A)$, *ce qui termine la démonstration.*

Corollaire 1.3.2 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Si f(s) est continûment différentiable sur* $\left[o, T\right]$ *alors le probléme de cauchy (1.78) admet une solution u sur* $\left[o, T\right[$ *pour tout* $x \in D(A)$.

Preuve 1.3.4 *[3]*
On a

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s) ds = \int_0^t T(s) f(t-s) ds \tag{1.84}$$

Il est clair de (1.84) que v(t) est différentiable pour $t > 0$ *et que sa dérivé est donnée par :*

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(s) f'(t-s) ds \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s) f'(s) ds \end{aligned}$$

donc $v'(t)$ *est continue sur* $\left]o,T\right[$ *et le résultat se déduit du théoréme précédent ie : théoréme 1.3.4 (i)*

Corollaire 1.3.3 *[3]*
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Soit* $f \in L^1\left(0,T;X\right)$ *une fonction continue sur* $\left]o,T\right[$, *si* $f(s) \in D(A)$ *pour* $0 < s < T$ *et* $Af(s) \in L^1\left(0,T;X\right)$ *alors pour tout* $x \in D(A)$ *le probléme de cauchy (1.78) admet une solution sur* $\left[o,T\right[$.

Preuve 1.3.5 *[3]*
Des hypothéses on a pour $s > 0$

$$T(t-s)f(s) \in D(A)$$

et que

$$AT(t-s)f(s) \quad = \quad T(t-s)Af(s)$$

est intégrable .
Donc pour v(t), définie par (1.82) , satisfait à $v(t) \in D(A)$ *pour* $t > 0$ *et*

$$Av(t) \quad = \quad A\int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad = \quad \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

est continue et donc le résultat du corollaire se déduit directement du théoréme 1.3.4 (ii).

Théoréme 1.3.5 *[3]*
Soit $f \in L^1\left(0,T;X\right)$ *si* u *est la solution généralisée de (1.78) sur* $\left[o,T\right]$ *alors pour tout* $T' < T$, u *est limite uniforme sur* $\left[o,T'\right]$ *des solutions de (1.78).*

Preuve 1.3.6 *[3]*
Supposons que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega}t$. *Soit* $x_n \in D(A)$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$ *et soit aussi* $f_n \in C^1\left([0,T],X\right)$ *telle que* $f_n \longrightarrow f$ *dans* $f \in L^1\left(0,T;X\right)$ *alors du corollaire 1.3.2 on peut déduire facilement que pour tout* $n \geq 1$ *le probléme de cauchy*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{du_n(t)}{dt} & = & Au_n(t) + f_n(t) \\ u_n(0) & = & x_n \end{array}\right. \tag{1.85}$$

admet une solution $u_n(t)$ *sur* $\left[o,T'\right[$ *qui satisfait*

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)ds$$

Si u est la solution généralisée de (1.78) sur $\left[o, T\right]$ *alors*

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq Me^{\omega t}\|x_n - x\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|f_n(s) - f(s)\|ds \\ &\leq Me^{\omega T}\Big(\|x_n - x\| + \int_0^t \|f_n(s) - f(s)\|ds\Big) \end{aligned} \tag{1.86}$$

Alors le resultat s'ensuit directement de la relation (1.86).
Donnons maintenant une autre notion de la solution du probléme de cauchy (1.78) qui est la notion de la solution forte.

Définition 1.3.3 *[3]*
Une fonction u *qui est presque partout différentiable sur* $\left[o, T\right]$ *telle que* $u' \in L^1\left(0, T; X\right)$ *est appelée solution forte du probléme de cauchy (1.78) si* $u(0) = x$ *et*

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \quad p, p \quad sur\left[o, T\right]$$

Notons que si $A = 0$ *et* $f \in L^1\left(0, T; X\right)$ *le probléme de cauchy (1.78) n'admet pas en général une solution à moins que f soit continue . Cependant il admet toujours une solution forte donnée par*

$$u(t) = u(0) + \int_0^t f(s)ds$$

Il est facile de voir que si u est solution forte de (1.78) et $f \in L^1\left(0, T; X\right)$ *alors u sera donnée par la relation (1.80) et donc c'est la solution généralisée et par suite c'est l'unique solution forte du probléme de cauchy (1.78).*
La question la plus naturelle qu'on doit se poser c'est pour quelle conditions la solution généralisée sera-t-elle solution forte du probléme de cauchy (1.78). Il n'est pas difficile de voir qu'essentiellement la démonstration du théoréme suivant ne différe pas de celle donnée pour le théoréme 1.3.4.

Théoréme 1.3.6 *[3]*
Soit le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Soit* $f \in L^1\left(0, T; X\right)$ *et soit :*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad 0 \leq t \leq T$$

Le probléme de cauchy (1.78) admet une solution forte u sur $\left[o, T\right]$ *pour tout* $x \in D(A)$ *si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

(i) *v(t) est différentiable presque partout sur* $\left[o, T\right]$ *et* $v' \in L^1\left(0, T; X\right)$

(ii) $v(t) \in D(A)$ *presque partout sur* $\left[o, T\right]$ *et* $Av(t) \in L^1\left(0, T; X\right)$

Si Le probléme de cauchy (1.78) admet une solution forte u *sur* $\left[o, T\right]$ *pour un* $x \in D(A)$ *alors v satisfait (i) et (ii).*

Comme conséquence du théoréme 1.3.6.

Corollaire 1.3.4 *[3]*
Soit A générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Si f est différentiable presque partout sur* $\left[o, T\right]$ *et* $f' \in L^1\left(0, T; X\right)$ *alors pour tout* $x \in D(A)$ *Le probléme de cauchy (1.78) admet unique solution forte sur* $\left[o, T\right]$.

En général si f est lipschitzienne sur $\left[o, T\right]$ n'est pas suffisant pour assurer l'existence de la solution forte.
Cepesndant, si X est réflexif et f lipschitzirnne sur $\left[o, T\right]$. ie :

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \quad \leq \quad C|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in \left[o, T\right]$$

alors on peut montrer que f est différentiable presque partout et que $f' \in L^1\left(0, T; X\right)$.

Donc du corollaire 1.3.4 on déduit :

Corollaire 1.3.5 *[3]*
Soit X un espace de Banach réflexif et soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 *semi-groupe T(t). Si f est lipschitzienne sur* $\left[o, T\right]$ *alors pour tout* $x \in D(A)$ *le probléme de cauchy (1.78) admet une unique solution u sur* $\left[o, T\right]$ *donnée par*

$$u(t) \quad = \quad T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Preuve 1.3.7 *[3]*
D'aprés les remarques précédentes le probléme de cauchy (1.78) admet une solution forte et donc d'aprés le théoréme 1.3.6. v(t), donnée par la relation (1.82), est presque partout dérivable et on a :

$$\begin{aligned} v'(t) &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $g(t)$ est une fonction continue et donc le résultat se déduit directement du théoréme 1.3.4.

CHAPITRE 2

THÉORIE DES FAMILLES DE COSINUS

2.1 Introduction

l'analogie existante entre la théorie des C_0 semi-groupes d'opérateurs et la théorie des fonctions des opérateurs C_0-cosinus a un caractére distinctif. D'une part , un certain nombre de définitions et de propriétés se répétent pratiquement à la lettre. En revanche, pour les équations du second ordre, par le théorème de Kisynski, l'objet principal correspondant à une fonction d'opérateur C_0-cosinus est un C_0 groupe.
Comme deuxiéme objectif, nous allons unifier et simplifier certaines idées de la théorie des familles cosinus fortement continues d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach. Nous ajouterons également quelques résultats concernant les équations nonhomogénes, et l'équivalence des équations du second ordre et des systémes du premier ordre.

2.2 Fonctions des opérateurs cosinus et sinus

2.2.1 Les famille cosinus et sinus

Définition 2.2.1 *[4]*
Une famille de cosinus fortement continue dans l'espace de Banach X est une famille à un paramétre d'opérateurs linéaires bornés $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$, en X satisfaisant

(i)

$$C(t+s) + C(t-s) \quad = \quad 2C(t)C(s) \tag{2.1}$$

pour tout $s,t \in \mathbb{R}$ *(équation fonctionnelle de d'Alembert , aussi appelée équation fonctionnelle du cosinus).*

(ii)

$$C(0) = I \tag{2.2}$$

(iii)

$$C(t)x \quad est \quad continu \quad en \quad t \quad de \quad \mathbb{R} \qquad X \quad pour \quad chaque \quad x \in X \quad fix. \tag{2.3}$$

la famille de sinus associée $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *est la famille à un paramétre d'opérateurs linéaires bornés dans* X *définis par*

$$S(t)x \quad = \quad \int_0^t C(s)xds \quad , \quad x \in X \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

et les linéaires

$$X^k \quad := \quad \left\{x \in X : C(.)x \in C^k(\mathbb{R}; X)\right\} \qquad k = 1, 2$$

Remarque 2.2.1
Les fonction cosinus sont définies sur l'espace de Banach X *et les fonctions cosinus sont définies sur* $\mathbb{R}$.
Aprés les recherches, on a trouvé que dire les familles cosinus ou les fonctions cosinus signifie la même chose.

2.2.2 Les fonction cosinus et sinus

Définition 2.2.2 *[12]*
Une fonction $C(.) : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(X)$ *est appelée opérateur cosinus (ou fonction opérateur cosinus) si elle satisfait la condition* $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$ *pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$ *et* $C(0) = I$.

Définition 2.2.3 *[12]*
Une fonction $C(.) : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(X)$ *est appelée opérateur sinus (ou fonction opérateur sinus) si elle satisfait la condition* $S(t+s) + S(t-s) = 2S(t)C(s)$ *pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$ *et* $S(0) = 0$.

Proposition 2.2.1 *[12]*
Soit un opérateur cosinus $C(.)$ *fortement mesurable sur* $\mathbb{R}_+$. *Alors elle est fortement continue sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.2 *[12]*
Soit une fonction $t \to C(t)x$ fortement mesurable sur $\mathbb{R}_+$. Elle est alors localement borné.

Théoréme 2.2.1 *[12]*
Soit une fonction d'opérateur cosinus $C(t)$ telle que sa restriction à un certain intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$ soit faiblement mesurable de Lebesgue, et soit l'espace X séparable et réflexif. Alors C(.) est faiblement continue sur $\mathbb{R}$.

2.2.3 Les fonctions cosinus et leurs générateurs

Théoréme 2.2.2 *[5]*
Si C est une fonction cosinus d'opérateur fortement continu alors il existe des constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que

$$\left\|C(t)\right\| \quad \leq \quad Me^{\omega|t|} \quad pour \quad tout \quad , t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Définition 2.2.4 *[5]*
Un opérateur linéaire A avec le domaine D(A) constitué de tous x pour lesquels il existe la limite

$$D(A) \quad = \quad \left\{x \in X; C''(0)x \quad = \quad \lim_{t \to 0^+} 2\frac{C(h)-1}{h^2}x \quad existe\right\}$$

et

$$Ax \quad = \quad \lim_{t \to 0^+} 2\frac{C(h)-I}{h^2}x$$

est appelé un générateur infinitésimal d'une fonction cosinus C(t).

Nous commencerons plotôt par définir les opérateurs résolveurs de A au lieu de A lui-même.
Soit C une fonction cosinus d'opérateur fortement continue avec

$$\left\|C(t)\right\| \quad \leq \quad M.cosh\omega t \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Puis pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\lambda > \omega$

$$t \quad \mapsto \quad e^{-\lambda t}C(t)x$$

est-ce-que Bochner est intégrable sur $[0, \infty)$ pour chaque $x \in X$. Nous mettons alors

$$R(\lambda) \quad = \quad \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)xdt \quad , \quad x \in X_0$$

Alors évidemment

$$R(\lambda) \in B(X)$$

et

$$R(\lambda)C(t) \quad = \quad C(t)R(\lambda) \quad , \quad Re\lambda > \omega \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda)\| &\leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\|C(t)\|dt \\
&\leq M\int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\cos h \quad \omega t \quad dt \\
&= \frac{M}{2}\Big(\frac{1}{Re\lambda - \omega} + \frac{1}{Re\lambda + \omega}\Big)
\end{aligned}$$

et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{N} \cup 0$

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\lambda R(\lambda)\Big\| &= \Big\|\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}C(t) \quad dt\Big\| \\
&\leq \frac{Mn!}{2}\Big(\frac{1}{(Re\lambda - \omega}\Big)^{n+1} + \frac{1}{(Re\lambda + \omega)^{n+1}}\Big)
\end{aligned}$$

Théoréme 2.2.3 *[5]*
Il existe un opérateur linéaire fermé déterminé de maniére unique A sur X telle que $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\lambda > \omega$

$$R(\lambda) \quad = \quad R(\lambda^2, A) \quad = \quad (\lambda^2 I - A)^{-1}$$

Preuve 2.2.1 *[5]*

C'est suffissant de montrer que $R(\lambda)$ est injectif et qu'il remplit équation de resolvant d'évent

$$(u^2 - \lambda^2)R(u)R(\lambda) \quad = \quad R(\lambda) - R(u) \tag{2.5}$$

Ce dernier probléme peut être réglé par un processus quelque peu fastidieux mais simple calcul.
Soit maintenant $R(\lambda)x = 0$ pour certains $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re\lambda > \omega$ et certains $x \in X$. Alors $R(u)R(\lambda)x = 0$ pour tout $u \in \mathbb{C}$ avec $Re(u) > \omega$. Selon à (2.5) cela conduit à

$$R(u)x \quad = \quad 0$$

pour tous ces u. Utilisation du Théoréme d'unicité pour la forme scalaire de laplace appliqée à (R(u) x $|$x'), $x' \in X'$ (= dual continu de X), on trouve que $C(t)x = 0$ pour tout $t \geq 0$, dont par définition 2.2.1. $x = 0$ suivre.
Mettre

$$A(\lambda) \quad = \quad \lambda^2 I - R(\lambda)^{-1}$$

$A(\lambda)$ est un operateur fermé sur X avec $D(A(\lambda)) = R(R(\lambda)) = range \quad de \quad R(\lambda)$. Ceci défini $A(\lambda)$ indépendamment de λ si seulement $Re\lambda > \omega$.
Soit $y = R(\lambda)x$, $x \in X$. Alors

$$y \quad = \quad R(\lambda)x \quad = \quad R(u)x + (u^2 - \lambda^2)R(u)R(\lambda)x \in R(R(u)), pour \quad tout \quad u \in \mathbb{C}, Re(u) > \omega$$

Donc

$$D(A(\lambda)) \quad = \quad R(R(\lambda)) \quad = \quad R(R(u)) \quad = \quad D(A(u))$$

et pour $x \in X$ on a

$$R(u)R(\lambda)\Big[\lambda^2 x - R(\lambda)^{-1}x - u^2 x + R(u)^{-1}x\Big] \quad = \quad (\lambda^2 - u^2)R(u)R(\lambda)x - R(u)x + R(\lambda)x \quad = \quad 0$$

et donc l'expression entre parenthéses est égale à 0 ce qui signifie

$$A(\lambda)x \quad = \quad A(u)x$$

Nous pouvons donc en choisir λ avec $Re(\lambda) > \omega$ et mettre

$$A \quad = \quad A(\lambda).$$

Théoréme 2.2.4 *[5]*
Avec $R(\lambda)$ défini comme ci-dessus

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Big\| \lambda^2 R(\lambda)x - x \Big\| \quad = \quad 0 \quad , \quad pour \quad chaque \quad x \in X$$

Preuve 2.2.2 *[5]*
Soit $\varepsilon > 0$ donné et prendre tel que

$$\Big\| C(t)x - x \Big\| \quad < \quad \varepsilon$$

pour tout $0 < t < \delta$. On a alors

$$\begin{aligned} \Big\| \lambda^2 R(\lambda)x - x \Big\| \quad &\leq \quad \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \Big\| C(s)x - x \Big\| ds \\ &\leq \quad \lambda\varepsilon\Big(\int_0^{\delta} e^{-\lambda s} ds\Big)\Big\|x\Big\| + \lambda\Big(\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}(Me^{\omega s} + 1)ds\Big)\Big\|x\Big\| \longrightarrow \varepsilon \quad pour \quad \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

cela donne immédiatemant.

Corollaire 2.2.1 *[5]*
Le générateur infinitésimal A de fonction cosinus d'opérateur fortement continue C est un opérateur linéaire à domaine dense sur X.

Dans ce qui suit A désigne toujours le générateur infinitésimal de la fonction cosinus de l'opérateur fortement continue C.

Théoréme 2.2.5 *[5]*
Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$C(t)D(A) \quad \subset \quad D(A)$$

et

$$C(t)Ax \quad = \quad AC(t)x$$

pour $x \in D(A)$

Preuve 2.2.3 *[5]*
Si $x \in D(A)$ *alors il y a un* $y \in X$ *tel que pour* $Re(\lambda) > \omega$

$$x \quad = \quad R(\lambda)y \quad = \quad \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda s}C(s)yds$$

Maintenant nous avons

$$C(t)x \quad = \quad C(t)R(\lambda)y \quad = \quad R(\lambda)C(t)y \in D(A)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} AC(t)x &= \lambda^2 C(t)x - C(t)R(\lambda)^{-1}x \\ &= \lambda^2 C(t)x - C(t)y \end{aligned}$$

D'autre part,

$$C(t)Ax \quad = \quad \lambda^2 C(t)x - C(t)y$$

Théoréme 2.2.6 *[5]*
Pour $x \in D(A)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\Big[C(-t)x - 2C(0)x + C(t)x\Big] \quad = \quad 2\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\Big[C(t)x - x\Big]$$

existe et est égal à Ax.

Preuve 2.2.4 *[5]*
Les rapports de différence des deux membres sont égaux, puisque C est paire. Pour $x \in D(A)$*, nous avons* $x = R(\lambda)y$ *pour certains* $y \in X$ *si* $Re(\lambda) > \omega$*.*

Alors

$$\begin{aligned} C(t)x - x &= C(t)R(\lambda)y - R(\lambda)y \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda s}C(t)C(s)yds - \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda s}C(s)yds \end{aligned}$$

De cett égalité découle le résultat au moyen de l'équation fonctionnel et aprés quelques calculs fastidieux.

Les rapports de différence symétrique dans le théoréme 2.2.6. Ne sont pas les quotients les plus généraux de seconde différence que l'on utilise pour la définition de la dérivée seconde de C.
Avant de taiter ce probléme, nous prouvons :

Théoréme 2.2.7 *[5]*
Pour $x \in D(A)$ *et* $t \in \mathbb{R}$

(i) $\int_0^t (t-u)C(u)xdu \in D(A)$

(ii)

$$\begin{aligned} C(t)x - x &= \int_0^t (t-u)C(u)Axdu \\ &= A\int_0^t (t-u)C(u)xdu \end{aligned}$$

Preuve 2.2.5 *[5]*
(i) Encore pour $x \in D(A)$ *nous pouvons écrire*

$$x = R(\lambda)y$$

avec $y \in X$ *et* $Re(\lambda) \in \omega$*. La fonction*

$$u \mapsto (t-u)C(u)y$$

est intégrable sur [0 , t], donc

$$\int_0^t (t-u)C(u)ydu \in X$$

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-u)C(u)xdu &= \int_0^t (t-u)C(u)R(\lambda)ydu \\ &= \int_0^t (t-u)R(\lambda)C(u)ydu \\ &= R(\lambda)\int_0^t (t-u)C(u)ydu \in R(R(\lambda)) = D(A).\end{aligned}$$

(ii) On met $y = \int_0^t (t-u)C(u)xdu$. *Alors selon le théoréme 2.2.6*

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}(C(h)y-y)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2}(C(h)y-y) = C(t)x-x$$

Cela nous fournit

$$C(t)x-x = A\int_0^t (t-u)C(u)xdu$$

En se rapprochant à nouveau de A par des différences divisées et en utilisant le fait que tout C(t) commute

$$C(t)x-x = \int_0^t (t-u)C(u)Axdu$$

Théoréme 2.2.8 *[5]*
Soit $x \in D(A)$ *Alors*

(i) $t \mapsto C(t)x$ *est deux fois différentiable sur* $\mathbb{R}$.

(ii) $\frac{d}{dt}C(t)x \mapsto 0$ *pour* $t \mapsto 0$.

(iii) $\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = C(t)Ax = AC(t)x$ *pour chaque* $t \in \mathbb{R}$.

Preuve 2.2.6 *[5]*
par le théoréme 2.2.7 nous avons

$$\begin{aligned}C(t)x &= x + \int_0^t (t-u)C(u)Axdu \\ &= x + t\int_0^t C(u)Axdu - t\int_0^t uC(u)Axdu\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} C'(t)x &= x + \int_0^t C(u)Axdu \\ \left\|C'(t)x\right\| &\leq |t|Me^{\omega|t|}\left\|Ax\right\| \to 0pourt \to 0 \end{aligned}$$

Différencier une fois de plus , nous obtenons

$$C''(t)x = C(t)Ax$$

Remarque 2.2.2 *[5]*
il existe trois types de générateurs infinitésimaux associés :

$$\begin{aligned} D(A) &= R(R(\lambda)), Re(\lambda) > \omega \\ A &= \lambda^2 I - R(\lambda_{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(B) &= \left\{x \in X \middle| \lim_{h \to 0} \frac{2}{h^2}(C(t)x - x) \quad \right\} \\ Bx &= \lim \frac{2}{h^2}(C(t)x - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(C) &= \left\{x \in X \middle| t \to C(t)x \quad 2 - diff \quad sur \quad \mathbb{R}\right\} \\ Cx &= C''(0)x \end{aligned}$$

En fait , il est vrai que $A = B = C$.

2.2.4 Propriétés principales des fonctions d'opérateur C_0-cosinus et C_0-sinus

Proposition 2.2.3 *[12][4]*
Soit C(t), $t \in \mathbb{R}$ *une famille de cosinus fortement continue dans X. Les conditions suivantes sont verifieés :*

(a) $C(t) = C(-t)$ *pour tous* $t \in \mathbb{R}$.

(b) $S(-t) = -S(t)$ *pour tous* $t \in \mathbb{R}$.

(c) $C(t)$, $C(s)$, $S(t)$ *et* $S(s)$ *commutant pour tout* $t, s \in \mathbb{R}$.

(d) $S(t)x$ *est continue en t sur* $\mathbb{R}$ *pour chaque* $x \in X$ *fixé.*

(e) $S(t + s) + S(t - s) = 2S(t)C(s)$ *pour tous* $t \in \mathbb{R}$.

(f) $S(t+s) = S(t)C(s) + S(s)C(t)$.

(j) $C(t+s, A) - C(t-s, A) = 2AS(t, A)S(s, A)$.

(h) $C(2t, A) = 2C(t, A)^2 - I$, $C(t, A)^2 - AS(t, A)^2 = I$.

(i) $C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s)$.

(j) $C(2t) = 2C(t)^2 - I$, $C(t)^2 - AS(t)^2 = I$.

(k) *il existe des constantes* $K \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *telles que*

$$\left|C(t)\right| \quad \leq \quad Ke^{\omega|t|} \quad pour \quad tout \quad t \in \mathbb{R}$$

(l)

$$\left|S(t) - S(\hat{t})\right| \leq K\left|\int_{\hat{t}}^{t} e^{\omega|s|ds}\right| \quad pour \quad tous \quad t, \hat{t} \in \mathbb{R}$$

(m) $C((n+1)t, A) = b_0 I + b_1 C(t, A) + ... + b_{n+1} C^{m+1}(t, A)$.

où $b_0 + b_1 z + ... + b_{n+1} z^{n+1}$ *est le polynôme de Chebyshev du premier type de degré* $n+1$.

Proposition 2.2.4 *[4]*

Soit $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *une famille de cosinus fortement continue dans* X *avec un générateur infinitésimal* A. *Alors :*

$$D(A) \quad est \quad dense \quad dans \quad X \quad et \quad A \quad est \quad un \quad oprateur \quad ferm \quad dans \quad X \tag{2.6}$$

Si $x \in X$ *et* $r, s \in \mathbb{R}$, *alors*

$$z \overset{def}{=} \int_{r}^{s} S(u)xdu \in D(A) \quad et \quad Az = C(s)x - C(r)x \tag{2.7}$$

Si $x \in X$ *et* $r, s \in \mathbb{R}$, *alors*

$$z \overset{def}{=} \int_{0}^{s} \int_{0}^{r} C(u)C(v)xdudv \in D(A) \quad et \quad Az = 2^{-1}(C(s+r)x - C(s-r)x) \tag{2.8}$$

$$Si \quad x \in X \quad alors \quad S(t)x \in X^1 \tag{2.9}$$

$$Si \quad x \in X \quad alors \quad S(t)x \in D(A) \quad et \quad \frac{d}{dt}C(t)x = AS(t)x \tag{2.10}$$

$$Si \quad x \in D(A) \quad alors \quad C(t)x \in D(A) \quad et \quad \frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = S(t)Ax \tag{2.11}$$

$$Si \quad x \in X, \quad alors \quad \lim_{t \to 0} AS(t)x = 0 \tag{2.12}$$

$$Si \quad x \in X, \quad alors \quad S(t)x \in D(A) \quad et \quad \frac{d^2}{dt^2}S(t)x = AS(t)x \tag{2.13}$$

$$Si \quad x \in D(A), \quad alors \quad S(t)x \in D(A) \quad et \quad AS(t)x = S(t)Ax \tag{2.14}$$

$$C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s) \quad pour \quad tous \quad s, t \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

Proposition 2.2.5 *[12]*
Pour toute fonction d'opérateur C_0*-cosinus C(.), il existe des constantes* $M \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *telles que pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a l'estimation*

$$\left\| C(t) \right\| \quad \leq \quad M.cosh(\omega t) \quad , \quad pour \quad tout \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

où $cosh(\omega t) := \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$ *est le cosinus hyperbolique.*

Proposition 2.2.6 *[12]*
Soit un opérateur A qui génère une fonction d'opérateur C_0*-cosinus C(t), et soit* $C(t) \leq Mcosh(\omega t)$*,* $t \in \mathbb{R}$ *alors* $A \in \mathbb{G}(M, \omega^2)$*, le* C_0*semi-groupe* e^A *est analytiquement continue jusqu'au demi-plan droit, et*

$$e^{tA} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s) ds \qquad t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \tag{2.17}$$

Proposition 2.2.7 *[12]*
Pour tout $x \in X$ *et* $t, s \in \mathbb{R}$*, on a*
(i) $y \quad := \quad \int_s^t S(\tau) x d\tau \in D(A)$ *et*

$$Ay \quad = \quad C(t)x - C(s)x$$

(ii) $z \quad := \quad \int_0^t \int_0^s C(\tau) C(\zeta) x d\tau d\zeta \in D(A)$ *et*

$$Az \quad = \quad \frac{1}{2}(C(t+s) - C(t-s))x$$

(iii) $S(t)x \in X^1$

Proposition 2.2.8 *[12]*
Si les éléments x varient sur tout X et les nombres t et s varient sur $\mathbb{R}$*, alors l'ensemble des éléments de la forme* $y = \int_s^t S(\tau) x d\tau$ *est dense dans X.*

Proposition 2.2.9 *[12]*
Pour tout $x \in X$*, les relations suivantes sont vérifiées :*

$$s - \lim_{t \to 0} t^{-1} S(t)x \quad = \quad x$$

et

$$s-\lim_{t\to 0} 2t^{-2}\int_0^t S(\tau)x d\tau \quad = \quad x$$

Proposition 2.2.10 *[12]*
Si $x \in X^1$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,
(i) $C(t)x \in X^1, S(t)x \in D(A)$ *et* $C'(t)x = AS(t)x$
(ii) $s-\lim_{\tau\to 0} AS(\tau)x = 0$ *et* $S''(t)x = AS(t)x$

Proposition 2.2.11 *[12]*
Pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, les relations suivantes sont vérifiées :
(i) $C(2t) = C(t)^2 + C'(t)S(t)$
(ii) $C'(t)S(s) = C'(s)S(t)$
(iii) $C(t+s) - C(t-s) = 2C'(t)S(s)$
(iv) $(C(t)-I)\int_0^h S(s)ds = (C(h)-I)\int_0^t S(s)ds$
(v) $(A-\lambda^2 I)\int_0^t \sinh(\lambda(t-s))C(s)ds = \lambda(C(t)-\cosh(\lambda t)I)$
ici, $\sinh(.)$ *et* $\cosh(.)$ *sont respectivement le sinus hyperbolique et le cosinus hyperbolique.*

Théoréme 2.2.9 *[12]*
Pour qu'un opérateur $A \in \mathscr{C}(X)$ soit générateur d'une fonction d'opérateur C_0-cosinus, il faut et il suffit que pour certaines constantes $M, \omega \geq 0$, la résolvante $(\lambda^2 I - A)^{-1}$ existe pour $Re(\lambda) > \omega$ et les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\lambda(\lambda^2 I - A)\Big)\right\| \quad \leq \quad \frac{Mm!}{(Re\lambda-\omega)^{n+1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Proposition 2.2.12 *[12]*
Pour $Re(\lambda) > \omega_c(A)$, on a $\lambda^2 \in \rho(A)$ et

$$\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}x \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}C(t)xdt \quad x \in X$$

$$(\lambda^2 I - A)^{-1}x \quad = \quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt \quad x \in X$$

Proposition 2.2.13 *[12]*
Pour tout $A \in \mathscr{C}(M,\omega)$, $x \in \tilde{X}_0$, et $t \in \mathbb{R}$ la représentation

$$C(t)x \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}A^k x}{(2k)!}$$

est vérifiée, et pour chaque $\tilde{x} \in \tilde{X}_0$*, la fonction* $t \to C(t,A)\tilde{x}$ *peut être prolongée par continuité en t jusqu'à une fonction analytique sur tout le plan complexe.*

Proposition 2.2.14 *[4]*
Soit C(t), $t \in \mathbb{R}$ *une famille de cosinus fortement continue dans X.*
L'opérateur $\hat{A} : X \to X$ *défini par*

$$\hat{A}x = \lim_{t \to 0} \frac{C(2t)x - x}{2t^2}$$

ayant pour domaine les $x \in$ *pour lesquels cette limite existe, est le générateur infinitésimal de la fonction cosinus C(t),* $t \in \mathbb{R}$.

Théoréme 2.2.10 *[11]*
Soit A un opérateur linéaire dans X. Alors A est le générateur infinitésimal d'une fonction cosinus sur X si es seulement si :

(i) *A est fermé et défini sur un domaine dense.*

(ii) *il existe une constante* $\omega \geq 0$ *telle que pour* $\lambda > \omega$, $\lambda^2 \in \rho(A)$.

(iii) *il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour* $\lambda > \omega$

$$\left\| \frac{d^m}{d\lambda^m}\left[\lambda R(\lambda^2; A)\right] \right\| \leq \frac{Mm!}{(\lambda - \omega)^{m+1}} \quad , \quad m = 0, 1, 2, ...$$

lemme 2.2.1 *[11]*
sous l'hypothése du théoréme 2.2.10, nous avons

$$\|C(t)\| \leq Me^{\omega|t|} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

$$\lambda R(\lambda^2; A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} C(t) dt \quad , \quad \lambda > \omega \tag{2.19}$$

$$\|S(t)\| \leq M|t|e^{\omega|t|} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

$$R(\lambda^2; A) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt \quad , \quad \lambda > \omega \tag{2.21}$$

Définition 2.2.5 *[11]*
Soit A le générateur infinitésimal d'une fonction cosinus sur X, et B un opérateur linéaire dans X. Alors B est dit opérateur de la classe (B) si :

(B_1) $D(B) \supset D(A)$ *et* $BR(\mu^2; A) \in B(X)$ *pour certains* $\mu > \omega$

(B_2) *il existe une constante $K_0 > 0$ telle que pour tout $x \in D(A)$,*

$$\int_0^1 \left\|BC(t)x\right\| dt \leq K_0\|x\|$$

Remarque 2.2.3 *[11]*
Puisque $\rho(A)$ est non vide, la condition (B_1) est équivalente à la borne relative de B par rapport à A et donc $BR(\lambda^2; A) \in B(X)$ pour chaque $\lambda^2 \in \rho(A)$.

$$K_\lambda \quad = \quad \sup\left\{ \int_0^1 e^{-\lambda t}\left\|BC(t)x\right\| dt; \|x\| \leq 1, x \in D(A)\right\} \tag{2.22}$$

Alors par condition (B_2), K_λ est fini. Puisque K_λ est une fonction de λ décroissante négative et monotone, $K_\infty = \lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda$ existe et $0 \leq K_\infty < K_0$.

lemme 2.2.2 *[11]*
Soit S la fonction sinus associée à une fonction cosinus C sur X. Supposons que B soit un opérateur de classe (B). Alors pour tous les $x \in D(A)$

$$\int_0^1 e^{-\lambda t}\left\|BS(t)x\right\| dt \leq K_0\|x\| \quad , \quad \lambda \geq 0 \tag{2.23}$$

lemme 2.2.3 *[11]*
Soit S et B comme dans le lemme 2.2.2. Pour chaque $\lambda > \omega$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\left\|BS(t)x\right\| dt \quad \leq \quad L_\lambda\|x\| \quad , \quad x \in D(A) \tag{2.24}$$

où $L_\lambda = K_\lambda\Big[1 + M\big(2e^{\lambda-\omega} - 1\big)\big(e^{\lambda-\omega} - 1\big)^{-2}\Big]$ et donc

$$\left\|BR(\lambda^2; A)\right\| \quad \leq \quad L_\lambda \quad , \quad \lambda > \omega \tag{2.25}$$

Théoréme 2.2.11 *[11]*
Soit C une fonction cosinus sur X, de générateur A. Supposons que B soit un opérateur de classe (B) et $K_\infty = \lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda$, où K_λ est défini par (2.22). Alors pour chaque ε tel que $|\varepsilon| < K_\infty^{-1}$, $A + \varepsilon B$ génère une fonction cosinus $\big\{C(t; A + \varepsilon B)\big\}$ où $C(t; \varepsilon B)$ est donné par

$$C(t; A + \varepsilon B) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{C}_n(t) \tag{2.26}$$

De plus, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C(t; A + \varepsilon B) - C(t) \quad = \quad 0 \tag{2.27}$$

Dans (2.26) et (2.27) la convergence est uniforme par rapport à t sur chaque sous-intervalle fini de $(-\infty, \infty)$.

2.3 Fonctions de l'opérateur C_0cosinus uniformement continu

2.3.1 Comportement des fonctions d'opérateur C_0Cosinus à l'infini

La borne d'une fonction d'opérateur C_0-cosinus est une propriété qui n'est pas obtenue par un décalage du générateur $A_b = A + bI$ [12].

Proposition 2.3.1 *[12]*
Il existe des opérateurs $A \in \mathbb{C}(M, \omega)$ tels que pour tout nombre $b \in \mathbb{R}$, l'opérateur $A + bI$ ne génère pas de fonction d'opérateur C_0-cosinus bornée.

a l'équation du cosinus (i)(voir déffinition 2.2.1) on associe le cosinus hyperbolique $\cosh(t)$ de croissance exponentielle, ainsi que la fonction ordinaire bornée $cos(t)$. Dans le cas général, pour une fonction opérateur $C_0 - cosinus$, une croissance polynomiale en t est également possible. Ainsi, par exemple, nous avons ce qui suit.

Exemple 2.3.1 *[12]*
Soit X $= \mathbb{R}$. *Alors* $C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, *est une fonction d'opérateur C_0-cosinus sur X. Si la norme euclidienne est donnée sur X, alors*

$$\|C(t)\| \quad = \quad \sqrt{1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Dans les conditions de l'exemple précédent, pour tout $\omega > 0$, il existe $M_\omega \geq 1$ tel que $C(t) \leq M_\omega \cosh(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, mais $C(.)$ n'est pas borné sur $\mathbb{R}$.

Théoréme 2.3.1 *[12]*
Les implications suivantes des conditions sont valables :

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$$

(i) *Une fonction* $C(.)x$ *est de type exponentiel inférieur ou égal à pour tout* $x \in X$.

(ii) $\left\{\lambda^2 : Re(\lambda) > \omega\right\} \subseteq \rho(A)$, *et pour tout* $\gamma > \omega$, *il existe une constante* $M = M_{(\gamma)}$ *telle que*

$$\left\|\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}\right\| \leq M \quad pour \quad tout \quad Re(\lambda) > \gamma$$

(iii) *La fonction* $C(.)x$ *est de type exponentiel ne dépassant pas pour tout* $x \in D(A)$.

Théoréme 2.3.2 *[12]*
Les implications suivantes des conditions sont valables :

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$$

(i) *Une fonction d'opérateur* C_0*-cosinus* $C(.)$ *est bornée.*

(ii) *il existe une constante* M_1 *telle que*

$$\left\|e^{\lambda A}\right\| \leq M_1\left(\frac{|\lambda|}{Re(\lambda)}\right) \quad pour \quad toute \quad \lambda \quad avec \quad Re(\lambda) \geq 0$$

(iii) *il existe une constante* M_2 *telle que*

$$\left\|C(t)x\right\| \leq M_2(\left\|x\right\| + t^2\left\|Ax\right\|) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad x \in D(A)$$

2.3.2 Continuité en norme

Il est trés naturel que la borne de A, dans le cas d'une fonction d'opérateur C_0-cosinus suive, sous des hypothéses supplémentaires plus faibles que dans le cas des semi-groupes d'opérateurs.
Ainsi, par exemple, la condition $\left\|tAe^{-tA}\right\| \leq C$ implique la borne de A pour $C = \frac{1}{e}$, et dans le cas des fonctions cosinus, pour la borne de A, la borne $\left\|AS(t)\right\| \leq cst$ avec n'importe quelle constante est suffisant (S(t) est la fonction sinus).

Définition 2.3.1 *[12]*
Une fonction d'opérateur C_0*-cosinus* $C(.)$ *est continue dans la topologie d'opérateur uniforme (continué en norme) si la fonction* $C(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathscr{L}(X$ *est continue dans la norme d'opérateur.*

Proposition 2.3.2 *[12]*
Soit $C(.)$ *une fonction d'opérateur* C_0*-cosinus, continue dans la topologie d'opérateur uni-*

forme. Alors son générateur infinitésimal $A \in \mathscr{L}(X)$ *et*

$$C(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2.28}$$

de plus, la série converge uniformément en t sur tout intervalle fermé fini $[0, T]$.

Parfois, dans la littérature, la série (2.28) s'écrit $\cosh(t)$ de maniére analogue au cas scalaire. Notons qu'une fonction opérateur C_0-sinus $S(.)$ est toujours uniformément continue dans $t \in \mathbb{R}$, comme il ressort de sa deffinition.

Théoréme 2.3.3 *[12]*
Chacune des conditions suivantes est équivalente à la continuité en norme de $C(.)$ *:*

(i) $\lim_{t\to 0} \left\|C(t) - I\right\| = 0$.

(ii) $\lim_{t\to 0} \left\|t^{-1}S(t) - I\right\| = 0$.

(iii) *Le générateur* A *est borné.*

(iv) $\mathscr{R}(C(t)) \subseteq X^1$ *pour tout* $t \in (\alpha, \beta)$ *avec certains* $\alpha < \beta$.

(v) *L'inclusion* $\mathscr{R}(S(t)) \subseteq D(A)$ *et la forte continuité de la fonction* $t \to AS(t)$ *sont vraies pour tout* $t \in (\alpha, \beta)$ *avec certain* $\alpha < \beta$.

Proposition 2.3.3 *[12]*
Soit une fonction d'opérateur C_0*-cosinus* $C(.)$ *continuité en norme. Alors*

(i) $\lim_{t\to 0} \left\|\frac{2}{t^2}\int_0^t S(s)ds - I\right\| = 0$.

(ii) *pour h suffisamment petit, l'opérateur* $\int_0^h S(s)ds$ *a un inverse borné.*

(iii) *pour h suffisamment petit, on a la relation*

$$A \quad = \quad \Big(C(h) - I\Big)\Big(\int_0^h S(s)ds\Big)^{-1}$$

Proposition 2.3.4 *[12]*
Dans une algébre de Banach $\mathscr{L}$ *avec unité, soit une fonction d'opérateur* C_0*-cosinus* $C(.)$, $A \in \mathscr{L}$ *donnée. Alors pour* $\nu^2 > \sup_{\lambda\in\sigma(A)}(|\lambda| + Re\lambda)/2$, *on a*

$$C(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} e^{\lambda t}\lambda R(\lambda^2, A)d\lambda \qquad , t \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$S(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda^2, A)d\lambda \qquad , t \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

CHAPITRE 3

COMPARAISON ENTRE LES SEMI-GROUPES ET LES FAMILLES COSINUS

3.1 Introduction

La théorie des familles de cosinus est à bien des égards paralléle à la théorie des semi-groupes d'opérateurs.
Notre objectif principal Tout au long de chapitre sera sur les familles de cosinus fortement continues et les semi-groupe sur un espace de Banach.
Nous révélons trois propriétés surprenantes des familles de cosinus, les distinguant des semi-groupes d'opérateurs : (1) Une seule trajectoire d'une famille de cosinus est soit fortement continue, soit non mesurable. (2) La convergence ponctuelle de la séquence des familles de cosinus équibornées implique que la convergence est presque uniforme pour le temps dans toute la ligne réelle ; en particulier, les familles de cosinus ne peuvent pas être perturbées de façon singulière. (3) Une trajectoire non constante d'une famille de cosinus bornée n'a pas de limite à l'infini ; en particulier, la riche théorie du comportement asymptotique des semi-groupes n'a pas d'équivalent pour les familles de cosinus. De plus, nous montrons que les familles de cosinus équibornées qui convergent fortement et presque uniformément dans le temps peuvent ne pas converger uniformément.
Ce chapitre exposera un certain nombre de différences entre les familles de cosinus et les

semi-groupes.

3.2 Rappels

(i) Une famille $F = \{F(t)\}_{t\in T}$ d'opérateurs linéaire bornée sur un espace de Banach X indexé par $T \subset \mathbb{R}$ est fortement continue si : pour chaque $x \in X$, la F-trajectoir (ou simplement trajectoire) associée à $x, T \ni t \mapsto F(t)x \in X$, est continue en norme.

(ii) Une famille $F = \{F(t)\}_{t\in T}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X indexé par $T \subset \mathbb{R}$ est borné si $\sup_{t\in T} \left\|F(t)\right\| < \infty$.

(iii) Une famille $\{F(t)\}_{t\in T}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X indexé par un ensemble mesurable $T \subset \mathbb{R}$ est fortement mesurable si pour chaque $x \in X$ la fonction $t \mapsto F(t)x$ est Bochner mesurable sur T.

(iv) Le générateur A d'un semi-groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X est défini par

$$Ax = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 T(t)x = \lim_{s\to 0} \frac{T(s)x - x}{s} \qquad \big(x \in D(A)\big) \tag{3.1}$$

où D(A) le domaine de A est l'ensemble de tous les $x \in X$ pour lesquels la dérivée (3.1) exister. A son tour, le générateur A d'une famille de cosinus fortement continue $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sur X est défini par :

$$Ax = \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_0 C(t)x = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2}\big(C(s)x - x\big) \qquad \big(x \in D(A)\big) \tag{3.2}$$

où D(A) est l'ensemble de tous les $x \in X$ pour lesquels la dérivée seconde (3.2) existe.

3.3 La mesurabilité implique la continuité

Le théorème suivant de Fattorini est fondamental pour les considération ultérieures, ayant une incidence directe sur la question de la convergence des famille de cosinus qui est un sujet de préoccupation dans ce chapitre.

Théoréme 3.3.1 *(Fattorini)[2]*
Une famille de cosinus fortement mesurable sur un espace de Banach est fortement continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Fatorini est une conséquence immédiate du théorème plus faible de Chander et Singh, indiquant qu'une famille de cosinus fortement mesurable sur un espace de Banach est fortement continu sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Le lien entre les deux théorèmes est fourni par le résultat suivant :

Proposition 3.3.1 *[2]*
Soit $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *une famille de cosinus sur un espace de Banach X. Soit* $x \in X$ *tel que la fonction* $t \mapsto C(t)x$ *est continue sur* (a, ∞) *pour un certain* $a \in \mathbb{R}$. *Alors la fonction* $t \mapsto C(t)x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Preuve 3.3.1 *[2]*
Fixons $t \in \mathbb{R}$ *arbitrairement. Choisissons* $h > 0$ *pour que* $t+h > a+1$. *Nous avons clairement*

$$C(\tau)x \quad = \quad 2C(h)C(\tau + h)x - C(\tau + 2h)x$$

pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$. *notant que* $\tau + h > a$ *et* $\tau + 2h > a$ *a chaque fois que* $\tau > t - 1$ *et en exploitant l'hypothése, on obtient*

$$\lim_{\tau\to t} C(\tau + h)x \quad = \quad C(t + h)x \quad et \quad \lim_{\tau\to t} C(\tau + 2h)x \quad = \quad C(t + 2h)x$$

comme C(h) est un opérateur borné, on a aussi

$$\lim_{\tau\to t} C(h)C(\tau + h)x \quad = \quad C(h)C(t + h)x$$

Donc

$$\lim_{\tau\to t} C(\tau)x \quad = \quad 2C(h)C(t + h)x - C(t + 2h)x \quad = \quad C(t)x$$

puisque t a été choisi arbitrairement, le résultat suit.

Nous remarquons que la proposition ci-dessus a des analogues pour les solutions d'autres équations fonctionnelles, et ceux-ci peuvent á leur tour être utilisés pour établir des contre-parties appropriées du théorème 3.3.1.
Le théorème de Fatorini a un sens globale, en ce qu'il concerne l'ensemble de toutes les trajectoires d'une famille de cosinus. Ci-dessous , nous établissons une version locale du résultat de Fattorini correspondant à toute trajectoire individuelle.

Théoréme 3.3.2 *[2]*
Soit $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *une famille de cosinus sur un espace de Banach X. Soit* $x \in X$ *tel que la fonction* $t \mapsto C(t)x$ *est mesurable sur* $\mathbb{R}$. *Alors la fonction* $t \mapsto C(t)x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Preuve 3.3.2 *[2]*
Soit X_0 *l'ensemble de tous les* $y \in X$ *pour lesquels* $t \mapsto C(t)y$ *est mesurable sur* $\mathbb{R}$*. Il est clair que* X_0 *est un sous-espace linéaire de* X*. Puisque la limite ponctuelle d'une suite de fonctions mesurables est un fonction mesurable, on voit que* X_0 *est fermé.*
De plus, X_0 *est invariant pour chaque opérateur* $C(S)$*,* $s \in \mathbb{R}$*, pour si* $s \in \mathbb{R}$ *et* $y \in X_0$ *alors* $t \mapsto C(t+s)y$ *et* $t \mapsto C(t-s)y$ *sont tous les deux mesurables, et par conséquent* $t \mapsto C(t)C(s)y = \Big(C(t+s)x + C(t-s)y\Big)/2$ *est également mesurable. Maintenant, si l'on considére la famille de cosinus* $\Big\{C(t)_{|X_0}\Big\}_{t\in\mathbb{R}}$ *sur* X_0*, où* $C(t)_{|X_0}$ *désigne la restriction de* $C(t)$ *à* X_0*, alors il est clair que cette famille est fortement mesurable , et donc d'aprés le théorème 3.3.1 il est en fait fortement continu. Puisque* x *est dans* X_0*, il s'ensuit que* $t \mapsto C(t)x$ *est continu et le théorème est démontrè.*

3.4 La convergence est réguliére

Le théorème de Trotter-kato pour les familles de cosinus, relatif au cas où les familles de cosinus convergent vers une famille de cosinus fortement et uniformement sur des intervalles de temps compacts, est tout à fait analogue au théorème de Trotter-kato pour les semi-groupes d'opérateurs. sur la bases de cette analogie, on pourrait penser que généralement si les familles de cosinus convergent, elles le font d'une maniére similaire à celles présentées par les semi-groupes. Cependant, il s'avére qu'il existe une différence fondamentale dans la comportement des semi-groupes et des familles de cosinus en ce qui concerne la convergence. Ici nous exposons cette différence et montrons que la convergence des familles de cosinus est en régle générale beaucoup plus réguliéres que celles des semi-groupes.
commençons par rappeler le scénario qui vaut pour les semi-groupes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit A_n générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T_n = \Big\{T_n(t)\Big\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X. Supposons que les semi-groupes T_n soient équibornés, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}, t\geq 0} \Big\|T_n(t)\Big\| \leq M$$

et que , pour chaque $\lambda > 0$, les résolvantes des générateurs A_n

$$(\lambda - A_n)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_n(t)dt \tag{3.3}$$

convergent vers un opérateur R_λ dans la topologie forte des opérateur fort. Les R_λ forment alors une pseudo-résolvante, une famille d'opérateurs satisfaisant la premiére équation résolvente, avec un espace commun vide et une image commune. Notons que , si les T_n convergent fortement (sur tout X) alors la convergence des $(\lambda - A_n)^{-1}$ est une conséquence de la représentation (3.3) et du théorème de convergence dominé de Lebesgue. Aux T_n sont associés deux sous-espaces de X :

$$X^s_{point} \quad = \quad \left\{ x \in X \middle| \lim_{n\to\infty} T_n(t)x \quad existe \quad pour \quad chaque \quad t \in [0,\infty) \right\}$$

$$\begin{aligned} X^s_{presque-unif} \quad = \quad & \left\{ x \in X \middle| \lim_{n\to\infty} T_n(t)x \quad existe \quad pour \quad chaque \quad t \in [0,\infty) \right. \\ & \left. et \quad est \quad presque \quad uniforme \quad dans \quad t \in [0,\infty) \right\} \end{aligned}$$

où l'exposant " s " rappelle le terme " semi-group ". En d'autres termes, X^s_{point} est constitué de vecteurs pour lesquls les trajectoires correspondantes des semi-groupes convergent point par point, et $X^s_{presque-unif}$ est constitué de vecteurs pour lesquels les trajectoires correspondantes des semi-groupes convergent presque uniformément sur $[0,\infty)$. Clairement

$$X^s_{presque-unif} \subset X^s_{point}$$

Il s'avére que $X^s_{presque-unif}$ coïncide avec l'espace de régularité de la pseudo-résolvante $\left\{R_\lambda\right\}_{\lambda>0}$ qui est défini comme la fermeture de l'image commune $\mathscr{R}$ des R_λ :

$$X^s_{presque-unif} \quad = \quad \overline{\mathscr{R}} \tag{3.4}$$

avec la barre indiquant la fermeture de l'ensemble. De plus, si l'ensemble $X^s_{point} \backslash X^s_{presque-unif}$ est non vide, alors il est constitué des vecteurs pour lesquels les trajectoires correspondantes des semi-groupes convergent presque uniformément en $t \in (0,\infty)$, mais pas uniformément sur un intervalle compact dans $[0,\infty)$ contenant 0. Bien sûr, pour les vecteurs a l'exterieur de X^s_{point}, les trajectoires correspondantes des semi-groupes ne convergent pas du tout.
En général $X^s_{presque-unif}$ est un sous-espace propre de X^s_{point}, et X^s_{point} est un sous-espace propre de X.
Par exemple, dans l'espace $\mathbb{C}^3$, les semi-groupes

$$T_n(t)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{-a_n t}x \\ e^{-nt}y \\ e^{itn}z \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

généré par

$$A_n\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} -a_n x \\ -ny \\ inz \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres positifs convergeant vers $a \geq 0$, sont équibornées avec la borne $M = 1$, et les résolvantes correspondantes des A_n convergent :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lambda - A_n\right)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda+a_n} \\ \frac{y}{\lambda+n} \\ \frac{z}{\lambda-in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda+a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda > 0) \tag{3.7}$$

Dans ce cas, $X^s_{presque-unif} = \mathbb{C}\times\left\{0\right\}\times\left\{0\right\}$ et $X^s_{point} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\left\{0\right\}$.
Cependant l'image ci-dessus change lorsque les semi-groupes sont remplacés par des familles de cosinus : avec la notation analogue à celle employée ci-dessus et entiérement expliquée ci-dessous , nous avons

$$X^c_{point} = X^c_{presque-unif}$$

En d'autres termes , les trajectoires des familles de cosinus équibornées convergent presque uniformément en $t\in\mathbb{R}$ ou ne convergent pas du tout. Cette dichotomie est le principal point de discussion dans cette section.
En procédant aux détails, soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de familles de cosinus equibornées fortement continues sur X c'est-à-dire, telle que $\sup_{n\in\mathbb{N},t\in\mathbb{R}}\left\|C_n(t)\right\| < \infty$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des générateurs correspondants. De plus, supposons que les résolvantes des A_n

$$(\lambda - A_n)^{-1} = \lambda^{\frac{-1}{2}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}t}C_n(t)dt \qquad (\lambda > 0) \tag{3.8}$$

convergent fortement vers une pseudo-résolvante $\left\{R_\lambda\right\}_{\lambda>0}$. Encore une fois, nous remarquons que la forte convergence des $(\lambda - A_n)^{-1}$ est une condition nécessaire pour la forte convergence des C_n. Soient

$$X^c_{point} = \left\{x\in X \middle| \lim_{n\to\infty} C_n(t)x \quad existe \quad pour \quad chaque \quad t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$X^c_{presque-unif} = \left\{x\in X \middle| \lim_{n\to\infty} C_n(t)x\right.$$

$$\left. existe \quad pour \quad chaque \quad t\in\mathbb{R}, et \quad est \quad presque \quad uniforme \quad dans \quad t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{x\in X \middle| \lim_{n\to\infty} C_n(t)x \quad existe \quad pour \quad chaque \quad t\in[0,\infty)\right.$$

$$\left. et \quad est \quad presque \quad uniforme \quad dans \quad t\in[0,\infty)\right\}.$$

Ensuite, clairement

$$X^c_{presque-unif} \subset X^c_{point}$$

On a aussi , comme en (3.4)

$$X^c_{presque-unif} = \overline{\mathscr{R}} \tag{3.9}$$

comme nous le montrons ensuite. Commençons par noter que l'inclusion $\overline{\mathscr{R}} \subset X^c_{presque-unif}$. Pour prouver l'inclusion inverse, pour chaque $n \in \mathbb{R}$, soit $T_n = \left\{T_n(t)\right\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe fortement continu sur X lié à C_n par la formule abstraite de Weierstrass

$$T_n(t)x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\tau^2/4t}C_n(\tau)xd\tau \qquad (t > 0, x \in X)$$

Alors, comme on le sait, le générateur de T_n coïncide avec A_n. Maintenant, si X est dans $X^c_{presque-unif}$ de sorte que $\lim_{n\to\infty} C_n(t)x$ existe pour tout $t \in [0,\infty)$ et est presque uniforme dans $t \in [0,\infty)$, alors aussi $\lim_{n\to\infty} S_n(t)x$ existe pour tout $t \in [0,\infty)$ et est presque uniforme en $t \in [0,\infty)$, ce qui signifie que x est membre de l'espace $X^s_{presque-unif}$ associé aux S_n. Mais alors, par (3.4), x est automatiquement membre de $\overline{\mathscr{R}}$, ce qui prouve que $X^c_{presque-unif} \subset \overline{\mathscr{R}}$.

Avec (3.9) établi, nous sommes prêts pour le résultat principal de cette section.

Théoréme 3.4.1 *[2]*
Pour les familles de cosinus fortement continues équibornée $C_n = \left\{C_n(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ sur un espace de Banach X, sous l'hypothése d'une forte convergence des résolvantes des générateurs des C_n, on a

$$X^c_{point} = X^c_{presque-unif}$$

Preuve 3.4.1 *[2]*
Il suffit de montrer que $X^c_{point} \subset X^c_{presque-unif}$. Une preuve possible de cette inclusion implique un argument similaire à celui qui conduit à. Ci-dessous, cependant, nous présenterons une preuve beaucoup plus simple basée sur (3.9). Compte tenu de l'équicontinuité des C_n, X^c_{point} est un sous-espace fermé de X. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur borné C(t) : $X^c_{point} \to X$ par

$$C(t)x := \lim_{n\to\infty} C_n(t)x \quad (x \in X^c_{point})$$

En invoquant à nouveau l'équicontinuité des C_n et en tenant compte du fait que chaque C_n satisfait l'équation fonctionnelle du cosinus, on en déduit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, C(t) fait correspondre X^c_{point} en lui-même et $C = \left\{C_n(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ satisfait l'équation fonctionnelle du cosinus. Ainsi, C est une famille de cosinus sur X^c_{point}. Étant la limite forte de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, C est fortement mesurable.
D'aprés le théorème 3.3.1, C est en fait fortement continue en $t \in \mathbb{R}$. Soit A le générateur de C. Par hypothèse, la définition de C, la représentation (3.8), et son analogue pour A, et

le théoréme de convergence dominé par Lebesgue, on a

$$R_\lambda x \quad = \quad \lim_{n\to\infty}(\lambda - A_n)^{-1}x \quad = \quad (\lambda - A_n)^{-1}x$$

chaque fois que $x \in X^c_{point}$ *et* $\lambda > 0$ *; ici, bien sûr,* $\left\{R_\lambda\right\}_\lambda$ *est la pseudo-résolvante limite, définie sur tout* X*, correspondant aux résolvantes des générateurs* A_n *des* C_n*. Maintenant, si* x *est dans le domaine* $D(A)$ *de* A*, alors* $x = (\lambda - A)^{-1}y$*, où* $y = (\lambda - A)x \in X^c_{point}$*, et donc aussi* $x = R_\lambda y$*. Cela signifie que* $D(A) \subset \mathscr{R}$*. En utilisant (3.9), on en déduit que* $D(A) \subset X^c_{presque-unif}$*. Puisque* $D(A)$ *est dense dans* X^c_{point} *et que* X^c_{point} *et* $X^c_{presque-unif}$ *sont tous deux fermés, il s'ensuit que* $X^c_{point} \subset X^c_{presque-unif}$*. La preuve est maintenant compléte.*

Le théoréme ci-dessus peut être formulé comme suit : en dehors de l'espace de régularité, les familles de cosinus équicontinuis échouent toujours à converger fortement. À la lumière de notre discussion précédente , une déclaration analogue pour les semi-groupes d'opérateurs n'est pas vraie.

Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs convergeant vers zéro . Dans $X = C[0,\infty]$, l'espace des fonctions continues sur $[0,\infty)$ avec une limite à l'infini, les opérateurs $A_n f = \frac{1}{2}f''$ de domaines $D(A_n)$, composés de fonctions deux fois continûment dérivables f dans X avec f'' dans X tel que $f(0) = \epsilon_n f'(0)$ génère des familles de cosinus bornées en norme. Les résolvantes des A_n convergent fortement, et la fermeture du domaine de la pseudo-résolvante limite est le sous-espace $C_0(0,\infty]$ de toutes ces fonctions dans $C[0,\infty]$ qui s'annulent en 0. En d'autres termes, l'espace de régularité est ici $C_0(0,\infty]$.

Remarque 3.4.1 *[2]*
Remarquons au passage que les semi-groupes engendrés par les A_n *sont liés aux mouvements browniens élastiques, et le semi-groupe limite sur* $C_0(0,\infty]$ *est lié au mouvement brownien minimal.*

Il s'avére que les semi-groupes générés par les A_n convergent fortement en dehors de $C_0(0,\infty]$, la convergence étant presque uniforme en $t > 0$. Cependant, les familles de cosinus générées par les A_n ne convergent pas fortement en dehors de $C_0(0,\infty]$. théorème 3.4.1 illustre que ce manque de convergence n'est pas un accident, mais une régle.

Voici un autre exemple illustrant le même phénomène. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $U_n(t)$ et B_n les restrictions de $T_n(t)$ et A_n données dans (3.5) et (3.5) à $\mathbb{C}$, respectivement, c'est-à-dire

$$U_n(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{-a_n t}x \\ e^{-nt}y \end{pmatrix}$$

et

$$B_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_n x \\ -ny \end{pmatrix}$$

Clairement, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de semi-groupes équibornés générés par les B_n , avec $X^s_{presque-unif} = \mathbb{C}\times\{0\}$ et $X^s_{point} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Les B_n génèrent également des familles de cosinus équibornés,

$$C_n(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{a_n}t\right)x \\ \cos\left(\sqrt{n}t\right)y \end{pmatrix}$$

mais ceux-ci, contrairement aux U_n, convergent simplement sur $X^s_{presque-unif}\Big(= X^c_{point} = X^c_{presque-unif}\Big)$ qui est l'espace de régularité pour la limite pseudo-résolvante correspondant aux résolvantes des B_n. On remarque que la disparité entre $X^s_{presque-unif}$ et X^s_{point} est liée à la " propriété de lissage " de la formule de Weierstrass : les semi-groupes dérivés des familles de cosinus au moyen de cette formule sont beaucoup plus " réguliers " que les familles de cosinus elles-mêmes, et donc, leurs trajectoires convergent généralement pour un plus grand ensemble de vecteurs que les trajectoires des familles de cosinus.
Notons que le théorème 3.4.1 donne également des informations sur les trajectoires individuelles : si, pour un certain $x\in X$, $\lim_{n\to\infty} C_n(t)x$ existe pour tout $t\in\mathbb{R}$, alors $x\in X^c_{point} = X^c_{presque-unif}$, et donc la convergence est en fait presque uniforme en $t\in\mathbb{R}$.
Une conséquence notable du théorème 3.4.1 est que, contrairement à la riche théorie des perturbations singuliéres des semi-groupes, la théorie des perturbations singuliéres des familles de cosinus n'a pas d'objets d'étude : il n'y a pas de suites de familles de cosinus qui convergent de maniére irréguliére.
Nous concluons cette section par deux résultats supplémentaires. Le premier d'entre eux affirme que, contrairement au cas des semi-groupes, il n'y a qu'une seule famille de cosinus, une famille de cosinus triviale, pour laquelle la limite forte $\lim_{t\to\infty} C(t)$ existe. La preuve repose sur un argument impliquant une suite fortement convergente de familles de cosinus, d'où l'inclusion du résultat dans cette section. Le deuxième résultat est une version locale du premier résultat et affirme que si une trajectoire d'une famille de cosinus bornée admet des limites à l'infini, alors elle est constant. Une conséquence immédiate de ce dernier résultat est que l'importante théorie du comportement asymptotique des semi-groupes n'a pas de contrepartie pour les familles de cosinus.
On dit qu'une famille de cosinus $C = \{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sur un espace de Banach X est triviale si $C(t) = I_X$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Si C est fortement continue, alors C est trivial si et seulement si le générateur de C est l'opérateur zéro.

Proposition 3.4.1 *[2]*
Soit $C = \{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *une famille de cosinus (non nécessairement fortement continue) sur un*

espace de Banach X tel que la limite

$$Px \quad := \quad \lim_{t\to\infty} C(t)x$$

existe pour tout $x \in X$*. Alors C est trivial et* $P = I_X$.

Preuve 3.4.2 *[2]*
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$*, soit* $C_n = \left\{C_n(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *la famille de cosinus définie par* $C_n(t) = C(nt)$*. Par hypothése,* $\left(C_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement vers P pour* $t > 0$*. Comme* $C(-t) = C(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, il s'ensuit que* $\left(C_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement vers P également pour* $t < 0$*. Puisque, de plus,* $C_n(0) = I_X$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on voit que* $\left(C_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, et la limite* $C_\infty(t)$ *de* $\left(C_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est égal à P pour* $t \neq 0$ *et à* I_X *pour* $t = 0$*. Puisque, par le théorème de Banach-Steinhaus,* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|C_n(t)\right\| < \infty$ *pour tou* $t \in \mathbb{R}$ *et puisque chaque* C_n *satisfait l'équation fonctionnelle de cosinus, nous concluons immédiatement que* $C_\infty = \left\{C_\infty(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *satisfait l'équation fonctionnelle cosinus.*
Maintenant, si nous fixons $s \neq 0$ *et substituer les 2 premiers à t et les s suivants à t dans la formule*

$$2C_\infty(t)C_\infty(s) = C_\infty(t+s) + C_\infty(t-s)$$

alors on obtient $2P^2 = 2P$ *et* $2P^2 = P + I_X$*, respectivement. Cela implique* $P = I_X$*. Par contre, en laissant* $s \to \infty$ *dans la formule* $2C(t)C(s)x = C(t+s)x + C(t-s)x$*, on obtient*

$$2C(t)x \quad = \quad 2C(t)Px = Px + Px = 2x$$

Comme cela est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$ *et tout* $x \in X$*, la proposition est établie.*

Nous remarquons que si C dans la proposition ci-dessus est supposé être fortement continue, alors l'égalité $P = I_X$ peut être établie différemment , d'une maniére beaucoup plus simple. En effet, C_∞ est alors fortement mesurable, étant la limite forte des familles fortement continues C_n, et donc , d'aprés le théorème 3.3.1, C_∞ est en fait fortement continue. Or, $P = I_X$ est une conséquence de la forte continuité de C_∞ et du fait que $C_\infty(t) = P$ pour $t \neq 0$ et $C_\infty(0) = I_X$.

Corollaire 3.4.1 *[2]*
Soit $C = \left\{C(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *une famille de cosinus bornée sur un espace de Banach X, et soit* $x \in X$ *tel que la limite* $\lim_{t\to\infty} C(t)x$ *existe. Alors*

$$C(t)x \quad = \quad x \quad pour \quad tout \quad t \in \mathbb{R}$$

Preuve 3.4.3 *[2]*
Soit X_0 *composé des éléments y de X pour lesquels* $\lim_{t\to\infty} C(t)y$ *existe. Par la borne de C,* X_0 *est un sous-espace linéaire fermé de X. En exploitant l'équation fonctionnelle du cosinus, on en déduit aisément que chaque C(t), t* $\in \mathbb{R}$*, laisse* X_0 *invariant. Puisque la restriction* $C_{|X_0} = \left\{C_{|X_0}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *de C à* X_0 *satisfait les hypothéses de la proposition 3.4.1, il s'ensuit que* $C(t)_{|X_0}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. Comme x est dans* X_0*, on a* $C(t)x = x$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, et le corollaire est prouvé*

3.5 La convergence peut ne pas être uniforme

Nous tournons maintenant notre attention vers un autre probléme lié à la convergence des familles de cosinus. Dans [1], sur $C_0(0, \infty$, les familles de cosinus liées aux mouvements browniens élastiques décrites dans la section précédente convergent uniformément et pas seulement presque uniformément sur $\mathbb{R}$.
Sur la base de ces résultats, il a été conjecturé que les familles de cosinus équibornés, si elles convergent, le font uniformément sur $\mathbb{R}$. Si cela est vrai, cela exposerait encore une autre différence entre la convergence des semi-groupes et la convergence des familles de cosinus. Cependant, la conjecture s'avére fausse, et nous montrons ici qu'elle échoue à l'aide d'un certain résultat général et de deux exemples précis de son utilisation, et aussi au moyen d'un résultat indépendant de nature légèrement différente.
Une fonction continue f sur $\mathbb{R}$ avec des valeurs dans un espace de Banach X est dite (uniformément) presque périodique si l'ensemble de ses translate $\left\{T_t f\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ est relativement compact dans la métrique $\rho(f,g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|f(t) - g(t)\right\|$, la translation $T_t f$ de f par $t \in \mathbb{R}$ est donnée par la relation $T_t f(s) = f(t+s)$, $s \in \mathbb{R}$. Soit $AP(\mathbb{R}, X)$ l'espace de toutes les fonctions quasi périodiques de valeur X sur $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in AP(\mathbb{R}X)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la valeur moyenne

$$M_t\left\{e^{-i\alpha t} f(t)\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-i\alpha t} f(t)dt$$

existe et définit le coefficient de Fourier-Bohr de f pour l'exposant de Fourier α, $\hat{f}(\alpha)$. Les coefficients de Fourier-Bohr de f s'annulent pour tous les exposants de Fourier, mais au plus un nombre dénombrable. L'ensemble

$$\Sigma(f) = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \middle| \widehat{f(\alpha)} \neq 0\right\}$$

constitue le spectre de Bohr de f et il est non vide si f est non nul. La fonction f est uniquement déterminée par ses coefficients de Fourier-Bohr, cette propriété étant implicitement signifiée quand on se réfère à f via son développement en une série formelle de Fourier-Bohr

$$f(t) \quad \sim \quad \sum_{\alpha\in\Sigma(f)} e^{i\alpha t}\widehat{f}(\alpha)$$

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f_{[\lambda]}$ la fonction sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$f_{[\lambda]}(t) \quad = \quad f(\lambda t) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Théoréme 3.5.1 *[2]*
Soit $f \in AP(\mathbb{R}, X)$ non constant, où X est un espace de Banach, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$ et telle que $\lambda_n \neq \lambda$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Alors $(f_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f_{[\lambda]}$ presque uniformément mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Preuve 3.5.1 *[2]*
La convergence presque uniforme de $(f_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f_{[\lambda]}$ provient du fait que f est uniformément continue et du fait que les fonctions $t \mapsto \lambda_n t$ convergent vers $t \mapsto \lambda t$ presque uniformément sur $\mathbb{R}$. Il suffit alors de montrer que la convergence de $(f_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
Puisque f est non nul, $\Sigma(f)$ est non vide. Soit $(\alpha_k)_{k\in[K]}$ une énumération de $\Sigma(f)$, où $\left[K\right]$ désigne l'intervalle d'entiers positifs compris entre 1 et K, K étant fini ou infini. D'aprés le théorème de Bochner , il existe une suite de polynômes trigonométriques

$$\sigma_m(t) \quad = \quad \sum_{k=1}^{K_m} r_{k,m} e^{i\alpha_k t}\widehat{f}(\alpha_k) \qquad (t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N})$$

qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ dans la topologie normale de X, comme $m \to \infty$,avec $r_{k,m}$ étant des nombres rationnels qui dépendent de α_k et m, mais pas de $\widehat{f}(\alpha_k)$, et satisfont

$$\lim_{m\to\infty} r_{k,m} \quad = \quad 1$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $\epsilon > 0$ et soit k_0 un membre arbitraire de $\left[K\right]$ tel que $\alpha_{k_0} \neq 0$. Choisissons $m \in \mathbb{N}$ pour que

$$\left\|f(t) - \sigma_m(t)\right\| < \epsilon$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et

$$r_{k_0,m} \quad \geq \quad \frac{1}{2} \tag{3.10}$$

Supposons, au contraire, que $(f_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f_{[\lambda]}$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_0$, alors

$$\left\|f_{[\lambda_n]}(t) - f_{[\lambda]}(t)\right\| < \epsilon$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. *Par conséquent*

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{K_m} r_{k,m}(e^{i\alpha_k\lambda_n t}-e^{i\alpha_k\lambda t})\widehat{f}(\alpha_k)\right\| &\leq \left\|\sum_{k=1}^{K_m} r_{k,m}e^{i\alpha_k\lambda_n t}\widehat{f}(\alpha_k)-f_{[\lambda_n]}(t)\right\| \\ &+ \left\|\sum_{k=1}^{K_m} r_{k,m}e^{i\alpha_k\lambda t}\widehat{f}(\alpha_k)-f_{[\lambda]}(t)\right\| \\ &+\left\|f_{[\lambda_n]}(t)-f_{[\lambda]}(t)\right\| < 3\epsilon \qquad (3.11)\end{aligned}$$

pour chaque $n > N_0$ *et chaque* $t \in \mathbb{R}$.
Notons que, $\lambda_n \neq 0$ *pour tout* n *suffisamment grand (c'est-à-dire pour tout* $n > N$ *pour un certain* $\mathbb{N}$*). En effet, lorsque* $\lambda \neq 0$*, cela est évident, et lorsque* $\lambda = 0$*, cela découle de l' hypothése que* $\lambda_n \neq \lambda$ *pour tout* n. *Par conséquent, si* $k \in \left\{1, ..., K_m\right\}\backslash\left\{k_0\right\}$*, alors*

$$\alpha_k\lambda_n - \alpha_{k_0}\lambda_n \quad \neq \quad 0 \qquad (3.12)$$

pour finalement tout n.
De plus, si $k \in \left\{1, ..., K_m\right\}$*, alors*

$$\alpha_k\lambda - \alpha_{k_0}\lambda_n \quad \neq \quad 0 \qquad (3.13)$$

pour finalement tout n. *Car si* $k \neq k_0$ *et* $\lambda \neq 0$*, alors c'est clair puisque alors* $\lim_{n\to\infty}\alpha_k\lambda - \alpha_{k_0}\lambda_n = (\alpha_k - \alpha_{k_0})\lambda \neq 0$. *Si* $\lambda = 0$*, alors (3.13) se réduit à* $\alpha_{k_0}\lambda_n \neq 0$*, et ceci est vrai à cause de* $\alpha_{k_0} \neq 0$ *et de l'hypothése que* $\lambda_n \neq \lambda$ *pour tout* n *qui se lit maintenant* $\lambda_n \neq 0$ *pour tout* n. *De même, si* $k = k_0$*, alors (3.13) est vérifié en vertu de* $\alpha_{k_0} \neq 0$ *et* $\lambda_n \neq \lambda$ *pour tout* n.
Soit $N_1 > N_0$ *tel que (3.12) et (3.13) sont vérifiés pour* $n > N_1$. *Prenant en compte que*

$$M_t\left\{e^{i\alpha t}\right\} \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad \alpha = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

on voit que si $n > N_1$*, alors*

$$M_t\left\{e^{i(\alpha_k\lambda_n - \alpha_{k_0}\lambda_n)t}\right\} \quad = \quad 0$$

chaque fois que $k \in \left\{1, ..., K_m\right\}\backslash\left\{k_0\right\}$ *et*

$$M_t\left\{e^{i(\alpha_k\lambda - \alpha_{k_0}\lambda_n)t}\right\} \quad = \quad 0$$

chaque fois que $k \in \left\{1, ..., K_m\right\}$*. Par conséquent, en fixant arbitrairement* $n > N_1$*, on a*

$$M_t\left\{e^{-i\alpha_{k_0}\lambda_n t}\left(\sum_{k=1}^{K_m} r_{k,m}(e^{i\alpha_k\lambda_n t} - e^{i\alpha_k\lambda t})\widehat{f}(\alpha_k)\right)\right\} = r_{k_0,m}\widehat{f}(\alpha_{k_0})$$

D'autre part, par (3.11),

$$\left\|M_t\left\{e^{-i\alpha_{k_0}\lambda_n t}\left(\sum_{k=1}^{K_m} r_{k,m}(e^{i\alpha_k\lambda_n t} - e^{i\alpha_k\lambda t})\widehat{f}(\alpha_k)\right)\right\}\right\| \leq 3\epsilon.$$

En tenant compte de (3.10), on voit que $\left\|\widehat{f}(\alpha_{k_0})\right\| \leq 6\epsilon$*. D'où* $\widehat{f}(\alpha_{k_0}) = 0$*, pour* ϵ *arbitraire. Nous avons ainsi montré que* $\Sigma(f) \subset 0$*. Cela implique que* f *est constante, une contradiction.*

Soit $C = \left\{C(t)_{t\in\mathbb{R}}\right\}$ une famille de cosinus fortement continue sur un espace de Banach X. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $C_{[\lambda]}$ la famille de cosinus de valeur X donnée par

$$C_{[\lambda]}(t) \quad = \quad C(\lambda t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.14}$$

Un élément $x \in X$ sera appelé vecteur presque périodique pour C si la trajectoire C associée à x est presque périodique.
Notons que si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(C_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $C_{[\lambda]}$ fortement et presque uniformément en $t \in \mathbb{R}$. En effet, en argumentant comme dans la preuve du théorème 3.5.1, cela découle du fait que, pour tout $x \in X$, $t \mapsto C(t)x$ est uniformément continue sur tout compact de $\mathbb{R}$ et du fait que les fonctions $t \mapsto \lambda_n t$ converge vers $t \mapsto \lambda t$ presque uniformément sur $\mathbb{R}$.
Une conséquence immédiate du théorème 3.5.1 et de l'observation ci-dessus est la suivante.

Théoréme 3.5.2 *[2]*
Soit $C = \left\{C(t)_{t\in\mathbb{R}}\right\}$ *une famille de cosinus fortement continue sur un espace de Banach X. Supposons qu'il existe un vecteur presque périodique pour C tel que la C-trajectoire associée à ce vecteur soit non constante. Soit* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels convergeant vers* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et telle que* $\lambda_n \neq \lambda$ *pour chaque* $n \in \mathbb{R}$*. Alors* $(C_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $C_{[\lambda]}$ *fortement et presque uniformément mais pas uniformément en* $t \in \mathbb{R}$*.*

Nous présentons maintenant deux cas d'utilisation du résultat ci-dessus. Dans le premier cas, nous laissons $C = \mathbb{C}$ et $C(t) = \cos t$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et observons en outre que $x = 1$ est un vecteur presque périodique pour C. Une application du théorème 3.5.2 conduit au résultat suivant :

Exemple 3.5.1 *[2]*
Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres réels convergeant vers* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et telle que* $\lambda_n \neq \lambda$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, alors la suite* $\left(\left\{\cos \lambda_n t\right\}_{t\in\mathbb{R}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *des familles de cosinus scalaire converge vers la famille de cosinus à valeur scalaire* $\left\{\cos \lambda t\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *presque uniformément mais pas uniformément sur* $\mathbb{R}$.
Avant d'aborder l'autre cas, nous introduisons une classe $\mathscr{C}$ *de familles de cosinus comme suit : une famille de cosinus* $C = \left\{C(t)_{t\in\mathbb{R}}\right\}$ *sur un espace de Banach X est dans* $\mathscr{C}$ *si seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(C1) *Il existe une suite* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C_n = \left\{C_n(t)_{t\in\mathbb{R}}\right\}$*, de familles de cosinus sur X convergeant vers C fortement et uniformément en* $t \in \mathbb{N}$ *et telle que* $C_n = C$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(C2) *Il existe une suite* $(\tilde{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{C}_n = \tilde{C}_n = \left\{C_n(t)_{t\in\mathbb{R}}\right\}$ *de famille de cosinus sur X convergeant vers C fortement et presque uniformément mais pas uniformément en* $t \in \mathbb{R}$.

Avec cette définition en main, nous pouvons maintenant passer à l'autre cas d'utilisation du théorème 3.5.2. Basé sur le théorème 3.5.2, l'exemple 3.5.2 ci-dessous révèle que la classe $\mathscr{C}$ est non vide. La signification de ce résultat est qu'il démontre que la question de savoir si la limite d'une suite de familles de cosinus est uniforme ou presque uniforme ne peut, en général, être résolue en termes de la seule famille de cosinus limite.

Exemple 3.5.2 *[2]*
Soit C_0 *l'espace de toutes les suites complexes* $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *convergentes vers 0, munies de la norme supremum usuelle*

$$\left\|\xi\right\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\xi_k\right|$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$*, soit en l'élément de* C_0 *tel que*

$$(e_n)_k = \begin{cases} 1 & si \quad k = n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Tout $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dans* C_0 *peut commodément être représenté comme la série*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

convergent dans la norme de C_0*. Pour chaque* $t \in \mathbb{R}$ *et chaque* $n \in \mathbb{N}$*, soit* $C_n(t)$ *l'opérateur linéaire sur* C_0 *défini par*

$$C_n(t)\xi = \sum_{k=1}^{n} (\cos kt)\xi_k e_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k$$

et, pour chaque $t \in \mathbb{R}$*, soit* $C(t)$ *l'opérateur linéaire sur* C_0 *donné par*

$$C_n(t)\xi \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\cos kt)\xi_k e_k \tag{3.15}$$

avec $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *étant un membre arbitraire de* C_0*. Clairement, pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*,* $C_n = \left\{C_n(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est une famille de cosinus fortement continue de contractions sur* C_0*, et aussi* $C = \left\{C(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est une famille de cosinus fortement continue de contractions sur* C_0*. Étant donné* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, nous écrirons* $C_{n,[\lambda]}$ *à la place de* $(C_n)_{[\lambda]}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, tout* $t, \lambda \in \mathbb{R}$*, et tout* $\xi \in C_0$ *on a*

$$\begin{aligned}
\left\|C_{[\lambda]}(t)\xi - C_{n,[\lambda]}(t)\xi\right\|_{\infty} &\leq \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k\right\|_{\infty} + \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} (\cos \lambda kt)\xi_k e_k\right\|_{\infty} \\
&\leq \sup_{k>n} \left|\xi_k\right| + \sup_{k>n} \left|(\cos \lambda kt)\xi_k\right| \\
&\leq 2 \sup_{k>n} \left|\xi_k\right|.
\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|C_{[\lambda]}(t)\xi - C_{n,[\lambda]}(t)\xi\right\|_{\infty} \quad = \quad 0$$

Ainsi, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$*, la suite* $(C_{n,[\lambda]})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $C_{[\lambda]}$ *fortement et uniformément sur* $\mathbb{R}$*.*

D'autre part, la représentation (3.15) implique que tout $\xi \in C_0$ *est un vecteur presque périodique pour C, et de plus, la fonction* $t \mapsto C(t)\xi$*,* $t \in \mathbb{R}$*, est non constante chaque fois que* $\xi \neq 0$*. Donc, d'aprés le théorème 3.5.2, si, pour un* $\lambda \in \mathbb{R}$*, donné* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de nombres réels convergeant vers* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et telle que* $\lambda_n \neq \lambda$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, alors la suite* $(C_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $C_{[\lambda]}$ *presque uniformément mais pas uniformément sur* $\mathbb{R}$ *dans la topologie forte des opérateurs. En fait, en invoquant directement le théorème 3.5.1, on peut en déduire un peu plus : pour tout* ξ *non nul dans* C_0 *les fonctions* $t \mapsto C_{[\lambda_n]}(t)\xi, n \in \mathbb{N}$*, convergent vers* $t \mapsto C_{[\lambda_n]}(t)\xi$ *presque uniformément mais pas uniformément en* $t \in \mathbb{R}$*.*

On voit ainsi que pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $C_{[\lambda]}$ *est la limite de deux suite de familles de cosinus, chacune comprenant des familles de cosinus différentes de* $C_{[\lambda]}$*, telles qu'une séquence converge uniformément, tandis que l'autre converge presque uniformément mais pas uniformément sur* $\mathbb{R}$ *; en d'autres termes,* $C_{[\lambda]}$ *est un membre de* $\mathscr{C}$*.*

Le résultat final de cette section, à savoir l'exemple 3.5.3 ci - dessous, montrera que pour qu'une famille de cosinus C appartienne à $\mathscr{C}$ il n'est pas nécessaire de posséder un vecteur quasi périodique pour lequel la trajectoire C associée à ce vecteur est non constante. En particulier, il deviendra clair que l' appartenance à $\mathscr{C}$ peut être établie par d'autres moyens que le théorème 3.5.2.

Exemple 3.5.3 *[2]*
On considére $C_0(0,\infty]$ *comme muni de la norme uniforme* $\left\|f\right\|_\infty = \sup_{x\geq 0}\left|f(x)\right|$ *. Soit* $C = \left\{C(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *la famille de cosinus sur* $C_0(0,\infty]$ *donné par*

$$C(t)f(t) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big(f(x+t)+\tilde{f}(x-t)\Big) \qquad \Big(f\in C_0(0,\infty], x\geq 0\Big)$$

pour chaque $t\geq 0$, *avec* $\tilde{f}$ *étant l'extension impaire de f sur l'ensemble de* $\mathbb{R}$ *. Nous affirmons que C est membre de* $\mathscr{C}$ *et que C n'a pas de vecteur quasi périodique non nul.*
Pour prouver la première assertion, soit F une fonction réelle paire continue sur $\mathbb{R}$ *avec une limite à l'infini. Alors, en particulier , F est borné. Pour chaque* $\epsilon\in\mathbb{R}$, *soit* $M_{\epsilon F}$ *l'opérateur de multiplication par* $e^{\epsilon F}$ *sur* $C_0(0,\infty]$ *:*

$$M_{\epsilon F}f \quad = \quad e^{\epsilon F}f \qquad \Big(f\in C_0(0,\infty]\Big).$$

Clairement, $M_{\epsilon F}$ *est borné, avec* $\left\|M_{\epsilon F}\right\|\leq e^{\left|\epsilon\right|\left\|F\right\|_\infty}$, *et l'inverse de* $M_{\epsilon F}$ *coïncide avec* $M_{-\epsilon F}$*.*
Pour chaque $\epsilon\in\mathbb{R}$ *et chaque* $t\in\mathbb{R}$, *on pose :*

$$C_{(\epsilon)}(t) \quad = \quad M_{-\epsilon F}C(t)M_{\epsilon F}$$

Compte tenu de la régularité de F, on a l'expression explicite suivante

$$C_{(\epsilon)}(t)f(t) = \frac{1}{2}\Big(f(x+t)e^{\epsilon(F(x+t)-F(x))}+\tilde{f}(x-t)e^{\epsilon(F(x-t)-F(x))}\Big)$$

$$\Big(f\in C_0(0,\infty], x\geq 0\Big)$$

pour tout $t\geq 0$. *Nous remarquons que ce n'est que dans le but d'obtenir cette formule élégante que nous avons supposé que F soit pair-cette hypothése peut être bien écartée sans nuire à l'argument qui suit. Il est clair que pour tout* $\epsilon\in\mathbb{R}$, $C_{(\epsilon)}(t)$ *est un opérateur borné linéaire sur* $C_0(0,\infty]$ *avec* $\left\|C_{(\epsilon)}(t)\right\|\leq e^{2|\epsilon|\left\|F\right\|_\infty}$ *pour tout* $t\in\mathbb{R}$ *, et* $C_{(\epsilon)} = \left\{C_{(\epsilon)}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est une famille de cosinus fortement continue sur* $C_0(0,\infty]$*. Soit* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels convergeant vers 0 et soit* $\epsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}}|\epsilon_n|$*.*
Alors, $(C_{(\epsilon_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de familles de cosinus équibornées sur* $C_0(0,\infty]$, *avec* $\left\|C_{(\epsilon_n)(t)}\right\|\leq e^{2\epsilon\left\|F\right\|_\infty}$ *pour chaque* $n\in\mathbb{N}$ *et chaque* $t\in\mathbb{R}$*. Puisque* $(M_{-\epsilon_n F})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(M_{\epsilon_n F})_{n\in\mathbb{N}}$ *tendent vers l'opérateur identité sur X pour la norme d'opérateur , on voit que* $(C_{(\epsilon_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers C dans l'opérateur norme uniformément sur* $\mathbb{R}$*. Ainsi, pour achever la preuve que C est membre de* $\mathscr{C}$*, il suffit de trouver une suite de familles de cosinus sur* $C_0(0,\infty]$ *qui converge vers C fortement et presque uniformément mais pas uniformément sur* $\mathbb{R}$*. On montrera que pour toute suite* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres positifs convergeant vers 1 et telle que* $\lambda_n\neq 1$ *pour chaque* $n\in\mathbb{N}$ *,* $(C_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ *fournit la suite désirée [on utilise la notation selon (3.14)].*

Comme $(C_{[\lambda_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* C *fortement et presque uniformément sur* $\mathbb{R}$, *il suffit de montrer que la convergence n'est pas uniforme. On établira l'énoncé plus fort suivant : pour tout* f *non nulle dans* $C_0(0,\infty]$, *les fonctions* $t \mapsto C_{[\lambda_n]}(t)f$,$n \in \mathbb{N}$, *ne parviennent pas à converger uniformément vers* $t \mapsto C(t)f$. *Pour cela, étant donné* $f \in C_0(0,\infty]\backslash 0$, *on observe d'abord que pour tout* $t \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *le membre de droite de la formule*

$$C(t)f(x) - C_{[\lambda_n]}(t)f(t) \quad = \quad \frac{1}{2}\Big(f(x+1) - f(x+\lambda_n t)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\tilde{f}(x-1) - \tilde{f}(x-\lambda_n t)\Big)$$

$$(x \geq 0)$$

réduit à

$$\frac{1}{2}\Big(f(2t) - f((1+\lambda_n)t)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\tilde{f}((1-\lambda_n)t)\Big)$$

si on prend $x = t$. *Ainsi* , *la mise*

$$f_n(t) = \frac{1}{2}\Big(f(2t) - f((1+\lambda_n)t)\Big)$$

on a

$$\Big\|C(t)f - C_{[\lambda_n]}(t)f\Big\|_\infty \geq \left|f_n(t) - \frac{1}{2}\tilde{f}((1-\lambda_n)t)\right|$$

Comme $\sup_{t\geq 0}\Big|\tilde{f}((1-\lambda_n)t)\Big| = \Big\|f\Big\|_\infty$, *notre tâche sera terminée une fois que nous aurons montré que* $\lim_{n\to\infty}\Big\|f_n\Big\|_\infty = 0$.
Pour tout $\epsilon > 0$, *on choisit* $T > 0$ *de sorte que* $\Big|f(t) - f(\infty)\Big| < \epsilon$ *chaque fois que* $t > T$. *Alors, clairement,* $\sup_{t>T}\Big|f_n(t)\Big| \leq \epsilon$ *pour tout* n. *Par contre, si* $t \in [0,T]$, *alors* $|2t - (1+\lambda_n)t| \leq |1-\lambda_n|T$, *et ceci en conjonction avec le fait que* f *est uniformément continue sur* $[0,T]$ *implique que* $\sup_{t\in[0,T]}|f_n(t)| \leq \epsilon$ *pour tout* n *n'est pas assez grande.*
Ainsi, $\Big\|f_n\Big\|_\infty \leq \epsilon$ *pour tout* n *n'est pas assez grande, ce qui termine la preuve que* C *est dans* $\mathscr{C}$.
En passant à la preuve de la seconde assertion, notons que

$$\lim_{t\to\infty} C(t)f(x) \quad = \quad \lim_{t\to-\infty} C(t)f(x) \quad = \quad 0$$

pour tout $f \in C_0(0,\infty]$ *et tout* $x \geq 0$. *Supposons maintenant que* $f \in C_0(0,\infty]$ *est un vecteur presque périodique pour* C. *Alors, compte tenu des égalités ci-dessus*

$$\Big[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i\alpha t}C(t)f dt\Big](x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-i\alpha t}C(t)f(x)dt = 0$$

pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$ *et chaque* $x \geq 0$. *Ainsi, tous les coefficients de Fourier-Bohr de* $t \mapsto C(t)f$ *s'annulent et par conséquent* $f = 0$. *La deuxiéme affirmation et ce qui a été domandé.*

CHAPITRE 4

APPLICATION

4.1 Introduction

Comme pour les équations différentielles ordinaires, les équations d'ordre n peuvent être réduites à un ensemble d'équations du premier ordre en utilisant des opérateurs matriciels. Dans le présent chapitre, nous considérons uniquement les problémes de réduction d'équations incomplétes du second ordre à un ensemble d'équations du premier ordre.

4.2 Equations différentielles abstraites non linéaires du second ordre

Notre objectif principal est d'étudier le probléme du second ordre semi-linéaire absrait de la valeur initiale

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}w(t) = Aw(t) + f(t, w(t), \frac{d}{dt}w(t)) \\ w(t_0) = x \in X, \frac{d}{dt}w(t_0)) = y \in X \end{cases} \tag{4.1}$$

Dans (4.1) X est un espace de Banach, w est une application de $\mathbb{R}$ dans X, A est le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continu de l'opérateur linéaire dans X, et f est une application non linéaire de $\mathbb{R} \times X \times X$ dans X.

Nous traitons maintenant l'équation non linéaire (4.1). Désomais, nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continue $C(t), t \in \mathbb{R}$ dans

X. Nous chercherons une solution ”lisse” de (4.1), c'est-à-dire une solution de l'intégrale équation

$$w(t) \quad = \quad C(t-t_0)x + S(t-t_0)y + \int_{t_0}^{t} S(t-s)f(s, w(s) \quad , \quad d/dsw(s))ds \tag{4.2}$$

L'équation (4.2) est plus générale que (4.1) en vertu de la Propsition 4.2.1. Nous allons étudier l'existence de solutions à (4.2) sous diverses hypothéses sur la famille de cosinus C(t), $t \in \mathbb{R}$, la fonction non linéaire f et les valeurs initiales x et y.

$$X^k \quad := \quad \left\{ x \in X : C(.)x \in C^k(\mathbb{R}; X) \right\} \qquad k = 1, 2$$

Proposition 4.2.1 *[4]*
Soit $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$ une famille de cosinus fortement continue en X avec le générateur infinitésimal A. Si $g : \mathbb{R} \to X$ est continûment différentiable, $x \in D(A)$, $y \in X^1$, et

$$w(t) \overset{def}{=} C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)g(s)ds \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Alors $w(t) \in D(A)$ pour $t \in \mathbb{R}$, w est deux fois différentiable continue, et w satisfait

$$d^2/dt^2 w(t) = Aw(t) + g(t), t \in \mathbb{R} \quad , \quad w(0) = x \quad , \quad d/dtw(0) = 0 \tag{4.3}$$

Inversement, si $g : \mathbb{R} \to X$ est continue, $w(t) : \mathbb{R} \to X$ est deux fois continûment différentiable, $w(t) \in D(A)$ pour $t \in \mathbb{R}$, et w satisfait (4.3), alors

$$w(t) \quad = \quad C(t)x + S(t)y + \int_0^t S(t-s)g(s)ds, t \in \mathbb{R}$$

La condition suivante, ce que nous appelons la Condition (F), est d'une importance fondamentale dans l'étude des familles de cosinus continues :

4.2.1 Condition (F)

Si $B^2 = A$, où A est le générateur infinitésimal de $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$, alors S(t) se définit de X dans D(A) pour $t \in \mathbb{R}$, $BS(t)$ est borné sur X pour $t \in \mathbb{R}$ et $BS(t)x$ est continue en t sur $\mathbb{R}$ pour chaque $x \in X$ fixé [4].

Proposition 4.2.2 *[4]*
Soient A et B des opérateurs linéaires de l'espace de Banach X dans lui-même, soit B un

opérateur qui commute avec chaque opérateur linéaire borné dans X qui commute avec A, soit zéro contenu dans l'ensemble résolvant de B, et soit $B^2 = A$. Les acerssion suivantes sont équivalent :

(i) *A est le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continue $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$ dans X satisfaisant la Condition(F).*

(ii) *B est le générateur infinitésimal d'un groupe fortement continue $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$ dans X.*

(iii) $\mathscr{B} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$, *avec le domaine $D(B) \times D(B)$ est le générateur infinitésimal d'un groupe fortement continue $U(t), t \in \mathbb{R}$ dans $X \times X$.*

(iv) $\mathscr{A} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$, *avec le domaine $D(A) \times D(B)$ est le générateur infinitésimal d'un groupe fortement continue $V(t), t \in \mathbb{R}$ dans $Y \overset{def}{=} \left[D(B)\right] \times X$, où $\left[D(B)\right]$ désigne l'espace de Banach D(B) avec la norme de graphe*

$$\left\|x\right\|_B = \left\|x\right\| + \left\|Bx\right\|.$$

Proposition 4.2.3 *[4]*
Supposons la même hypothése sur A et B dans la proposition précédent. une condition nécessaire et suffisante pour que A soit le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continue $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$ dans X satisfaisant la Condition (F) est que il existe des constantes $M > 0$ et $\omega \geq 0$ telle que

(i) *D(B) est dense en X.*

(ii) *Pour λ réel, $\lambda > \omega$, λ^2 est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A.*

(iii) $\lambda(\lambda^2 - A)^{-1}$ *et* $B(\lambda^2 - A)^{-1}$ *sont fortement différentiables à l'infini pour $\lambda > \omega$.*

(iv) $\left\|\frac{(\lambda-\omega)^{N+1}}{N!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N \lambda(\lambda^2 - A)^{-1}\right\| \leq M$ *pour* $\lambda > \omega$ *et* $N = 0, 1, 2, ...$

(v) $\left\|\frac{(\lambda-\omega)^{N+1}}{N!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^N B(\lambda^2 - A)^{-1}\right\| \leq M$ *pour* $\lambda > \omega$ *et* $N = 0, 1, 2, ...$

Proposition 4.2.4 *[4]*
Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X \times X$ et soit $f : D \to X$ continue et satisfait

$$\left\|f(t,x,y) - f(t,\hat{x},\hat{y})\right\| \leq L(t)\left(\left\|x-\hat{x}\right\| + \left\|y-\hat{y}\right\|\right) \tag{4.4}$$

Pour (t,x,y) , $(t,\hat{x},\hat{y}) \in D$ et une fonction continue à valeur réelle L, Pour chaque $(t_0,x,y) \in D$ de telle sorte que $x \in D(A)$ il existe $t_1 > 0$ et une fonction unique différentiable continue $w : (t_0 - t_1, t_0 + t_1) \to X$ satisfaisant (4.2).
De plus, si $D = \mathbb{R} \times X \times X$, alors la solution w est définie sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 4.2.1 *[4]*
Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X \times X$ et soit $f : D \to X$ une fonction deux fois différentiable continue sur D. Pour chaque $(t_0, x, y) \in D$ telle que $x \in D(A)$ et $y \in X^1$ il existe $t_1 > 0$ et une fonction unique différentiable continue $w : (t_0 - t_1, t_0 + t_1) \to X$ satisfaisant (4.1).

Proposition 4.2.5 *[4]*
Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$ et soit $f : D \to X$ différentiable continue sur D. Pour chaque $(t_0, x) \in D$ tel que $x \in D(A)$ et pour chaque $y \in X^1$, il existe une fonction unique deux fois différentiable continue $w : (t_0 - t_1, t_0 + t_1) \to X$ satisfaisant

$$d^2/dt^2 w(t) = Aw(t) + f(t, w(t)) \quad , \quad w(t_0) = x \quad , \quad d/dt w(t_0) = y, pour |t - t_0| < t_1 \tag{4.5}$$

Proposition 4.2.6 *[4]*
Supposons que l'hypothése de la Proposition 4.2.2 soit valable et que la Condition (F) est remplie. Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times [D(B)] \times X$ et soit $f : D \to X$ continue et satisfait

$$\left\| f(t, x, y) - f(t, \hat{x}, \hat{y}) \right\| \leq L(t) \left(\left\| x - \hat{x} \right\|_B + \left\| y - \hat{y} \right\| \right) \tag{4.6}$$

Pour $(t, x, y), (t, \hat{x}, \hat{y}) \in D$ et une fonction continue à valeur réelle L. Pour chaque $(t_0, x, y) \in D$, il existe $t_1 > 0$ et une fonction unique différentiable continue $w : (t_0 - t_1, t_0 + t_1) \to X$ satisfaisant (4.2).
De plus, si $D = \mathbb{R} \times [D(B)] \times X$, alors lasolution w est déinie sur $b\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.7 *[4]*
Supposons que l'hypothése de la Proposition 4.2.2 soit valable et que la Condition (F) est remplie. Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times [D(B)] \times X$ et soit $f : D \to X$ une fonction deux fois différentiable continue sur D. Pour chaque $(t_0, x, y) \in D$ telle que $x \in D(A)$ et $y \in D(B)$ il existe $t_1 > 0$ et une fonction unique différentiable continue $w : (t_0 - t_1, t_0 + t_1) \to X$ satisfaisant (4.1).

4.3 Réduction du probléme de cauchy pour une équation du second ordre au probléme de cauchy pour un systéme d'équations du premier ordre

Théorème de Kysinski

Dans un espace de Banach X, considérons le problème de Cauchy uniformément bien posé suivant

$$u''(t) = Au(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad u(0) = u^0 \quad , \quad u'(0) = u^1 \tag{4.7}$$

On définit l'opérateur matriciel $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} : X^1 \times X \to X^1 \times X$ agissant sur un élément $(x, y) \in X^1 \times X$ par la formule $\mathcal{A}(x, y) = (y, Ax)$ qui est donnée sur le domaine $D(\mathcal{A}) = D(A) \times X^1$. Dans ce qui suit , un élément $(x, y) \in X^1 \times X$ dans les formules sera écrit comme le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Théoréme 4.3.1 *[12]*
L'espace X^1 avec la norme

$$\|x\|_{X^1} := \|x\| + \sup_{0 \le t \le 1} \|C'(t)x\| \tag{4.8}$$

est un espace de Banach, et l'opérateur $\mathcal{A}$ génère les C_0-groupes d'opérateurs suivants sur l'espace de Banach $X^1 \times X$:

$$e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C(t) & S(t) \\ AS(t) & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(t)x + S(t)y \\ AS(t)x + C(t)y \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Proposition 4.3.1 *[12]*
Soit une fonction d'opérateur C_0-cosinus $C(.)$. Alors X^1 coïncide avec la fermeture de $D(A)$ dans la norme

$$\|x\|^* := \|x\| + \sup_{z > \omega, n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}(z-\omega)^{n+1} \left\| \frac{d^n}{dz^n} A(z^2 I - A)^{-1} x \right\| \tag{4.9}$$

Proposition 4.3.2 *[12]*
La résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}$ a la forme

$$(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} & (\lambda^2 I - A)^{-1} \\ A(\lambda^2 I - A)^{-1} & \lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} \end{pmatrix} \qquad pour \quad \lambda^2 \in \rho(A) \tag{4.10}$$

Proposition 4.3.3 *[12]*
Soit $u(.)$ une solution du probléme (4.7), et soit $v(t) := u'(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\begin{pmatrix} u(.) \\ v(.) \end{pmatrix}$

est une solution du probléme de Cauchy uniformément bien posé suivant dans l'espace de Banach $X^1 \times X$ *:*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Proposition 4.3.4 *[12]*
Soit un certain espace de Banach $\tilde{X}^1$ *continûment et integré dans l'espace de Banach* X*, et de plus, soit* $D(\tilde{A}) \subseteq \tilde{X}^1$*, pour un certain opérateur* $\tilde{A} \in L(X)$*. Alors si dans l'espace* $\tilde{X}^1 \times X$ *le probléme de Cauchy*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \tilde{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

est uniformément bien posé et $\rho(\tilde{A}) \neq \emptyset$*, on a* $\tilde{A} \in C(M, \omega)$*.*

4.4 Exemples

Exemple 4.4.1 *[11]*
Soit C *une fonction cosinus sur* X*, avec le générateur* A*. Alors pour chaque* $x \in D(A)$*,* $u(t) = C(t)x$ *est une solution unique au probléme de Cauchy :*

$$u''(t) = Au(t) \quad , \quad u(0) = x \quad , \quad u'(0) = 0.$$

Soit maintenant B *un opérateur de classe* (B)*, et* $v(t)$ *une solution du probléme de Cauchy perturbé :*

$$v''(t) = Av(t) + Bv(t) \quad , \quad v(0) = x \quad , \quad v'(0) = 0.$$

En notant S *la fonction sinus associée à* C*, on a*

$$(d/ds)\Big[C(t-s)v(s) + S(t-s)v'(s)\Big] \quad = \quad S(t-s)Bv(s)$$

En intégrant cette égalité de $s = 0$ *à* $s = t$*, on obtient*

$$v(t) \quad = \quad C(t)x + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds$$

Exemple 4.4.2 *[4]*
Soit X *l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur* $\mathbb{R}$ *de norme supremum. Soit* $T(t)$*,* $t \in \mathbb{R}$ *le groupe des translations sur* X*, soit* $(T(t)x)(u) = x(u+t)$ *. Définir* $C(t) =$

$\dfrac{(T(t)+T(-t))}{2}$. *Alors*

$$\begin{cases} (C(t)x)(u) &= \dfrac{(x(u+t)+x(u-t))}{2} \\ (S(t)x)(u) &= \left(\int_0^t C(s)xds\right)(u) = 2^{-1}\int_{u-t}^{u+t} x(s)ds \end{cases} \tag{4.13}$$

On voit facilement que $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *est une famille de cosinus fortement continue de générateur infinitésimal* A *donné par* $Ax = x''$, $D(A) = \left\{x \in X : x'' \in X\right\}$. *Si* $B : X \to X$ *est défini par* $Bx = x'$, $D(B) = \left\{x \in X : x' \in X\right\}$, *alors* $B^2 = A$, *et on voit facilement que la famille de cosinus fortement continue définie par (4.13) satisfait la condition (F). Puisque*

$$(BS(t)x)(u) = \frac{(x(u+t)-x(u-t))}{2}$$

) on note que pour $f \in D(A)$, $g \in D(B)$,

$$w(x,t) \overset{def}{=} (C(t)f + S(t)g)(x) = 2^{-1}(f(x+t)+(x-t)) + 2^{-1}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$$

donne la solution classique de D'Alembert de l'équation d'onde de dimention-1

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t) \quad , \quad w(x,0) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}w(x,0) = g(x)$$

dont la formulation abstraite est

$$\frac{d^2}{dt^2}w(t) = Aw(t) \quad , \quad w(0) = f \quad , \quad \frac{d}{dt}w(0) = g.$$

Exemple 4.4.3 *[11]*
Soit $X = L^1(R)$ *et considérons la fonction cosinus sur* X *définie par*

$$\left[C(t)x\right](p) \quad = \quad \frac{1}{2}\left[x(p+t)+x(p-t)\right]. \tag{4.14}$$

Soit A *le générateur de* $\left\{C(t)\right\}$. *Alors* $D(A)W_1^2$ *et* $(Ax)(p) = x''(p)$ *pour* $x \in D(A)$. *Soit* $b(p)$ *une fonction dans* $L^1(R)$ *mais n'appartenant pas à* $L^\infty(R)$.
Alors l'opérateur de multiplication B *est défini par*

$$(Bx)(p) = b(p)x(p)$$

chaque fois que le produit est également en $L^1(R)$. *Puisque* B *est fermé et que* $D(B) \supset D(A)$, *B satisfait la condition* (B_1). *De plus, nous avons que pour tout* $x \in D(A)$

$$\int_0^1 \|BC(t)x\| dt \leq \|b\| \|x\|$$

Par conséquent, B est un opérateur de classe (B). *Mais, B est évidemment non borné si l'on suppose en outre que* $b(p)$ *n'est pas dans* $L^2(R)$.

L'exemple suivant montre que la réciproque du lemme (2.2.2) ne tient pas.

Exemple 4.4.4 *[11]*
Soit $C\big[-\infty, \infty\big]$ *l'espace de toutes les fonctions bornées et continues sur* $\mathbb{R}$, *de norme supremum. Soient* $X = C\big[-\infty, \infty\big]$ *et* $\big\{C(t)\big\}$ *la fonction cosinus définie par (4.14). Alors* $D(A) = C^2\big[-\infty, \infty\big]$ *et* $(Ax)(p) = x''(p)$ *pour* $x \in D(A)$. *Soit maintenant* $D(B) = C^1\big[-\infty, \infty\big]$ *et posons* $(Bx)(p) = x'(p)$ *pour* $x \in D(B)$. *Alors B satisfait la condition* (B_1). *Notant que* $BS(t)x = C(t)x$, *on obtient*

$$\int_0^1 \|BS(t)x\| dt \leq \|x\| \quad , \qquad x \in X$$

Soit ensuite $h(p)$ *une fonction dans* C_0^∞ *telle que* $h(p) = 1$ *pour* $|p| \leq 2$ *et* $0 \leq h(p) \leq 1$ *pour* $|p| \geq 2$. *Posant* $x^n(p)\sin(n\pi p)$, *on a une suite* $\big\{x_n\big\}$ *dans* $D(A)$ *telle que* $\|x_n\| = 1$. *Mais , puisque* $\|BC(t)x_n\| \geq |BC(t)x_n(t)| = (\frac{n}{p})(1 + \cos(2\pi t))$ *pour* $0 \leq t \leq 1$, *on obtient*

$$\int_0^1 \|BC(t)x_n\| dt \geq \frac{n\pi}{2}$$

Ainsi , la condition (B_2) *n'est pas satisfaite.*

Exemple 4.4.5 *[4]*
Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire borné dans X.
Alors

$$C(t) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{2k}}{(2k)!}$$

est une famille de cosinus fortement continue. La famille de sinus correspondante est donnée par

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Si $X = \mathbb{R}$, $a > 0$, *et* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est défini par* $Ax = ax$, *alors* $C(t) = \cosh(t\sqrt{a})$ *et*

$S(t) = \dfrac{\sinh(t\sqrt{a})}{\sqrt{a}}$. *Si* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est défini par* $Ax = -ax$ *, alors* $C(t) = \cos(t\sqrt{a})$ *et* $S(t) = \dfrac{\sin(t\sqrt{a})}{\sqrt{a}}$.

CONCLUSION

On a constaté que les semi-groupes fortement continus et les familles de cosinus sur un espace de Banach sont uniquement caractérisés par leurs générateur respectifs, aussi on a dégagé **sept** remarques :

(1) La mesurabilité des familles cosinus implique leur continuité, qu'il concerne l'ensemble de toutes les trajectoires d'une famille de cosinus.

(2) La convergence des familles de cosinus est en régle générale beaucoup plus réguliéres que celles des semi-groupes.

(3) La convergence peut ne pas être uniforme.

(4) Si une trajectoire d'une famille de cosinus bornée admet des limites à l'infini, alors elle est constante.

(5) En dehors de l'espace de régularité, les familles de cosinus équicontinus échouent toujours à converger fortement. Une déclaration des semi-groupes d'opérateurs n'est pas vraie.

(6) la riche théorie du comportement asymptotique des semi-groupes n'a pas d'équivalent pour les familles de cosinus.

(7) Contrairement à la riche théorie des perturbations singuliéres des semi-groupes, la théorie des perturbations singuliéres des familles de cosinus n'a pas d'objets d'étude : il n'y a pas de suites de familles de cosinus qui convergent de maniére irréguliére.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bobrowski, *Generation of cosine families via Lord Kelvin's method of images*, J. Evol. Equ. 10 (2010), 663-675.

[2] A. Bobrowski, W. Chojnacki *Cosine families and semigroups really differ*, J. Evol. Equ. 13 (2013), 897-916.

[3] A. Pazy *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* , Springer-Verlage 1983.

[4] C. C. Travis, G. F. Webb *Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 32 (1978), 75-96.

[5] D. Lutz *strongly continuous operator cosine functions.*

[6] E. Giusti *Funzioni coseno periodiche*, Boll. Unione Mat. Italiana, 22 (1967), p. 478-485.

[7] J. aczel's *On history, applications and theory of functional equations.*

[8] H. O. Fattorini *Ordinary differential equations in linear topological spaces I*, J. Differential Equations, 5 (1968), p. 72-105.

[9] H. O. Fattorini *Ordinary differential equations in linear topological spaces II*, J. Differential Equations, 5 (1968), p. 72-105.

[10] G. Da Prato, E. Giusti *Una Caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte*, Boll. Unione Mat. Italiana , 22 (1967), p. 357-362.

[11] T. Takenaka, N. Okazawa *A Phillips-Miyadera type perturbation theorem for cosine functions of operators*, Tôhoku Math. J. 30 (1978), 107-115.

[12] V. V. Vasil'ev, S. I. Piskarev *differential equations in banach spaces II . theory of cosine operator functins*, Math. Sci. J. 2004.