الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: **Mathématiques**

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes

Préparé par : Amimour Meriem

Khalouche Selma

Soutenue devant le jury :

Bouzekria Fahima	MAA	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Présidente
Boubellouta Khadidja	MCA	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapportrice
Benhabiles Hanane	MAA	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinatrice

Année Universitaire : 2020/2021

Résumer

Dans ce mémoire nous présentons un théorème afin de déterminer des nouvelles fonctions génératrices de produits de certains nombres et polynômes orthogonaux. Le théorème proposé est basée sur les fonctions symétriques. où l'utilisation de symétriseur $\delta^k_{a_1a_2}$ sur la série $\sum\limits_{n\geq 0} h_n(a_1, a_2, ...a_n)b_1^n t^n$ nous permet obtenir les fonctions génératrices de produits des nombres de k-Mersenne, k-Mersenne -Lucas, Padovan, Jacobesthal -Padovanet les fonctions génératrices des produites des polynômes de Vieta Fibonacci, Vieta Lucas, Vieta Pell et Vieta Pell -Lucas.

Mots-clés : Fonctions génératrices, fonctions symétriques, polynômes orthogonaux.

Abstract

In this dissertation, we present a theorem in order to determine new generating functions of the products of some numbers and orthogonal polynomials.The proposed theorem is based on the symmetric functions. Where by making use the symmetrizing operator $\delta^k_{a_1a_2}$ on the series $\sum\limits_{n\geq 0} h_n(a_1, a_2, ...a_n)b_1^n t^n$ a we gived the generating functions of the numbers of k-Mersenne numbers, k-Mersenne -Lucas numbers , Padovan numbers, Jacobesthal -Padovanet numbers end the generating functions of the products of Vieta Fibonacci polynomials, Vieta Lucas polynomials, Vieta Pell polynomials et Vieta Pell -lucas polynomials.

Keys-words: Generating functions, symmetric functions, orthogonal .

ملخص

في هذه المدكرة قمنا بعرض نظرية تعتمد على التوابع التناظرية وذلك لحساب الدوال المولدة لبعض الأعداد وكثيراالحدودالمتعامدة ،حيث أن إستعمال المؤثر التناظري $\delta^k_{a_1a_2}$ على السلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} h_n(a_1, a_2, ...a_n)b_1^n t^n$ يسمح لنا بحساب الدوال المولدة لأعداد k مارسان، k مارسان لوكا، بادوفان، جاكوب سطال بادوفان كثيرات الحدود فيثا فيبوناتشي، فيثا لوكا ، فيثا بال، فيثا بال لوكا.

الكلمات المفتاحية: الدوال المتناظرة، الدوال المولدة، كثيرات الحدود المتعامدة

REMERCIEMENT

Nous remercions d'abord et avant tout ALLAH qui nous a donné la volonté, la santé, le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur de ce travail le professeur Boubelouta Khadidja pour son aide précieuse et ses conseils éclairés dans la direction de notre travail ; Ainsi que leur grande disponibilité et son immense gentillesse .

Nous remercions également tous les membres de jury qui ont bien voulu et accepter d'examiner ce modeste travail.

Sans oublier tous les enseignants, nos collègues et administrateurs du département de Mathématiques et Informatique .

Mes grands remerciements vont aussi à toute notre famille précisément notre père et notre mère pour ses encouragements qu'ont accompagné durant cette mémoire .

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui on participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Selma,Meriem

DÉDICACE

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères,que je dédie ce modeste travail de fin d'étude

A mon Père : Nouar, qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir que Dieu lui procure bonne santé et longue vie.

A ma Mère : Zelikha, qui m'a comblé de son soutien et m'a voué un amour inconditionnel, à la lune qui éclaire mes nuits.

J'espère qu'un jour ,je pourrai leurs rendre un peu de ce qu'ils on fait pour moi ,que dieu leur prêtre bonheur et longue vie.

Je dédie aussi de ce travail

A mes frères : Houssameddine et Heythem .

A mes sœurs :Hanadi,Hadjer,kawther.

A ma grande mère Hada.

A ma tante Noura,que dieu repose son âme.

A mon binôme Meriem, qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail ;

A tous les membres de ma promotion, à tous mes enseignants de puis mes premiers année d'études.

Aussi beaucoup d'autres personnes que je n'ai pas eu l'occasion de les mentionner. Ce qui m'ont aidé de prés ou de loin.

Selma

DÉDICACE

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères,que je dédie ce modeste travail de fin d'étude

A mon Père brahim, pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifies

A ma Mère soukou saadia, qui m'a donné le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, quoique je fasse, je ne pourrai jamais te rendre ce que tu as fait pour moi.

Enfin je souhaite une longue vie à mon père et à la mémoire de ma chére mère qui m'a donnée la vie et qui m'a bien enseignée et que dieu l'accueil dans son vaste paradis

Je dédie aussi de ce travail

A mon frère : fateh.

sœurs :Karima,Fatima,Moufida,Sara.

A mon Fiancé Ali.

A mon binôme Selma, qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail ;

A tous les membres de ma promotion, à tous mes enseignants de puis mes premiers année d'études.

Meryem

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **1**

1 Notions préliminaires **2**
- 1.1 Séries formelles . . . 2
  - 1.1.1 Opérations sur les séries formelles . . . 2
  - 1.1.2 Séries inversibles . . . 4
- 1.2 Relations de Récurrences . . . 5
  - 1.2.1 Relations de récurrences linéaires homogènes . . . 5
  - 1.2.2 Relations de récurrences linéaires d'ordre 2 . . . 7
  - 1.2.3 Relations de récurrences linéaires d'ordre 3 . . . 12
- 1.3 Polynômes orthogonaux . . . 15
- 1.4 Les fonctions génératrices ordinaires . . . 19

2 Fonctions symétriques **26**
- 2.1 Équations du second degré . . . 26
- 2.2 Fonctions symétriques . . . 29
  - 2.2.1 Fonctions symétriques élémentaires . . . 29
  - 2.2.2 Fonctions symétriques complètes . . . 31
  - 2.2.3 Fonctions sommes de puissances . . . 33
- 2.3 Relations entre les fonctions symétriques . . . 34
- 2.4 Quelques propriétés sur les fonctions symétriques . . . 35

3 Quelques applications sur les fonctions symétriques **38**
- 3.1 Définitions et notations . . . 38
- 3.2 Formule principale . . . 39
- 3.3 Applications . . . 41
  - 3.3.1 Le cas de $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{1, 0\}$: . . . 41
  - 3.3.2 Le cas de $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{1, 0\}$: . . . 42
  - 3.3.3 Le cas de $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, $k = 1, 2$: . . . 43
  - 3.3.4 Le cas de $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, $k = 1, 2$: . . . 46

INTRODUCTION

Les fonctions génératrices sont un outil particulièrement utile dans l'étude de la combinatoire elles nous permettent en particulier d'appliquer les techniques de l'analyse et de l'algèbre au problème de combinatoire, en particulier dans le contexte de récurrence.Plusieurs auteurs on déterminé les fonctions génératrice de certains nombres et polynômes orthogonaux. Par exemple :
En 1962, Riordan [25] a déterminé la fonction génératrice des puissances des nombres de Fibonacci. En 1994, D. Foata [17] a utilisé des techniques combinatoires pour déterminer les fonctions génératrices des produits de nombres de Fibonacci ainsi que les polynômes de Chebyshev depremière et de deuxième espèces.

Dans ([3] ;[11] ;[12] ;[13] ;[14] ;[15] ;[16] ;[8]) Boussayoud et al ont déterminé des nouveaux résultats à l'aide des opérateurs symétriques $\delta^{k}_{a_1 a_2}$ et $\delta^{-k}_{a_1 a_2}$. Notre objectif dans ce mémoire est d'obtenir de nouveaux résultats sur les fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes orthogonaux. En utilisant le concept des fonctions symétriques. Ce mémoire est organisée dans trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous présentons des outils et préliminaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Nous donnons tout d'abord quelques rappels sur sériés formmelles, puis les relations des récurrences , ensuite nous définissons les polynômes orthogonaux. Enfin dans la dernière partie de ce chapitre nous introduisons les fonctions génératrices.

Dans le deuxième chapitre, nous rapelons les fonctions symétriques, ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous présentons des nouveaux résultats sur les fonctions génératrices de produits des nombres de k-Fibonacci, k-Mersenne , k-Mersenne-Lucas et les fonctions génératrices des produits les polynômes de Vieta Fibonacci, Vieta Lucas, Vieta Pell et Vieta Pell Lucas.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons toutes les définitions et les notions de base ayant été utilisées tout au long de ce mémoire, tout d'abord nous définitions les séries formelles, puis les relations de récurrences, ensuite nous rappelons les polynômes orthogonaux. Enfin nous présentons les fonctions génératrices ordinaires.

1.1 Séries formelles

Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$).

Définition 1.1.1 *: Les éléments de l'ensemble* $K[[t]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_n t^n, a_n \in N \right\}$ *s'appellent l'anneau des séries formelles (à une indéterminée) à coefficients dans* K*. Pour* $n \in N$*,* t^n *s'appelle le monôme de degré* n *et* a_n *est son coefficient.*

- Notons $\mathbb{C}[[t]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.

- Notons $\mathbb{R}[[t]]$ l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.1 *:* $K[t]$*, l'ensemble des polynômes à coefficients dans* K *est un sous ensemble de* $K[[t]]$*.*

1.1.1 Opérations sur les séries formelles

- **Addition** : Soient $\alpha(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ et $\beta(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n t^n$ deux séries formelles, alors :

$$(\alpha+\beta)(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)t^n.$$

Exemple : Soient $\alpha(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n t^n$, $\beta(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^n$, alors :

$$(\alpha+\beta)(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}((-1)^n+1)t^n.$$

- **Produit de convolution** : Soient $\alpha(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n$ et $\beta(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n t^n$ deux séries formelles, alors :

$$(\alpha.\beta)(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)t^n.$$

  Exemple : Soient $\alpha(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^n=\dfrac{1}{1-t}$, $\beta(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nt^n=\dfrac{t}{(1-t)^2}$, alors :

$$(\alpha.\beta)(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n(n+1)}{2}t^n.$$

- **Multiplication par un scalaire** : $\beta(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} kt^n$ est le produit de $\alpha(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^n$ par le scalaire k.

  Exemple : $\beta(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2t^n$ est le produit de $\alpha(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^n$ par 2.

- **Dérivation** : $\beta(t)=\sum\limits_{n=o}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$ est le résultat de la dérivation de $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ par apport à t.

  Exemple : $\dfrac{-1}{(1-t)^2}$ est le résultat de la dérivation de $\dfrac{1}{(1-t)}$ par apport à t.

- **Intégration** : $\beta(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}t^{n+1}$ est le résultat de l'intégration de la série $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

  Exemple : $\beta(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}t^{n+1}$ est le résultat de l'intégration de $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$.

- **Division** : Soient $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $\beta(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ deux séries formelles tels que $\beta(t)\neq 0$, $\beta(t)$ divise $\alpha(t)$ si et seulement s'il existe une série formelle $\omega(t)$ telle que :

$$\alpha(t)=\beta(t)\omega(t)$$

.

Proposition 1.1.1 *: Toute série formelle* $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *possède un opposé par l'addition qui est :*

$$-\alpha(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)t^n.$$

propriété 1.1.1 *: Si* $\alpha(t)$ *et* $\beta(t)$ *sont deux séries formelles non nulles alors,* $\alpha(t)\beta(t)$ *non nulle aussi.*

Preuve. : Soit $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n \neq 0 \Leftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$ (le plus petit entier) ; tel que : $a_{n_1}\neq 0$,
et soit $\beta(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n \neq 0 \Leftrightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}$ (le plus petit entier) ; tel que : $b_{n_2}\neq 0$.
Alors :
$\alpha(t)\beta(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)t^n=(a_{n_1}b_{n_2})t^{n_1+n_2}+\sum\limits_{n>n_1+n_2\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)t^n.$
On a : $a_{n_1}b_{n_2}\neq 0 \Rightarrow \alpha(t)\beta(t)\neq 0.$ ■

1.1.2 Séries inversibles

Définition 1.1.2 *[27] : Une série* $\alpha(t)$ *dans* $K[[t]]$ *est dite inversible s'il existe une série* $\beta(t)\in K[[t]]$ *satisfaisant* $\alpha(t)\beta(t)=\beta(t)\alpha(t)=1$. *On dit alors que* $\beta(t)$ *est l'inverse de* $\alpha(t)$.

Exemple 1.1.1 *: La série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ *est l'inverse de* $1-t$.
En effet :

$$\begin{aligned}(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n)(1-t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n-\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1}\\ &= t^0+\sum_{n=1}^{+\infty} t^n-\sum_{n=1}^{+\infty} t^n\\ &= 1.\end{aligned}$$

Théorème 1.1.1 *[36] :* $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n\in K[[t]]$ *est inversible pour la multiplication si et seulement si* $a_0\neq 0$.

Preuve. [36] : $\alpha(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ est inversible dans $K[[t]]$ si et seulement s'il existe $\alpha^{-1}(t)=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $K[[t]]$ tel que $\alpha(t)\alpha^{-1}(t)=1$, c'est-à-dire si et seulement si $a_0c_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j c_{n-j}=0$.

- Si α est inversible, comme $a_0c_0=1$, a_0 est non nul.

- Réciproquement, si a_0 est non nul, le système triangulaire d'équation

$$\begin{cases} a_0c_0 & = & 1 \\ a_1c_0 + a_0c_1 & = & 0 \\ a_2c_0 + a_1c_1 + a_0c_2 & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_nc_0 + a_{n-1}c_1 + \cdots + a_0c_n & = & 0 \end{cases}$$

a une unique solution .

■

Exemple 1.1.2 *: La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^n$ est inversible car $a_0 = 1 \neq 0$.*

Proposition 1.1.2 *: Si $\alpha(t)$ une série inversible, son inverse est unique.*

Preuve. Soit $\alpha(t)$ une série inversible, $\beta(t)$ et $\omega(t)$ deux inverses de $\alpha(t)$, alors :

$$\alpha(t)\beta(t) = \alpha(t)\omega(t) = 1.$$

Donc :

$$\omega(t)\alpha(t)\beta(t) = \omega(t)1,$$

d'où

$$\beta(t) = \omega(t).$$

■

1.2 Relations de Récurrences

1.2.1 Relations de récurrences linéaires homogènes

On a besoin de rappeler quelques définitions de base concernant les relations de récurrences.

Définition 1.2.1 *[34] : Une relation de récurrence est dite linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants si elle est de la forme :*

$$a_n - c_1a_{n-1} - c_2a_{n-2} - \cdots - c_ka_{n-k} = 0. \tag{1.1}$$

Où $c_1, c_2, \cdots, c_k$ sont des nombres réels et c_k non nuls.

Remarque 1.2.1 *: Si $a_i = 0$, $\forall i \in [n-k, n]$ une solution de l'équation* (1.1)*, elle s'appelle solution triviale.*

Remarque 1.2.2 *: Soit $a_n = t^n$ est une solution de l'équation (1.1), avec $a_n \neq 0$, on obtient alors :*

$$t^n - c_1 t^{n-1} - \cdots - c_k t^{n-k} = 0, \Longleftrightarrow t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k = 0. \tag{1.2}$$

*Cette dernière équation est **l'équation caractéristique** de la relation de récurrence (1.1).*

Définition 1.2.2 *[26] : Soit la relation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants.*

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k a_{n-k} = 0. \tag{1.3}$$

Le polynôme caractéristique correspondant est :

$$P(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k. \tag{1.4}$$

Théorème 1.2.1 *[34] : Soient $c_1, c_2, \cdots, c_k$ des nombres réels tels que c_k est non nul. Supposons que l'équation caractéristique :*

$$t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k = 0.$$

Admette k racines distinctes $t_1, t_2 \cdots, t_k$. Alors, une séquence a_n est une solution de la relation de récurrence :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 t_1^n + \alpha_2 t_2^n + \cdots + \alpha_k t_k^n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.5}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ sont des constantes réelles.

Exemple 1.2.1 *: Soit la récurrence de la suite de Fibonacci :*

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ \\ F_0 = 0, F_1 = 1. \end{cases}$$

L'équation caractéristique est : $t^2 - t - 1 = 0$ qui a pour racines simples $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La solution générale est donc de la forme $F_n = \lambda_1 t_1^n + \lambda_2 t_2^n$.
Les valeurs de λ_1 et λ_2 étant fournies par les conditions initiales : $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\lambda_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.
Finalement :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Exemple 1.2.2 *: Soit la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \\ u_0 = 2, \\ u_1 = 5. \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est : $t^2 - 5t + 6 = 0.$

Cette dernière équation admette deux racines simple $t_1 = 2, t_2 = 3,$

alors d'après le théorème précédent la solution générale s'écrit sous la forme suivante :

$$u_n = \alpha_1 (2)^n + \alpha_2 (3)^n.$$

Déterminer les valeurs de α_1, α_2 :

Pour $n = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$

Pour $n = 1 \Rightarrow 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5.$

On obtient :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Donc :

$$u_n = 2^n + 3^n.$$

1.2.2 Relations de récurrences linéaires d'ordre 2

Fibonacci généralisée $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} G_n = pG_{n-1} + qG_{n-2}, \quad n \geq 2 \\ \\ G_0 = \alpha, G_1 = \beta. \end{cases} \tag{1.6}$$

Avec $p, q \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$[5].

Alors la fonction génératrice associée à $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)t}{1 - pt - qt^2}.$$

Lemme 1.2.1 *[5] : Soit* $t^2 - pt - q = 0$*, l'équation caractéristique associée à* (1.6)*. Alors :*

1. *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes* t_1 *et* t_2 *la solution générale de* (1.6) *est donnée par :*

$$G_n = \frac{\lambda_1 t_1^n - \lambda_2 t_2^n}{t_1 - t_2},$$

avec $\lambda_1 = \beta - \alpha t_2$ *et* $\lambda_2 = \beta - \alpha t_1.$

2. *Si l'équation caractéristique admet une solution double t dons $\mathbb{R}$, la solution générale de* (1.6) *est donnée par :*

$$G_n = (c_1 + c_2 n)t^n,$$

avec $c_1 = \alpha$ *et* $c_2 = \dfrac{\beta - \alpha t}{t}$.

Preuve.
On a l'équation caractéristique associée à la relation (1.6) est :

$$t^2 - pt - q = 0.$$

1. Si $t_1 \neq t_2$ les racines de cette équation, alors :

$$t_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, t_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

   Par conséquent, la solution générales est :

$$G_n = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n.$$

   Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suit :

$$\begin{cases} G_0 = c_1 + c_2 = \alpha, \\ G_1 = c_1 t_1 + c_2 t_2 = \beta. \end{cases}$$

   En résolvant ce système à deux équations et deux inconnues, on obtient :

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\beta - \alpha t_2}{t_1 - t_2}, \\ c_2 = \dfrac{\alpha t_1 - \beta}{t_1 - t_2}. \end{cases}$$

   La solution finale est :

$$G_n = \frac{\lambda_1 t_1^n + \lambda_2 t_2^n}{t_1 - t_2},$$

   avec $\lambda_1 = \beta - \alpha t_2$ et $\lambda_2 = \beta - \alpha t_1$.

2. Si l'équation caractéristique de la relation (1.6) admet une racine double t, alors :

$$t = \frac{1}{2} p.$$

   Par conséquent, la solution générale

$$G_n = (c_1 + c_2 n)t^n.$$

   Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suit :

$$\begin{cases} G_0 = c_1 = \alpha, \\ G_1 = (c_1 + c_2)t = \beta. \end{cases}$$

En résolvant ce système à deux équations et deux inconnues, on obtient :

$$\begin{cases} c_1 = \alpha, \\ c_2 = \dfrac{\beta - \alpha t}{t}. \end{cases}$$

La solution final est :

$$G_n = (c_1 + c_2 n)t^n,$$

avec $c_1 = \alpha$ et $c_2 = \dfrac{\beta - \alpha t}{t}$.

■

Définition 1.2.3 *[19] : Les nombres de k-Fibonacci sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ F_{k,0} = 1, F_{k,1} = 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Les premiers termes des nombres de k-Fibonacci sont donnés par [19] :

$$\begin{aligned} F_{k,0} &= 1, \\ F_{k,1} &= 1, \\ F_{k,2} &= k+1, \\ F_{k,3} &= k^2+k+1, \\ F_{k,4} &= k^3+k^2+2k+1, \\ F_{k,5} &= k^4+k^3+3k^2+2k+1, \\ F_{k,6} &= k^5+4k^3+3k^2+3k+1. \end{aligned}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$F_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\left(\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n\right). \tag{1.8}$$

Définition 1.2.4 *[21] : Les nombres de k-Mersenne sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} M_{k,n} = 3kM_{k,n-1} - 2M_{k,n-2}, \forall n \geq 2 \\ M_{k,0} = 0, M_{k,1} = 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

Les premiers termes des nombres de k-Mersenne sont donnés par :

$$\begin{aligned} M_{k,0} &= 0, \\ M_{k,1} &= 1, \\ M_{k,2} &= 3k, \\ M_{k,3} &= 9k^2-2, \\ M_{k,4} &= 27k^3-12k, \\ M_{k,5} &= 81k^4-54k^2-4, \\ M_{k,6} &= 243k^5-216k^3+12k. \end{aligned}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$M_{k,n} = \frac{t_1^n - t_2^n}{t_1 - t_2}, \tag{1.10}$$

avec :

$$t_1 = \frac{3k + \sqrt{9k^2-8}}{2}$$

et

$$r_2 = \frac{3k - \sqrt{9k^2-8}}{2}.$$

Définition 1.2.5 *[21] : Les nombres de k-Mersenne-Lucas sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} m_{k,n} = 3km_{k,n} - 2m_{k,n-2}, \forall n \geq 1 \\ m_{k,0} = 2, m_{k,1} = 3k. \end{cases} \tag{1.11}$$

Les premiers termes des nombres de k-Mersenne-Lucas sont donnés par :

$$\begin{aligned} m_{k,0} &= 2, \\ m_{k,1} &= 3k, \\ m_{k,2} &= 9k^2-4, \\ m_{k,3} &= 27k^3-18k, \\ m_{k,4} &= 81k^4-72k^2+8. \end{aligned}$$

La suite $(m_{k,n})_{n\in N}$, une relation de récurrence d'ordre 2, l'équation caractéristique est donné par :

$$t^2 - 3kt + 2 = 0.$$

La forme de Binet s'écrit :

$$m_{k,n} = t_1^n + t_2^n, \tag{1.12}$$

tell que $t_1 > t_2$, avec :

$$t_1 = \frac{3k + \sqrt{9k^2 - 8}}{2}$$

et

$$t_2 = \frac{3k - \sqrt{9k^2 - 8}}{2}.$$

- Pour $k = 1$, On a :

Définition 1.2.6 *: Les nombres de Fibonacci sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ \\ F_0 = 1, F_1 = 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

Les premiers termes des nombres de Fibonacci sont donnés par :

$$\{F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 12\}.$$

La forme de Binet s'écrit :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \tag{1.14}$$

Définition 1.2.7 *: Les nombres de Mersenne sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ \\ M_0 = 0, M_1 = 1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Les premiers termes des nombres de Mersenne sont donnés par :

$$\{M_0 = 0, M_1 = 1, M_2 = 3, M_3 = 7, M_4 = 15, M_5 = 23, M_6 = 39\}.$$

La forme de Binet s'écrit :

$$M_n = \frac{t_1^n - t_2^n}{t_1 - t_2} = 2^n - 1, \tag{1.16}$$

avec : $t_1 = 2$ et $t_2 = 1$.

Définition 1.2.8 *[21] : Les nombres de Mersenne-Lucas sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} m_n = 3m_{n-1} - 2m_{n-2}, \forall n \geq 1 \\ \\ m_0 = 2, m_1 = 3. \end{cases} \tag{1.17}$$

Les premiers termes des nombres de Mersenne-Lucas sont donnés par :

$$\{m_0 = 2, m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 9, m_4 = 18\}.$$

La suite $(m_n)_{n\in N}$, une relation de récurrence d'ordre 2, l'équation caractéristique est donné par :

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

La forme de Binet s'écrit :

$$m_n = t_1^n + t_2^n, \tag{1.18}$$

tell que $t_1 > t_2$, avec :

$$t_1 = 2$$

et

$$t_2 = 1.$$

Proposition 1.2.1 *[21] : Les n-émies termes des nombres de k-Mersenne-Lucas d'indice négatif sont donnés par :*

$$m_{k,-n} = \frac{1}{2^n} m_{k,n}.$$

Proposition 1.2.2 *[37] : Les nombres de Mersenne-Lucas d'indice négatif sont donnés par :*

$$m_{-n} = \frac{1}{2^n} m_n.$$

1.2.3 Relations de récurrences linéaires d'ordre 3

La suit de Fibonacci de troisième ordre généralisé $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} W_n = aW_{n-1} + bW_{n-2} + cW_{n-3}, \quad n \geq 3 \\ \\ \qquad W_0 = \alpha, W_1 = \beta, W_2 = \gamma. \end{cases} \tag{1.19}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$[39].

De la relation de récurrence(1.19) on obtient l'équation caractéristique $t^3 - at^2 - bt - c = 0$, qui admet pour solutions t_1, t_2 et t_3 telles que :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{a}{3} + A + B, \\ t_2 = \frac{a}{3} + wA + wB, \\ t_3 = \frac{a}{3} + w^2A + wB. \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} A = \left(\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{ab}{6} + \dfrac{c}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ B = \left(\dfrac{a^3}{27} + \dfrac{ab}{6} + \dfrac{c}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \Delta = \dfrac{a^3c}{27} - \dfrac{a^2b^2}{108} + \dfrac{abc}{6} - \dfrac{b^3}{27} + \dfrac{c^2}{4}. \end{cases}$$

et $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

La forme de Binet s'écrit :

$$W(n) = \frac{R}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_2)} t_1^n + \frac{S}{(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)} t_2^n - \frac{T}{(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)} t_3^n.$$

Avec :

$$\begin{cases} R = \gamma - (t_2 + t_3)\beta + t_2t_3\alpha, \\ S = \gamma - (t_1 + t_3)\beta + t_1t_3\alpha, \\ T = \gamma - (t_1 + t_2)\beta + t_1t_2\alpha. \end{cases}$$

Les exemples ci-dessous sont des relations des récurrences associées à la relation (1.19)

1. Pour $a = 0$, $b = c = 1$ et $\alpha = \beta = \gamma = 1$, nous obtenons la suit de Padovane $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$[41, 42] :

$$\begin{cases} P_n^{(3)} = P_{n-2}^{(3)} + P_{n-3}^{(3)}, \quad n \geq 3 \\ P_0^{(3)} = P_1^{(3)} = P_2^{(3)} = 1, \\ \left\{P_n^{(3)}\right\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, ...\}. \end{cases} \tag{1.20}$$

   La forme de Binet s'écrit[31] :

$$P_n^{(3)} = \frac{(t_2 - 1)(t_3 - 1)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} t_1^n + \frac{(t_1 - 1)(t_3 - 1)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} t_2^n + \frac{(t_1 - 1)(t_2 - 1)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} t_3^n.$$

Avec :

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt[3]{\dfrac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\dfrac{9-\sqrt{69}}{18}}, \\ t_2 = w\sqrt[3]{\dfrac{9+\sqrt{69}}{18}} + \overline{w}\sqrt[3]{\dfrac{9-\sqrt{69}}{18}}, \\ t_3 = \overline{w}\sqrt[3]{\dfrac{9+\sqrt{69}}{18}} + w\sqrt[3]{\dfrac{9-\sqrt{69}}{18}}. \end{cases}$$

Avec $W = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

2. Pour $a = 1, c = 1, b = 0$, et $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1$, nous obtenons la suite de Nayarana $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$[35] :

$$\begin{cases} N_n^{(3)} = N_{n-1}^{(3)} + N_{n-3}^{(3)}, \quad n \geq 3. \\ N_0^{(3)} = 0, N_1^{(3)} = N_2^{(3)} = 1, \\ \left\{N_n^{(3)}\right\} = \{0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, ...\}. \end{cases} \tag{1.21}$$

La forme de Binet s'écrit :

$$N_n^{(3)} = \frac{1}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}t_1^{n+1} + \frac{1}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}t_2^{n+1} + \frac{1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}t_3^{n+1}.$$

Avec :

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{\dfrac{2}{29+3\sqrt{93}}} + \sqrt[3]{\dfrac{29+3\sqrt{93}}{2}}\right), \\ t_2 = \dfrac{1}{3}\left(1 - w\sqrt[3]{\dfrac{2}{29+3\sqrt{93}}} + w^2\sqrt[3]{\dfrac{29+3\sqrt{93}}{2}}\right), \\ t_3 = \dfrac{1}{3}\left(1 - w^2\sqrt[3]{\dfrac{2}{29+3\sqrt{93}}} - w\sqrt[3]{\dfrac{29+3\sqrt{93}}{2}}\right). \end{cases}$$

Avec : $w = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

3. Pour $a = b = 1, c = 2$ et $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1$, nous obtenons la suite de Jacobsthal de troisième ordre $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$[23] :

$$\begin{cases} J_{n+3}^{(3)} = J_{n+2}^{(3)} + J_{n+1}^{(3)} + 2J_n^{(3)}, \quad n \geq 0. \\ J_0^{(3)} = 0, J_1^{(3)} = J_2^{(3)} = 1, \\ \left\{J_n^{(3)}\right\} = \{0, 1, 1, 2, 5, 9, 18, 37, 73, 146, 293...\}. \end{cases} \tag{1.22}$$

La forme de Binet s'écrit[32] :

$$J_n^{(3)} = \frac{2}{7}2^n + \frac{3+2i\sqrt{3}}{21}w_1^n - \frac{3-2i\sqrt{3}}{21}w_2^n.$$

Avec :
$w_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $w_2 = \overline{w_1}$.

4. Pour $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ et $\alpha = \beta = \gamma = 1$, nous obtenons la suit de Jacobsthal-Padovane $(JP_n)_{n\in\mathbb{N}}$[22] :

$$\begin{cases} JP_n = JP_{n-2} + 2JP_{n-3}, \quad n \geq 3 \\ JP_0 = JP_1 = JP_2 = 1, \\ \{JP_n\} = \{1, 1, 1, 3, 3, 5, 9, 11, 19, 29, 41, ...\}. \end{cases} \tag{1.23}$$

5. Pour $a = 0$, $b = c = 1$ et $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$, nous obtenons la suit de Perin $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$[22] :

$$\begin{cases} R_n = R_{n-2} + R_{n-3}, \quad n \geq 3 \\ R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2, \\ \{R_n\} = \{3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, ...\}. \end{cases} \tag{1.24}$$

6. Pour $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ et $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$, nous obtenons la suit de Pell-Perin $(PR_n)_{n\in\mathbb{N}}$[22] :

$$\begin{cases} PR_n = 2PR_{n-2} + PR_{n-3}, \quad n \geq 3 \\ PR_0 = 3, PR_1 = 0, PR_2 = 2, \\ \{PR_n\} = \{3, 0, 2, 3, 4, 8, 11, 20, 30, 51, 80, ...\}. \end{cases} \tag{1.25}$$

7. Pour $a = 0$, $b = c = 1$ et $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, nous obtenons la suit de Padovan-Perin $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$[22] :

$$\begin{cases} S_n = S_{n-2} + S_{n-3}, \quad n \geq 3 \\ S_0 = S_1 = 0, S_2 = 1, \\ \{S_n\} = \{0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, ...\}. \end{cases} \tag{1.26}$$

1.3 Polynômes orthogonaux

Dans cette section, nous donnons les définitions des polynômes orthogonaux utiles dans cette mémoire.

Théorème 1.3.1 *[6] : Toute relation de récurrences des suites des polynômes $(P_n(x))_{n\in N}$ de deuxième ordre sont des polynômes orthogonaux.*

Théorème 1.3.2 *[6] : Soit $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes normalisée c-à-d :*

$$P_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + a_{n-3}t^{n-3} + ...$$

Alors, $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux normalisée si et seulement s'il existe deux suites de nombres complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_{n+1}(t) = (t-\alpha_n)P_n(t) - \beta_n P_{n-1}(t), \forall n \geq 0 \\ \\ P_{-1}(t) = 0, P_0(t) = 1. \end{cases}$$

Théorème 1.3.3 *[6] : Soit $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme orthogonaux, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$.*
2. *$P_{n+1}(t) = tP_n(t) - \beta_n P_{n-1}(t)$, $P_{-1}(t) = 0$, $P_0(t) = 1$, $\forall n \geq 0$.*

Définition 1.3.1 *[33] : Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\cos(n\theta) = T_n(x), \text{ avec } x = \cos(\theta).$$

Pour tout x dans $[-1,1]$, alors θ appartient à $[0,\Pi]$.
Les premiers termes des polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont donnés par [6] :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2-1, \\ T_3(x) &= 4x^3-3x, \\ T_4(x) &= 8x^4+8x^2+1, \\ T_5(x) &= 16x^5-20x^3+5x, \\ T_6(x) &= 32x^6-48x^4+18x^2-1, \\ T_7(x) &= 64x^7-112x^5+56x^3-7x. \end{aligned}$$

Définition 1.3.2 *[30] : Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall n \geq 1. \\ \\ T_0(x) = 1, T_1(x) = x. \end{cases} \tag{1.27}$$

Définition 1.3.3 *[33] : Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(x), \ \ avec\ x = \cos\theta.$$

Pour tout x dans $[-1,1]$, alors θ appartient à $[0,\Pi]$.

Les premiers termes des polynômes de la deuxième espèce sont donnés par [6] :

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= 1,\\
U_1(x) &= 2x,\\
U_2(x) &= 4x^2-1,\\
U_3(x) &= 8x^3-4x,\\
U_4(x) &= 16x^4-12x^2+1,\\
U_5(x) &= 32x^5-32x^3+6x,\\
U_6(x) &= 64x^6-80x^4+24x^3-1,\\
U_7(x) &= 128x^7-192x^5+80x^3-8x.
\end{aligned}$$

Définition 1.3.4 *[30] : Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} U_n(x) = 2xU_{n-1} + U_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ \\ U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x. \end{cases} \tag{1.28}$$

Définition 1.3.5 *[33] : Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{1}{2})\theta} = V_n(x), avec, x = \cos\theta.$$

Pour tout x dans $[-1,1]$, alors θ appartient à $[0,\Pi]$.

Les premiers termes des polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont donnés par [6] :

$$\begin{aligned}
V_0(x) &= 1,\\
V_1(x) &= 2x-1,\\
V_2(x) &= 4x^2-2x-1,\\
V_3(x) &= 8x^3-4x^2-4x+1,\\
V_4(x) &= 16x^4-8x^3-12x^2+4x+1,\\
V_5(x) &= 32x^5-16x^4-32x^3+12x^2+6x-1,\\
V_6(x) &= 64x^6-32x^5-80x^4+32x^3+24x^2-6x-1,\\
V_7(x) &= 128x^7-64x^6-192x^5+80x^4+80x^3-24x^2-8x+1.
\end{aligned}$$

Définition 1.3.6 *[30] : Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ \\ V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1. \end{cases} \tag{1.29}$$

Définition 1.3.7 *[33] : Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin(\frac{1}{2})\theta} = W_n(x), avec, x = \cos\theta.$$

Pour tout x dans $[-1, 1]$, alors θ appartient à $[0, \Pi]$.

Les premiers termes des polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont donnés par [6] :

$$\begin{aligned}
&W_0(x) = 1,\\
&W_1(x) = 2x + 1,\\
&W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1,\\
&W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1,\\
&W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x - 1,\\
&W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1,\\
&W_6(x) = 64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 32x^3 + 24x^2 + 6x - 1,\\
&W_7(x) = 128x^7 + 64x^6 - 192x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 24x^2 - 8x - 1.
\end{aligned}$$

Définition 1.3.8 *[30] : Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} W_n(x) = 2xW_{n-1} - W_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ \\ W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x + 1. \end{cases} \tag{1.30}$$

Définition 1.3.9 *[28] : Les polynômes de vieta Fibonacci $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} v_n(x) = xv_{n-1}(x) - v_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ \\ \qquad v_0(x) = 0, v_1(x) = 1. \end{cases} \tag{1.31}$$

Définition 1.3.10 *[28] : Les polynômes de vieta Lucas $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_n(x) = xu_{n-1}(x) - u_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ \\ \qquad u_0(x) = 2, u_1(x) = x. \end{cases} \tag{1.32}$$

Définition 1.3.11 *[40] : Les polynômes de vieta Pell $(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} t_n(x) = 2xt_{n-1}(x) - t_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ \\ t_0(x) = 0, t_1(x) = 1. \end{cases} \tag{1.33}$$

Définition 1.3.12 *[40] : Les polynômes de vieta Pell Lucas $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} s_n(x) = 2xs_{n-1}(x) - s_{n-2}(x), \forall n \geq 2. \\ \\ s_0(x) = 2, s_1(x) = 2x. \end{cases} \tag{1.34}$$

1.4 Les fonctions génératrices ordinaires

Définition 1.4.1 *[26] : La fonction génératrice ordinaire (FGO) de la suite :*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \cdots),$$

est définie par :

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{1.35}$$

Exemple 1.4.1

- *La FGO de $(1, 1, 1, \cdots)$ est :*

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \frac{1}{1-t}.$$

- *La FGO de la suite (2^n) est :*

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n) t^n. \\ &= 1 + 2t + 2^2 t^2 + \cdots + 2^n t^n. \end{aligned}$$

.

Le théorème suivant nous permettre d'obtenir la FGO d'une suite obtenue en faisant une opération simple (addition, multiplication, etc...)sur une ou plusieurs suites dont connait les fonctions génératrices ordinaires.

Théorème 1.4.1 *[26] : Soient $A(t)$ la FGO de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $B(t)$ la FGO de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors :*

1. *$A(t)+B(t)$ est la FGO de $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2. *$tA(t)$ est la FGO de $(0,a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\cdots)$.*

3. *$A'(t)$ est la FGO de $(a_1,2a_2,3a_3,\cdots,(n+1)a_{n+1},\cdots)$.*

4. *$A(t)B(t)$ est la FGO de $(a_0,a_0b_1+a_1b_0,a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,\cdots)$.*

5. *$(1-t)A(t)$ est la FGO de $(a_0,a_1-a_0,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1},\cdots)$.*

Preuve.

1. $A(t)+B(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nt^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)t^n$.
2. $tA(t)=t\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+1}=0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n-1}t^n$.
3. $A'(t)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n.$
4.
$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= (a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots)(b_0+b_1t+b_2t^2+\cdots). \\ &= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)t+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)t^2+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb^{n-k}\right)t^n. \end{aligned}$$
5. Si $B(t)$ est la FGO de (1, -1, 0, 0,...), alors $(1-t)A(t)=A(t)(1-t)=A(t)B(t)$. est la FGO de :

$$\left(a_0,\underbrace{a_0(-1)+a_1(1)}_{=a_1-a_0},...,\underbrace{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots}_{=0}+\underbrace{a_{n-1}(-1)+a_n(1)}_{=a_n-a_{n-1}},...\right).$$

■

Théorème 1.4.2 *[5] : Soit la suite$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} G_n=pG_{n-1}+qG_{n-2}, \quad n\geq 2 \\ G_0=\alpha, G_1=\beta. \end{cases} \tag{1.36}$$

Avec $p,q\in\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

Alors la fonction génératrice associée à $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

$$G(t)=\frac{\alpha+(\beta-p\alpha)t}{1-pt-qt^2}. \tag{1.37}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= G_0 + G_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + \sum_{n=2}^{\infty} (pG_{n-1} + qG_{n-2}) t^n \\
&= \alpha + \beta t + pt \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-1} t^{n-1} + qt^2 \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-2} t^{n-2} \\
&= \alpha + \beta t + pt \sum_{n=1}^{\infty} G_n t^n + qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + pt \left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n - \alpha \right) + qt^2 \sum_{n=0}^{\infty} G_n t^n \\
&= \alpha + (\beta - \alpha p)t + ptG(t) + qt^2 G(t).
\end{aligned}$$

Alors :

$$G(t)(1 - pt - qt^2) = \alpha + (\beta - p\alpha)t.$$

D'où :

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)t}{1 - pt - qt^2}.$$

■

D'après le théorème précédant on déduit les fonctions génératrices suivantes :

1. Pour $\alpha = k$, $\beta = q = 1$, $p = k$, nous obtenons la fonction génératrice des nombres de k-Fibonacci :
$$G(t) = \frac{1}{1 - kt - t^2}.$$
2. Pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p = 3k$, $q = -2$, nous obtenons la fonction génératrice de nombre de k-Mersenne :
$$G(t) = \frac{t}{1 - 3kt + 2t^2}.$$
3. Pour $\alpha = 2$, $\beta = p = 3k$, $q = -2$, nous obtenons la fonction génératrice de nombre de k-Mersenne-Lucas :
$$G(t) = \frac{2 - 3kt}{1 - 3kt + 2t^2}.$$

• Pour $k = 1$ dans les relations précédentes on obtient les fonctions génératrices suivantes :

− La fonction génératrice des nombres de Fibonacci est donnée par :

$$G(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}.$$

– La fonction génératrice de Mersenne est donnée par :

$$G(t) = \frac{t}{1-3t+2t^2}.$$

– La fonction génératrice de Mersenne-Lucas est donnée par :

$$G(t) = \frac{2-3t}{1-3t+2t^2}.$$

Théorème 1.4.3 *[5] : Soit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} W_n = aW_{n-1} + bW_{n-2} + cW_{n-3}, \quad n \geq 3 \\ \\ W_0 = \alpha, W_2 = \beta, W_3 = \gamma. \end{cases} \tag{1.38}$$

Avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Alors la fonction génératrice associée à $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - \alpha a)t + (\gamma - \beta a - b\alpha)t^2}{1 - at - bt^2 - ct^3}. \tag{1.39}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n \\
&= W_0 + W_1 t + W_2 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (aW_{n-1} + bW_{n-2} + cW_{n-3}) t^n \\
&= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at \sum_{n=3}^{\infty} W_{n-1} t^{n-1} + bt^2 \sum_{n=3}^{\infty} W_{n-2} t^{n-2} + ct^3 \sum_{n=3}^{\infty} W_{n-3} t^{n-3} \\
&= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at \sum_{n=2}^{\infty} W_n t^n + bt^2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n t^n + ct^3 \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at \left(\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n - \alpha - \beta t \right) + bt^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n - \alpha \right) + ct^3 \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + at \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n - \alpha a t - a\beta t^2 + bt^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n - \alpha b t^2 + ct^3 \sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n \\
&= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + atG(t) - \alpha a t - a\beta t^2 + bt^2 G(t) - \alpha b t^2 + ct^3 G(t).
\end{aligned}$$

Alors :

$$G(t)(1 - at - bt^2 - ct^3) = \alpha + (\beta - \alpha a)t + (\gamma - \beta a - b\alpha)t^2.$$

D'où :

$$G(t) = \frac{\alpha + (\beta - \alpha a)t + (\gamma - \beta a - b\alpha)t^2}{1 - at - bt^2 - ct^3}.$$

■

D'après le théorème précédant on déduit les fonctions génératrices suivantes :

1. Pour $\alpha = \beta = \gamma = 1, a = 0, b = c = 1$, nous obtenons la fonctions génératrice de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$G(t) = \frac{1+t}{1-t^2-t^3}.$$
2. Pour $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1, a = c = 1, b = 0$, nous obtenons la fonctions génératrice de la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$G(t) = \frac{t}{1-t-t^3}.$$
3. Pour $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1, a = b = 1, c = 2$, nous obtenons la fonctions génératrice de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$G(t) = \frac{t}{1-t-t^2-2t^3}.$$
4. Pour $\alpha = \beta = \gamma = 1, a = 0, b = 1, c = 2$, nous obtenons la fonctions génératrice de la suite $(JP_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$G(t) = \frac{1+t}{1-t^2-2t^3}.$$
5. Pour $\alpha = 3, \beta = 0, \gamma = 4, a = 0, b = c = 1$, nous obtenons la fonctions génératrice de

   la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$G(t) = \frac{3-t^2}{1-t^2-t^3}.$$
6. Pour $\alpha = 3, \beta = 0, \gamma = 10, a = 0, b = 2, c = 1$, nous obtenons la fonctions génératrice de

   la suite $(PR_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$G(t) = \frac{3-4t^2}{1-2t^2-t^3}.$$
7. Pour $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1, a = 0, b = c = 1$, nous obtenons la fonctions génératrice de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$G(t) = \frac{t^2}{1-2t^2-t^3}.$$

Théorème 1.4.4 *[5] : Soit la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} P_n(x) = pxP_{n-1}(x) + qP_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \\ \\ P_0(x) = \alpha, P_1(x) = \beta x + \gamma. \end{cases} \tag{1.40}$$

Avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, alors la fonction génératrice associée à $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$G(t) = \frac{\alpha + ((\beta - \alpha p)x + \gamma)t}{1 - pxt - qt^2}. \tag{1.41}$$

Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
G(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} GP_n(x)t^n \\
&= P_0(x) + P_1(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(x)t^n \\
&= \alpha + (\beta x + \gamma)t + px\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n + q\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}(x)t^n \\
&= \alpha + (\beta x + \gamma)t + pxt\sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)t^{n-1} + qt^2\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \\
&= \alpha + (\beta x + \gamma)t + pxt\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \alpha\right) + qt^2\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \\
&= \alpha + (\beta x + \gamma)t + pxt\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - px\alpha t + qt^2\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \\
&= \alpha + ((\beta - \alpha p)x + \gamma)t + pxtG(t) + qt^2G(t),
\end{aligned}$$

alors

$$G(t)(1 - pxt - qt^2) = \alpha + ((\beta - \alpha p)x + \gamma)t.$$

Donc

$$G(t) = \frac{\alpha + ((\beta - \alpha p)x + \gamma)t}{1 - pxt - qt^2}.$$

■

D'après le théorème précédent nous déduit les fonctions génératrices suivants :

1. Pour $\alpha = \beta = 0, \gamma = p = 1, q = -1$, nous obtenons la fonction génératrice associée à $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ [7] :

$$G(t) = \frac{t}{1 - xt + t^2}.$$

2. Pour $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 0, p = 1, q = -1$, nous obtenons la fonction génératrice associée à $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ [7] :

$$G(t) = \frac{2 - xt}{1 - xt + t^2}.$$

3. Pour $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1, p = 2, q = -1$, nous obtenons la fonction génératrice associée à $(t_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ [7] :

$$G(t) = \frac{t}{1 - 2xt + t^2}.$$

4. Pour $\alpha = 2, \beta = \gamma = 0, p = 1, q = -1$, nous obtenons la fonction génératrice associée à $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ [7] :

$$G(t) = \frac{2 - 2xt}{1 - xt + t^2}.$$

5. Pour $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, p = 2, q = -1$, la fonctions génératrice des polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ est[29] :

$$G(t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}.$$

6. Pour $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 0, p = 2, q = -1$, la fonctions génératrice des polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ est[29] :

$$G(t) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}.$$

7. Pour $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1, p = 2, q = -1$, la fonctions génératrice des polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ est[29] :

$$G(t) = \frac{1 - t}{1 - 2xt + t^2}.$$

8. Pour $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1, p = 2, q = -1$, la fonctions génératrice des polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ est[29] :

$$G(t) = \frac{1 + t}{1 - 2xt + t^2}.$$

CHAPITRE 2

FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Dans ce chapitre nous définissons les fonctions symétriques élémentaires, complètes et sommes de puissances et nous rappelons quelques propriétés sur ces fonctions.

2.1 Équations du second degré

Considérons l'équation du second degré : $t^2 = t + 1$.
Posons :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cette matrice est appelée :"matrice compagnon" du polynôme $P(t) = t^2 - t - 1$.
D'autre part, définissons la suite(u_n) par la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

et par les valeurs initiales : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

Donc :

(1)

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1},$$

et :

(2)

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \\ u_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

On recherchons les valeurs propres par à la daigonalisation de la matrice M :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

On à $P_M\ (\lambda)=0$,
Donc les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Les valeurs propres de la matrice M sont donc les racines de l'équation $t^2 = t + 1$.
On recherchons les vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \ (\text{ i} = 1 \text{ ou i} = 2\ );$$

Donc :

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y \end{cases}$$

Ces deux équations équivalent à : $x = \lambda_i y$.
Donc les vecteurs propres de M sont proportionnel à

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que :

$$M\vec{v_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } M^n\vec{v_1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \vec{v_1} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix};$$

$$M\vec{v_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\vec{v_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } M^n\vec{v_2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \vec{v_2} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \end{pmatrix};$$

Pour passer de la vecteurs propres à la base canonique, on utilisent la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour passer de la base canonique à la base vecteurs propres, on utilisera la matrice inverse qui est :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Nous supposerons, pour le moment : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et même, plus précisément : $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

Donc :

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

et :

$$M^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} & -\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}} & -\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

2.2 Fonctions symétriques

Définition 2.2.1 *[9] : Une fonction $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, en n variables est symétriques si pour toutes permutations de l'ensemble d'indice $(1, 2, \cdots, n)$ l'égalité suivante est vérifiée :*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \cdots, x_{s(n)}).$$

Exemple 2.2.1 *:*

• *La fonction $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$ est symétrique, car $f(x_2, x_1) = x_2^3 x_1 + x_1^3 x_2 = f(x_1, x_2)$.*

• *La fonction $h(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2$ n'est pas symétrique, car $h(x_2, x_1) = x_2 x_1 + x_2^2 \neq h(x_1, x_2)$.*

propriété 2.2.1 *: Lorsque les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes, les fonctions symétriques forment une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions à n variables, c'est-à-dire :*

• *La somme de deux fonctions symétriques est encore une fonction symétrique.*

• *Le produit de deux fonctions symétriques est encore une fonction symétrique.*

• *Toute fonction rationnelle symétrique(sur un corps commutatif) est le quotient de deux polynômes symétriques*

2.2.1 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 2.2.2 *[9] : On appelle k-ième fonctions symétriques élémentaires $e_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ la fonction définie par :*

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_n^{i_n}, \quad 0 \leq k \leq n \quad , \tag{2.2}$$

avec $i_1, i_2, \cdots, i_n = 0$ ou 1.

Exemple 2.2.2 *: Pour une équation de degré 2 ($n = 2$, racines :λ_1 et λ_2), on a :*

$$\begin{cases} e_0 &= 1, \\ e_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ e_2 &= \lambda_1 \lambda_2. \end{cases}$$

Exemple 2.2.3 *: Pour une équation de degré 3 ($n = 3$, racines : λ_1, λ_2 et λ_3), on a :*

$$\begin{cases} e_0 &= 1, \\ e_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ e_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ e_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases}$$

Proposition 2.2.1 *[20] : Soit $e_k^{(n)}$ est une fonction symétrique élémentaire, alors :*

1) $e_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)}$.

2) $e_k^{(n)} = \lambda_n e_{k-1}^{(n-1)} + \lambda_{n-1} e_{k-1}^{(n-2)} + \cdots + \lambda_{n-i} e_{k-1}^{(n-i-1)}$.

Proposition 2.2.2 *[27] : On peut également définir les k-ièmes fonctions élémentaires comme les coefficients du développement en série formelle :*

$$E(t) = \sum_{k \geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i t)\,, \tag{2.3}$$

avec $e_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ *s'annule pour* $k > n$ *.*

Preuve. On a :

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_n^{i_n}, \quad avec \quad e_k^{(n)} = 0 \quad si \quad k > n.$$

Montrons que

$$\sum_{k \geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i t)\,.$$

Pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{2} (1 + \lambda_i t) &= (1 + \lambda_1 t)(1 + \lambda_2 t) \\ &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2) t + \lambda_1 \lambda_2 t^2 \\ &= e_0 + e_1 t + e_2 t^2 \\ &= \sum_{k=0}^{2} e_k t^k. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n :

$$\sum_{k \geq 0} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i t).$$

Et montrons que la propriété est vraie pour $n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} e_k t^k = \prod_{i=1}^{n+1} (1 + \lambda_i t).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i t) &= \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i t)(1+\lambda_{n+1}t) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} e_k t^k\right)(1+\lambda_{n+1}t) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_k t^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=1}^{n} e_{k-1} t^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} e_k t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n} e_{k-1} t^{k} \\
&= \sum_{k\geq 0} e_k^{(n)} t^k + \lambda_{n+1}\sum_{k\geq 0} e_{k-1}^{(n)} t^{k} \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(e_k^{(n)} + \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)}\right) t^k \\
&= \sum_{k\geq 0} e_k^{(n+1)} t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} e_k t^k.
\end{aligned}$$

■

2.2.2 Fonctions symétriques complètes

Définition 2.2.3 *[9] : On définit également les fonctions symétriques complètes $h_k(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ des racines de la façon suivante :*

$$h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\cdots\lambda_n^{i_n}. \tag{2.4}$$

avec : $i_1, i_2, \cdots, i_n \geq 0$.

Exemple 2.2.4 *: Pour une équation de degré 2 ($n = 2$, racines : λ_1 et λ_2), on a :*

$$\begin{cases}
h_0 &= 1, \\
h_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\
h_2 &= \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2, \\
h_3 &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_2^2\lambda_1, \\
&\vdots
\end{cases}$$

Exemple 2.2.5 *: Pour une équation de degré 3 ($n = 3$, racines :λ_1, λ_2 et λ_3), on a :*

$$\begin{cases} h_0 &= 1, \\ h_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ h_2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ h_3 &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ &\vdots \end{cases}$$

Proposition 2.2.3 *[20] : Soit $h_k^{(n)}$ est une fonction symétrique complète, alors :*

1) $h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}$.

2) $h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1}^k + \lambda_{n+1}^{k-1} h_1^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-2} h_2^{(n)} + \lambda_{n+1}^{k-3} h_3^{(n)} + \cdots + \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n)} + h_k^{(n)}$.

Proposition 2.2.4 *[27] : On peut également définir les k-ièmes fonctions symétrique complètes comme les coefficients du développement en série formelle :*

$$H(t) = \sum_{k \geq 0} h_k t^k = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i t)}. \tag{2.5}$$

Preuve. On a :

$$\sum_{k \geq 0} h_k^{(n)} = h_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \cdots \lambda_n^{i_n}.$$

Pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} h_k^{(2)} t^k &= h_0^{(2)} + h_1^{(2)} t + h_2^{(2)} t + \cdots \\ &= 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)t + (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)t^2 + \cdots \\ &= (1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \cdots)(1 + \lambda_2 t + \lambda_2^2 t^2 + \cdots) \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} (\lambda_1 t)^k \right) \left(\sum_{k \geq 0} (\lambda_2 t)^k \right) \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2} (1 - \lambda_i t)}. \end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n :

$$\sum_{k \geq 0} h_k^{(n)} t^k = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i t)}.$$

et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$:

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}(1-\lambda_i t)}.$$

On a :

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k &= \sum_{k\geq 0} \left(\lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}\right) t^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k\geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} t^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} t^k \\
&= \lambda_{n+1} \sum_{k\geq 0} h_{k-1}^{(n+1)} t^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} t^k \\
&= \lambda_{n+1} t \sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k + \sum_{k\geq 0} h_k^{(n)} t^k,
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k - \lambda_{n+1} t \sum_{k\geq 0} \lambda_k^{n+1} t^k = \sum_{k\geq 0} h_k^n t^k,$$

alors

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k (1-\lambda_{n+1} t) = \sum_{k\geq 0} \lambda_k^n t^k,$$

donc

$$\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k (1-\lambda_{n+1} t) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\lambda_i t)},$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} h_k^{(n+1)} t^k &= \frac{(1-\lambda_i t)^{-1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-\lambda_i t)} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}(1-\lambda_i t)}.
\end{aligned}$$

■

2.2.3 Fonctions sommes de puissances

Définition 2.2.4 *[38] : Soit k un entier positif, on appelle un k-ième somme de puissance, la fonction symétrique définie par :*

$$P_k^{(n)} = \sum_{i\geq 1} \lambda_i^k. \tag{2.6}$$

Exemple 2.2.6 *: La fonction somme de puissances P_2^3 sur un alphabet à 3 lettres est :*

$$P_2^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Proposition 2.2.5 *[38] Les k -iémes fonctions sommes de puissances peuvent également définit comme les*

coefficients du développement en série de :

$$\begin{aligned} P_k(t) = \sum_{k\geq 1} p_k t^{(k-1)} &= \frac{\partial}{\partial t} \log H(t), \\ &= \sum_{i\geq 1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i t}. \end{aligned}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \log H(t) &= \log \prod_i \frac{1}{1-\lambda_i t} \\ &= \sum_{i\geq 1} \log \frac{1}{1-\lambda_i t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \log H(t) &= \sum_{i\geq 1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i t)} \\ &= \sum_{i\geq 1} \lambda_i \sum_{i\geq 1} (\lambda_i t)^k \\ &= \sum_{i\geq 1} \sum_{k\geq 1} \lambda_i^k t^{k-1} \\ &= \sum_{i\geq 1} P_k t^{k-1}. \end{aligned}$$

■

2.3 Relations entre les fonctions symétriques

Proposition 2.3.1 *[27] : Soient $E(t), H(t)$ et $P(t)$ trois fonctions symétriques, alors :*

1. $H(t).E(-t) = 1.$
2. $P(t) = \dfrac{H'(t)}{H(t)}.$
3. $\displaystyle\prod_{i\geq 1} \frac{1}{(1-\lambda_i t)} = \exp \sum_{n\geq 1} P_n(\lambda) \frac{t^n}{n}.$

Preuve.

1. On a :

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{k\geq 0} e_k t^k = \prod_{i\geq 1} (1+\lambda_i t). \\ E(-t) &= \sum_{k\geq 0} e_k (-t)^k = \prod_{i\geq 1} (1-\lambda_i t). \\ H(t) &= \sum_{k\geq 0} h_k t^k = \prod_{i\geq 1} (1-\lambda_i t)^{-1}. \end{aligned}$$

donc

$$H(t).E(-t) = \left(\prod_{i\geq 1}(1-\lambda_i t)^{-1}\right)\left(\prod_{i\geq 1}(1-\lambda_i t)\right) = 1.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{H'(t)}{H(t)} &= \frac{\partial}{\partial t}\log H(t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\log \prod_{i\geq 1}\frac{1}{(1-\lambda_i t)} \\
&= \sum_{i\geq 1}\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{1}{(1-\lambda_i t)} \\
&= \sum_{i\geq 1}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i t)} \\
&= \sum_{i\geq 1}\lambda_i\sum_{j\geq 0}(\lambda_i t)^j \\
&= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 0}\lambda_i^{j+1}t^j.
\end{aligned}$$

On pose : j = n-1, alors

$$\begin{aligned}
\frac{H'(t)}{H(t)} &= \sum_{i\geq 1}\sum_{n\geq 1}\lambda_i^n t^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1}P_n t^{n-1} \\
&= P(t).
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\log\left(\prod_{i\geq 1}\frac{1}{(1-\lambda_i t)}\right) &= \sum_i \log\left(\frac{1}{(1-\lambda_i t)}\right) \\
&= \sum_{i\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_i^n t^n}{n} \\
&= \sum_{n\geq 1}P_n(\lambda)\frac{t^n}{n}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\prod_{i\geq 1}\frac{1}{(1-\lambda_i t)} = \exp\sum_{n\geq 1}P_n(\lambda)\frac{t^n}{n}. \quad .$$

■

2.4 Quelques propriétés sur les fonctions symétriques

Définition 2.4.1 *[5] :On appelle alphabet tout ensemble de caractère fini.*

Définition 2.4.2 *[9] Considérons l'alphabet $E_2 = \{e_1, e_2\}$, et on définit la fonction symétrique S_n associée par :*

$$S_n(E_2) = S_n(e_1 + e_2) = \frac{e_1^{n+1} - e_2^{n+1}}{e_1 - e_2}, \tag{2.7}$$

avec :

$$\begin{array}{rcccl} S_0(E_2) & = & h_0 & = & 1, \\ S_1(E_2) & = & h_1 & = & e_1 + e_2, \\ S_2(E_2) & = & h_2 & = & e_1^2 + e_1e_2 + e_2^2, \\ & = & \vdots & & \end{array}$$

Définition 2.4.3 *[1] : Soient A et B deux alphabets, on note $S_j(A-B)$ les coefficients de la série rationnelle suivante :*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{\prod_{a\in A}(1-at)} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(A-B)t^j, \tag{2.8}$$

avec $S_j(A-B) = 0$, pour $n < 0$.

Proposition 2.4.1 *[9] : Si A est de cardinal 1 (c'est-à-dire $A = \{x\}$), alors :*

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{(1-xt)} = 1 + \cdots + t^{j-1}S_{j-1}(x-B) + t^j\frac{Sj(x-B)}{(1-xt)}. \tag{2.9}$$

Preuve. D'après (2.4.3) on a :

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-tb)}{(1-xt)} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(x-B)t^j,$$

alors :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=0}^{\infty} S_j(x-B)t^j & = & 1 + \cdots + S_{j-1}(x-B)t^{j-1} + S_j(x-B)t^j + S_{j+1}(x-B)t^{j+1} + \cdots \\ & = & 1 + \cdots + S_{j-1}(x-B)t^{j-1} + t^j(S_j(x-B) + S_{j+1}(x-B)t + \cdots) \\ & = & 1 + \cdots + S_{j-1}(x-B)t^{j-1} + t^j(S_j(x-B) + xS_j(x-B)t + \cdots) \\ & = & 1 + \cdots + S_{j-1}(x-B)t^{j-1} + t^jS_j(x-B)(1 + xt + x^2t^2 + \cdots) \\ & = & 1 + \cdots + t^{j-1}S_{j-1}(x-B) + t^j\dfrac{S_j(x-B)}{(1-xt)}. \end{array}$$

Donc

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bt)}{(1-xt)} = 1 + \cdots + t^{j-1}S_{j-1}(x-B) + t^j\frac{S_j(x-B)}{(1-xt)}.$$

■

Proposition 2.4.2 *[2] : Considérons successivement le cas $A = \phi$ ou $B = \phi$, on obtient la factorisation*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A-B)t^j = \sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)t^j \sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)t^j.$$

Si $B = \phi$, on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)t^j = \frac{1}{\prod\limits_{a\in A}(1-at)}.$$

Si $A = \phi$, on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)t^j = \prod_{b\in B}(1-bt).$$

Alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A)t^j \sum_{j=0}^{\infty} S_j(-B)t^j = \frac{\prod\limits_{b\in B}(1-bt)}{\prod\limits_{a\in A}(1-at)},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(A-B)t^j = \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} S_{j-k}(A)S_k(-B)\right)t^j.$$

CHAPITRE 3

QUELQUES APPLICATIONS SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

Dans ce chapitre nous présentons un théorème basé sur les fonctions symétriques. Ce théorème nous permet d'obtenir des nouvelles fonctions génératrices de produit des nombres de k-Fibonacci, Narayana, k-Mersenne, k-Mersenne-Lucas, Padovan-Perin, Jacobsthal de troisième ordre, Jacobsthal-Padovan . Ainsi que les fonctions génératrices des produits des polynômes de Vieta Fibonacci, Vieta Lucas, Vieta Pell et Vieta Pell Lucas .

3.1 Définitions et notations

Définition 3.1.1 *[9] : Soit f une fonction sur R^n, la différence divisée est définie par :*

$$\partial_{a_i,a_{i+1}}(f) = \frac{f(a_1, ..., a_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, ..., a_n)}{a_i - a_{i+1}}. \tag{3.1}$$

Définition 3.1.2 *[9] : Nous définissons le symétriser $\delta^k_{a_1a_2}$, par :*

$$\delta^k_{a_1a_2} f(a_1) = \frac{a_1^k f(a_1) - a_2^k f(a_2)}{a_1 - a_2}, k \in N. \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.1 *: Si $f(a_1) = a_1$, dans l'équation (3.2), on obtient :*

$$\delta^k_{a_1a_2} f(a_1) = h_k(a_1, a_2).$$

Proposition 3.1.1 *[20] Soit $A = \{a_1, a_2\}$, on définit l'opérateur $\delta^k_{a_1a_2}$, par :*

$$\delta^k_{a_1a_2} f(a_1) = h^n_{k-1}(a_1, a_2)f(a_1) + a^k_2 \partial_{a_1a_2} f(a_1),$$

pour tout $k \in \mathbb{K}$.

3.2 Formule principale

Théorème 3.2.1 *[2] : Etant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{(n)}_n(a_1, a_2, ...a_n)h^{(2)}_{k+n-1}(b_1, b_2)t^n.$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1} S_n(-A)b^n_1 b^n_2 h^{(2)}_{k-n-1}(b_1, b_2)t^n - (b_1b_2t)^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_{n+k+1}(-A)h^{(2)}_n(b_1, b_2)t^{n+1}}{(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)(b_1t)^n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)(b_2t)^n)}. \tag{3.3}$$

Preuve.
Soient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(A)t^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)t^n$, deux séries telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)t^n \sum_{n=0}^{\infty} S_n(-A)t^n = 1.$$

Soit

$$f(b_1) = \sum_{n=0}^{\infty} h^{(n)}_n(a_1, a_2, ...a_n)b^n_1 t^n,$$

alors le premier membre de la formule(3.3), s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta^k_{b_1b_2} f(b_1) &= \delta^k_{b_1b_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} h^{(n)}_n(a_1, a_2, ...a_n)b^n_1 t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h^{(n)}_n(a_1, a_2, ...a_n)h^{(2)}_{k+n-1}(b_1, b_2)t^n. \end{aligned}$$

Posons :
$f(e_1) = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b^n_1 t^n}$,

alors :

$$\begin{aligned}
\partial_{b_1b_2} f(b_1) &= \frac{1}{b_1-b_2}\left(\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n} - \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n}\right) \\
&= \frac{1}{b_1-b_2}\left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}\right) \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\dfrac{b_2^n-b_1^n}{b_1-b_2}t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)} \\
&= -\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)h_{n-1}^{(2)}(b_1,b_2)t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 3.1.1, on déduit :

$$\begin{aligned}
\delta_{b_1b_2}^k f(b_1) &= \frac{h_{k-1}^2(b_1,b_2)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n} - b_2^k\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)h_{n-1}^{(2)}(b_1,b_2)t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)\left[b_2^n h_{k-1}^{(2)}(b_1,b_2) - b_2^k h_{n-1}^{(2)}(b_1,b_2)\right]t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1} S_n(-A)\left[b_2^n h_{k-1}^{(2)}(b_1,b_2) - b_2^k h_{n-1}^{2}(b_1,b_2)\right]t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)} \\
&\quad + \frac{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} S_n(-A)\left[b_2^n h_{k-1}^{(2)}(b_1,b_2) - b_2^k h_{n-1}^{(2)}(b_1,b_2)\right]t^n}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=0}^{k-1} S_n(-A)(b_1^n b_2^n)h_{k-n-1}^{(2)}(b_1,b_2)t^n - (b_1b_2t)^k\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_{n+k+1}(-A)h_n^{(2)}(b_1,b_2)t^{n+1}}{\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_1^n t^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(-A)b_2^n t^n\right)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.1 *[24] :Pour tout entier naturel n on a :*

$$F_{k,-n} = (-1)^{n+1} F_{k,n}$$

3.3 Applications

3.3.1 Le cas de $A = \{a_1, a_2\}$ et $B = \{1, 0\}$:

Lemme 3.3.1 *[18] : Étant donné un alphabet $A = \{a_1, a_2\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2) t^n = \frac{1}{\prod\limits_{a \in A} (1 - at)}. \tag{3.4}$$

D'après le lemme précédent on déduit la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, a_2) t^n = \frac{t}{\prod\limits_{a \in A} (1 - at)}. \tag{3.5}$$

- En remplaçant a_2 par $(-a_2)$dans les équations (3.4)(3.5) en obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, [-a_2]) t^n = \frac{1}{(1 - a_1 t)(1 + a_2 t)}. \tag{3.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, [-a_2]) t^n = \frac{t}{(1 - a_1 t)(1 + a_2 t)}. \tag{3.7}$$

- L'utilisation de la spécialisation suivante $\begin{cases} a_1 - a_2 = 3k \\ a_1 a_2 = -2 \end{cases}$, dans les formule (3.6) et (3.7), nous donne les propositions et les corolaires suivants :

Proposition 3.3.1 *:$\forall n \in N$, la fonction génératrice des nombres de k-Mersenne est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, [-a_2]) t^n = \frac{t}{1 - 3kt + 2t^2}. \tag{3.8}$$

Corollaire 3.3.1 *$\forall n \in N$, on a :*

$$M_{k,n} = h_{n-1}(a_1, [-a_2]).$$

Proposition 3.3.2 *:$\forall n \in N$, la fonction génératrice des nombres de k-Mersenne-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2h_n(a_1, [-a_2]) - 3k h_{n-1}(a_1, [-a_2])) t^n = \frac{2 - 3kt}{1 - 3kt + 2t^2}. \tag{3.9}$$

Corollaire 3.3.2 *$\forall n \in N$, on a :*

$$m_{k,n} = 2h_n(a_1, [-a_2]) - 3kh_{n-1}(a_1, [-a_2]).$$

• Posons $k = 1$ dans les propositions précédentes on obtient les propositions suivantes :

Proposition 3.3.3 *[10] :$\forall n \in N$, la fonction génératrice des nombres de Mersenne est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, [-a_2])t^n = \frac{t}{1 - 3t + 2t^2}. \tag{3.10}$$

Corollaire 3.3.3 *$\forall n \in N$, on a :*

$$M_n = h_{n-1}(a_1, [-a_2]).$$

Proposition 3.3.4 *[37] :$\forall n \in N$, la fonction génératrice des nombres de Mersenne-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2h_n(a_1, [-a_2]) - 3h_{n-1}(a_1, [-a_2]))t^n = \frac{2 - 3t}{1 - 3t + 2t^2}. \tag{3.11}$$

Corollaire 3.3.4 *$\forall n \in N$, on a :*

$$m_n = 2h_n(a_1, [-a_2]) - 3h_{n-1}(a_1, [-a_2]).$$

• D'après les relation (3.6) et(3.7) on obtient le tableau suivant :

$a_1 - a_2$	a_1a_2	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
x	-1	$V_n(x)$	$\frac{t}{1 - xt + t^2}$
x	-1	$u_n(x)$	$\frac{2 - xt}{1 - xt + t^2}$
$2x$	-1	$t_n(x)$	$\frac{t}{1 - 2xt + t^2}$
$2x$	-1	$s_n(x)$	$\frac{1 - 2xt}{1 - 2xt + t^2}$

Table 1 : Fonction génératrices de certains polynômes.

3.3.2 Le cas de $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{1, 0\}$:

Lemme 3.3.2 *[5] : Étant donné un alphabet $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(a_1, a_2, a_3)t^n = \frac{1}{\prod_{a \in A}(1 - at)} \tag{3.12}$$

•D'après le lemme précédent on déduit les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}(a_1, a_2, a_3)t^n = \frac{t}{\prod_{a \in A}(1 - at)} \tag{3.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-2}(a_1,a_2,a_3)t^n = \frac{t^2}{\prod\limits_{a\in A}(1-at)} \tag{3.14}$$

avec :

$$\begin{aligned}\prod_{a\in A}(1-at) &= 1-(a_1+a_2+a_3)t+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)t^2-a_1a_2a_3t^3\\ &= 1-e_1(a_1,a_2,a_3)t+e_2(a_1,a_2,a_3)t^2-e_3(a_1,a_2,a_3)t^3\end{aligned}$$

- D'après les relations (3.12),(3.13) et (3.14) on obtient le tableau suivant[22] :

$e_1(a_1,a_2,a_3)$	$e_2(a_1,a_2,a_3)$	$e_3(a_1,a_2,a_3)$	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
0	-1	1	P_n	$\frac{1+t}{1-t^2-t^3}$
0	-1	1	R_n	$\frac{3-t^2}{1-t^2-t^3}$
0	-2	1	PR_n	$\frac{3-4t^2}{1-2t^2-t^3}$
0	-1	2	JP_n	$\frac{1+t}{1-t^2-2t^3}$
1	0	1	N_n	$\frac{t}{1-t-t^3}$
1	-1	2	$J_n^{(3)}$	$\frac{t}{1-t-t^2-2t^3}$
0	-1	1	S_n	$\frac{t^2}{1-t^2-t^3}$

Table 2 :Fonctions génératrices de certains nombres.

3.3.3 Le cas de $A=\{a_1,a_2\}$ et $B=\{b_1,b_2\}$, $k=1,2$:

Lemme 3.3.3 *[5] : Étant donnés deux alphabets $A=\{a_1,a_2\}$ et $B=\{b_1,b_2\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(2)}(a_1,a_2)h_{n-1}^{(2)}(b_1,b_2)t^n = \frac{(a_1+a_2)t-a_1a_1(b_1+b_2)t^2}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.15}$$

Lemme 3.3.4 *[5] : Étant donnés deux alphabets $A=\{a_1,a_2\}$ et $B=\{b_1,b_2\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(2)}(a_1,a_2)h_n^{(2)}(b_1,b_2)t^n = \frac{1-a_1a_2b_1b_2t^2}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.16}$$

$-$D'après le lemme précédent on déduit la proposition suivante :

Proposition 3.3.5 *[5] : Étant donnés deux alphabets $A=\{a_1,a_2\}$ et $B=\{b_1,b_2\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(a_1,a_2)h_{n-1}^{(2)}(b_1,b_2)t^n = \frac{t-a_1a_2b_1b_2t^3}{\prod\limits_{a\in A}(1-ab_1t)\prod\limits_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.17}$$

$-$ En remplaçant a_2 par $(-a_2)$ et b_2 par $(-b_2)$ dans les relations (3.15)(3.16) et

(3.17) on obtient les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(2)}(a_1,[-a_2])h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{(a_1-a_2)t+a_1a_2(b_1-b_2)t^2}{(1-a_1b_1t)(1+a_1b_2t)(1+a_2b_1t)(1-a_2b_2t)}. \tag{3.18}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(2)}(a_1,[-a_2])h_n^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{1-a_1a_2b_1b_2t^2}{(1-a_1b_1t)(1+a_1b_2t)(1+a_2b_1t)(1-a_2b_2t)}. \tag{3.19}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(a_1,[-a_2])h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{t-a_1a_2b_1b_2t^3}{(1-a_1b_1t)(1+a_1b_2t)(1+a_2b_1t)(1-a_2b_2t)}. \tag{3.20}$$

avec :

$$(1-a_1b_1t)(1+a_1b_2t)(1+a_2b_1t)(1-a_2b_2t)$$

$$= 1-(a_1-a_2)(b_1-b_2)t-[a_1a_2((b_1-b_2)^2+2b_1b_2)+b_1b_2(a_1-a_2)^2]t^2$$

$$-a_1a_2b_1b_2(a_1a_2)(b_1-b_2)t^3+a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2t^4.$$

• D'après les relation (3.18), (3.20) on obtient les tableaux suivants :

a_1-a_2	b_1-b_2	a_1a_2	b_1b_2	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
x	y	-1	-1	$V_n(x)V_n(y)$	$\dfrac{t-t^3}{1-xyt+(y^2+x^2-2)t^2+yt^3+t^4}$
y	x	-1	-1	$V_n(x)v_n(y)$	$\dfrac{t(2y-x-2xt-xt^2)}{1-yxt+(y^2+x^2-2)t^2+xt^3+t^4}$
x	$2y$	-1	-1	$V_n(x)t_n(y)$	$\dfrac{t-t^3}{1-2xyt+(4y^2+x^2-2)t^2+2yt^3+t^4}$
$2y$	x	-1	-1	$V_n(x)s_n(y)$	$\dfrac{2t(2y-x-xt+xt^2)}{1-2yxt+(x^2+4y^2-2)t^2+xt^3+t^4}$
$2x$	$2y$	-1	-1	$t_n(x)t_n(y)$	$\dfrac{t-t^3}{1-4xyt+(4y^2+4x^2-2)t^2+2yt^3+t^4}$
x	$2y$	-1	-1	$t_n(x)v_n(y)$	$\dfrac{t(x-4yt+xt^2)}{1-2xyt+(4y^2+x^2-2)t^2+2yt^3+t^4}$
$2y$	$2x$	-1	-1	$t_n(x)s_n(y)$	$\dfrac{(t(4y-x-4xt+xt^2)}{1-4yxt+(4y^2+4x^2-2)t^2+2xt^3+t^4}$

Table 3 : Fonctions génératrices des produits de certains polynômes.

a_1-a_2	b_1-b_2	a_1a_2	b_1b_2	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
k	$3k$	1	-2	$F_{k,n}M_{k,n}$	$\dfrac{t(1+2t^2)}{1-3k^2t-(7k^2-4)t^2+6kt^3+4t^4}$
k	$3k$	1	-2	$F_{k,n}m_{k,n}$	$\dfrac{2-3k^2t+(4-9k^2)t^2}{1-3k^2t-(7k^2-4)t^2+6kt^3+4t^4}$
$3k$	$3k$	-2	-2	$M_{k,n}m_{k,n}$	$\dfrac{3kt(1-4t+4t^2)}{1-9k^2t+(36k^2-8)t^2+24t^3+16t^4}$

Table 4 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres .

$-$ Pour $k=1$ le tableau ci-dessus devient :

$a_1 - a_2$	$b_1 - b_2$	a_1a_2	b_1b_2	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
1	3	1	-2	F_nM_n	$\dfrac{t+2t^3}{1-3t-3t^2+6t^3+4t^4}$
1	3	1	-2	F_nm_n	$\dfrac{2-3t-5t^2}{1-3t-3t^2+6t^3+4t^4}$
3	3	-2	-2	M_nm_n	$\dfrac{3t-12t^2+12t^3}{1-9t+28t^2+24t^3+16t^4}$

Table 5 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres .

• D'après les relation (3.18), (3.19) et (3.20) on obtient le tableau suivants :

$a_1 - a_2$	$b_1 - b_2$	a_1a_2	b_1b_2	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
k	x	1	-1	$F_{k,n}V_n(x)$	$\dfrac{kt+xt^2}{1-kxt-(x^2-2-k^2)t^2+xt^3+t^4}$
k	$2x$	1	-1	$F_{k,n}t_n(x)$	$\dfrac{kt+2xt^2}{1-kxt-(4x^2-2-k^2)t^2+2xt^3+t^4}$
$3k$	x	-2	-1	$M_{k,n}V_n(x)$	$\dfrac{t-2t^3}{1-3kxt+(2x^2-4+9k^2)t^2+4xt^3+4t^4}$
k	x	1	-1	$F_{k,n}v_n(x)$	$\dfrac{2-kxt+(2-x^2)t^2}{1-2kxt-(4x^2-2-k^2)t^2+2xt^3+t^4}$
k	$2x$	1	-1	$F_{k,n}s_n(x)$	$\dfrac{2-2kxt+(2-4x^2)t^2}{1-kxt-(x^2-2-k^2)t^2+xt^3+t^4}$
$3k$	x	-2	1	$m_{k,n}V_n(x)$	$\dfrac{3kt-4xt^2-6kt^3}{1-3kxt+(2x^2+4-9k^2)t^2-4xt^3+4t^4}$
$3k$	$2x$	-2	1	$m_{k,n}t_n(x)$	$\dfrac{3kt-8xt^2-6kt^3}{1-6kxt+(8x^2+4-9k^2)t^2-8xt^3+4t^4}$
x	$3k$	-1	-2	$M_{k,n}v_n(x)$	$\dfrac{xt-6kt^2+2xt^3}{1-3kxt+(2x^2-4+9k^2)t^2+6kt^3+4t^4}$
$3k$	$2x$	-2	-1	$M_{k,n}t_n(x)$	$\dfrac{t-2t^3}{1-6kxt+(8x^2-4+9k^2)t^2+8xt^3+4t^4}$
$2x$	$3k$	-1	-2	$M_{k,n}s_n(x)$	$\dfrac{2xt-6kt^2+4xt^3}{1-6kxt+(8x^2-4-9k^2)t^2+6kt^3+4t^4}$

Table 6 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes.

− Pour $k = 1$ le tableau ci-dessus devient :

$a_1 - a_2$	$b_1 - b_2$	a_1a_2	b_1b_2	Coefficients de t^n	Fonctions génératrices
1	x	1	-1	$F_nV_n(x)$	$\dfrac{t+xt^2}{1-xt-(x^2-3)t^2+xt^3+t^4}$
1	$2x$	1	-1	$F_nt_n(x)$	$\dfrac{t+2xt^2}{1-xt-(4x^2-3)t^2+2xt^3+t^4}$
3	x	-2	-1	$M_nV_n(x)$	$\dfrac{t-2t^3}{1-3xt+(2x^2+5)t^2+4xt^3+4t^4}$
1	x	1	-1	$F_nv_n(x)$	$\dfrac{2-xt+(2-x^2)t^2}{1-2xt-(4x^2-3)t^2+2xt^3+t^4}$
1	$2x$	1	-1	$F_ns_n(x)$	$\dfrac{2-2t+(2-4x^2)t^2}{1-2xt-(4x^2-3)t^2+2xt^3+t^4}$
3	x	-2	1	$m_nV_n(x)$	$\dfrac{3t-4xt^2-6t^3}{1-3xt+(2x^2-5)t^2-4xt^3+4t^4}$
3	$2x$	-2	1	$m_nt_n(x)$	$\dfrac{3t-8xt^2-6t^3}{1-6xt+(8x^2-5)t^2-8xt^3+4t^4}$
x	3	-1	-2	$M_nv_n(x)$	$\dfrac{xt-6t^2+2xt^3}{1-3xt+(2x^2+5)t^2+6t^3+4t^4}$
3	$2x$	-2	-1	$M_nt_n(x)$	$\dfrac{t-2t^3}{1-6xt+(8x^2+5)t^2+8xt^3+4t^4}$
$2x$	3	-1	-2	$M_ns_n(x)$	$\dfrac{2xt-6t^2+4xt^3}{1-6xt+(8x^2+5)t^2+6t^3+4t^4}$

Table 7 : Fonctions génératrices des produits de certains nombres et polynômes.

3.3.4 Le cas de $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, $k = 1, 2$:

Lemme 3.3.5 *[17] : Étant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_n^{(2)}(b_1,b_2)t^n = \frac{1 - b_1b_2e_2(a_1,a_2,a_3)t^2 + b_1b_2(b_1+b_2)e_3(a_1,a_2,a_3)t^3}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.21}$$

• D'après le lemme précédent on déduit la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_{n-1}^{(2)}(b_1,b_2)t^n = \frac{t - b_1b_2e_2(a_1,a_2,a_3)t^3 + b_1b_2(b_1+b_2)e_3(a_1,a_2,a_3)t^4}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.22}$$

Lemme 3.3.6 *[4] : Étant donnés deux alphabets $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2\}$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_{n+1}^{(2)}(b_1,b_2)t^n = \frac{(b_1+b_2) - b_1b_2e_1(a_1,a_2,a_3)t + b_1^2b_2^2e_3(a_1,a_2,a_3)t^3}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.23}$$

• D'aprés (3.23)on déduit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_n^{(2)}(b_1,b_2)t^n = \frac{(b_1+b_2)t - b_1b_2e_1(a_1,a_2,a_3)t^2 + b_1^2b_2^2e_3(a_1,a_2,a_3)t^4}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1-ab_2t)}. \tag{3.24}$$

En remplaçant b_2 par$(-b_2)$dans (3.21)et(3.22) et (3.24) on obtient respectivement les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_n^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{1+(b_1b_2)e_2(a_1,a_2,a_3)t^2 - b_1b_2(b_1-b_2)e_3(a_1,a_2,a_3)t^3}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1+ab_2t)}. \tag{3.25}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{t+(b_1b_2)e_2(a_1,a_2,a_3)t^3 - b_1b_2(b_1-b_2)e_3(a_1,a_2,a_3)t^4}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1+ab_2t)}. \tag{3.26}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_n^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{(b_1-b_2)t+b_1b_2e_1(a_1,a_2,a_3)t^2 + b_1^2b_2^2e_3(a_1,a_2,a_3)t^4}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1+ab_2t)}. \tag{3.27}$$

avec :

$$\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1+ab_2t).$$

$$\begin{aligned}
= \;& 1-(b_1-b_2)e_1(a_1,a_2,a_3)t \\
& + \left(e_2(a_1,a_2,a_3)(b_1-b_2)^2 - b_1b_2\left((e_1(a_1,a_2,a_3))^2 - 2e_2(a_1,a_2,a_3)\right)\right)t^2 \\
& - \left(e_3(a_1,a_2,a_3)(b_1-b_2)^3 - b_1b_2(b_1-b_2)(e_2(a_1,a_2,a_3)e_1(a_1,a_2,a_3) - 3e_3(a_1,a_2,a_3))\right)t^3 \\
& + \left(-b_1b_2(b_1-b_2)^2e_3(a_1,a_2,a_3)e_1(a_1,a_2,a_3) + b_1^2b_2^2\left((e_2(a_1,a_2,a_3))^2 - 2e_3(a_1,a_2,a_3)e_1(a_1,a_2,a_3)\right)\right)t^4 \\
& -b_1^2b_2^2(b_1-b_2)e_3(a_1,a_2,a_3)e_2(a_1,a_2,a_3)t^5 - b_1^3b_2^3(e_3(a_1,a_2,a_3))^2t^6.
\end{aligned}$$

- De la spécialisation suivante $\begin{cases} e_1(a_1,a_2,a_3)=1 \\ e_2(a_1,a_2,a_3)=0 \\ e_3(a_1,a_2,a_3)=1 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} b_1-b_2=3k \\ b_1b_2=-2 \end{cases}$, dans (3.26), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{t+6kt^4}{1-3kt+2t^2-(27k^3-18)t^3+(18k^2-8)t^4+8t^6}. \tag{3.28}$$

Proposition 3.3.6 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Narayana et les nombres de k-Mersenne est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_nM_{k,n}t^n = \frac{t+6kt^4}{1-3kt+2t^2-(27k^3-18)t^3+(18k^2-8)t^4+8t^6}. \tag{3.29}$$

Corollaire 3.3.5 *$\forall n \in N$, on a :*

$$N_nM_{k,n} = h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3).$$

− Posons $k=1$ dans(3.29) on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.7 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Narayana et les nombres de Mersenne est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n M_n t^n = \frac{t+6t^4}{1-3t+2t^2-9t^3+10t^4+8t^6}.. \tag{3.30}$$

Corollaire 3.3.6 $\forall n \in N$, *on a*

$$N_n M_n = h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3).$$

• Les spécialisations suivantes $\begin{cases} e_1(a_1,a_2,a_3)=1 \\ e_2(a_1,a_2,a_3)=0 \\ e_3(a_1,a_2,a_3)=1 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} b_1-b_2=3k \\ b_1b_2=-2 \end{cases}$ dans (3.27), nous donnent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)h_n^{(2)}(b_1,[-b_2])t^n = \frac{3kt-2t^2+4t^4}{1-3kt+2t^2-(27k^3-18)t^3+(18k^2-8)t^4+8t^6}. \tag{3.31}$$

- En multipliant la relation(3.31) par 2 et la relation (3.28) par par $(-3k)$, puis en additionnant les deux résultats , on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.8 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Narayana et les nombres de k-Mersenne-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n m_{k,n} t^n = \frac{3kt-4t^2+(8-18k^2)t^4}{1-3kt+2t^2-(27k^3-18)t^3+(18k^2-8)t^4+8t^6}. \tag{3.32}$$

Corollaire 3.3.7 $\forall n \in N$, *on a*

$$N_n m_{k,n} = h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)(2h_n^{(2)}(b_1,[-b_2]) - 3kh_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])).$$

$-$ Posons $k=1$ dans(3.32) on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.9 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Narayana et les nombres de Mersenne-Lucas est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n m_n t^n = \frac{3t-4t^2-10t^4}{1-3t+2t^2-9t^3+10t^4+8t^6}. \tag{3.33}$$

Corollaire 3.3.8 $\forall n \in N$, *on a*

$$N_n m_n = h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)(2h_n^{(2)}(b_1,[-b_2]) - 3h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2]))$$

Théorème 3.3.1 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice de produit des nombres des k-Mersenne et les nombres de Padovan-Perin est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n} S_n t^n = \frac{3kt^2+4t^5}{1-(9k^2-4)t^2-3k(9k^2-6)t^3+4t^4+12kt^5+8t^6}. \tag{3.34}$$

Preuve. : On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}S_n t_n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(h^{(3)}_{n-2}(a_1,a_2,a_3)h^{(2)}_{n-1}(b_1,[-b_2])\right)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h^{(3)}_{n-2}(a_1,a_2,a_3)\frac{b_1^n-[-b_2^n]}{b_1+b_2}t^n \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} h^{(3)}_{n-2}(a_1,a_2,a_3)(b_1t)^n-\sum_{n=0}^{\infty} h^{(3)}_{n-2}(a_1,a_2,a_3)(-b_2t)^n\right] \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\frac{b_1^2t^2}{1-e_1(a_1,a_2,a_3)b_1t+e_2(a_1,a_2,a_3)b_1^2t^2-e_3(a_1,a_2,a_3)b_1^3t^3} \\
&\quad -\frac{1}{b_1+b_2}\frac{b_2^2t^2}{1+e_1(a_1,a_2,a_3)b_2t+e_2(a_1,a_2,a_3)b_2^2t^2+e_3(a_1,a_2,a_3)b_2^3t^3} \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left[\frac{b_1^2t^2}{1-b_1^2t^2-b_1^3t^3}-\frac{b_2^2t^2}{1-b_2^2t^2+b_2^3t^3}\right] \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\left[\frac{b_1^2t^2(1-b_2^2t^2+b_2^3t^3)-b_2^2t^2(1-b_1^2t^2-b_1^3t^3)}{(1-b_1^2t^2-b_1^3t^3)(1-b_2^2t^2+b_2^3t^3)}\right] \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\frac{b_1^2t^2-b_1^2b_2^2t^4+b_1^2b_2^3t^5-b_2^2t^2b_1^2b_2^2t^4+b_2^2b_1^3t^5}{(1-b_1^2t^2-b_1^3t^3)(1-b_2^2t^2+b_2^3t^3)} \\
&= \frac{1}{b_1+b_2}\frac{(b_1^2-b_2^2)t^2+b_1^2b_2^2(b_1+b_2)t^5}{1-(b_1^2+b_2^2)t^2-(b_1^3-b_2^3)t^3+b_1^2b_2^2t^4+b_1^2b_2^2(b_1-b_2)t^5-b_1^3b_2^3t^6} \\
&= \frac{3kt^2+4t^5}{1-(9k^2-4)t^2-3k(9k^2-6)t^3+4t^4+12kt^5+8t^6}.
\end{aligned}$$

■

− Pour $k=1$, le théorème précédent nous donne la proposition suivante :

Proposition 3.3.10 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Mersenne et les nombres de Padovan-Perin est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_nS_nt^n = \frac{3t^2+4t^5}{1-5t^2-9t^3+4t^4+12t^5+8t^6}. \tag{3.35}$$

- En utilisant les spécialisations suivantes $\begin{cases} e_1(a_1,a_2,a_3)=1 \\ e_2(a_1,a_2,a_3)=-1 \\ e_3(a_1,a_2,a_3)=2 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} b_1-b_2=3k \\ b_1b_2=-2 \end{cases}$

dans (3.26), on obtient la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{(3)}_{n-1}(a_1,a_2,a_3)h^{(2)}_{n-1}(b_1,[-b_2])t^n$$

$$= \frac{t+2t^3+12kt^4}{1-3kt+(-9k^2+6)t^2-(54k^3-42k)t^3+(36k^2-12)t^4+24kt^5+32t^6}.$$

Proposition 3.3.11 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de k-Mersennet et les nombres de Jacobsthal de troisième d'ordre est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n} J_n t^n = \frac{t + 2t^3 + 12kt^4}{1 - 3kt + (-9k^2 + 6)t^2 - (54k^3 - 42k)t^3 + (36k^2 - 12)t^4 + 24kt^5 + 32t^6}. \tag{3.36}$$

− Posons $k = 1$, dans (3.36) on obtient la fonction génératrice du produit des nombres de Mersenne et les nombres Jacobsthal de troisième d'ordre telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n J_n t^n = \frac{t + 2t^3 + 12t^4}{1 - 3t - 3t^2 - 12t^3 + 24t^4 + 24kt^5 + 32t^6}. \tag{3.37}$$

• En utilisant les spécialisations suivantes $\begin{cases} e_1(a_1, a_2, a_3) = 1 \\ e_2(a_1, a_2, a_3) = -1 \\ e_3(a_1, a_2, a_3) = 2 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} b_1 - b_2 = k \\ b_1 b_2 = 1 \end{cases}$

dans (3.25) et (3.27), on obtient les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1, a_2, a_3) h_{n-1}^{(2)}(b_1, [-b_2]) t^n. \tag{3.38}$$

$$= \frac{1 - t^2 - 2kt^3}{1 - kt - (k^2 + 4)t^2 - (2k^3 + 7k)t^3 - (2k^2 + 3)t^4 + 2kt^5 - 4t^6}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1, a_2, a_3) h_{n-1}^{(2)}(b_1, [-b_2]) t^n. \tag{3.39}$$

$$= \frac{kt + t^2 + 2t^4}{1 - kt - (k^2 + 4)t^2 - (2k^3 + 7k)t^3 - (2k^2 + 3)t^4 + 2kt^5 - 4t^6}.$$

En additionnant les deux relations précédentes on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.12 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de k-Fibonacci et les nombres de Jacobsthal Padovan est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} JP_n t^n = \frac{1 + kt - 2kt^3 + 2t^4}{1 - kt - (k^2 + 4)t^2 - (2k^3 + 7k)t^3 - (2k^2 + 3)t^4 + 2kt^5 - 4t^6}. \tag{3.40}$$

Proposition 3.3.13 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de k-Fibonacci d'indice négatif et les nombres de Jacobsthal Padovan est donnée :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,-n} JP_n t^n = \frac{-1 + kt - 2kt^3 - 2t^4}{1 + kt - (k^2 + 4)t^2 + (2k^3 + 7k)t^3 - (2k^2 + 3)t^4 - 2kt^5 - 4t^6}. \tag{3.41}$$

− Posons $k = 1$, dans (3.40) et (3.41) on obtient les propositions suivantes :

Proposition 3.3.14 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Fibonacci et les nombres de Jacobsthal Padovan est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n JP_n t^n = \frac{1 + t - 2t^3 + 2t^4}{1 - t - 5t^2 - 9t^3 - 5t^4 + 2t^5 - 4t^6}. \tag{3.42}$$

Proposition 3.3.15 *$\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Fibonacci d'indice négatif et les nombres de Jacobsthal Padovan est donnée :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{-n} JP_n t^n = \frac{-1+t-2t^3-2t^4}{1-t-5t^2+9t^3-5t^4-2t^5-4t^6}. \tag{3.43}$$

- En utilisant les spécialisations suivantes $\begin{cases} e_1(a_1,a_2,a_3)=1 \\ e_2(a_1,a_2,a_3)=0 \\ e_3(a_1,a_2,a_3)=1 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} b_1-b_2=3k \\ b_1b_2=-32 \end{cases}$

, dans (3.27) et (3.26) on obtient, respectivement les fonctions génératrices suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3) h_n^{(2)}(b_1,[-b_2]) t^n. \tag{3.44}$$

$$= \frac{3kt-32t^2+1024t^4}{1-3kt+32t^2-(27k^3-288k)t^3+(288k^2-2048)t^4+32768t^5}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3) h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2]) t^n. \tag{3.45}$$

$$= \frac{t+96kt^4}{1-3kt+32t^2-(27k^3-288k)t^3+(288k^2-2048)t^4+32768t^5}.$$

En multipliant la relation (3.44) par 2 et la relation (3.45) par$(-3k)$, puis en additionnant les deux résultats, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.3.16 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de k-Mersenne-Lucas et les nombres de Narayana est donnée :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n m_{k,n} t^n = \frac{3kt-64t^2+(2048-288k^2)t^4}{1-3kt+32t^2-(27k^3-288k)t^3+(288k^2-2048)t^4+32768t^5}. \tag{3.46}$$

$-$ Posons $k=1$, la proposition précédente on obtient la relation suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n m_n t^n = \frac{-7t+96t^2-2880t^4}{1-3t+32t^2+261t^3-1760t^4+32768t^5}.$$

Qui représente la fonction génératrice du produit des nombres de k-Mersenne-Lucas et les nombres de Narayana

Théorème 3.3.2 *: $\forall n \in N$, la fonction génératrice de produit des nombres des k-Mersenne et les nombres de Padovan est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n M_{k,n} t^n = \frac{(1+3kt+9k^2t^2+6kt^3)t}{1-(9k^2-4)t^2-3k(9k^2-6)t^3+4t^4+12kt^5+8t^6}. \tag{3.47}$$

Preuve. :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2]) \left(h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3) + h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3) \right) t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3)\frac{b_1^n-(-b_2^n)}{b_1+b_2}t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)t^n$$

$$+\frac{1}{b_1+b_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3)(b_1t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(3)}(a_1,a_2,a_3)(-b_2t)^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)t^n + \frac{1}{b_1+b_2}\left[\frac{1}{1-b_1^2t^2-b_1^3t^3} - \frac{1}{1-b_2^2t^2+b_2^3t^3}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)t^n + \frac{1}{b_1+b_2}\left[\frac{(b_1^2-b_2^2)t^2+(b_1^3+b_2^3)t^3}{(1-b_1^2t^2-b_1^3t^3)(1-b_2^2t^2+b_2^3t^3)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_{n-1}^{(2)}(b_1,[-b_2])h_{n-1}^{(3)}(a_1,a_2,a_3)t^n$$

$$+\frac{(b_1-b_2)t^2+(b_1^2+b_2^2-b_1b_2)t^3}{1-b_1^3b_2^3t^6+b_1^2b_2^2(b_1-b_2)t^5+b_1^2b_2^2t^4-(b_1-b_2)(b_1^2+b_2^2+b_1b_2)t^3-(b_1^2+b_2^2)t^2}$$

$$= \frac{(t+b_1b_2e_2(a_1,a_2,a_3)t^3-b_1b_2(b_1-b_2)e_3(a_1,a_2,a_3)t^4}{\prod_{a\in A}(1-ab_1t)\prod_{a\in A}(1+ab_2t)}$$

$$+\frac{(b_1-b_2)t^2+[(b_1-b_2)^2+b_1b_2]t^3}{1-b_1^3b_2^3t^6+b_1^2b_2^2(b_1-b_2)t^5+b_1^2b_2^2t^4-(b_1-b_2)[(b_1-b_2)^2+3b_1b_2]t^3-[(b_1-b_2)^2+2b_1b_2]t^2}$$

$$= \frac{t+2t^3+6kt^4}{1-(9k^2-4)t^2-3k(9k^2-6)t^3+4t^4+12kt^5+8t^6}$$

$$+\frac{3kt^2+(9k^2-2)t^3}{1-(9k^2-4)t^2-3k(9k^2-6)t^3+4t^4+12kt^5+8t^6}$$

$$= \frac{(1+3kt+9k^2t^2+6kt^3)t}{1-(9k^2-4)t^2-3k(9k^2-6)t^3+4t^4+12kt^5+8t^6}$$

■

− Pour $k=1$, dans (3.47)on déduit la proposition suivante :

Proposition 3.3.17 *:$\forall n \in N$, la fonction génératrice du produit des nombres de Mersenne et les nombres de Padovan est donnée :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_nM_nt^n = \frac{(1+3t+9t^2+6t^3)t}{1-5t^2-9t^3+4t^4+12t^5+8t^6}.$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons utilisé le concept des fonctions symétriques pour déterminé des nouvelles fonctions génératrices ordinaires des produits de certains nombres et polynômes orthogonaux. Principalement nous avons obtenu des résultats intéressants concernant les fonctions génératrices . Comme premier résultat, nous avons déterminé les fonctions génératrices des produits des nombres de k-Mersenne, k-Mersenne -Lucas, Padovan. Comme deuxième résultat nous avons obtenu les fonctions génératrices des produits de polynomes de Vieta Fibonacci, Vieta Lucas, Vieta -Pell et Vieta Pell -Lucas . Le dernier résultat de ce mémoire est concernant sur les fonctions génératrices des produits des nombres de Narayana, Padovan -Perin, Jacobsthal -Padovan et Jacobsthal de troisième ordres.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abderrezzak, Généralisation de la transformation d'Euler d'une série formelle, Adv. Math., 103 (1994), 180-195.

[2] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, Ae- quationes Math., 49 (1995), 36-46.

[3] A. Abderrezzak, M. Kerada, A. Boussayoud, Generalization of Some Hadamard Product, Commun. Appl. Anal. 20, 301-306, 2016.

[4] Kh. Boubellouta, M. Kerada, Some Identities and Generating Functions for Padovan Numbers,

[5] Kh. Boubellouta , Fonctions symétriques et leurs applications à certains nombres et polynômes, (Doctoral dissertation). Mohamed Seddik Ben Yahia University , Jijel, Algeria. 2020.

[6] G. Brian, The classical orthogonal polynomials, University of liverpool, Word Scientific, 177P, 2016.

[7] S. Boughabaa, N.Sabaa, A.Boussayouda, Construction of Generating Functions of theProducts of Vieta Polynomials with Gaussian Numbers and Polynomials, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 12 (2021) No. 1, 649-668f.

[8] S. Boughaba , A. Boussayoud , On Some Identities And Generating Function of Both k-Jacobsthal Numbers and Symmetric Functions in Several Variables, Konuralp Journal of Mathematics. 7(2), 235-242, 2019.

[9] M.Boulyere M.Ghedjan, les fonctions symétrique pour la généralisation des polynômes orthogonaux,Université de Jijel, 2015.

[10] A. Boussayoud1, M. Chelgham and S. Boughaba, On Some Identities and Generating Functions for Mersenne Numbers and Polynomials, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2018, 6 (3), 93-97.

[11] A. Boussayoud, A. Abderrezzak, M. Kerada, Some Applications of Symmetric Functions, Integers. 15,$A \neq 48$, 1–7, 2015.

[12] A. Boussayoud, L'action de l'opérateur $\delta_{e_1 e_2}^k$ sur la Série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n(A) e_1^n z^n$; (Doctoral dissertation), Mohamed Seddik Ben Yahia University, Jijel, Algeria., 2017.

[13] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A Generalization of Some Orthogonal Polynomials, Springer Proc. Math. Stat. 41, 229-235, 2013.

[14] A. Boussayoud, M. Kerada, Symmetric and Generating Functions, Int. Electron. J. Pure Appl. Math. 7, 195–203, 2014.

[15] A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali , W. Rouibah, Some Applications on Generating Functions, J. Concr. Appl. Math. 12, 321-330, 2014

[16] A. Boussayoud, M. Boulyer, M. Kerada, A Simple and Accurate Method for Determination of Some Generalized Sequence of Numbers, Int. J. Pure Appl. Math. 108, 503-511, 2016.

[17] A. Boussayoud and N. Harrouche, Complete Symmetric Functions and k- Fibonacci Numbers, Communications in Applied Analysis. 20, 457-465, 2016.

[18] A. Boussayoud, M. Kerada and Nesrine Harrouche, On the k -Lucas Numbers and Lucas Polynomials, Turkish Journal of Analysis and Number Theory. 5 (4), 121-125, 2017.

[19] P. Catarino, On Some Identities for k-Fibonacci Sequence, Int. J. Contemp. Math. Sciences. 9 (1), 37 - 42, 2014.

[20] JP . Chabert, Equations Algébriques et Fonctions Symétriques, P. 1-36.

[21] M.Chelgham1 and A.Boussayoud2, On the k-Mersenne–Lucas numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 27, 2021, No. 1, 7–13.

[22] M.Chelgham1, A.Boussayoud1, Costruction of Symmetric Functions of Generalized Teibonacci Numbers, Journal of Science and Arts Year 20, No. 1(50), pp. 65-74, 2020.

[23] Ch. Cook, M.R. Bacon, Some Identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers Satisfying higher Order Recurrence Relations, Ann. Math. Inform. 41, 27-39. 2013.

[24] S.Falcon, On the complex k-Fibonacci numbers, Cogent Math. 3 (2016), 1-9.

[25] S. Falcon. A. Plaza, On the Fibonacci k–numbers. Chaos. Solit. Fract. 32 (5) 1615–624, 2007.

[26] S.Fiorini, MATH-F-307 Mathématiques discrètes,2012.

[27] D.Foata et GN.Han, Principe de combinatoire classique, Université Louis Pasteur, Strasbourg Département de mathématique,2008.

[28] A. F. Horadam, Vieta Polynomials, Fibonacci Q. 40 (2002) 223–232.

[29] T. Kim, D. S. Kim, D. V. Dolgy and J. Kwon, Sums of Finite Products of Chebyshev Polynomials of the Third and Fourth kinds, Kim et al. Advances in Diference Equations. 2018.

[30] T. kim, Dv. Dolgy, and J. kwon, sums of finite products of polynômials of the third and fourt kinds,kim et al.Advances in Differences equation (2018), 283 : 2018.

[31] A. C. G. Lomelí and S. H. Hernández, Repdigits as Sums of Two Padovan Numbers, Journal of Integer Sequences. 22, 2019.

[32] G. Morales, On the Third-order Jacobsthal and Third-order Jacobsthal-Lucas Sequences and Their matrix Representations, Jun 2018.

[33] J. C. Masan and D. C. Handscanb, chebychev polyômials, CRS press, 2003.

[34] L.Moura, Recurrence Relations, Winter,2010.

[35] J.L. Ramírez, V. F. Sirvent, A Note on the k-Narayana Sequences, Ann. Math. Inform. 45, 91-105, 2015.

[36] S.Rauch, Séries formelles et applications, Ter de M1 encadré par Olivier Bouillot,2012.

[37] N.Saba, A.Boussayoud, Kanuri, K.V.V. (2021). Mersenne Lucas numbers and complete homogeneous symmetric functions. Journal of Mathematics and Computer Science, 24(2), 127–139.

[38] R. Sahali, W. Rouibah, Certaines Applications sur les Fonctions Symétriques, Mémoire de Master, Université de Jijel, 2013.

[39] Y. Soykan, I. Okumus, F. Tasdemir, On Generalized Tribonacci Sedenions, https ://arxiv.org/pdf/1901.05312.pdf, 2019.

[40] D. Tasci, F. Yalcin, Vieta-Pell and Vieta-Pell-Lucas polynomials, Adv. in Difference Equ, 2013

[41] Y. Ta¸syurdu, A. Akpinar, Padovan and Pell-Padovan Octonions, Turk. J. Math. Comput. Sci.11(Special Issue), 114–122, 2019.

[42] N. Yilmaz, N. Taskara, On the Negatively Subscriped Padovan and Perrin Matrix Sequences, Communications in Mathematics and Applications. 5 (2), 59-72, 2014