



N° Réf :.....

Centre Universitaire  
AbdElhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de  
Master**

**En : Mathématiques  
Spécialité : Mathématiques appliquées**

**La relation entre les équations aux dérivées  
partielles et les équations différentielles  
stochastiques.**

Préparé par : Bouchebetoul Safa

Bouketta Marwa

**Soutenu devant le jury**

Meskine Habiba	MAA	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Président
Boufelgha Nabila	MAA	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Rapporteur
Benhabiles Hanane	MAA	C. U. AbdElhafid Boussouf, Mila	Examineur

**Année universitaire : 2020/2021**

## REMERCIEMENT

*Nous tenons à remercier avant tout **ALLAH** le toute puissant de nous avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail.*

*Nous remercions chaleureusement notre encadreur de ce travail Madame **Boufelgha Nabila** pour son aide précieuse et ses conseils éclairés dans la direction de notre travail, Ainsi que leur grande disponibilité et son immense gentillesse .*

*Nous remercions également tous les membres de jury, Madame **Benhabiles Hanane** et Madame **Meskine Habiba** qu'ont accepté de juger notre travail, et tous nos enseignants, nos collègues et administrateurs du département de **Mathématiques et Informatique** .*

*Mes grands remerciements vont aussi à toute notre famille précisément notre **père** et notre **mère** pour ses encouragement qu'ont accompagné durant cette mémoire .*

*Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui on participé de près ou de loi à la réalisation de ce travail.*

## DÉDICACE

*A mes chers parents Houcine et Rahima.*

*Qui m'ont fourni les meilleures conditions pour terminer mes études, en témoignage de grande amour, tendresse et encouragement. Que dieu m'offre la chance d'être à la hauteur de leurs attentes.*

*Vous avez guidé mes premiers pas, vous m'avez toujours servi de modèle et vous rester toute ma vie.*

*Je vous dédie ce modeste travail qui n'est d'autre que le fruit de vos nobles sacrifices.*

*A mes chers frères Yassine et Abdesettar,*

*Mes chères sœurs Chafia, Loubna, Moufida et Zahra.*

*Qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité et pour la tendre affectation qu'ils m'ont toujours témoigné.*

*A tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom Bouketta, qui à était ma beaucoup encouragé.*

*A tous mes amies et collègues pour leurs soutiens moraux, Mon binôme Safa qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail.*

*Je dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.*

*Marwa*

## DÉDICACE

*C'est avec une grande gratitude et des mots sincères, que je dédie ce modest  
travail de fin d'étude*

*A mon Père **Abdelhafid** qui a été mon ombre durant toutes les années des  
études et a mis ma disposition tous les moyens nécessaire pour que je réussisse,  
A ma Mère **Naima** pour tous ses sacrifices, ses amour, ses tendresse, son  
soutien et ses prières tout au long de mes études, et ses encouragements,  
J'espère qu'un jour, je pourrai leurs rendre un peu de ce qu'ils on fait pour moi  
, que dieu leur pretre bonheur et longue vie.*

*A ma grand-mère **Safia**, que Dieu lui fasse miséricorde.*

*Je dédie aussi de ce travail*

*A mes très chérs frère : **Abderaouf**, **Mouhammed**, **Nadjib** et sa femme **Feriel**.*

*A Tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom  
**Bouchebtoul** et **Belkhir**, pour leurs soutien tout au long de mon parcours  
universitaire, Que dieu leurs donne une longue et joyeuse vie.*

*Merci pour leur amours et leurs encouragement.*

*Sans oublier mon binôme **Marwa** pour son soutien moral, sa patience et sa  
compréhension tous au long qui a partagé de ce travail.*

*Safa*

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur probabilité</b>	<b>2</b>
1.1 Rappels de théorie de la mesure . . . . .	2
1.2 Espaces probabilités finis . . . . .	4
1.3 Variable aléatoire réelle . . . . .	11
1.4 Lois Usuelles . . . . .	17
1.5 La fonction génératrice . . . . .	21
1.6 La fonction caractéristique . . . . .	22
1.7 Couples des v.a.r . . . . .	23
1.8 Modes de convergence . . . . .	31
<b>2 Processus Stochastique</b>	<b>33</b>
2.1 Processus Stochastique . . . . .	33
2.2 Chaîne de Markov . . . . .	35
2.3 Processus Gaussiens . . . . .	36
2.4 Mouvement brownien . . . . .	39
2.5 Martingales à temps continu . . . . .	42
2.6 Processus de Poisson . . . . .	44
2.7 Processus de Markov . . . . .	47

## *Table des matières*

---

2.8	Intégrale stochastique . . . . .	48
2.9	Équations Différentielles Stochastiques . . . . .	56
2.10	Généralités sur les équations aux dérivées partielles . . . . .	60
<b>3</b>	<b>la relation entre les E.D.P et les E.D.S</b>	<b>64</b>
3.1	Formule de Feynman-Kač . . . . .	64
3.2	Transformtion de Fourier : . . . . .	65
3.3	Semi-groupes et générateurs . . . . .	67
3.4	Lien entre les E.D.P et les E.D.S . . . . .	67
3.5	Représentation probabiliste de la solution parabolique . . . . .	69
3.5.1	E.D.P de la chaleur : . . . . .	69
3.5.2	E.D.P intégrable : . . . . .	75
	Bibliographie	79

## Introduction générale

Le but de ce travail est de montrer le lien entre les équations aux dérivées partielles du second ordre et les processus stochastiques de diffusion ainsi que de présenter quelques résultats obtenus récemment sur les équations aux dérivées partielles par des méthodes probabilistes.

Ces résultats fournissent une méthode probabiliste qui nous permet d'éviter les complications des méthodes numériques et écrire la solution comme l'espérance d'une fonctionnelle d'un processus de diffusion.

Ce travail est présenté en trois chapitre :

Nous allons présenter dans **le premier chapitre** des plus important concepts de la théorie de probabilités, tous d'abord, nous insistons sur les notions d'espace des probabilités et de tribu, ensuite dans le cadre de l'étude des variables aléatoires discrètes et continues. Leurs fonction de répartition et de densités, puis les principales loi de probabilités.

Dans **le deuxième chapitre**, nous donnerons les bases dont nous avons besoin, notamment : le processus Gaussiens, le processus de Poisson et le processus de Markov, le mouvement Brownien et les processus stochastiques solution d'équation différentielle stochastique (E.D.S) connus sous le nom de le processus de diffusion qui sont markoviens i.e. que leur état future ne dépend que de leur état présent, notion clé de cette étude. Nous introduisons un nouveaux type d'intégrale qui est l'intégrale stochastique dite d'Itô, qui permet de donner un sens à la différentielle d'un mouvement Brownien, notion importante sur laquelle repose la théorie des E.D.S.

Puis nous avons donné des généralité sur les équations aux dérivées partielles (E.D.P) du second ordre.

**Dans le troisième chapitre**, nous présentons la relation entre la notion des équations aux dérivées partielles (E.D.P) et celle des E.D.S à travers des théorèmes, en particulier ceux dit formule d'Itô et Feynman-Kač. La généralisation des ces théorèmes nous permet de donner une interprétation probabiliste des E.D.Ps, et par conséquent, une solution sous forme d'une espérance d'une fonctionnelle.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## GÉNÉRALITÉS SUR PROBABILITÉ

Le concept de probabilité est a priori relativement intuitif : rien de suprenant à ce qu'un dé à six faces normalement constitué tombe en moyenne une fois sur six sur chacune de ses faces (il s'agit toutefois d'un résultat statistique, qui ne garantit par exemple en aucun cas qu'au bout de six lancers on aura obtenu chacun des six résultats possibles).

Mais en fait, l'étude des probabilités en mathématiques peut se faire dans un cadre beaucoup plus large.

Les probabilités vont nous servir à modéliser une expérience aléatoire, i.e un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard.

### 1.1 Rappels de théorie de la mesure

Soit  $\Omega$  un ensemble, on note  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ .

**Définition 1.1. (Tribu)**

Une famille  $\mathcal{B}$  de partie de  $\Omega$  est appelé tribu(ou  $\sigma$ -algèbre) sur  $\Omega$  si elle



- i) possède l'ensemble  $\Omega : \Omega \in \mathcal{B}$ ,
- ii) stable par passage au complémentaire :  $\forall A \in \mathcal{B}, \bar{A} \in \mathcal{B}$ ,
- iii) stable par union dénombrable :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \in \mathcal{B}) \implies \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \in \mathcal{B}$ .

Le couple  $(\Omega, \mathcal{B})$  est appelé espace mesurable.

**Définition 1.2. (Mesure)**

Soit  $\mathcal{B}$  une tribu sur  $\Omega$ . On appelle mesure positive sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  une application

$$m : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty],$$

vérifiant

- i)  $m(\emptyset) = 0$ ,
- ii)  $m$  est  $\sigma$ -additive : pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  deux à deux disjoints,

$$m(\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n).$$

**Définition 1.3. (Tribu engendrée)**

Soit  $\zeta \in \mathcal{P}(\Omega)$ . On appelle tribu engendrée par  $\zeta$ , et on note  $\sigma(\zeta)$ , la plus petite tribu contenant  $\zeta$ . C'est l'intersection de toutes les tribus sur  $\Omega$  contenant  $\zeta$ .

**Définition 1.4. (Tribu borélienne)**

On appelle tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$  la tribu engendrée par la famille  $\theta$  des ensembles ouverts de  $\mathbb{R}$ , on la notera  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Ainsi  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\theta)$ . Les sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  qui sont élément de sa tribu borélienne sont appelé boréliens de  $\mathbb{R}$  ou boréliens tout court quand il n'y a pas d'ambiguïté.

**Définition 1.5. (Ensemble dénombrable)**

Soit  $E$  un ensemble, On dit que  $E$  est dénombrable s'il existe une bijection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ .

**Théorème 1.1. : (énumération des éléments d'un ensemble fini ou dénombrable)**

soit  $E$  un ensemble

1. Si  $E$  est fini alors,  $\exists n \in \mathbb{N}, E = \{x_1, \dots, x_n\}$ , où les  $x_n$  sont distincts deux à deux,
2. Si  $E$  est infini alors,  $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ , où les  $x_n$  sont distincts deux à deux.

## 1.2 Espaces probabilités finis

### Définition 1.6. (Expérience aléatoire)

On désigne par une expérience aléatoire, une expérience dont le résultat n'est pas prévisible à priori. Elle est notée  $\xi$ .

### Exemple 1.1.

1. Jet d'une pièce de monnaie.
2. Lancer d'un dé.
3. Constat du sexe d'un nouveau né.

### Définition 1.7. (espace de probabilité)

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est un ensemble  $\Omega$  appelé espace de probabilité (univers).  $\Omega$  est l'ensemble des cas possibles ou des éventualités ou des issues.

### Exemple 1.2.

1. L'espace de probabilité associé à l'expérience du jet d'une pièce de monnaie est :  
 $\Omega_1 = \{Pile, Face\}$ .
2. L'espace de probabilité associé à l'expérience du jet d'un dé est :  $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
3. L'espace de probabilité associé à l'expérience de l'observation du sexe d'un nouveau né est :  $\Omega_3 = \{Fille, Garçon\}$ .

### Définition 1.8. (Événements)

- i) Si  $\Omega$  est un univers fini. Une partie de  $\Omega$  est un événement. L'ensemble des événements est donc  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

### Exemple 1.3.

L'événement  $A$  : "le nombre obtenu est pair", relatif à l'expérience du jet d'un dé.

$$A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega_2.$$

- ii)  $\Omega$  est l'événement certain(il est toujours réalisé),  $\emptyset$  est l'événement impossible(il n'est jamais réalisé), un singleton  $\{\omega\}$  (où  $\omega \in \Omega$ ) est un événement élémentaire, l'événement composé est un ensemble d'événements élémentaires.

**Définition 1.9. (Réalisation d'un événement)**

Soit  $A$  un événement de  $\Omega$ . Soit  $\omega$  le résultat de l'expérience.

$$A \text{ réalise} \iff \omega \in A .$$

**Opérations sur les événements**

Soit  $\Omega$  un espace de probabilité, et soient  $A$  et  $B$  deux événements de  $\Omega$ .

**L'événement contraire (ou complémentaire)  $\bar{A}$** 

événement constitué des résultats élémentaires de  $\Omega$  qui ne sont pas dans  $A$ . Soit  $\omega$  le résultat de l'expérience :

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}.$$

( $\bar{A}$  se réalise ssi  $A$  ne se réalise pas : non  $A$ ).

**L'intersection  $A \cap B$** 

événement constitué des résultats élémentaires de  $\Omega$  qui appartiennent la fois à  $A$  et à  $B$ . Soit  $\omega$  le résultat de l'expérience :

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}.$$

( $A \cap B$  se réalise ssi  $A$  et  $B$  se réalisent :  $A$  et  $B$ ).

**La réunion  $A \cup B$** 

événement constitué des résultats élémentaires de  $\Omega$  qui appartiennent à  $A$  ou à  $B$  (ou aux deux). Soit  $\omega$  le résultat de l'expérience :

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}.$$

( $A \cup B$  se réalise ssi  $A$  se réalise ou  $B$  se réalise :  $A$  ou  $B$ ).

**La différence  $A - B$** 

événement constitué des résultats élémentaires de  $\Omega$  qui appartiennent à  $A$  et n'appartiennent pas à  $B$ . Soit  $\omega$  le résultat de l'expérience :

$$A - B = A \cap \bar{B} = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}.$$

**Exemple 1.4.**

Revenons à l'exemple du jet du dé, on a :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

et soit  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{5, 6\}$ ,  $C = \{3\}$ , on a :

$$A \cap B = \{6\},$$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\},$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\},$$

$$A - B = \{2, 4\}.$$

**Propriétés 1.1.**  $\bar{\bar{A}} = A$ ,  $\bar{\emptyset} = \Omega$ ,  $A \cup \bar{A} = \Omega$ ,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

**Lois de Morgan :**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

**Définition 1.10. (Les événements incompatibles)**

On dit que les événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles (disjoints), s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément. On a alors :

$$A \cap B = \emptyset.$$

Dans l'exemple  $A$  et  $C$  sont incompatibles.

## Calculs des probabilités

### Définition 1.11. (Probabilité)

Soit  $(\Omega, \mathcal{B})$  un espace probabilisable. Une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  est une application  $P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  satisfaisant les 3 axiomes suivants :

- i)  $P(\Omega) = 1$ ,
- ii)  $\forall A, B \in \mathcal{B} : A \cap B = \emptyset$ , alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ,
- iii) pour toute suite  $(A_i)_{i \in I}$ , d'éléments de  $\mathcal{B}$  deux à deux disjoints on a :

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$  s'appelle un espace probabilisé (e.p).

**Théorème 1.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  un e.p.

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,
2.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ,
3.  $\forall A, B \subset \mathcal{B}, A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ ,
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,
5.  $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

*Preuve.* 1. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \emptyset$ , et la famille  $(A_n)$  est une famille d'éléments de  $\mathcal{B}$  deux à deux disjoints. Donc la série  $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$  converge, mais tous les termes étant égaux, cette série est la série nulle d'où on déduit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) = P(\emptyset) = 0$ .

2. puisque :  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , on a  $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$ , soit :  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

3. On part ensuite de :

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B), \text{ union disjointe, et : } P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B), \text{ union disjointe, et : } P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B),$$

$(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ , et :  $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$ ,  
 et en soustrayant les deux premières égalités , on obtient :  
 $P(A \cup B) - P(A) - P(B) = P(A \cap B)$ , d'où le résultat.

□

**Définition 1.12.** On dit que  $A$  est un événement :

- i) quasi impossible (presque impossible), si  $P(A) = 0$ . On écrit  $A = \emptyset$  p.s.
- ii) presque sûr (presque certain), si  $P(A) = 1$ . On écrit  $A = \Omega$  p.s.

### Calculs des probabilités : (Cas d'équiprobabilités)

**Définition 1.13. (Probabilité d'événements élémentaires)**

Soit  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ . On définit la probabilité  $P$  sur tous les événements élémentaires  $\omega_i \in \Omega$ , telle que  $P(\omega_i) = p_i, i = 1, \dots, n$ .

La probabilité  $P$  vérifie les conditions suivantes :

- i)  $\forall i = \{1, \dots, n\}, 0 \leq p_i \leq 1$ ,
- ii)  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

Dans le cas d'équiprobabilité, on a :  $P(\omega_i) = \frac{1}{\text{card}\Omega}$ .

#### Exemple 1.5.

On jette un dé. On calcule la probabilité d'obtenir numéro 3.

$$\text{on a } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{et} \quad P(\{3\}) = \frac{1}{6}.$$

**Définition 1.14. (Probabilité d'un événement composé)**

La probabilité d'un événement composé est égale aux nombre des cas favorables sur le nombre des cas possibles.i.e

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}.$$

#### Exemple 1.6.

On jette un dé. Calculer le probabilité des événement suivants :

$A$  : "Le résultat du jet est un nombre pair".

$B$  : "Le résultat du jet est inférieur à 3".

$C$  : "Le résultat du jet est inférieur à 7".

$D$  : "Le résultat du jet est supérieur à 6".

### Réponse

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$A = \{2, 4, 6\}, P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$B = \{1, 2\}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$C = \{\Omega\}, P(C) = 1.$$

$$D = \emptyset, P(D) = 0.$$

## Probabilités conditionnelles

**Définition 1.15.** Étant donnés deux événements  $A$  et  $B$ , on appelle probabilité de  $B$  conditionnellement à  $A$ , ou sachant  $A$ , la probabilité notée  $P(B \setminus A)$  définie par

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0.$$

### Proposition 1.1. (Formule des probabilités totales)

Soit  $A$  un évènement. Pour tout évènement  $B$ , on a

$$P(B) = P(B \setminus A)P(A) + P(B \setminus \bar{A})P(\bar{A}).$$

**Définition 1.16.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'évènements. On l'appelle partitions de  $\Omega$  si elle vérifie les deux conditions :

i)  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega,$

ii) les  $A_i$  sont deux à deux incompatibles : pour tous  $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset.$

### Proposition 1.2. (Formule des probabilités totales généralisée)

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une partition de  $\Omega$ , telle que  $P(A_i) > 0$ , pour tout  $i \in I$ . Alors, pour tout évènement  $B$ ,

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \setminus A_i)P(A_i).$$

**Proposition 1.3. (Formule de Bayes)**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Alors,

$$P(A \setminus B) = \frac{P(B \setminus A)P(A)}{P(B \setminus A)P(A) + P(B \setminus \bar{A})P(\bar{A})}.$$

**Proposition 1.4. (Formule de Bayes généralisée)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  e.p. et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une partition de  $\Omega$ . Alors,

$$\forall i \in I, \forall B \in \mathcal{B} : P(A_i \setminus B) = \frac{P(B \setminus A_i)P(A_i)}{\sum_{j \in I} P(B \setminus A_j)P(A_j)}.$$

**Indépendance**

**Définition 1.17.** Soit  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  e.p.

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

S'ils sont de probabilité non nulle, alors

$$P(B \setminus A) = P(B) \Leftrightarrow P(A \setminus B) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendants si, pour tous  $i_1 \leq \dots \leq i_k$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

**Propriétés 1.2.**

1. Deux événements disjonction (incompatibles)  $A$  et  $B$ ,  $A \neq \emptyset$  et  $B \neq \emptyset$ , ne sont jamais indépendants. En effet,  $A \cap B = \emptyset$  entraîne  $P(A \cap B) = 0 \neq P(A).P(B)$ .



2. Si  $A$  et  $B$  sont indépendants

$\Leftrightarrow \bar{A}$  et  $B$  sont indépendants,

$\Leftrightarrow A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants,

$\Leftrightarrow \bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

### Généralisation

On dit que les événements  $A_i, i = \{1, \dots, n\}$  sont indépendants, si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j), \forall i \neq j.$$

## 1.3 Variable aléatoire réelle

Les variables aléatoires constituent un espace fondamental d'éléments aléatoires, un tel élément étant défini par référence à une expérience aléatoire.

### Définition 1.18. (variable aléatoire réelle)

Soit  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r) sur  $(\Omega, \mathcal{B})$ , ou plus simplement variable aléatoire, toute application :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto X(\omega),$$

vérifiant :

$$\forall B \in \mathcal{B}, P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B).$$

Dans l'écriture précédente, on utilise la notation usuelle  $\{X \in B\}$  pour référer à l'image réciproque

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}.$$

On notera que  $P_X$  est une mesure de probabilité sur  $\Omega$ .

**Exemple 1.7.** (Variable indicatrice)

Soit  $A$  un événement. La variable :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

est la variable indicatrice de l'événement  $A$ . On peut la noter  $1_A$ .

**Définition 1.19.** (v.a.discrète)

Une variable aléatoire réelle est dit de **type discrète** si le nombre de valeurs différentes qu'elle peut prendre est fini ou infini dénombrable.

**Définition 1.20.** (v.a.continue)

Une variable aléatoire réelle qui peut prendre un nombre infini non dénombrable de valeurs est dite variable aléatoire de **type continu**.

## Loi d'une variable aléatoire

**Définition 1.21.** (v.a.discrète)

Soit  $\{x_1, x_2, \dots\}$  l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire discrète  $X$ , la fonction probabilité  $P_X$  possède les propriétés suivantes :

- i)  $P_X(x_i) \geq 0, \forall i,$
- ii)  $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1.$

**Définition 1.22.** (v.a.continue)

La loi de  $X$  est définie par une fonction  $f$ , appelée densité de probabilité, qui vérifie :

- i)  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$
- ii)  $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1,$
- iii)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en un nombre fini de points où elle admet une limite à gauche et une limite à droite.

## La fonction de répartition

**Définition 1.23.** Si  $X$  est une v.a.r.

La fonction de répartition de  $X$  est la fonction :

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x).$$

i) Si  $X$  est une variable aléatoire **discrète**, sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i).$$

Cette fonction correspond à la notion de la fréquence cumulée, puisque  $F(x)$  cumule toutes les probabilités des valeurs inférieures ou égales à  $x$ . C'est une fonction en escalier.

(elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans  $\mathbb{R}$ ).

**Exemple 1.8.** Dans le cas d'une variable aléatoire  $X$  dont la loi est donné par

$$P(1) = \frac{1}{4} \quad P(2) = \frac{1}{2} \quad P(3) = \frac{1}{8} \quad P(4) = \frac{1}{8}$$

Sa fonction de répartition sera

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4} & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{7}{8} & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 1 & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

ii) Si  $X$  est une variable aléatoire **continue**, sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

La fonction de répartition  $F(x)$  est la primitive de la fonction densité de probabilité  $f(x)$ .

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \text{ (} f \text{ est continue et dérivable).}$$

**Exemple 1.9.** Soit  $f$  une densité de probabilité d'une v.a  $X$  :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(9 - x^2) & \text{si } x \in [0, 3], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 3]. \end{cases}$$

Sa fonction de répartition sera

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{18}(9x - \frac{x^3}{3}) & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

### Propriétés 1.3.

1. La loi de  $X$  est déterminée par sa fonction de répartition : si

$$F_X(t) = F_Y(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

alors

$X$  et  $Y$  ont même loi.

2. La fonction  $F(x)$  est croissante, continue à droite et admet pour limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

3.  $\forall t \in \mathbb{R}$ , la limite de  $F_X$  en  $t$  à gauche est

$$F_X(t^-) = P(X < t).$$

4. Toute fonction qui vérifie les propriétés de 2) est la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .
5. Si  $a \leq b$ ,  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ .

## Paramètre d'une variable aléatoire

### Espérance mathématique (la moyenne)

Si  $X$  est une variable aléatoire **discrète**, On appelle espérance de  $X$ , le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

pour une v.a  $Y = g(X)$ , l'espérance de  $Y$  est donnée par :

$$E(Y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) P_X(x).$$

#### Remarque 1.1.

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i),$$

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k P(X = x_i).$$

Si  $X$  une variable aléatoire **continue**, on a :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx.$$

pour une v.a  $Y = g(X)$ , l'espérance de  $Y$  est donnée par :

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx.$$

**Remarque 1.2.**

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx,$$
$$E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx.$$

**La variance**

Si  $X$  est une variable aléatoire d'espérance  $E(X)$ . On appelle variance de  $X$  le réel :

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2.$$

et on a

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

**L'écart-type**

L'écart-type de  $X$  est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

**Propriétés 1.4.**

- 1)  $E(a) = a$ ,  $a$  une constante,
- 2)  $E(aX) = aE(X)$ ,
- 3)  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ,
- 4)  $E(XY) = E(X)E(Y)$  ssi  $X$  et  $Y$  v.a indépendant,
- 5)  $\text{Var}(a) = 0$ ,
- 6)  $\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X)$ ,
- 7)  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ .

## 1.4 Lois Usuelles

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On présente ci-dessous des lois usuelles, en donnant à chaque fois les valeurs des espérances et variances.

### Lois discrètes

#### Loi de Bernoulli :

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ , et on note  $X \sim \mathcal{B}(p)$  si

$$P(X = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p.$$

Ainsi,  $X$  modélise le résultat d'une expérience aléatoire à deux issues (expérience élémentaire) avec probabilité  $p$  de réussite. On a

$$E[X] = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

#### Loi de Binomiale :

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi Binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ , et on note  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  si

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

avec,  $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ainsi,  $X$  modélise le nombre de succès dans  $n$  répétitions indépendantes d'une même expérience élémentaire avec probabilité  $p$  de réussite. On a

$$E[X] = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

**Loi Géométrique :**

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi Géométrique de paramètre  $p \in ]0,1[$ , et on note  $X \sim \mathcal{G}(p)$  si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p.$$

Ainsi,  $X$  modélise l'instant du premier succès lors d'une infinité de répétitions indépendantes d'une même expérience élémentaire de probabilité  $p$  de réussite. On a

$$E[X] = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**la loi de Poisson :**

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , et on note  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Le paramètre  $\lambda$  est lié à la fréquence d'apparition des évènements, on l'appellera paramètre d'intensité. Dans ce cadre,  $X$  modélise le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle de temps  $[0,1]$ . On a alors

$$E[X] = \lambda \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

**Loi de hypergéométrique :**

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi hypergéométrique de paramètres  $(n, r, s)$  (entiers  $\geq 1$ ) si

$$\forall k \in \{0, \dots, \min(n, s)\}, \quad P(X = k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{r-s}{n-k}}{\binom{r}{n}}.$$

Ainsi,  $X$  modélise le nombre de boules rouges obtenues lorsqu'on tire sans remise  $n$  boules dans une urne contenant  $r$  boules dont  $s$  rouges. On a

$$E[X] = \frac{ns}{r}.$$



**Loi multinomiale :**

La loi multinomiale intervient lorsqu'on effectue  $n$  répétitions indépendantes d'une expérience ayant  $k$  issues  $i_1, \dots, i_k$  de probabilités respectives  $p_1, \dots, p_k$ . Elle modélise alors la probabilité d'avoir obtenu exactement  $m_1$  fois  $i_1, \dots, m_k$  fois  $i_k$ . Par exemple, dans une succession de  $n$  tirages avec remise de boules ayant  $k$  couleurs possibles présentes respectivement en proportions  $p_1, \dots, p_k$ , la loi multinomiale est la loi du  $k$ -uplet  $(X_1, \dots, X_k)$  donnant le nombre de boules tirées de chaque couleur. Ainsi, si  $X$  suit la loi multinomiale de paramètres  $(n, p_1, \dots, p_k)$ , alors pour tout  $m \in \mathbb{N}^k$  tel que  $m_1 + \dots + m_k = n$ , on a

$$P(X = (m_1, \dots, m_k)) = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}.$$

**Loi hypergéométrique généralisée :**

La loi hypergéométrique généralisée intervient dans un contexte de tirage sans remise de  $n$  objets dans une urne contenant  $N$  objets, ces  $N$  objets ayant un caractère pouvant prendre  $k$  valeurs possibles  $i_1, \dots, i_k$ . La loi hypergéométrique généralisée, de paramètre  $(n, N, (N_1, \dots, N_k))$  (où l'on a nécessairement  $N_1 + \dots + N_k = N$ ) est la loi du  $k$ -uplet  $(X_1, \dots, X_k)$  comptant le nombre d'objets de chaque caractère possible : pour tout  $m \in \mathbb{N}^k$  tel que  $m_1 + \dots + m_k = n$ , on a

$$P(X = (m_1, \dots, m_k)) = \frac{\binom{N_1}{m_1} \dots \binom{N_k}{m_k}}{\binom{N}{n}}.$$

**Lois continues****Loi uniforme :**

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur le segment  $[a, b]$ , et on note  $X \sim \mathcal{U}(A)$ , si elle admet pour densité de probabilité la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [a, b], \\ f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Et on a :

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

### Loi normal(gaussienne) :

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$ , et on note  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  si elle admet pour densité de probabilité la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Et on a :

$$E[X] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

### la loi normale centrée réduite :

une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}$  suit la loi normale centrée réduite, et on note  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  lorsque sa densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

### Loi exponentielle :

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , et on note  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , si elle admet pour densité de probabilité la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [a, b], \\ f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Et on a :

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Loi Gamma :**

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit la loi Gamma de paramètres  $a > 0, \lambda > 0$ , et on note  $X \sim \Gamma(a, \lambda)$  si elle admet pour densité de probabilité la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

où  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}$ .

Et on a :

$$E[X] = \frac{a}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}.$$

**1.5 La fonction génératrice**

**Définition 1.24.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . La fonction génératrice de  $X$  est la fonction

$$G_X : t \mapsto G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n).$$

qui est fini au moins pour  $t \in [-1, 1]$ .

**Exemple 1.10.** Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , nous avons

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n.$$

Il s'agit donc d'un polynôme de degré  $n$ .

(La formule de binôme :  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .)

**Propriétés 1.5.**

1.  $G_X(0) = P(X = 0)$  et  $G_X(1) = 1$ . De plus,  $G_X(t) \in [0, 1]$ .
2.  $G_X$  est une série entière de rayon de convergence au moins égale à 1.

3. la fonction génératrice est dérivable en  $t = 1$  et  $G'_X(1) = E[X]$ .
4.  $G_X$  est une fonction convexe (au moins sur  $] - 1, 1[$ ), puisque

$$G''(t) = \sum_{n \geq 2} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$$

est positive.

5. La fonction génératrice caractérise la loi : si pour deux variables  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  on a  $G_X(s) = G_Y(s)$  pour tout  $s \in ] - 1, 1[$ , alors  $X$  et  $Y$  ont même loi.

## 1.6 La fonction caractéristique

**Définition 1.25.** Soit  $X$  v.a.r. La fonction caractéristique de  $X$  est la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \Phi_X(t) = E[e^{it \cdot X}]. \end{aligned}$$

- i) si  $X$  est une variable aléatoire **discrète**, sa fonction caractéristique est :

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{itk} P(X=k).$$

**Exemple 1.11.** Soit  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , de paramètre  $\lambda > 0$ , nous avons

$$\Phi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{itk} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

- ii) si  $X$  est une variable aléatoire **continue** de la densité de probabilité  $f_X$ , sa fonction caractéristique est :

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$$

**Exemple 1.12.** Soit  $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$ , nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \int_a^b e^{itx}.$$

donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

### Propriétés 1.6.

1.  $\Phi_X(0) = 1$  et  $|\Phi_X(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ .
2. la fonction caractéristique caractérise la loi : deux variables ayant même fonction caractéristique ont même loi.
3.  $\Phi_{-X}(t) = \Phi_X(-t) = \overline{\Phi_X(t)}$  donc  $\Phi_X$  est à valeurs réelle si et seulement si  $X$  est symétrique et  $\Phi_X$  est alors paire.
4.  $\Phi_{aX+b}(t) = e^{itb} \Phi_X(at) = e^{itb} \Phi_X(at), \forall a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}$ .

## 1.7 Couples des v.a.r

**Définition 1.26.** On appelle couple de variables aléatoires, deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur le même univers (issues de la même expérience) à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

### Loi d'un couple

#### Cas discret :

La loi du couple  $(X, Y)$  est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble fini ou dénombrable) et par la probabilité associées

$$P_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j], \quad \forall x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega).$$

telle que

- i)  $P_{ij} \geq 0,$
- ii)  $\sum_{ij} P_{ij} = 1.$

**Cas continus :**

La loi du couple  $(X, Y)$  est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble infini non dénombrable), en général une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}^2$ , et par une densité de probabilité  $f(x, y)$  telle que

$$\text{i) } f(x, y) \geq 0,$$

$$\text{ii) } \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = 1.$$

et de manière plus générale

$$P[(X, Y) \in \mathbb{R}^2] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy.$$

**Loi jointe**

**Définition 1.27.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires.

La loi jointe de  $(X, Y)$  est définie par sa **fonction de répartition**  $F(X, Y)$  :

$$F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1],$$

$$(x, y) \mapsto F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Si  $(X, Y)$  est un couple **discrèt**, alors

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} P_{ij}.$$

Si  $(X, Y)$  est un couple **continue**, alors

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(x, y) dx dy.$$

d'où

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

## Loi marginale

**Définition 1.28.** On appelle première loi marginale (resp : deuxième loi marginale) la loi de la première composante  $X$  (resp : deuxième composante  $Y$ ). On les obtient de la façon suivante :

**Cas discret :**

$$P_{.i} = P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P_{ij}, \quad \forall x_i \in X(\Omega).$$

$$P_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} p_{ij}, \quad \forall y_j \in Y(\Omega).$$

### Exemple 1.13.

On considère deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$  respectivement définies sur  $X(\Omega) = a, b$  et  $Y(\Omega) = 1, 2$ , telles que :

$$\begin{aligned} P(X = a) &= 0.2, & P(X = b) &= 0.8, \\ P(Y = 1) &= 0.7, & P(Y = 2) &= 0.3. \end{aligned}$$

On admet que la loi de probabilité jointe du couple  $(X, Y)$ , définie sur  $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{a, 1\}, \{a, 2\}, \{b, 1\}, \{b, 2\}$ , est définie par :

$$\begin{aligned} P(X = a, Y = 1) &= 0.14, & P(X = a, Y = 2) &= 0.06, \\ P(X = b, Y = 1) &= 0.56, & P(X = b, Y = 2) &= 0.24. \end{aligned}$$

La probabilité marginale d'observer  $X = a$  est égale à :

$$\begin{aligned} P(X = a) &= P((X = a) \cap (Y = 1)) + P((X = a) \cap (Y = 2)) \\ &= 0.14 + 0.06 = 0.2. \end{aligned}$$

**Cas continues :**

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 1.14.**

considère un couple de variables aléatoires réelles continues  $(X, Y)$  définies sur  $\mathbb{R}^2$ , admettant une distribution jointe normale bivariée standard telle que

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminons la densité marginale de la variable  $X$ . Par définition, il vient :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy,$$

Par définition  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 1$ , Par conséquent

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

**Lois conditionnelles**

On peut définir encore des lois conditionnelles pour l'une des variables, l'autre étant fixée à telle ou telle valeur par

**cas discret :**

La loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y = y$  est donnée par :

$$\forall x \in X(\Omega),$$

$$P_{(X|Y=y)} = \frac{P_{ij}}{P_i}, \text{ si } P_i > 0.$$

La loi conditionnelle de  $Y$  sachant que  $X = x$  est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega),$$

$$P_{(Y|X=x)} = \frac{P_{ij}}{P_j}, \text{ si } P_j > 0.$$



**cas continue :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ si } f_Y(y) > 0.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, f_{(Y|X=x)}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)}, \text{ si } f_X(x) > 0.$$

## Indépendance

**Définition 1.29.** Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si pour tout intervalle  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  on a

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

**Proposition 1.5.** Deux v.a.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes

$\Leftrightarrow$  La fonction de répartition du couple vérifie  $\forall(x, y)$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

$\Leftrightarrow$  Dans le cas discret  $\forall(x, y)$ ,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y),$$

$\Leftrightarrow$  Dans le cas continu, la densité du couple vérifie  $\forall(x, y)$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

## Espérance conditionnelle

**Définition 1.30.** On appelle espérance conditionnelle de  $Y$  sachant que  $\{X = x\}$ , l'espérance mathématique, si elle existe, de la loi de probabilité conditionnelle de  $Y$  sachant l'événement

$\{X = x\}$  :

Si  $Y$  est **discrète**, alors

$$E(Y|X = x) = \sum_y yP(Y = y|X = x),$$

Si  $Y$  est **continue**, alors

$$E(Y|X = x) = \int_{\mathbb{R}} yf_{Y|X=x}(y)dy.$$

**Proposition 1.6.** L'application qui à  $x$  associe  $E(Y|X = x)$  s'appelle régression de  $Y$  à  $X$ . Elle définit une variable aléatoire (fonction de  $X$ ) notée  $E(Y|X)$  et telle que :

1.  $E(E(Y|X)) = E(Y)$ ,
2.  $Var(E(Y|X)) = Var(Y) - E(Var(Y|X))$ .

*Preuve.*

1. Nous distinguons deux cas selon que la variable  $Y$  est discrète ou continue.

a) Si  $Y$  est discrète, alors

$$\begin{aligned} E(E(Y|X)) &= \sum_x \left( \sum_y P(Y = y|X = x) \right) P(X = x), \\ &= \sum_y \sum_x P(Y = y|X = x) P(X = x), \\ &= \sum_y P(Y = y), \\ &= E(Y). \end{aligned}$$

b) Si  $Y$  est continue, alors

$$\begin{aligned} E(E(Y|X)) &= \sum_x \left( \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y) dy \right) P(X = x), \\ &= \int_{\mathbb{R}} y \underbrace{\sum_x f_{Y|X=x}(y) P(X = x)}_{f_Y(y)} dy, \\ &= E(Y). \end{aligned}$$

2.  $E(Y|X)$  est une variable d'espérance  $E(Y)$  et de variance,

$$\text{Var}(E(Y|X)) = E(E(Y|X)^2) - E(Y)^2. \quad (1.1)$$

Par ailleurs, la variance de  $Y$  sachant  $X$  est donnée par :

$$\text{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - (E(Y|X))^2. \quad (1.2)$$

L'espérance des deux termes de la relation (1.2) donne :

$$\begin{aligned} E(\text{Var}(Y|X)) &= E(E(Y^2|X)) - E((E(Y|X))^2), \\ &= E(Y^2) - E((E(Y|X))^2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

En combinant les relations (1.1) et (1.3), on obtient :

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X)).$$

□

## La covariance et la corrélation

La covariance permet d'estimer la dépendance entre deux variables aléatoires.

**Définition 1.31. (La covariance)**

La covariance de deux variables  $X$  et  $Y$  est

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

L'espérance  $E(XY)$  est calculée à partir de la loi jointe de  $(X, Y)$  :

i) dans le cas discret,

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y).$$

ii) dans le cas continu,

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy f_{(X,Y)}(x, y) dx dy.$$

**Proposition 1.7.** Soient  $X, Y, Z$  des v.a.r, et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

1.  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ ,
2.  $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a\text{Cov}(X, Z) + b\text{Cov}(Y, Z)$ ,
3.  $\text{Cov}(X, aY + bZ) = a\text{Cov}(X, Y) + b\text{Cov}(X, Z)$ ,
4.  $\text{Cov}(a, Y) = \text{Cov}(Y, a) = 0$ ,
5.  $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$ .

**Définition 1.32. (La matrice de covariance)**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a de carrée intégrable. La matrice de covariance du couple  $(X, Y)$  est

$$C = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}.$$

**Définition 1.33. (Corrélation)**

Le coefficient de corrélation linéaire est défini pour des variables non constantes par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

On a toujours  $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$ .

Plus  $|\rho(X, Y)|$  est proche de 1 plus la dépendance entre les variables  $X$  et  $Y$  est forte.

**Remarque 1.3.** Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

et donc

$$\rho(X, Y) = 0.$$

On a par conséquent,

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

La réciproque est fausse.

## 1.8 Modes de convergence

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires réelles, et  $X$  une variable aléatoire réelle. Les définitions suivantes s'étendent aisément au cas de vecteurs aléatoires.

### convergence presque sûr

On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge presque sûrement vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X$  si

$$P(X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X) = 1.$$

Autrement dit  $(X_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $X$  p.s. s'il existe un événement  $\Omega' \subset \Omega$  tel que  $P(\Omega') = 1$  et, pour toute réalisation  $\omega \in \Omega'$ , la suite réelle  $X_n(\omega)$  converge vers  $X(\omega)$ .

### convergence dans $L^p$

On dit que  $X_n$  converge dans  $L^p$  vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X$  si

$$E[|X_n - X|^p] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

## converge en probabilité

On dit que la suite  $X_n$  converge en probabilité vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{proba}} X$  si

$$\forall \delta > 0, \quad P(|X_n - X| > \delta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

## convergence en loi

On dit que la suite  $X_n$  converge en loi vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} X$  si, pour toute fonction continue bornée  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} E[\varphi(X)].$$

### Théorème 1.3.

1.  $\left[ X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X \right] \Rightarrow \left[ X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{proba}} X \right],$
2.  $\forall p \geq 1, \left[ X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} X \right] \Rightarrow \left[ X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{proba}} X \right],$
3.  $\left[ X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{proba}} X \right] \Rightarrow \left[ X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{loi}} X \right].$

### Diagramme :

convergence dans  $L^p \Rightarrow$  convergence en probabilité  $\Rightarrow$  convergence p.s.

$\Downarrow$

convergence en loi.

---

---

## CHAPITRE 2

---

# PROCESSUS STOCHASTIQUE

Stochastique vient du grec stokhastikos qui veut dire conjectural et de stockhos qui signifie but.

Un processus stochastique est un modèle mathématique pour décrire l'état d'un phénomène aléatoire évoluant dans le temps. Processus stochastique, fonction aléatoire ou signal aléatoire en sont des synonymes.

Un système est à évolution aléatoire s'il peut prendre au cours du temps une série d'états successifs, sans qu'il soit possible d'en prévoir sa configuration exacte à un instant futur, son évolution au cours du temps dépend donc du hasard. En d'autres termes, ces situations ne peuvent pas être étudiées en utilisant simplement le calcul des probabilités qui décrit des événements où le résultat possible de chaque épreuve est un nombre.

### 2.1 Processus Stochastique

Pour représenter l'état d'un système dépendant du temps et du hasard. Le modèle mathématique se présente naturellement sous la forme d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$

et d'une fonction  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  représentant l'état du système. Pour  $t$  fixé, l'état du système est une variable aléatoire  $X_t(\omega)$ , en revanche pour une évolution particulière du système (i.e à  $\omega$  fixé) les états successifs sont représentés par la fonction  $t \rightarrow X_t(\omega)$  que l'on nomme par abus de langage une trajectoire.

**Définition 2.1. (Processus Stochastique)**

On appelle processus stochastique (ou aléatoire) une famille  $\{X_t, t \in T\}$  de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{B})$ , à valeurs dans un espace topologique  $E$  muni de sa tribu des boréliens  $\mathcal{B}_E$  indexées par  $t \in T$ .

Le paramètre  $t$  représente le temps.

Lorsque  $T \subset \mathbb{N}$ , nous dirons que le processus est à temps discret, lorsque  $T \subset \mathbb{R}^+$ , le processus est à temps continu.

**Exemple 2.1. (cas discret)**

Un exemple classique de processus stochastique est celui où l'on considère une particule qui, à l'instant 0, se trouve à l'origine. À chaque unité de temps, on lance une pièce de monnaie. Si l'on obtient 'pile'(respectivement 'face') la particule se déplace d'une unité vers la droite (resp.gauche). Aini, la variable aléatoire  $X_n$  désigne la position de la particule au bout de  $n$  lancers de la pièce, et le p.s.  $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  est une marche aléatoire particulière. Notons qu'ici l'indice  $n$  peut simplement désigner le numéro du lancer de la pièce et qu'il n'est pas nécessaire d'introduire la notion de temps dans cet exemple.

**Exemple 2.2. (cas continu)**

Un processus stochastique à temps continu élémentaire,  $\{X(t), t \geq 0\}$ , est obtenu en définissant

$$X(t) = Yt \quad t \geq 0.$$

où  $Y$  est une variable aléatoire qui suit une loi quelconque.

**Remarque 2.1.** Notons qu'en fait un processus est une application :

$$\begin{aligned} X : \Omega \times T &\rightarrow E, \\ (\omega, t) &\mapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

telle que :



1. À chaque instant  $t \in T$ , l'application  $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$  est une variable aléatoire.
2. Pour chaque élément  $\omega \in \Omega$ , l'application  $t \mapsto X_t(\omega)$  est une fonction de  $T \rightarrow E$  qui s'appelle trajectoire associée à l'élément  $\omega$ .

## 2.2 Chaîne de Markov

### Définition 2.2. (Marche aléatoire)

Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de loi commune  $\mu$ . On appelle marche aléatoire d'incrément de loi  $\mu$  (ou d'incrément les  $(X_i, i \geq 1)$ ), la suite  $(S_k, k \geq 0)$  définie par  $S_0 = s$  (valeurs initiale), et pour  $k \geq 1$ ,

$$S_k = S_0 + X_1 + \dots + X_k.$$

Le plus souvent on prend  $S_0 = 0$  car la comparaison d'une suite commençant en 0 avec une commençant en une autre valeur est aisée.

**Remarque 2.2.** Les marches aléatoires sont des chaînes de Markov homogènes, car bien sûr, si on connaît  $S_k$  alors  $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$  de sorte que la loi de  $S_{k+1}$  connaissant  $(S_j = s_j; j \leq k)$  coïncide avec la loi de  $S_{k+1}$  connaissant  $S_k = s_k$ .

### Définition 2.3. (Chaîne de Markov)

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  une suite de variables aléatoires  $(\Omega, \mathcal{B}, P) \rightarrow (\mathcal{S}, P(\mathcal{S}))$  est dite chaîne de Markov si  $\forall t \in \mathbb{Z}, \forall i_1, i_2, \dots, i_t \in \mathcal{S}$ .

On a

$$P(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}).$$

Donc chaîne de Markov est un processus aléatoire dont le prochain état ne dépend que de l'état actuel et non sur le passé.

L'ensemble  $\mathcal{S}$  est appelé l'espace des états.

**Exemple 2.3.** Soient  $(X_n)_{n \geq 0}, (Y_n)_{n \geq 0}, (Z_n)_{n \geq 0}$  des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes les trois indépendantes entre elles, et de même loi  $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ , on pose  $\xi_n = (X_n, Y_n, Z_n)$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ , avec  $S_0 = (0, 0, 0)$  P.S.

on montre que  $(S_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov.

Soient  $s_0, \dots, s_{n+1} \in \mathbb{Z}^3$  tels que  $P(S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) > 0$ . Alors, comme  $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$ , on a :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) &= P(S_n + \xi_{n+1} = s_{n+1} \mid S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n), \\ &= P(s_n + \xi_{n+1} = s_{n+1} \mid S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n), \\ &= P(s_n + \xi_{n+1} = s_{n+1}), \end{aligned}$$

par indépendance de  $\xi_{n+1}$  de  $S_0, \dots, S_n$ . On obtient de même que

$$P(S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n) = P(s_n + \xi_{n+1} = s_{n+1}),$$

et donc  $(S_n)_n$  est une chaîne de Markov.

## 2.3 Processus Gaussiens

### Vecteur gaussiens

#### Définition 2.4. (variable gaussiens)

Soit  $X$  une variable aléatoire on dit qu'il est gaussienne s'il existe une moyenne  $m \in \mathbb{R}_+$  et une variance  $\sigma^2 > 0$  avec  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  tq :

$$X = m + \sigma Y.$$

#### Définition 2.5. (variable gaussiens)

Soit  $X$  est une variable aléatoire réelle et dite gaussienne centré réduite s'il admet pour densité par rapport à la mesure de lebesgue sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

On note  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Définition 2.6. (Vecteur gaussiens)**

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire est gaussien si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de ses coordonnées  $\langle a, X \rangle = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$  suivent une loi gaussienne dans  $\mathbb{R}$  (pour tout  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ).

**Définition 2.7.**

- i) soit  $X$  et  $Y$  deux variable gaussiennes indépendantes alors  $X + Y$  est une variable gaussienne.
- ii) Soit  $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$  et  $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$  deux variables gaussiennes indépendantes alors :

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

- iii) soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^n$  on dit que  $X$  est un vecteur gaussien si pour tout vecteur déterministe  $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  la variable aléatoire  $(U, X) = \sum_{i=1}^n U_i X_i$  est une variable gaussienne à valeurs réelles.

**Définition 2.8.** La matrice de covariance d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est la matrice carrée symétrique, positive

$$K = \left( \text{Cov}(X_i X_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

L'espérance de  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est le vecteur des espérances de ses marginales

$$E(X) = (E(X_1), \dots, E(X_n)).$$

Si  $E(X) = 0$ , le vecteur  $X$  est dit centré.

**Exemple 2.4.** Par exemple, si  $X = (X_1, \dots, X_n)$  sont  $n$  gaussiennes indépendantes, on sait que toute combinaison linéaire des  $X_i$  est une gaussienne.

par exemple : Si  $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ ;  $i = 1, 2$  et si  $X_1 \perp X_2$  alors ;  
 $u_1 X_1 + u_2 X_2 \sim \mathcal{N}(u_1 m_1 + u_2 m_2; u_1^2 \sigma_1^2 + u_2^2 \sigma_2^2).$

Donc  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur gaussien.

Mais attention, cette propriété n'est plus vraie en général sans l'hypothèque d'indépendance.

Par Exemple si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ; si  $\varepsilon$  est une variable indépendante de  $X$  telle que :

$P[\varepsilon = 1] = P[\varepsilon = -1] = \frac{1}{2}$  si  $Y = \varepsilon X$  alors on voit facilement que  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Cependant,  $(X, Y)$  n'est pas un vecteur gaussien puisque  $X + Y$  n'est pas une Gaussienne : on voit immédiatement que  $P[X + Y = 0] = \frac{1}{2}$  et ceci est impossible pour une loi gaussienne qui est soit concentrée en un seul point, soit absolument continue (et donc non-atomique).

## Théorème central limite (T.C.L)

Dans la suite i.i.d. signifiera indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s, c'est à dire de même loi. On notera aussi souvent v.a.i.i.d pour variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

### Théorème 2.1. (T.C.L)

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de v.a.i.i.d, d'espérance  $m_1$  et de variance finie  $\sigma^2$ .

Soit  $S_n = (X_1, \dots, X_n)$  la somme partielle. Alors quand  $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{S_n - nm_1}{\sigma \sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

**Définition 2.9.** Un processus est dit gaussien si toutes ses lois ni dimensionnelles  $\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  sont gaussiennes ( $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T$ ).

Autrement dit  $X = (X_t)_t$  est gaussien si toute combinaison linéaire  $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$  suit une loi gaussienne ( $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in T$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ).

On comprend dès lors que toute la loi d'un processus gaussien est connue dès qu'on se donne la fonction moyenne  $a(t) = E(X_t)$  et l'opérateur de covariance  $K(s, t) = Cov(X_s, X_t)$ .

En effet, la loi ni dimensionnelle de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est alors la loi normale de dimension  $n$   $\mathcal{N}(a_n, K_n)$  avec  $a_n = (a(t_1), \dots, a(t_n))$  et  $K_n = (K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Les fonctions  $a$  et  $K$  définissent donc toutes les lois ni dimensionnelles de  $X$  et donc aussi sa loi.

## 2.4 Mouvement brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement brownien, il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et du taux d'intérêt.

**Définition 2.10.** Un processus  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien (ou processus Wiener) si :

- i)  $\forall 0 \leq s < t$ ,  $\{B_t - B_s\}$  est indépendant de la tribu  $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ , (on écrit  $(B_t - B_s) \perp \mathcal{B}_u$ ,  $0 \leq u \leq s < t$ ), de loi gaussienne centrée de variance  $(t - s)$  et de fonction de covariance :  $Cov(B_t, B_s) = \inf(s, t) = s \wedge t$ ,
- ii) Les trajectoires de  $B$ , c.à.d les applications  $t \mapsto B_t(\omega)$ , sont toutes continues.

**Définition 2.11. (Mouvement brownien standard)**

Un mouvement brownien est dit standard si :

$$\begin{cases} B_0 = 0, \\ E(B_t) = 0, \\ E(B_t^2) = t. \end{cases}$$

Dans la suite, lorsqu'on parlera de M.B (mouvement brownien), sans autre précision, il s'agira d'un M.B. standard, dans ce cas la loi de  $B_t$  prend la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} dx.$$

$dx$  étant la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

Il existe plusieurs manières de construire un M.B, citons deux d'entre elles :

**Exemple 2.5.** (Construction d'un M.B par série de Fourier)

Soit  $t \in [0, \pi]$ , on pose :

$$B_t = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \xi_n.$$

où  $(\xi_n)$  est une suite de v.a.i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Alors  $(B_t)$  est une variable aléatoire gaussienne (car c'est une somme de variables aléatoires

gaussiennes indépendantes).

$$\begin{aligned}
 E(B_t) &= 0. \\
 V(B_t) &= E(B_t^2), \\
 &= \frac{8}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \frac{\sin(mt)}{m} E(\xi_n \xi_m), \\
 &= \frac{8}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(\sin(nt))^2}{n^2} E(\xi_n^2) = t.
 \end{aligned}$$

$(B_t)$  est un M.B.S.

Nous décrivons dans l'exemple suivant une démarche de l'approximation du mouvement brownien par une marche aléatoire.

**Exemple 2.6.** (Marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ )

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.i.i.d telle que

$$P(\{X_i = +1\}) = P(\{X_i = -1\}) = \frac{1}{2}.$$

Soient  $S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Le processus  $(S_n, n \in \mathbb{N})$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  est appelé la marche aléatoire symétrique sur  $\mathbb{Z}$ .

Nous avons  $E(X_i) = 0, V(X_i) = 1, \forall i = 1, \dots, n$ .

Par conséquent  $E(S_n) = 0$  et  $V(S_n) = n$ .

Le théorème central limite montre que la suite de variables aléatoires

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Soit  $Y_t = S_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1}$ , c'est à dire

$$\text{si } t = n + \epsilon, \text{ alors } Y_t = S_n + \epsilon X_{n+1}.$$

On pose  $B_t^{(n)} = \frac{Y_{nt}}{\sqrt{n}}$ . Supposons pour simplifier que  $nt \in \mathbb{N}$ .

Alors, nous avons

$$B_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} = \sqrt{t} \frac{S_{nt}}{\sqrt{nt}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{t} Z \sim \mathcal{N}(0, t).$$

Ce qui veut dire que

$$P(B_t^{(n)} \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(B_t \leq x).$$

où  $B_t = \sqrt{t}Z$ .

On peut montrer de manière similaire que  $\forall m \geq 1, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}_+, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ ,

$$P(B_{t_1}^{(n)} \leq x_1, \dots, B_{t_m}^{(n)} \leq x_m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(B_{t_1} \leq x_1, \dots, B_{t_m} \leq x_m).$$

C'est à dire que la suite de processus  $(B_t^{(n)})$  converge en loi vers le mouvement brownien  $(B_t)$ .

**Théorème 2.2.** On dit que  $X$  est un  $\{\mathcal{F}_t\}$  M.B, si  $X$  est adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t\}$ ,  $X$  vérifiant :

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t, E(\exp i\mu(X_t - X_s)) = \exp(-\mu^2(t - s)/2).$$

**Propriétés 2.1.** Soit  $B_t$  un M.B alors :

1.  $-B_t$  est aussi un M.B ;
2. Pour tout  $c > 0$ ,  $\{\frac{1}{c}B_t, c^2\}$  est un M.B ;
3. Le processus définit par  $Y_0 = 0$ , et  $Y_t = tB_{1/t}$  est un M.B.

**Propriétés 2.2. (Propriétés des trajectoires)**

Si  $B_t$  est un M.B alors :

1.  $t \rightarrow B_t(\omega)$  n'est à variation totale finie sur aucun intervalle sur  $L^1$ , mais il est à variation quadratique finie sur  $L^2$  et vaut  $T$ ,
2.  $t \rightarrow B_t(\omega)$  n'est dérivable à aucun point,
3.  $t \rightarrow B_t(\omega)$  est localement hölderienne d'ordre  $\alpha$  pour tout  $\alpha < 1/2$ .

i.e

$$\forall (t, s) \in [0, a]^2; |X(t) - X(s)| \leq c|t - s|^\alpha.$$

**Remarque 2.3.** Le fait que le processus  $(B_t)$  n'est pas à variation bornée implique que ses trajectoires ne sont pas dérivable. La variation totale du M.B est simplement la longueur de son chemin. Le résultat obtenu est donc cohérent avec la propriété du M.B, un M.B oscille en permanence et donc la longueur de ses trajectoires est infinie, ceci est également lié au fait que les trajectoires du M.B, bien que continues ne sont pas régulières.

**Définition 2.12. (Mouvement brownien multidimensionnel)**

On appelle M.B standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , un vecteur  $X = (X_1, \dots, X_d)$  où les  $X_i$  sont des M.B standards et indépendants, vérifiant toutes les propriétés citées dans cette section. On passe à un autre processus qui n'est pas moins important que le précédent, il s'agit des martingales dont les propriétés constituent le chemin qui nous permet d'arriver à une solution explicite dans notre modèle.

## 2.5 Martingales à temps continu

**Définition 2.13. (Filtration)**

Une filtration  $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$  est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{F}$  :

$$\forall 0 \leq s \leq t < +\infty; \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

**Définition 2.14. (Martingale)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé filtré.

- Une martingale par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  est un processus stochastique  $(M_t)_{t \in T}$ .  
tels que :
  - i)  $(M_t)$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout  $t$ ,
  - ii)  $E(|M_t|) < \infty$ ,
  - iii)  $E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$  pour tout  $s \leq t$ .
- Si la dernière condition est remplacée par  $E(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$  on dit que  $(M_t)$  est sur-martingale, et si elle est remplacée par  $E(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$  on dit que c'est une sous-martingale.

En particulier, l'espérance  $E(M_t)$  d'une martingale, (resp. d'une sur-martingale, sous-martingale), est une fonction constante du temps (resp. décroissante, croissante). De manière évidente, une martingale est un processus qui est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale et si  $(M_t)$  est une sur-martingale, alors  $(-M_t)$  est une sous-martingale.



## Exemples de martingales Browniennes

Nous allons donner trois processus qui sont des martingales continues par rapport à la filtration Brownienne standard :

1.  $B_t$ ,
2.  $B_t^2 - t$ ,
3.  $\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2})$ .

Montrons l'identité martingale :

$$\begin{aligned}
 E[B_t | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s] = B_s, \\
 E[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2 + 2E[B_t B_s] | \mathcal{F}_s] - B_s^2 - t, \\
 &= t - s + 2B_s^2 - B_s^2 - t, \\
 &= B_s^2 - s. \quad \forall s \leq t. \\
 E[\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}) | \mathcal{F}_s] &= E[\exp(\alpha(B_t - B_s) - \frac{\alpha^2(t-s)}{2}) | \mathcal{F}_s] \exp(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}), \\
 &= \exp(\alpha B_s - \frac{\alpha^2 s}{2}).
 \end{aligned}$$

## Inégalité de Doob

L'inégalité suivante est fondamentale et spécifique aux martingales. Elle donne un contrôle en norme  $L^p$  du supremum d'un martingale, sur un intervalle de temps fini, en fonction de la valeur absolue de sa valeur terminale.

**Théorème 2.3.** soit  $M$  une martingale nulle en 0. On note  $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$ .

Alors, pour tout entier  $p > 1$ ,

$$E((M_t^*)^p) = \left( \frac{p}{1-p} \right)^p E(|M_t|^p).$$

## 2.6 Processus de Poisson

La suite des temps de passage de véhicules en un point donné d'une autoroute lorsque le trafic est fluide, les temps d'arrivée de clients à un guichet, les temps d'émission de photons d'un élément radioactif sont des suites de temps aléatoires qui ont les mêmes propriétés probabilistes : les temps d'interarrivée sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle. On donne à ce modèle, rencontré fréquemment en pratique, le nom de processus de Poisson, car la loi de Poisson joue un rôle important dans les caractéristiques de ce processus.

Le processus de Poisson, que l'on dénotera par  $\{N(t), t \geq 0\}$ , est aussi un processus de naissance pur (une chaîne de Markov à temps continu particulière). C'est-à-dire que  $N(t)$  désigne le nombre total de naissances (d'événement, en général) qui ont eu lieu à partir de 0 jusqu'à l'instant  $t$ . Un processus de ce type est appelé processus de comptage.

**Définition 2.15.** Soit  $N(t)$  le nombre total d'événements qui se sont produits dans l'intervalle  $[0, t]$ . Le processus stochastique  $\{N(t), t \geq 0\}$  est appelé **processus de comptage** telles que :

- i)  $N(0) = 0$ .
- ii)  $\forall t \geq 0, N(t) \in \mathbb{N}^*$ .
- iii)  $t \mapsto N(t)$  est croissante.

De plus,  $N(t_2) - N(t_1)$  est le nombre total d'événements qui se sont produits dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ .

**Définition 2.16.** Un **processus de Poisson** de paramètre  $\lambda > 0$  est un processus de comptage  $N(t)$  tel que :

- i) Le processus est à accroissement indépendants :  $\forall t_0 \leq t_1 < \dots < t_k$ , les variables aléatoires  $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, \dots, N_{t_1} - N_{t_0}$  sont indépendantes.
- ii)  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2, N(s+t) - N(s)$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .

**Propriétés 2.3.** Soit  $(N_t, t \geq 0)$  un processus de Poisson. Alors il existe  $\lambda > 0$  tel que pour tous  $0 \leq s < t$ ,  $N_t - N_s$  est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda(t - s)$ . On a

donc

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

**Définition 2.17.** Le paramètre  $\lambda$  est appelé **intensité** du processus de Poisson. Il est égale au nombre moyen d'événements qui se produisent pendant une unité de temps, puisque

$$E(N_{t+1} - N_t) = \lambda.$$

On dit aussi que les événements se produisent au taux  $\lambda$ .

**Exemple 2.7.** Considérons un titre boursier générant des dividendes à des instants que l'on ne saurait prédire. Dans certains cas, il est possible de modéliser cette situation à l'aide d'un processus de Poisson. En effet, si nous définissons un événement comme étant le versement de dividendes et, pour tout nombre réel positif  $t$ ,

$N(t)$  = le nombre de versements de dividendes durant  
l'intervalle de temps  $[0, t]$ ,

alors  $N = \{N_t : t > 0\}$  est possiblement un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Pour les fins de ce problème, nous définissons l'unité de temps comme étant la journée.

En supposant que nous recevons un montant de  $d_i > 0$  lors du  $i$  ième versement, calculez le montant espéré au cours de la première année.

Pour faciliter la résolution du problème dans un premier temps, supposez que les versements sont tous du même montant, disons  $d > 0$ .

**Solution** Soit

$X(t)$  = le montant de dividendes reçus au cours de la période  $[0, t]$ .

Alors

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(t) = 0, \\ d_1 & \text{si } N(t) = 1, \\ d_1 + d_2 & \text{si } N(t) = 2, \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^n d_i & \text{si } N(t) = n, \\ \dots & \end{cases}$$

Comme  $N(t)$  est de loi de Poisson d'espérance  $\lambda t$ ,

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

et

$$E[X(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P[X(t) = x_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n d_i \right) P[N(t) = n] = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n d_i \right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

si les montants des dividendes sont tous égaux à  $d$  alors

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n d_i \right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (nd) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \\ &= d\lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ &= d\lambda t e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n)!}, \\ &= d\lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t}, \\ &= d\lambda t. \end{aligned}$$

Ainsi, le montant espéré au cours de la première année est

$$E[X(365)] = 365\lambda t.$$

**Théorème 2.4.** Soit  $\mathcal{N}$  une mesure aléatoire de poissons d'intensité  $dt \otimes \mu$  sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction mesurable et si  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , vérifie  $\mu(A) < +\infty$ . Alors : pour tout  $t \geq 0$ ,  $\int_A f(z)N(t,dz)$  suit une loi de poisson tq :

$$E \left[ e^{i \int_A f(z)N(t,dz)} \right] = e^{t \int (e^{if(z)} - 1) \mu dz}.$$

## 2.7 Processus de Markov

Cette notion est assez difficile, mais d'un usage constant. En langage vernaculaire, un processus est de Markov si son comportement dans le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent. Soyons plus précis.

**Définition 2.18.** Soit  $X$  un processus et  $(\mathcal{F}_t)$  sa filtration canonique. On dit que le processus est de Markov si, pour tout  $t$ , pour toute variable bornée  $Y \in \mathcal{F}_\infty$  l'égalité

$$E(Y \circ \theta_t | \mathcal{F}_t) = E(Y \circ \theta_t | X_t)$$

où  $\theta$  est l'opérateur de translation défini sur les applications coordonnées par  $X_u \circ X_s = X_{u+s}$ .

Essayons une autre définition. Pour tout  $n$ , pour toute fonction bornée  $F$  défini sur  $\mathbb{R}^n$ , pour tous  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$E[F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \dots, X_{s+t_n}) | \mathcal{F}_s] = E[F(X_{s+t_1}, X_{s+t_2}, \dots, X_{s+t_n}) | X_s].$$

Ceci implique en particulier que pour toute fonction  $f$  borélienne bornée

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[f(X_t) | X_s], \forall t > s.$$

Le processus est dit de Markov fort si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finis  $T, S$  avec  $T > S$ .

## 2.8 Intégrale stochastique

L'objectif de cette section est de donner un sens à l'intégrale stochastique  $\int_0^t H_s dB_s$ . On présentera à cet effet la formule d'Itô. Cette formule donne, en particulier, la façon de différencier  $t \mapsto f(B_t)$ , si  $f$  est une fonction deux fois continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^d$ .

### Processus élémentaire

**Définition 2.19.** On appelle processus élémentaire  $H = (H_t)_{0 \leq t < T}$  un processus de la forme :

$$H_t = \phi_0 \chi_{0(t)} + \sum_{i=1}^p \phi_i \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t).$$

où  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p = T$ ,  $\phi_0$  est une v.a  $\mathcal{F}_0$ -mesurable bornée, et pour  $i = 1, \dots, p$ ,  $\phi_i$  est une v.a  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et bornée. Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à  $B$  comme étant le processus continu  $\{I(H)_t\}$  défini par :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^p \phi_i (B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t}).$$

Soit encore, si  $t \in ]t_k, t_{k+1}[$  :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^k \phi_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1} (B_t - B_k).$$

On note  $\int_0^t H_s dB_s$  pour  $I(H)_t$ .

**Proposition 2.1.** Si  $H$  est un processus élémentaire, alors  $\int_0^t H_s dB_s$  est une  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  martingale continue telle que :

$$\forall t \in [0, T], \quad E \left[ \left| \int_0^t H_s dB_s \right|^2 \right] = E \left[ \int_0^t H_s^2 ds \right].$$

On note  $\xi$  l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace vectoriel de  $L^2(\Omega, [0, T])$ .

**Corollaire 2.1.** Soit  $H \in \xi$ , alors l'intégrale d'Itô définie par :

$$\int_s^T H(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_s^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

où  $\{\phi_n\}$  est une suite de fonctions élémentaires tel que :

$$E \left[ \int_s^T (H(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

**Exemple 2.8.** On veut à présent démontrer que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

On pose  $\phi_n(s, \omega) = \sum_{j=1}^n B_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}]}(s)$ ,  $B_j = B_{t_j}$

On a alors :

$$\begin{aligned} E \left[ \int_0^t (\phi_n - B_s)^2 ds \right] &= E \left[ \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds \right], \\ &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds, \\ &= \sum_j \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } \Delta t_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_j B_j \Delta B_j,$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
 \Delta(B_j)^2 &= B_{j+1}^2 - B_j^2, \\
 &= (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j), \\
 &= (\Delta B_j)^2 + 2B_j \Delta(B_j), \\
 B_t^2 &= \sum_j \Delta(B_j)^2 = \sum_j (\Delta B_j)^2 + 2 \sum_j B_j \Delta(B_j). \\
 \Rightarrow \sum_j B_j \Delta(B_j) &= \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_j (\Delta B_j)^2.
 \end{aligned}$$

Puisque  $\sum_j (\Delta B_j)^2 \rightarrow t$  dans  $L^2$  quand  $\Delta t_j \rightarrow 0$ . Alors

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

## Propriétés de l'intégrale stochastique sur $\xi$

**Propriétés 2.4.** Sur l'ensemble des processus élémentaires  $\xi$ , l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes :

1.  $h \rightarrow \int_0^t h_s dB_s$  est linéaire.
2.  $h \rightarrow \int_0^t h_s dB_s$  est continue.
3.  $(\int_0^t h_s dB_s)$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté.
4. Propriété d'isométrie :

$$E \left[ \left( \int_0^t h_s dB_s \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^t h_s^2 ds \right].$$

5. Une conséquence de la propriété précédente est la suivante :

$$E \left[ \int_0^t h_s dB_s \right] = 0, \text{ et } \text{Var} \left[ \int_0^t h_s dB_s \right] = E \left[ \int_0^t h_s^2 ds \right].$$



6.  $(\int_0^t h_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale.
7. Le processus  $((\int_0^t h_s dB_s)^2 - \int_0^t h_s^2 ds)$  est une martingale.
8. La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\langle \int_0^t h_s dB_s \rangle = \int_0^t h_s^2 ds.$$

L'une des propriétés importante des intégrales stochastiques est l'isométrie, grâce à cette propriété, on peut calculer la variance de certains processus.

**Exemple 2.9.** On cherche à calculer la variance de processus  $X_t = \int_0^t B_s dB_s$ .

$$E(X_t) = E(\int_0^t B_s dB_s) = 0 \text{ (propriété d'intégrale stochastique).}$$

$$Var(X_t) = E(X_t^2) = E[(\int_0^t B_s dB_s)^2] = E[\int_0^t B_s^2 ds] = \int_0^t E(B_s^2) ds = \int_0^t s ds = \frac{1}{2} t^2.$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus vaste de processus  $H$ , on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel suivant :

$$\mathcal{M}^2 = \left\{ (H_t)_{0 \leq t < T} \text{ progressivement mesurable, } E \left[ \int_0^T H_s^2 ds \right] < \infty \right\}.$$

On désigne par  $H^2$  l'espace vectoriel des martingales bornées dans  $L^2$ .

Le sous espace de  $H^2$  formé des martingales continues est noté  $H_c^2$ .

On munit  $H^2$  de la norme définie par

$$\| M \|_{H^2} = E[| M_T |^2]^{\frac{1}{2}}.$$

**Remarque 2.4.** L'intégrale stochastique est alors une isométrie de  $\mathcal{M}^2$  dans  $H_c^2$  et garde les mêmes propriétés sur  $\mathcal{M}^2$  que sur  $\xi$ .

**Théorème 2.5.** Il existe une unique application linéaire  $I$  de  $L_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$  dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$  qui coïncide avec l'intégral stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires

$\xi$  et qui vérifie la propriété d'isométrie :

$$\forall t \leq T, E[I(H)_t^2] = E \left[ \int_0^t H_s^2 ds \right].$$

**Proposition 2.2.** Si  $H \in \mathcal{M}^2$ , on a :

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t H_s dB_s \right| \right] \leq 4E \left[ \int_0^T H_s^2 ds \right].$$

On introduit à présent une classe de processus qui sera très utile par la suite :

## Processus d'Itô

**Définition 2.20.** Un processus d'Itô est un processus stochastique de la forme :

$$\forall 0 \leq t \leq T, X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

Avec

- i)  $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable,
- ii)  $\int_0^t K_s ds < +\infty$  presque sûrement,
- iii)  $\int_0^t H_s dB_s < +\infty$  presque sûrement,
- iv)  $K_s(t)$  et  $H_s(t)$  sont  $\mathcal{F}_t$ -adaptés.

## Formule d'Itô

Soit  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  une fonction réelle  $C^{1,2}$ , et  $X$  un processus d'Itô, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t \frac{1}{2} f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s. \quad (2.1)$$

Où

$$\begin{aligned}\langle dt \cdot dt \rangle &= \langle dt \cdot dB_t \rangle = \langle dB_t \cdot dt \rangle = 0, \\ \langle dB_t \cdot dB_t \rangle &= dt.\end{aligned}$$

Cette formule est très importante et sera très utile dans la section suivante, un exemple de son application est le calcul de la variation quadratique d'un processus.

**Exemple 2.10.**

1. On reprend l'intégrale

$$\int_0^t B_s dB_s$$

On choisit  $X_t = B_t$  et  $f(t, x) = \frac{1}{2}x^2$ . Alors

$$Y_t = f(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2.$$

Alors la formule d'Itô

$$\begin{aligned}dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot (dB_t)^2, \\ &= B_t dB_t + \frac{1}{2} (dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2} dt.\end{aligned}$$

Ainsi

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = B_t dB_t + \frac{1}{2} dt.$$

En d'autres termes,

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t.$$

2. Que vaut

$$\int_0^t s dB_s.$$

Il semble raisonnable que le terme  $tB_t$  devrait apparaître, posons alors

$$f(t, x) = tx \quad \text{et} \quad Y_t = f(t, B_t) = tB_t.$$

Alors par la formule d'Itô,

$$dY_t = B_t dt + t dB_t + 0,$$

i.e

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t,$$

Ou

$$tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s,$$

ou

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$

qui apparaît comme une intégration par parties.

### **Théorème 2.6. (Variation quadratique d'un processus d'Itô)**

Si  $X_t$  est un processus standard avec la représentation intégrale :

$$X_t = \int_0^t a(s, w) ds + \int_0^t b(s, w) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors sa variation quadratique existe et est donnée par :

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t b^2(s, w) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

**Exemple 2.11.** Soit  $(B_t)$  un M.B.S, le processus défini par :  $M_t = (B_t^2 - t)$  est une martingale.

Calculons la valeur de  $\langle M_t \rangle$  (variation quadratique)

Posons :  $f(t, x) = (x^2 - t)^2$ , alors

$$M_t^2 = (B_t^2 - t)^2 = f(t, B_t).$$

et nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= -2(x^2 - t), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) &= 4x(x^2 - t), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) &= 4(x^2 - t) + 8x^2.\end{aligned}$$

Donc par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}M_t^2 - 0 &= -2 \int_0^t (B_s^2 - s) ds + 4 \int_0^t B_s (B_s^2 - s) dB_s + \frac{1}{2} (4 \int_0^t (B_s^2 - s) ds + 8 \int_0^t B_s^2 ds), \\ &= 4 \int_0^t B_s (B_s^2 - s) dB_s + 4 \int_0^t (B_s^2 - s) ds.\end{aligned}$$

Donc  $\langle M_t \rangle = 4 \int_0^t (B_s^2 - s) ds$  (car le premier terme est une martingale).

## Formule d'intégration par parties

**Proposition 2.3.** Soient  $X, Y$  deux processus d'Itô tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \text{ et } Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s.$$

On pose

$$\begin{aligned}\langle X, Y \rangle_t &= \int_0^t H_s H'_s ds, \\ dX_t &= K_t dt + H_t dB_t.\end{aligned}$$

On a alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Voici un exemple d'application. En écrivant le processus  $X_t$  sous forme d'un produit de deux processus, on arrive à vérifier une certaine équation.

**Exemple 2.12.** Soit  $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$  un M.B.S,  $a \in \mathbb{R}_+$ .

On pose le processus  $X_t = \int_0^t \exp(-a(t-s))dB_s, t \in \mathbb{R}_+$

Nous allons vérifier que  $X_t$  satisfait l'équation suivante :

$$X_t = -a \int_0^t X_s ds + B_t.$$

Soit  $Y_t = \int_0^t \exp(as)dB_s$ , on a alors  $X_t = \exp(-at)Y_t$ .

On applique la formule d'intégration par parties aux processus  $\exp(-at)$  et  $Y_t$  on obtient :

$$\begin{aligned} X_t = \exp(-at)Y_t &= 0 - a \int_0^t \exp(-as)Y_s ds + \int_0^t \exp(-as)dY_s, \\ &= -a \int_0^t X_s ds + \int_0^t \exp(-as)\exp(as)dB_s. \end{aligned}$$

Finalement,

$$X_t = -a \int_0^t X_s ds + B_t.$$

## 2.9 Équations Différentielles Stochastiques

Le but des équations différentielles stochastiques(E.D.S) est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$X'(t) = b(X(t)).$$

Soit encore sous forme différentielle :

$$dX_t = b(X_t)dt.$$

Une telle équation est utilisée pour décrire l'évolution d'un système physique. Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit, qui sera de la forme  $\sigma dB_t$ , où  $B$  désigne un mouvement Brownien et  $\sigma$  est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dB_t;$$

ou encore sous forme intégrale, la seule qui ait un sens mathématique,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \sigma B_t.$$

On généralise cette équation en autorisant  $\sigma$  à dépendre de l'état à l'instant  $t$  :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t;$$

soit sous forme intégrale,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

Remarquons que le sens donné à cette équation dépend de la théorie de l'intégrale stochastique développée dans la partie précédente. On généralise encore un peu en autorisant  $\sigma$  et  $b$  à dépendre du temps  $t$ , et en se plaçant dans un cadre vectoriel.

Dans cette section, nous présenterons tout d'abord le théorème d'existence et d'unicité sur les équations différentielles stochastiques, finirons par quelque exemple.

## Le résultat classique d'Itô

### Définitions et notations

On se place toujours sur un espace de probabilité complet, disons  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . On se donne  $B$  un M.B d-dimensionnel sur un espace. On considère également une variable aléatoire  $Z$ , de carré intégrable, et indépendante du M.B  $B$ . On considère la filtration définie, pour tout  $t$  positif, par  $F_t = \sigma\{Z, B_s; s \leq t\} \cup N$ . On considère deux fonctions  $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = Z. \end{cases} \quad (2.2)$$

Comme nous allons le voir par la suite, cette équation est à interpréter au sens d'une équation intégrale, à savoir :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Le coefficient  $b$  s'appelle **la dérive** tandis que la matrice  $\sigma\sigma^t$  s'appelle **la matrice de diffusion**. Précisons tout d'abord ce que nous entendons par une solution de l'E.D.S (2.2).

**Définition 2.21.** Une solution (forte)  $X$  de l'E.D.S (2.2) est un processus continu tel que :

- i)  $X$  est progressivement mesurable,
- ii)  $P(\int_0^T \{ \|b(r, X_r)\| + \|\sigma(r, X_r)\|^2 \} dr) < \infty$  p.s,
- iii) P-p.s, on a :  $X_t = Z + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$

On notera  $S^2$  l'espace de Banach constitué des processus  $X$ , progressivement mesurables, tels que  $E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2] < \infty$  muni de la norme

$$\|X\| := E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2]^{\frac{1}{2}},$$



et  $S_c^2$  le sous espace de  $S^2$  formé de processus continus. Notons que deux processus indistinguables sont identifiés et par abus d'écriture l'espace quotient est noté de la même façon.

Nous finissons ce paragraphe en rappelant un résultat élémentaire assez utile pour la suite.

## Existence et unicité de la solution

**Théorème 2.7.** Soient  $b$  et  $\sigma$  deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante  $K$  telle que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$  :

1. Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|;$$

2. Croissance linéaire :  $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$ ;

3.  $E[|Z|^2] < \infty$ .

Alors l'E.D.S (2.2) possède une unique solution (à l'indistinguabilité près). Cette solution appartient à  $S_c^2$  et donc à  $S^2$ .

**Exemple 2.13.** Considérons l'équation différentielle suivante :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dB_t. \quad (2.4)$$

Nous allons démontrer qu'il existe une solution unique de cette équation. On procédera de la façon suivante :

Si l'E.D.S satisfait les trois conditions suivantes :

1.  $|b(t, x) - b(t, y)| + |a(t, x) - a(t, y)| \leq K |x - y|, \forall t \geq 0$ .
2.  $|b(t, x)|^2 + |a(t, x)|^2 \leq K^2(1 + x^2)^2, \forall t \geq 0$ .
3.  $E[X_0^2] < \infty$ .

alors, l'E.D.S (2.4) muni de la condition initial  $X_0 = Z$  possède une unique solution.

Vérification de 1) :

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)| + |a(t, x) - a(t, y)| &= |a(b - x) - a(b - y)| + |\sigma - \sigma|, \\ &= |a| |x - y|. \end{aligned}$$

Vérification de 2) : puisque :

$$|x| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1; \\ x^2 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \leq \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } |x| \leq 1; \\ 1 + x^2 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned} |b(t, x)|^2 + |a(t, x)|^2 &= |a(b - x)|^2 + |\sigma|^2, \\ &= a^2(b - x)^2 + \sigma^2, \\ &= a^2(b^2 - 2bx + x^2) + \sigma^2, \\ &\leq a^2(b^2 - 2|b||x| + x^2) + \sigma^2, \\ &\leq a^2(b^2 - 2|b|(1 + x^2) + x^2) + \sigma^2, \\ &= a^2(b^2 + 2|b|) + \sigma^2 + (2|b| + 1)x^2, \\ &\leq \max(a^2(b^2 + 2|b|) + \sigma^2, 2|b| + 1)(1 + x^2). \end{aligned}$$

Posons donc

$$K = \max(|a|, \sqrt{a^2(b^2 + 2|b|) + \sigma^2}, \sqrt{2|b| + 1}).$$

Vérification de 3) :

Il suffit de choisir  $X_0$  de carré intégrable.

## 2.10 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (E.D.P) sont omniprésentes dans toutes les sciences, pars-qu'elle apparaissent aussi bien en dynamique de structure, mécanique de fluide que dans la théorie de la gravitation ou de l'électromagnétisme, elles sont primordiales dans des domaines tel que la simulation aéronautique, la synthèse d'image,

les prévisions météorologiques, la démographie ou les finances.

**Définition 2.22. (E.D.P)**

Soient  $d, m, n, s$  des entiers naturels non nuls,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

On appelle système d'E.D.P à coefficients réels dans  $\mathbb{R}^d$  de taille  $n$ , d'ordre  $m$  une relation de la forme :

$$\phi(x, u(x), \partial_i(u(x))_{i \in \{1, \dots, d\}}, \partial_{i,j}^2(u(x))_{i,j \in \{1, \dots, d\}^2}, \partial_{i_1, i_2, \dots, i_m}^m(u(x))_{(i_1, i_2, \dots, i_m) \in \{1, \dots, d\}^m}) = 0.$$

où

$$\begin{cases} u & : \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est solution de l'E.D.P,} \\ \phi & : \quad \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s. \end{cases}$$

On dit que l'E.D.P est linéaire si et seulement si  $\phi(x, \cdot)$  l'est pour tout  $x \in \Omega$ .

On dit que l'E.D.P est scalaire si  $s = n = 1$  (une seule équation et  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ).

**Classification des E.D.P scalaire linéaire d'ordre 2 :**

On considère une E.D.P scalaire linéaire d'ordre 2 :

$$a(x)u(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d C_{i,j}(x)\partial_{i,j}^2 u(x) = f(x).$$

Notons  $C(x)$  la matrice  $(C_{i,j})$ ,  $c'$  est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

Notons les  $(\lambda_i(x))_{i=1}^d$  ses valeurs propres et notons  $d_+(x)$  le nombre de valeurs propres strictement positives ( en tenant compte de leur multiplicité) et  $d_-(x)$  le nombre de valeurs propres strictement négatives et  $d_0$  la multiplicité de la valeur propre 0. Posons  $d(x) = d_0(x) + d_+(x) + d_-(x)$ .

On dit que l'E.D.P est :

- elliptique si et seulement si  $d_+(x) = d$  ou  $d_-(x) = d$  (les valeurs propres sont toutes positives ou négatives).
- hyperbolique si et seulement si :  $d_+ = d - 1$  et  $d_- = 1$  ou  $d_+ = 1$  et  $d_- = d - 1$ .

– parabolique si et seulement si  $d_0(x) > 0$ .

Ou simplement par le calcul de  $\Delta$  de l'équation  $\Delta(x) = b^2(x) - 4a(x)c(x)$ .

– si  $\Delta < 0$ , on parle d'une équation elliptique.

– si  $\Delta = 0$ , l'E.D.P est dite parabolique.

– si  $\Delta > 0$ , l'E.D.P est dite hyperbolique.

## Conditions aux limites

En plus de la condition initiale, il existe deux type de conditions aux bords :

1. Conditions aux bords de Dirichlet : la condition de Dirichlet aux bords peut se définir comme la donnée d'une fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sur une partie  $\Gamma$  de la frontière  $\Omega$ , ce qui peut se noter :

$$u(x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega.$$

ou

$$u(t, x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega(t).$$

La fonction  $f$  est une donnée du problème.

2. Conditions aux bords de Neuman : la condition de Neuman aux bords peut se définir comme la donnée de la dérivée de la fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par rapport à une variable  $\theta$  sur une partie  $\Gamma$  de la frontière  $\Omega$ , ce qui peut se noter :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega.$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(t, x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega(t).$$

**Exemple**

Un exemple d'E.D.P parabolique du 2<sup>ème</sup> degré linéaire est l'équation suivante dite équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Un cas particulier de cette équation est l'équation suivante avec des conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{cp} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, x) = \begin{cases} 100x & \text{si } x \in [0, 1], \\ 100(2 - x) & \text{si } x \in [1, 2], \end{cases} \\ u(t, 0) = u(t, 2) = 0. \end{cases}$$

Notons que les méthodes numériques passent par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques, les méthodes numériques s'intéressent à la recherche des valeurs de la fonction à des endroits particuliers, autrement dit, on ne cherche pas l'écriture d'une fonction qui vérifie l'équation mais par quelles valeurs passent la fonction en des abscisses particulières.

---

---

## CHAPITRE 3

---

# LA RELATION ENTRE LES E.D.P ET LES E.D.S

Des liens importants existent entre probabilités et équations aux dérivées partielles (E.D.P) via les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent reliés à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines E.D.P en termes de processus stochastiques.

### 3.1 Formule de Feynman-Kač

On se donne des fonctions  $f, g$  et  $h$  et on considère l'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1)$$

avec la condition finale  $u(T, x) = h(x)$ .

Nous allons voir que la solution  $u$  de cette équation est de la forme :

$$u(t, x) = E(h(X_T)|X_t = x).$$

où  $(X_t)$  est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t.$$

On applique la formule d'Itô pour le processus  $Y_t = u(t, X_t)$  lorsque  $u$  est solution de (3.1) :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X \rangle_t, \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)(f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t)g^2(t, X_t)dt. \end{aligned}$$

En rassemblant les termes en  $dt$  et en utilisant le fait que  $u$  est solution de l'E.D.P (3.1), on obtient :

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)g(t, X_t)dB_t.$$

En particulier,  $(Y_t)$  est une martingale. On en déduit :

$$u(x, t) = E(u(t, X_t)|X_t = x) = E(u(T, X_T)|X_t = x) = E(h(X_T)|X_t = x).$$

## 3.2 Transformation de Fourier :

### **Théorème 3.1. (Produit de convolution :)**

Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $y \rightarrow f(x - y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^N$ . On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy.$$

**Définition 3.1.** Soit  $f, g$  deux fonctions sectionnelle-ment continue sur  $\mathbb{R}$ ; et vérifiant la condition :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$ , alors on a :

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ivx} dx.$$

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)e^{ivx} dv.$$

$F(v)$  est appelée transformée de Fourier de  $f(x)$ , noté aussi :  $F(f)$

$\bar{F}(x)$  transformée de Fourier inverse de  $g(v)$  : noté aussi  $F(g)$ .

**Remarque 3.1.** Il existe d'autres définition de la transformée de Fourier de  $f$  telle que :

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{itx} dt.$$

**Propriétés 3.1.** On rappelle quelques propriétés essentielles sur les transformées de Fourier.

**1. La Linéarité :**

si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  alors  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g).$$

**2. convolution :**

Soit  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  alors

i)  $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ .

ii)  $\bar{F}(f * g) = \bar{f} \bar{g}$ .

**3. Dérivée de la transformée :**

si  $f$  et  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  alors

i)  $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ .

ii)  $(\widehat{f})'(x) = (-2\pi i x \widehat{f})(x)$ .



### 3.3 Semi-groupes et générateurs

**Définition 3.2.** Soit  $E$  un espace de Banach, une famille à un paramètre  $T(t)$ ,  $0 \leq t \leq +\infty$  d'opérateurs linéaires bornés de  $E$  est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur  $E$  si :

- i)  $T(0) = I$  ( $I$  est l'opérateur identité de  $E$ ).
- ii)  $T(t+s) = T(t)T(s)$ ,  $\forall t, s \geq 0$ .

**Définition 3.3.** L'opérateur linéaire  $A$  défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, x \in D(A).$$

est appelé le générateur infinitésimale de semi-groupe  $T(t)$ ,  $D(A)$  est le domaine de  $A$ .

### 3.4 Lien entre les E.D.P et les E.D.S

La formule de Feynman-Kac, prouve qu'il y'a une connection entre les solutions des équations différentielles stochastiques et certaines équations aux dérivées partielles du second ordre linéaire.

**Théorème 3.2.**

Soient  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(B_t, t \in \mathbb{R})$  un mouvement Brownien standard et  $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions conjointement continues en  $(t, x)$  et lipschitzienne en  $x$ . On pose  $(X_t, t \in [t_0, +\infty[)$  la solution de l'E.D.S

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t,$$

et  $X_{t_0} = x_0$ . On suppose de plus qu'il existe une constante  $K > 0$  telle que :

$$|g(t, x)| > K, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Soit  $h \in C(\mathbb{R})$  et  $T > 0$ , étant données les hypothèses ci dessus sur  $f$  et  $g$ , il existe une unique fonction  $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + f(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} g^2(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (3.2)$$

**Remarque 3.2.**

Si  $u$  la solution de l'équation (3.2), le processus  $(u(t, X_t), t \in [t_0, T])$  est une martingale. En effet, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} u(t, x) - u(t_0, x_0) &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle, \\ &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) g(s, X_s) dB_s \\ &\quad + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) dX_s + \frac{\partial u}{\partial x} f(s, X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} g(s, X_s)^2,}_{\text{(cette quantité est nulle car } u \text{ satisfait l'équation (3.2))}} \\ &= \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) g(s, X_s) dB_s. \end{aligned}$$

Le processus  $u(t, X_t)$  est donc une martingale.

## La nature probabiliste des solutions des E.D.P

Nous supposons  $b$  et  $\sigma$  ne dépendent pas du temps, on note  $X_t$  une solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

**Définition 3.4.**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  à dérivées bornées. On appelle générateur infinitésimal

du processus  $X_t$ , l'opérateur différentiel qui à une fonction  $f$  de classe  $C^2$  associe.

$$Af(x) = \frac{\sigma^2(X_t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b(X_t) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

### Théorème 3.3.

Soit  $u$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  en  $(t, x)$  à dérivées bornées sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, u(T, x) = f(x),$$

et

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru \right)(t, x) = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, u(t, x) = E \left( e^{-\int_t^T r(s, X_s) ds} f(X_T) \right).$$

Cette dernière est l'écriture probabiliste de la solution de l'E.D.P.

Ainsi pour calculer l'espérance d'une fonction qui s'écrit comme fonction d'une solution d'une E.D.S, il suffit de résoudre l'E.D.P associée au problème.

## 3.5 Représentation probabiliste de la solution parabolique

### 3.5.1 E.D.P de la chaleur :

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles décrivant la distribution de la chaleur dans le temps. Dans une dimension spatiale, on note  $u(t, x)$  comme la température qui obéit à la relation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

où  $\alpha$  est appelé coefficient de diffusion. Les problèmes liés aux équations aux dérivées partielles sont généralement complétés par des conditions initiales  $u(0, x) = u_0(x)$  et certaines conditions aux limites.

Dans ce travail, on résoudre l'équation de la chaleur, nous utilisons la convention suivante pour la transformée de Fourier et son inverse.

On se propose de résoudre l'équation de la Chaleur suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \partial_x^2 u(t, x), \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et bornée.

On définit le noyau de la chaleur par :

$$k(t, y - x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(y-x)^2}.$$

Le noyau de la chaleur est une solution fondamentale (ou fonction de Green) de l'opérateur  $\partial_t - \frac{1}{2} \partial_x^2$  de l'équation de la chaleur.

On sait que la solution de l'équation (3.3) analytiquement est :

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} k(t, y - x) f(y) dy. \quad (3.4)$$

i.e. une convolution de  $f$  avec le noyau de la chaleur.

On passe par suite à l'application de résoudre l'équation (3.3) à l'aide de la définition de mouvement brownien  $(B_t)$ .

i.e. la représentation probabiliste de la solution de l'équation de la Chaleur.

On montre que sa solution est donnée par :

$$u(t, x) = E^x(f(B_t)).$$

Nous appliquons la transformée de Fourier pour confirmer que cette égalité est vraie :

$$\tilde{u}(t, y) = F(u(t, x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x) dx.$$

on dérivée par rapport à  $t$ ,

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{u}(t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \partial_t u(t, x) dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \left[ \frac{1}{2} \partial_x^2 u(t, x) \right] dx.\end{aligned}$$

En appliquant l'intégrale par partie :

Posons,

$$\begin{cases} f(x) = e^{-ixy} \\ g'(x) = \partial_x^2 u(t, x) \end{cases} \implies \begin{cases} f'(x) = -iye^{-ixy} \\ g(x) = \partial_x u(t, x) \end{cases}$$

Alors,

$$\partial_t \tilde{u}(t, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-ixy} \partial_x u(t, x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \partial_x u(t, x) dx \right],$$

Nous avons :

$$e^{-ixy} \partial_x u(t, x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0, \text{ car elle est à support compact.}$$

Alors,

$$\partial_t \tilde{u}(t, y) = \frac{iy}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \partial_x u(t, x) dx,$$

En appliquant l'intégrale par partie à la deuxième fois :

On pose,

$$\begin{cases} f(x) = e^{-ixy} \\ g'(x) = \partial_x u(t, x) \end{cases} \implies \begin{cases} f'(x) = -iye^{-ixy} \\ g(x) = u(t, x) \end{cases}$$

Puis,

$$\partial_t \tilde{u}(t, y) = -\frac{y^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x) dx}_{\text{(transformation de Fourier } \tilde{u})}$$

se qui de suit,

$$\partial_t \tilde{u}(t, y) = -\frac{y^2}{2} \tilde{u}(t, y).$$

est une équation différentielle ordinaire à coefficients constantes.

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{u}(t, y) &= -\frac{y^2}{2} \tilde{u}(t, y), \\ \frac{d\tilde{u}(t, y)}{\tilde{u}(t, y)} &= -\frac{y^2}{2} dt, \end{aligned}$$

Par l'intégration,

$$\ln \tilde{u}(t, y) = -\frac{y^2}{2} t + c, \text{ où } c \text{ est une constante strictement positive.}$$

Nous trouvons,

$$\tilde{u}(t, y) = K e^{-\frac{y^2}{2} t}, \quad K = e^c.$$

Les solutions sont des exponentielles décroissantes dans  $t$ .

Le terme constant est les conditions initiales, notées par :

$$\tilde{u}(0, y) = \tilde{f}(y),$$

on obtient :  $K = \tilde{f}(y)$ ,

et donc,

$$\tilde{u}(t, y) = \tilde{f}(y) e^{-\frac{y^2}{2} t}.$$

D'après le théoreme (2.2)

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, y) &= E(e^{iyB_t})\tilde{f}(y), \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \tilde{f}(y) P_{B_t}(dz), \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx \right] P_{B_t}(dz),\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable :  $x = x + z$

$$\begin{aligned}&= \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy(x+z)} f(x+z) dx \right] P_{B_t}(dz), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iyz} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyz} e^{-ixy} f(x+z) dx P_{B_t}(dz),\end{aligned}$$

Ainsi,

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}} f(x+z) P_{B_t}(dz) dx,$$

Ou  $P_{B_t}(dz)$  la loi de  $B_t$  donnée par la définition (2.11)

que nous résolvons

$$\tilde{u}(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x) dx.$$

telle que :

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+z) P_{B_t}(dz).$$

On applique la définition (2.11)

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2t}} dz, \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy, \\ &= E(f(B_t + x)) = E^x(f(B_t)). \end{aligned}$$

**Maintenant, on va vérifié que cette solution égale la solution analytiquement :**

En effet :

$$\begin{aligned} E^x(f(B_t)) &= E(f(B_t + x)), \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z+x) P_{B_t}(dz), \end{aligned}$$

On a  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

Alors,

$$E^x(f(B_t)) = \int_{\mathbb{R}} f(z+x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2t}} (dz),$$

On suppose  $y = z + x$  et  $dy = dz$

$$\begin{aligned} E(f(B_t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(t, y-x) f(y) dy. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Avec en plus un terme de potentiel  $-v$  i.e au second membre on a :

$$A = \frac{1}{2} \partial_x^2 - v,$$



On a par la formule de Feynman-Kač que :

$$u(t, x) = E^x \left( f(B_t) e^{-\int_0^t v(B_s) ds} \right).$$

### 3.5.2 E.D.P intégrable :

On se propose de résoudre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = u(t, x+1) + u(t, x), & \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.5)$$

La solution de l'équation (3.5) est inspirée de l'équation (3.3) et on remplacera le processus Brownien  $B_t$  par le processus Poisson  $N_t$

On montrons que sa solution est donnés par :

$$u(t, x) = E^x(f(N_t)). \quad (3.6)$$

En effet, on suppose que admet une transformation de Fourier

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(t, y) &= F(u(t, x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x) dx. \\
 \partial_t \tilde{u}(t, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \partial_t u(t, x) dx, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} [u(t, x+1) - u(t, x)] dx, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x+1) dx - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x) dx}_{\text{(transformation de Fourier } \tilde{u})}, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x+1) dx - \tilde{u}(t, y), \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+1)y} u(t, x+1) dx - \tilde{u}(t, y), \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+1)y} e^{iy} u(t, x+1) dx - \tilde{u}(t, y), \\
 &= e^{iy} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x+1)y} u(t, x+1) dx}_{\text{(transformation de Fourier)}} - \tilde{u}(t, y), \\
 \partial_t \tilde{u}(t, y) &= e^{iy} \tilde{u}(t, y) - \tilde{u}(t, y) = (e^{iy} - 1) \tilde{u}(t, y).
 \end{aligned}$$

est une équation différentielle ordinaire à coefficients constantes.

Donc,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tilde{u}(t, y) &= (e^{iy} - 1) \tilde{u}(t, y), \\
 \frac{d\tilde{u}(t, y)}{\tilde{u}(t, y)} &= (e^{iy} - 1) dt,
 \end{aligned}$$

Par l'intégration, nous trouvons,

$$\begin{aligned}
 \ln \tilde{u}(t, y) &= (e^{iy} - 1)t + c, \quad \text{où } c > 0. \\
 \tilde{u}(t, y) &= Ke^{(e^{iy}-1)t}, \quad K = e^c.
 \end{aligned}$$

la condition initiale, données par :

$$\tilde{u}(0, y) = K = \tilde{f}(y),$$

$$\tilde{u}(t, y) = \tilde{f}(y),$$

D'après le théorème (2.4),

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, y) &= E(e^{iyN_t}) \tilde{f}(y), \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyp} \tilde{f}(y) P_{N_t}(dp), \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyp} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx \right] P_{N_t}(dp), \end{aligned}$$

On suppose  $x = x + p$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{iyp} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-iyp} f(x + p) dx \right] P_{N_t}(dp), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}} e^{iyp} e^{-iyp} f(x + p) dp P_{N_t} dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}} f(x + p) dp P_{N_t} dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(t, x) dx. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x + p) dp P_{N_t}, \\ &= E^x(f(x + p)) = E^x(f(P_{N_t})). \end{aligned}$$

**Résultat :**

Malgré que la solution analytique soit meilleure que celle de la méthode probabiliste, on peut dire que la méthode probabiliste donne une approximation acceptable de la solution.

L'utilisation de cette méthode est avantageuses dans le cas de résolution des E.D.Ps où la résolution par les méthodes analytiques implique une résolution des systèmes linéaires à grandes dimensions.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Taik, *Equations aux dérivées partielles*, polycopié disponible sur [://www.fstm.ac.ma/labomac/Taik-cours1 AN3.pdf](http://www.fstm.ac.ma/labomac/Taik-cours1%20AN3.pdf)
- [2] B. Ycart, *Introduction aux équations différentielles stochastiques*. LMC-IMAG, 1998.
- [3] Chabriac. Claudie, 2012-2013, *Processus Stochastiques et Modélisation*, ISMAG MASTER 2 - MI00451X, Université de Toulouse Le Miria
- [4] D. connus, Robert Dalong, *Introduction à la théorie des probabilités*, 2015, Presses Polytechnique Romantes.
- [5] Dieter Sondermann, *Introduction to Stochastic Calculus for Finance, A New Didactic Approache*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.
- [6] Ferrières.Sylvain, *Formule de Feynman-Kac Approche Analytique et Probabiliste*, Marché.Julien, 2001.
- [7] Françoise Cottet-Emard, *Probabilité et tests d'hypothèse*, en Belgique, Bruxelles et Paris, mars 2014.
- [8] Françoise Couty, Jean Debord et Daniel Fredon, *Probabilité et statistique*, en Belgique, mai 2007.
- [9] Gabriel LEPETIT, *Processus de Poisson*. ENS Rennes - Université Rennes 1.
- [10] Haneche Mohamed, *Processus Stochastiques Et Equations Aux Derivees Partielles*. Mémoire de Magister. Université De M'hemed Bougera. Boumerdès, 2008/2009.

- [11] Henk C. Tijms, *A First Course in stochastic Models*. Vrije Universiteit, Amsterdam, the Netherlands. John Wiley & Sons Ltd. 2003.
- [12] *Introduction aux Processus Stochastiques : Cours ESIEA 4A*, septembre-octobre 2013.
- [13] Jean Jacob et Philip Protter, *L'essentiel théorie des probabilités*, 2003, cassini 1-272.
- [14] Jean-Marie Morvan et Rémi Morven, *Probabilités discrètes-2<sup>e</sup>d*, France, en février 2012.
- [15] Jean-Pierre FOUQUE, *Relations entre probabilités et équations aux dérivées partielles*. Techniques de l'ingénieur, traité Scinces fondamentales AF 565.
- [16] Laurence Carassus, *Probabilité/théorie de la mesure et espérance conditionnelle*, 2018, 1-320.
- [17] L.C.G. Rogers, David Williams, *Diffusion, Markov Processes and Martingales*, volume 2. Ito calculus 2<sup>ed</sup> edition. Cambridge university press. 2000.
- [18] Lessard Sabin, *Initiation à la théorie des probabilités Ellipses Marketing*, 2017, 1-168.
- [19] Mario Lefebvre, *Processus stochastique appliqués*, Canada, 2009.
- [20] Pascale Harinck, Alain Plagne et Claude sabbah, *Aléatoire*, en France, Journées mathématiques X-UPS 2013.
- [21] Philippe Briand, *É quations Différentielles stochastiques*, polycopié disponible sur <http://www.lama.univ-savoie.fr/~briand/edsr/poly.pdf>.
- [22] *Rappels Probabilités : Préparation à l'agrégation*. Université de Bordeaux, 2019/2020.
- [23] Renée Veysseyre *Statistique et probabilités pour l'ingénieur*, 2<sup>e</sup> édition, Dunod, Paris, 2001, 2006.
- [24] Sheldon M. Ross, *Initiation aux probabilités*, Traduction de la septième édition américaine, 2007, presses polytechniques et universitaires romandes.
- [25] Trsitán Lorino, *Processus stochastique*, polycopié disponible sur [http://perso.lcpc.fr/tristan.lorino/tristan\\_fichiers/Probastat2.pdf](http://perso.lcpc.fr/tristan.lorino/tristan_fichiers/Probastat2.pdf).
- [26] Valérie Girardin et Nikolas Limnios, *Probabilité et introduction à la statistique*, Maury S.A.S en France , en janvier 2014.

## *Résumer*

Dans ce mémoire, nous montrons que les relations entre la théorie des équations aux dérivées partielles (E.D.P) et la théorie des probabilités sont très profondes et permettent de dériver de nouveaux résultats non triviaux concernant le comportement des processus aléatoires. On présentera des théorèmes montrant le lien entre la solution d'une équation différentielle stochastique et une équation aux dérivées partielles. On présentera également la nature probabiliste de la solution d'une équation aux dérivées partielles qui nous permettra de la lier au calcul d'espérance.

**Mots clé :** Espace Probabilité, processus de Poisson, mesure aléatoire, transformation de Fourier, équation différentielle partielle intégrable, générateur.

## *Abstract*

In this memory, we show that the relations between the theory of partial differential equations (P.D.E) and theory and probability theory are very deep and allow us to derive new non-trivial results concerning the to derive new non-trivial results concerning the behavior of random processes. We will present theorems showing the link between the solution of a stochastic differential equation and a differential equation and a partial differential equation. We will also present the probabilistic nature of the solution of a partial differential equation which will allow us to to link it to the calculus of expectation.

**Keywords:** Probability space, Poisson process, random measure, Fourier transformation, integrable partial differential equation, generator.

## *ملخص*

في هذه الأطروحة نظهر أن العلاقات بين نظرية المشتقات الجزئية ونظرية الاحتمالات عميقة جدًا وتسمحنا باستخلاص نتائج جديدة غير تافهة فيما يتعلق بسلوك العمليات العشوائية. سنقدم نظريات توضح الارتباط بين حل المعادلة التفاضلية العشوائية والمعادلة المشتقة الجزئية، سنقدم أيضًا الطبيعة الاحتمالية للحل معادلة مشتقة جزئية تسمح لنا بربطها بحساب التوقع.

**الكلمات المفتاحية :** الفضاء الاحتمالي ، عملية بواسون ، القياس العشوائي ، تحويل فورييه ، المعادلة التفاضلية الجزئية القابلة للتكامل ، المولد.