



N° Réf :

Centre Universitaire
Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de
Master**

**En : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées**

Broadcast efficace dans les cycles

Préparé par :

Souyadi khouloud

Ourzeddine ranya

Soutenue devant le jury :

M.Khalfaoui

M.A.A

C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Président

I.Boufelgha

M.A.A

C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Rapporteur

M.Azi

M.A.A

C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila

Examineur

Année universitaire : 2020/2021

DÉDICACE

Je dédie entièrement ce travail à mon père et à ma mère, mes piliers, mes exemples, mes premiers supporteurs et ma plus grande force. Merci pour votre présence, votre soutien, votre aide financière, et surtout votre amour, merci de n'avoir jamais douté de moi. Tout ce que j'espère, c'est que vous soyez fiers de moi aujourd'hui. que dieu les accueille dans son vaste paradis.

À les personnes la plus idéale qui fut dans ce monde je dédie ce travail, c'est vrai qu'ils ne sont pas avec nous pour récolter le fruit de ses sacrifices, mais, ils restent toujours les plus présente, à l'âme de ma grand-mère FATIMA et mon grand-père HOUCINE qui ont fait de moi ce que je suis.

À mes chers frères YASSER , WALID et YOUSSEF, qui font de mon univers une merveille, je leurs souhaite beaucoup de bonheur et de réussite.

A tout ma famille, qui porte le nom OURZEDDINE A tous les amis que j'ai connu jusqu'a maintenant ,Sans oublier mon binôme Khouloud . Je dédie ce travail a tous ceux qui on participer a ma réussite .

♡ RANYA ♡

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail

Aux deux personnes les plus nobles et les plus chères au monde :

Mon cher Père et Ma très chère Mère qui ont sacrifié

*Les plus plus belles années de leurs vies pour me voir un jour réussir, et qui m'ont
soutenues jusqu'à la fin . A mes sœurs et mes frères qui n'ont jamais cessé
de m'encourager et aider.*

*A tous mes chères amis sans exception pour leur amitié
leurs encouragement, leur soutien.*

A mes collègues

*A tous ceux qui nous ont soutenu de près ou de loin
Merci d'être toujours là moi.*

♡ KHOULOUUD ♡

REMERCIEMENTS

*Tout d'abord nous tenons à remercier **ALLAH** le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme notre formation et pourvoir réaliser ce travail de recherche.*

*Mes remerciements s'adressent particulièrement au Mr **BOUFELGHA Ibrahim** , pour son encadrement de qualité, sa motivation professionnelle, ses conseils et critiques constructives, ses corrections, sa gentillesse et sa patience ainsi pour le temps qu'il a consacré à la réalisation de ce travail.*

*Nous exprimons aussi nos vifs remerciements aux membres des jury, Mr **Mohammed KHALFAOUI** et Mr **Mourad AZI** pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs remarques.*

Nous ne serons jamais assez remercions la lumière de notre vie , nos parents , qui par leurs prière et leurs encouragement , Nous avons pu surmonter tous les obstacles.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences la réalisation de ce mémoire.

KOULOUD et RANYA

Table des matières

1 Terminologie et définitions générales	3
1.1 Introduction	3
1.2 Terminologie et notions :	3
1.3 Représentation d'un graphe	6
1.3.1 Représentation graphique	6
1.3.2 Représentation matricielle	6
1.4 Quelques classes de graphes	7
1.5 Quelques paramètres d un graphe	16
2 Broadcasts et domination	19
2.1 Introduction	19
2.2 Domination	19
2.3 Quelques invariants de domination	20
2.3.1 Domination double	20
2.3.2 Domination Total	21
2.3.3 Indépendance	21
2.3.4 Irrédondance	22
2.3.5 Packing	22
2.3.6 Efficacité	22
2.3.7 Valeur exact sur γ	23
2.4 Borne sur γ	23
2.5 Complexité du problème de domination	24
2.6 Notions fondamentales sur la fonction broadcast	25
2.7 Broadcast dans les graphes	28
2.7.1 Résultats fondamentaux	28
2.7.2 Classes de broadcasts dominants	33
2.7.3 Autres invariants broadcast	35
2.8 Complexité du problème de broadcast domination	41

3 Broadcast efficaces dans les cycles	42
3.1 Différents invariants de broadcast et domination dans la classe des chaîne et cycles	43
3.2 Broadcast efficace dans les cycles	44
3.3 Conclusion générale	55

Table des figures

1.1	(a) Graphe simple avec sommet isolé (b) graphe simple	4
1.2	Graphe non orienté	4
1.3	(a) Un graphe connexe-(b) Un graphe non connexe	5
1.4	(a) Représentation plane (b) Représentation non plane	6
1.5	Chaîne P_4	7
1.6	Cycle C_4	8
1.7	L'étoile $K_{1,8}$	8
1.8	Graphe complet K_5	9
1.9	(a) Un graphe biparti $K_{3,4}$ -(b) Un graphe biparti complet $K_{3,4}$	9
1.10	Arbre	10
1.11	Arbre binaire	10
1.12	Arbre binaire complet	11
1.13	Arbre n-aire	11
1.14	Arbre 4-aire complet de profondeur 2	12
1.15	Forêt	12
1.16	Graphe triangulé	12
1.17	Sommet completé	13
1.18	Schéma d'ordre d'élimination parfait	13
1.19	Schéma d'ordre d'élimination simplicial	14
1.20	$K = \{v_1, v_2, v_5\}$ une clique	15
1.21	(a) Stable maximal (b) Stable maximum	16
1.22	Le graphe G et son complémentaire \overline{G}	16
1.23	Le graphe G	17
1.24	Graphe de nombre chromatique $\chi(G) = 3$	18
2.1	S est un ensemble dominant minimal et un indépendant maximal	20
2.2	u est un f -voisin de v , mais que v n'est pas un f -voisin de u	26
2.3	Broadcast dominant sur le graphe G	26

2.4	(a) Un broadcast radial (b) Un broadcast diamétral	27
2.5	Le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,4}$	28
2.6	Le graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} = 4$	32
2.7	Broadcast dominant sur le graphe G	33
2.8	Broadcast stable sur P_4	36
2.9	Un broadcast efficace sur P_7	38
2.10	(a) Paking maximal-(b) broadcast paking maximal	39
3.1	Broadcasts efficaces distincts sur C_{10}	44
3.2	Broadcasts efficaces distincts sur C_{10}	45
3.3	Broadcasts efficaces distincts sur C_6	46
3.4	Broadcasts efficaces distincts sur C_6 pour $ v_f^+ = 2$	48
3.5	Broadcasts efficaces distincts sur C_8 pour $ v_f^+ = 2$	48
3.6	Broadcasts efficaces distincts sur C_9 pour $ v_f^+ = 3$	50
3.7	Broadcasts efficaces distincts sur C_{11} pour $ v_f^+ = 3$	50
3.8	Broadcasts efficaces distincts sur C_{12} pour $ V_f^+ = 4$	52
3.9	Broadcasts efficaces distincts sur C_{14} pour $ V_f^+ = 4$	53

Introduction générale

Un graphe est un schéma constitué de points (sommets) et de lignes de formes quelconques (arêtes) reliant ces points . Il est utilisé pour illustrer certains liens existant entre des objets d'un même système et en particulier dans la modélisation de problèmes liés aux réseaux qu'ils soient informatiques , sociaux , routiers ou autres. Les graphes modélisent de nombreuses situations concrètes où interviennent des objets en interaction . Ils permettent de manipuler plus facilement des objets et leurs relations avec une représentation graphique naturelle. L'ensemble des techniques et outils mathématiques mis au point en Théorie des Graphes permettent de démontrer facilement des propriétés, d'en déduire des méthodes de résolution , des algorithmes ...ect .

La Théorie des Graphes aujourd'hui est très présente dans notre société moderne . Cette branche des Mathématiques , dont on fait remonter l'origine à Euler , a connu un essor spectaculaire au cours des cinquante dernières années , notamment grâce aux travaux de Claude Berge. La Théorie des Graphes permet de modéliser des problèmes de réseaux informatiques , de transport , d'emplois du temps...etc.

Cette théorie a bénéficié d'un engouement considérable non seulement de la part des mathématiciens , mais également de la communauté scientifique toute entière : On observe ainsi depuis quelques années un grand nombre de publications ayant trait à des problèmes en biochimie , en génétique ou encore encore en sociologie , en relation direct avec la théorie des graphes .

Le problème de domination est l'un des problèmes les plus connus en théorie des graphes . Il consiste , étant donné un graphe , de trouver un sous-ensemble de sommets D du graphe de cardinal minimum tel que tout sommet qui n'appartient pas à D

possède au moins un voisin dans D .

Récemment, Erwin [16] a défini un modèle dans lequel la contrainte de voisinage est omise : La réception dépend que du coût affecté à la station émettrice. En effet, le concept de broadcast domination est une variante du problème de domination, et consiste à attribuer des entiers positifs (poids) aux sommets du graphe de sorte que tout sommet de poids nul soit à distance au plus k d'un sommet de poids supérieur ou égal à k , et que la somme des poids de tous les sommets soit minimum. Il s'agit d'affecter un coût $f(v) \geq 0$ à chaque sommet v d'un graphe tel que tout sommet du graphe est à distance au plus $f(v)$ à partir d'un certain sommet v de coût non nul. Le problème consiste à minimiser la somme des coûts affectés aux sommets du graphe.

Dans ce mémoire, nous étudions le nombre de broadcasts efficaces dans les cycles pour cela des valeurs exactes et des bornes doivent être déterminées. Ce mémoire est divisé en trois chapitres : Le premier chapitre de ce mémoire est consacré essentiellement aux définitions préliminaires des notions les plus utilisées dans ce dernier. Nous introduisons un certain nombre de notions fondamentales en théorie des graphes, en particulier les principaux concepts et résultats utilisés dans ce travail. Au second chapitre, nous introduisons la notion de la domination et de fonction broadcast, quelques invariants de la domination et de broadcast.

Au troisième chapitre, nous énonçons les différents résultats connus sur les invariants de domination et de broadcast domination dans les cycles. Nous étudions, par la suite, le nombre de broadcast efficace dans cette famille de graphes. Nous déterminons soit des valeurs exactes soit des bornes.

Chapitre 1

Terminologie et définitions générales

1.1 Introduction

Ce premier chapitre fournit au lecteur les bases en théorie des graphes, nécessaires à la bonne compréhension des notions abordées dans la suite de ce mémoire. Ce chapitre est consacré à la théorie des graphes, il reprend ainsi ce qu'on peut retrouver dans la majeure partie des ouvrages d'introduction à ce sujet. Nous nous sommes notamment efforcés à employer les notations et noms les plus usuels en français ; toutefois nous avons jugé utile d'adjoindre, pour chaque terme nouvellement introduit, sa traduction anglophone, mise en évidence par une emphase et entre parenthèses.

1.2 Terminologie et notions :

le graphe :

Un graphe fini $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets (Vertices en anglais), et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes (Edges en anglais). Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de e . Si l'arête e relie les sommets a et b , on dira que ces sommets sont adjacents, ou incidents avec e , ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets a et b .

Graphe simple :

Un graphe est dit **simple** s'il est sans boucles et sans arêtes multiples . Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

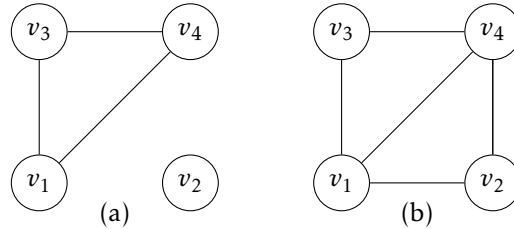


FIGURE 1.1 – (a) Graphe simple avec sommet isolé (b) graphe simple

Graphe trivial :

Un graphe trivial est un graphe contient un seul ou aucun sommet.

Graphe orienté

Un graphe orienté G est une paire (V, E) où V est un ensemble de sommets et E un ensemble d'arcs. Pour un arc $a = (u, v) \in A$, u est l'origine de l'arc orienté et v son extrémité , on dit que l'arc va de u vers v .

Graphe non orienté

Un graphe non orienté est défini par le couple (V, E) , où V est l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble de ses arêtes. Si u, v sont en relation, cette dernière est décrite par l'arête $e = (uv)$.

Ici, le sens de la relation n'est pas invoqué.

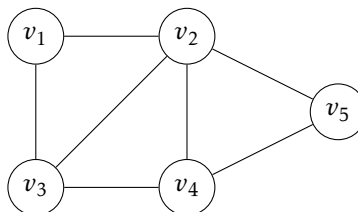


FIGURE 1.2 – Graphe non orienté

Degré d'un sommet :

On appelle degré du sommet v , et on note $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet . Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la cardinalité).

Degré d'un graphe :

Le degré d'un graphe est le degré maximum $\Delta(G)$ ou minimum $\delta(G)$ sur tous ses sommets.

Ordre d'un graphe :

Le nombre de sommets d'un graphe correspond à l'ordre du graphe.

Voisinage :

Le voisinage ouvert(open neighborhood) d'un sommet v est l'ensemble de ses sommets adjacents , il est noté $N(v)$.

Le voisinage fermé (closed neighborhood) d'un sommet v , noté $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Graphe partiel :

Le graphe $G' = (V, E')$ est un graphe partiel de G , si E' est inclus dans E . Autrement dit , on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G .

Sous-graphe :

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour un sous-ensemble de sommets A inclus dans V , le sous-graphe de G induit par A est le graphe $G' = (A, E(A))$, on obtient G' en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G , ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.

Graphe connexe et graphe non connexe :

Un graphe est connexe s'il est possible à partir de n'importe quel sommet de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en composantes connexes sur le graphe.

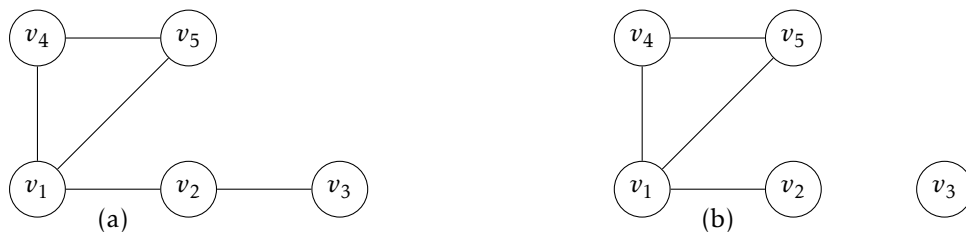


FIGURE 1.3 – (a) Un graphe connexe-(b) Un graphe non connexe

1.3 Représentation d'un graphe

Un graphe peut être représenté graphiquement comme il peut être représenté par une matrice.

1.3.1 Représentation graphique

Il existe une infinité de représentation d'un graphe. Les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Si on peut dessiner un graphe G dans le plan sans qu'aucune arête ne coupe une autre, on dit que G est planaire.

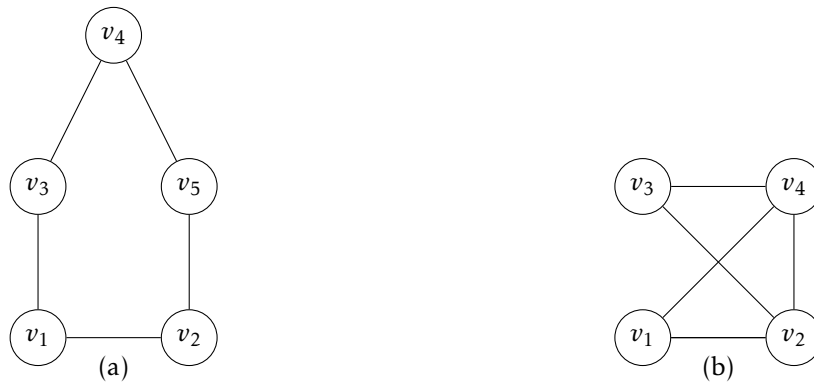


FIGURE 1.4 – (a) Représentation planaire (b) Représentation non planaire

1.3.2 Représentation matricielle

matrice d'adjacences :

Matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n est la matrice carrée A de taille $n \times n$ telle que $a_{ij} = 1$ s'il existe une arête entre les sommets i et j , et $a_{ij} = 0$ sinon.

Exemple 1.1. D'après le graphe (a)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'adjacences a plusieurs caractéristiques :

- 1- Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
- 2- Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un 1 sur la diagonale indiquerait une boucle.
- 3- Elle est symétrique : $m_{i,j} = m_{j,i}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.
- 4- Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre graphe.

Matrice d'incidence :

Matrice d'incidence d'un graphe d'ordre n est la matrice B de taille $n \times m$, m désignant comme vu nombre d'arêtes du graphe telle que $b_{ij} = 1$ si le sommet i est une extrémité initial de l'arête j , $b_{ij} = -1$ si le sommet i est une extrémité terminale de l'arête j , 0 sinon .

1.4 Quelques classes de graphes

Parfois le graphe possède quelques propriétés qui lui rendent au particulier et appartient à une classe spéciale.

chaîne

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une chaîne joignant deux sommets v_1 et v_n dans G est une suite de sommets tels que deux sommets successifs sont reliés par une arête.



FIGURE 1.5 – Chaîne P_4

Cycle

Un cycle est une chaîne simple dont les extrémités coïncident . On le note $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n = v_1)$.

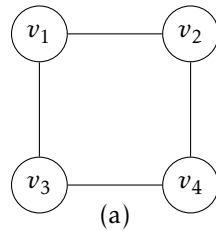


FIGURE 1.6 – Cycle C_4

graphe étoile

Un graphe étoile est un arbre à t sommets pendants reliés à l'unique sommet de degré t , et on note par $K_{1,t}$, pour tout entier positif $t \geq 3$.

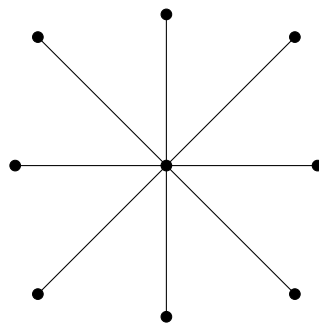


FIGURE 1.7 – L'étoile $K_{1,8}$

Graphe complet

Un graphe complet ou clique est un ensemble de sommets deux-à-deux adjacents. l'ordre d'une clique est le nombre de sommets qui le compose.

Une clique C est maximale (par inclusion) si aucune autre clique du graphe ne contient C comme sous-ensemble. La clique C est maximum si aucune autre clique du graphe n'est de taille strictement supérieure à celle de C .

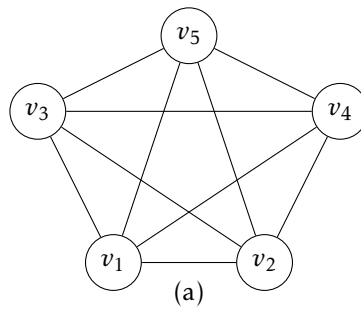


FIGURE 1.8 – Graphe complet K_5

Graphe biparti

Un graphe $k_{m,n}$ est biparti si l'ensemble de ses sommets peut être divisé en deux sous ensembles X et Y stables de sorte que toutes les arêtes du graphe relient au moins un sommet dans X à un sommet dans Y . Le graphe $k_{m,n}$ est dit biparti complet si chaque sommet de X est relié avec tous les sommets de Y .

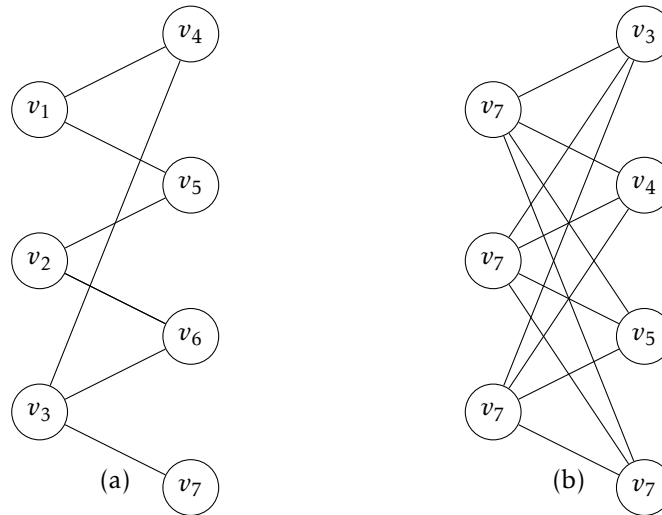


FIGURE 1.9 – (a) Un graphe biparti $K_{3,4}$ - (b) Un graphe biparti complet $K_{3,4}$

Arbre :

Un arbre (tree) est un graphe simple connexe sans cycle.

il y a d autre définition de l'arbre : - G est connexe et possède $n-1$ arêtes.

- G est sans cycle et possède $n-1$ arêtes.

- G est connexe et minimal pour cette propriété.

- G est sans cycle et maximal pour cette propriété.

- Entre toute paire de sommets , il existe dans G une unique chaîne les reliant.

On distingue trois types de sommets dans un arbre :

- La racine.
- Les feuilles qui sont les sommets de degré 1.
- Les noeuds internes qui sont les sommets de degré supérieur à 1.

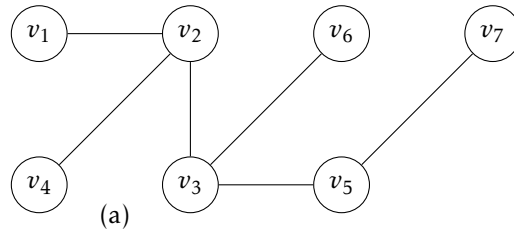


FIGURE 1.10 – Arbre

Arbre binaire :

Un arbre binaire est un arbre dont chaque nœud comporte au plus deux fils.

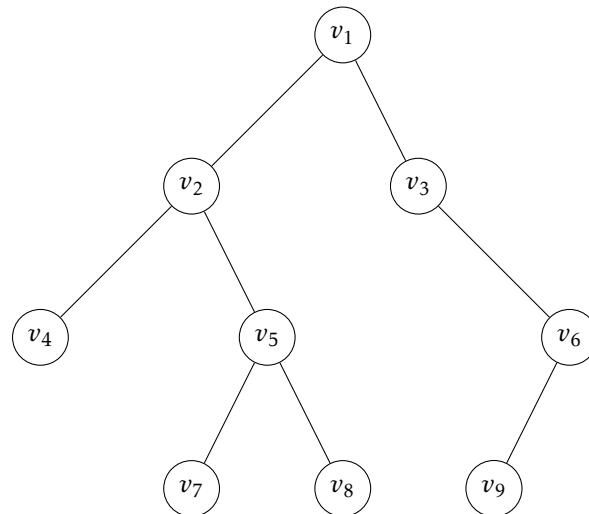


FIGURE 1.11 – Arbre binaire

Arbre binaire complet :

Un arbre binaire **complet** est un arbre binaire dont chaque sommet interne a exactement deux fils.

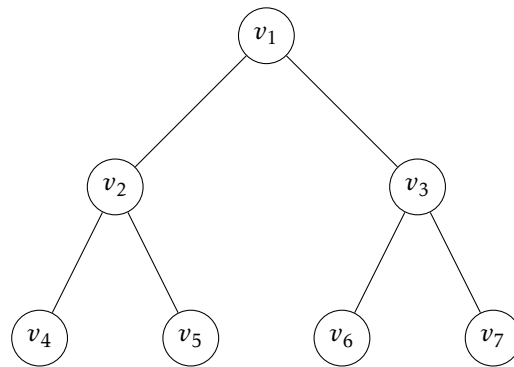


FIGURE 1.12 – Arbre binaire complet

Arbre n-aire :

Un arbre n-aire est un arbre dans lequel chaque noeud interne a au plus n fils.

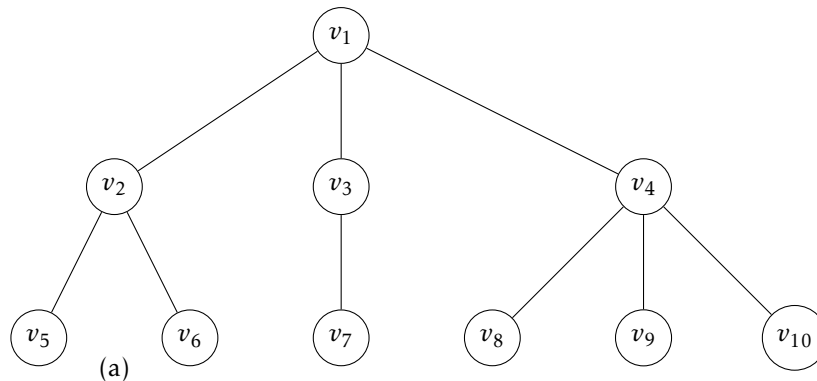


FIGURE 1.13 – Arbre n-aire

Arbre n-aire complet :

Un arbre n-aire est un arbre n-aire complet si et seulement si chaque sommet d'arbre possède exactement n fils sauf les feuilles.

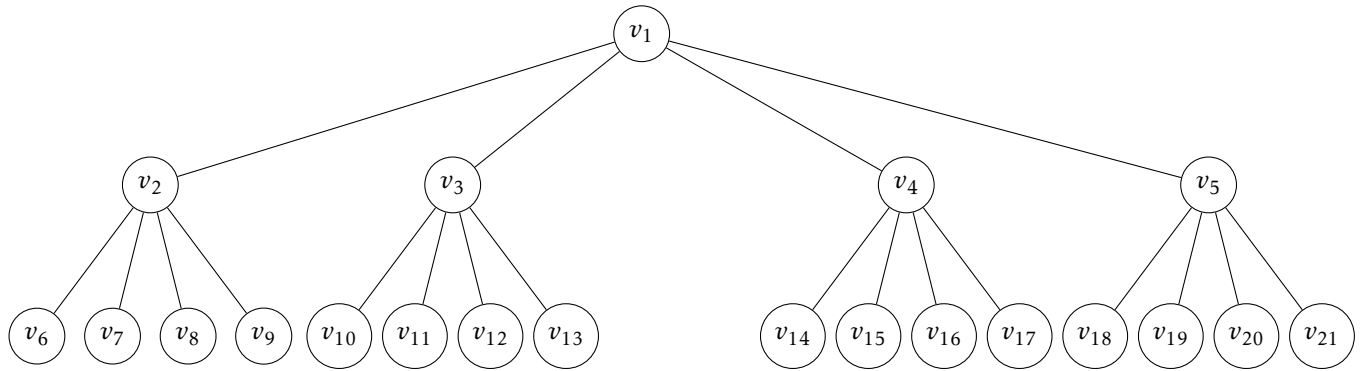


FIGURE 1.14 – Arbre 4-aire complet de profondeur 2

Forêt :

Une forêt est un graphe non connexe et sans cycle .

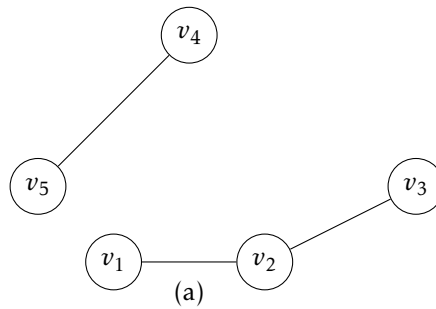


FIGURE 1.15 – Forêt

Graphe triangulé :

Un graphe simple $G = (V, E)$ est triangulé si tout cycle de longueur au moins 4 possède une corde , c'est-à-dire, une arête entre deux sommets non-consécutifs du cycle, et chacun de ses cycles de G est d'ordre inférieur ou égale à 3.

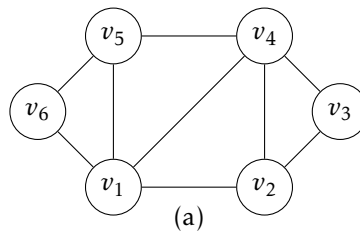


FIGURE 1.16 – Graphe triangulé

Observation 1. Tout sous-graphe induit d'un graphe triangulé est également triangulé.

Propriete des graphes triangulés

Ce type de graphe a plusieurs propriétés

La notion de sommet complété(sommet simplicial)

Un sommet d'un graphe est dit complété est un sommet dont les voisins sont tous adjacents deux à deux. Autrement dit $N(x)$ est une clique, ou encore $G[N(x)]$ est complet.

Theorem 2. [23] *Tout graphe triangulé admet un sommet complété. De plus, si le graphe n'est pas complet, il admet deux sommets complétés non voisins (Contient au moins deux sommets complétés non adjacents).*

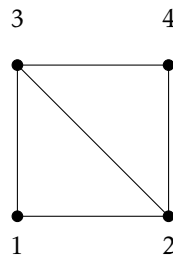


FIGURE 1.17 – Sommet complété

La notion de schéma d'élimination parfait :

donné un graphe G d'ordre n . $v_1 \dots v_n$ est un ordre total sur l'ensemble des sommets $V(G)$, si $i \in [1 \dots n]$, v_i est un sommet complété du graphe induit par $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$.

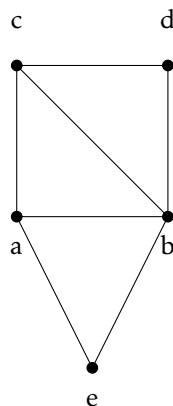


FIGURE 1.18 – Schéma d'ordre d'élimination parfait

On donne le schéma d'élimination parfait pour l'exemple suivant :
 $d < a < b < e < c$.

Theorem 3. [23] *Un graphe est triangulé si et seulement s'il possède un schéma d'élimination parfait.*

Definition 1.4.1. *Un sommet u d'un graphe $G = (V, E)$ est simplicial si $G[N(u)]$ est complet (et donc $G[N[u]]$ l'est aussi).*

Séparateur minimaux :

Soit u et v deux sommets appartenant à la même composante connexe d'un graphe G . On appelle (u, v) -séparateur minimal tout ensemble de sommets qui sépare u de v et est minimal par inclusion. Un ensemble de sommets de G est un séparateur minimal de G si c'est un (u, v) -séparateur minimal, pour certains sommets u et v .

Proposition 1.4.1. [23]

Si G est triangulé, tout séparateur minimal est une clique.

Un ordre d'élimination simplicial :

est un ordre $(x_1, x_2, \dots, x_{|V|})$ sur les sommets de $G = (V, E)$ tel que x_i est un sommet simplicial de $G[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{|V|}]$. Autrement dit, à chaque fois qu'on retire un sommet de G son voisinage forme une clique.

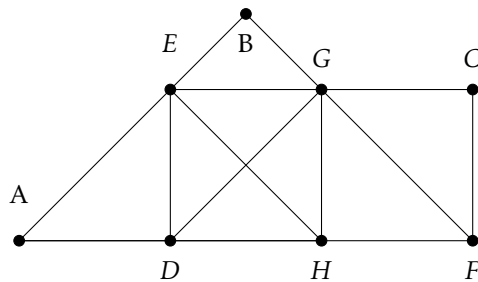


FIGURE 1.19 – Schéma d'ordre d'élimination simplicial

Proposition 1.4.2. [23]

Un graphe G est triangulé si et seulement si il possède un ordre d'élimination simplicial.

Theorem 4. [23]

Pour un graphe G sur n sommets, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G a un ordre d'élimination parfait.
2. G est triangulé.
3. Si H est un sous-graphe induit de G et S est un séparateur de sommet de H de taille minimale, Les sommets de S induisent une clique.

clique et stable :

Un **stable** (stable set or independent set of graph G) est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

Une **clique** (est un ensemble de sommets deux à deux adjacents. Ainsi une clique dans un graphe est un stable dans son complémentaire et inversement . De plus , tout graphe induit par une clique étant un graphe complet, les deux termes sont le plus souvent confondus , de même , un graphe sans arête est régulièrement appelé stable. Les stables et les cliques interviennent dans de très nombreux problèmes pratiques . Pour la plupart de ces problèmes, on modélise la situation à l'aide d'un graphe , et la solution consiste à déterminer le plus grand stable ou la plus grande clique du graphe : on parle alors de stable ou clique maximum. Il convient d'ailleurs de veiller au point de vocabulaire suivant , légèrement différent de l'usage normal.

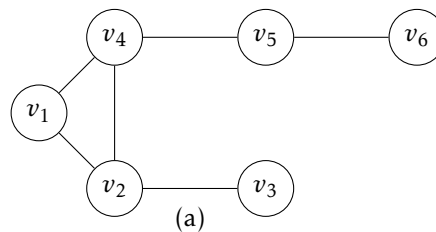


FIGURE 1.20 – $K = \{v_1, v_2, v_5\}$ une clique

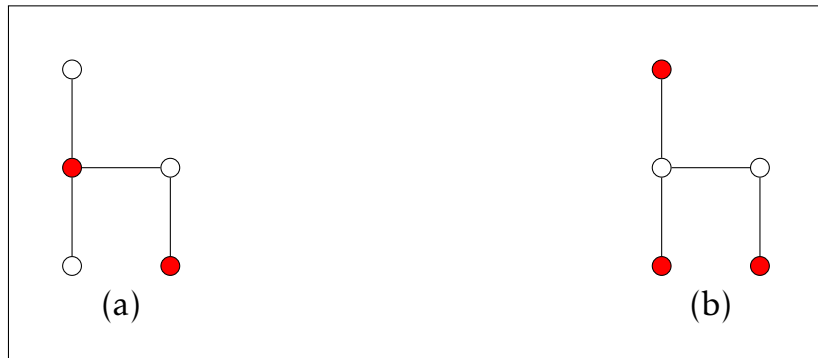


FIGURE 1.21 – (a) Stable maximal (b) Stable maximum

Complémentaire d'un graphe

Le complémentaire (complement) d'un graphe G est le Graphe noté \overline{G} défini par :

- $V_{\overline{G}} = V_G$
- l'arête uv ($u \neq v$) $\notin E_{\overline{G}}$ si et seulement si $uv \in E_G$

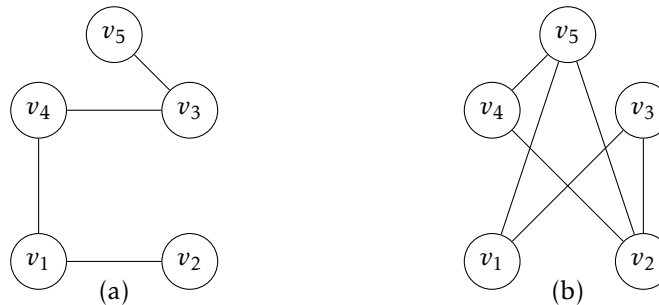


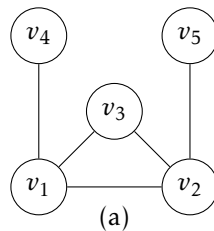
FIGURE 1.22 – Le graphe G et son complémentaire \overline{G}

1.5 Quelques paramètres d un graphe

Distance entre deux sommets

La distance entre deux sommets v_i et v_j notée $d(v_i, v_j)$ est la longueur de la plus courte chaîne entre v_i et v_j .

Exemple 1.2. D'après le graphe illustré dans la figure 1.23, nous calculons la distance entre le sommet v_1 et les autres sommets.



$$d(v_1, v_2) = 1$$

$$d(v_1, v_3) = 1$$

$$d(v_1, v_4) = 1$$

$$d(v_1, v_5) = 2$$

FIGURE 1.23 – Le graphe G

Excentricité d'un sommet :

L'excentricité d'un sommet v_i , noté $e(v_i)$, est la plus grande distance entre le sommet v_i et n'importe quel autre sommet du graphe c-à-d : $e(v_i) = \max_{v_j \in V} d(v_i, v_j)$ tel que $i \neq j$: D'après le graphe illustré dans la figure 1.23 et après avoir calculé la distance entre tous les sommets on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} e(v_1) = 2; \\ e(v_2) = 2; \\ e(v_3) = 2; \\ e(v_4) = 3; \\ e(v_5) = 3. \end{array} \right.$$

Rayon d'un graphe :

Le rayon d'un graphe G noté $rad(G)$ est l'excentricité minimum sur tous les sommets de G c-à-d : $rad(G) = \min_{v_i \in V(G)} e(v_i)$.

Dans le graphe G et les résultats précédents on a $rad(G) = 2$.

Le diamètre d'un graphe :

Le diamètre d'un graphe G noté $Diam(G)$ est l'excentricité maximum sur tous les sommets de G c-à-d : $diam(G) = \max_{v_i \in V(G)} e(v_i)$.

Dans le graphe et les résultats précédents on a $Diam(G) = 3$.

nombre chromatique :

Le problème du coloriage de graphes , pour un graphe non orienté G , consiste à attribuer une couleur à chaque sommet , de telle sorte qu'une même couleur ne soit pas attribuée à deux sommets adjacents (reliés par une arête). Lorsque le graphe est planaire, ce problème peut s'exprimer par rapport au graphe dual , en coloriant les faces, et non les sommets, et en imposant que deux faces voisines soient coloriées de couleurs différentes (il s'agit du problème de coloriage d'une carte). Le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier un graphe G est appelé le **nombre chromatique** de G , et noté $\chi(G)$.

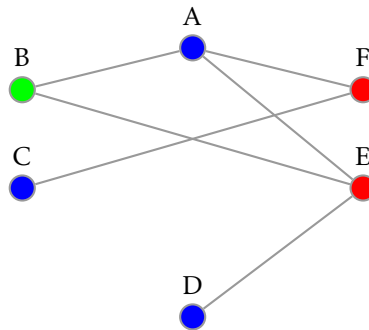


FIGURE 1.24 – Graphe de nombre chromatique $\chi(G) = 3$

Chapitre 2

Broadcasts et domination

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons le concept de domination dans les graphes ainsi que quelques paramètres de domination et de broadcast domination nous énonçons les résultats établis sur les broadcast incluant ceux relatifs à la complexité algorithmique du problème de broadcast domination.

2.2 Domination

Dans cette partie, nous présentons les définitions principales liées à la domination , on pourra trouver des notions bien détaillées dans les deux livres de Haynes , Hedetniemi et Slater [17].

Un sous ensemble S de sommets d'un graphe G est dit maximal (resp.minimal) pour une certaine propriété P si S vérifie la propriété P et qu'aucun sous-ensemble de sommets $S' \subset S$ (resp. $S' \supset S$) de G distinct de S ne vérifie pas P . Par exemple, si P est la propriété d'indépendance (c'est-à-dire les sommets sont non adjacents deux à deux), alors $S = \{x_1, x_4, x_6\}$ de la Figure 2.1 est maximal pour la propriété P , dans la même figure, si P est la propriété de domination (c'est-à-dire tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S), alors $S = \{x_1, x_4, x_6\}$ est dominant minimal.

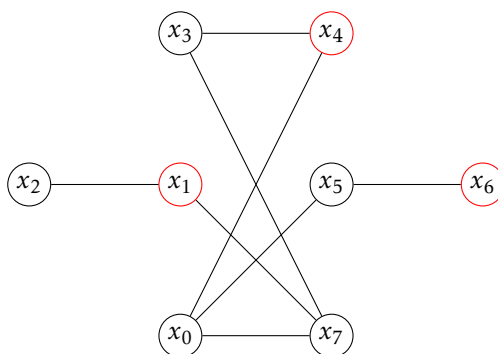


FIGURE 2.1 – S est un ensemble dominant minimal et un indépendant maximal

Ensemble Dominant :

Un ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets tels que tout sommet de $V \setminus S$ est adjacent au moins à un sommet de S . Plus formellement, S vérifie : $V = N[S]$.

Le nombre de Domination $\gamma(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant. On dit qu'un sommet domine un autre sommet si les deux sommets sont voisins. Un dominant est donc un ensemble de sommets qui domine tous les autres sommets. Le nombre d'empilement $\Gamma(G)$ est le nombre de domination supérieur.

2.3 Quelques invariants de domination

2.3.1 Domination double

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Rappelons qu'un sous ensemble S de V est un dominant double de G si pour tout sommet v de G , on a $|N[v] \cap S| \geq 2$, c'est à dire, soit $v \in S$ et possède au moins un voisin dans S , soit il est dans $V \setminus S$ et possède au moins deux voisins dans S . Le nombre de domination double, noté $\gamma_{x_2}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G .

Les applications dans le domaine de la domination double sont nombreuses. A titre d'exemple, nous pouvons citer le problème du placement des gardiens dans une prison. Un gardien placé sur un sommet v peut garder tous les sommets de $N[v]$. Dans ce cas, un ensemble dominant double S représente un ensemble de gardiens avec la propriété

que tout prisonnier (un sommet de V-S) est surveillé par au moins deux gardiens et chaque gardien (un sommet de S) est voisin d'un autre gardien en vue de s'assurer une mutuelle aide et assistance en cas de besoin.

Théorème 2.3.1. [14]

Soit G un graphe sans sommets isolés ayant n sommets et m arêtes, alors :

- a) $\gamma_{\times 2}(G) \geq \gamma(G)+1$.
- b) si G admet deux ensembles disjoints dominants de taille $\gamma(G)$, alors $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2 \gamma(G)$.
- c) $2 \leq \gamma_{\times 2}(G) \leq n$.

2.3.2 Domination Total

La domination totale est l'une des principales variantes de la domination. Elle a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi.

Un dominant total d'un graphe $G = (V, E)$ sans sommet isolé est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets tel que tout sommet de V est adjacent à un sommet de S . Plus formellement, S vérifie $V = N(S)$. Le nombre de domination totale $\gamma_t(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total. Dans la domination totale, contrairement à la domination simple, il faut que les sommets sélectionnés dans l'ensemble soient eux aussi dominés par un autre sommet de l'ensemble. C'est pourquoi il n'est pas possible de trouver un dominant total dans un graphe contenant un sommet isolé, car celui-ci ne peut pas être dominé. De plus, on remarque qu'un dominant total est nécessairement un dominant, et $\gamma_t(G) \geq \gamma(G)$. Il est facile de voir que tout graphe G vérifie :

$$\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2 \gamma(G).$$

2.3.3 Indépendance

Rappelons qu'un sous-ensemble de sommets S d'un graphe G est un indépendant (ou stable) si le sous-graphe induit par S ne contient aucune arête.

Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un stable maximal de G noté $i(G)$ (resp

$\beta_0(G)$), est appelé le nombre de domination stable (resp. le nombre de stabilité) de G . Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal, on a :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G).$$

2.3.4 Irrédondance

Un sous ensemble $D \subseteq V$ est dit irrédondant si tout sommet $x \in D$ domine au moins un sommet de G qui n'est dominé par aucun autre sommet de D . C'est à dire que tout sommet de D est soit isolé dans D soit possède au moins un voisin privé dans $V-D$.

Le cardinal minimum (resp. maximum) d'un ensemble irrédondant maximal est noté $ir(G)$ (resp. $IR(G)$) et appelé le nombre d'irrédondance (resp. nombre d'irrédondance). En procédant de la même manière que ci-dessus, la condition de minimalité d'un ensemble dominant n'est autre que la définition d'un ensemble irrédondant. Ainsi, tout ensemble dominant minimal est un irrédondant maximal et on aura la nouvelle chaîne :

$$ir \leq \gamma \leq i \leq \beta \leq \Gamma \leq IR.$$

2.3.5 Packing

Un ensemble S est un packing si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| \leq 1$.

Le nombre de packing $P(G)$ est le cardinal maximum d'un packing dans G et le nombre de packing inférieur $p(G)$ est le cardinal minimum d'un packing maximal dans G .

Comme tout dominant minimal est un packing maximal de G , nous avons la chaîne d'inégalité suivante :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \tag{2.1}$$

2.3.6 Efficacité

un ensemble dominant S est dit efficace si pour chaque sommet $v \in V$, $|N[v] \cap S| = 1$. De la définition précédente, on voit immédiatement que tout ensemble dominant efficace est un packing. Alors, on déduit grâce à la chaîne d'inégalités (2.1) que si un graphe G possède un ensemble dominant efficace, alors celui-ci est forcément

un γ -ensemble. Par ailleurs, il existe des graphes qui ne possèdent pas d'ensemble dominant efficace. Citons, à titre d'exemple, le cycle de longueur C_5

2.3.7 Valeur exact sur γ

Observation 5. [18]

Pour $n \geq 1$, $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Si D est un ensemble minimum de sommets tel que, D est un ensemble dominant de P_n qui contient une extrémité de la chaîne P_n , alors $|D| = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$.

si D est un ensemble minimum de sommets tel que D est un ensemble dominant de P_n qui contient les deux extrémités de la chaîne P_n , alors $|D| = \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$.

2.4 Borne sur γ

Puisque l'ensemble des sommets V d'un graphe $G = (V, E)$ est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq |V|$:

$\gamma(G) = 1$ si et seulement si G possède un sommet v de degré $n-1$, dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G .

$\gamma(G) = n$ si et seulement si $G \equiv \overline{K_n}$, et V est l'unique ensemble dominant de G .

Théorème 2.4.1. [26]

Si G est un graphe sans sommets isolés, alors $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

Théorème 2.4.2. [17]

Si G est un graphe connexe avec $\delta(G) \geq 3$, alors $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

Théorème 2.4.3. [9]

Pour tout graphe G , $\gamma(G) \leq n[1 - \delta(1/(\delta+1))^{1+\frac{1}{\delta}}]$.

Le nombre de domination pour presque tous les graphes vaut $k+1$ ou $k+2$ lorsque k est une certaine fonction donnée en n .

Théorème 2.4.4. [17]

Si G est un graphe de diamètre $\text{diam}(G) = 2$, alors $\gamma(G) \leq \delta(G)$.

Théorème 2.4.5. [17]

Si G est un graphe planaire de diamètre $\text{diam}(G) = 2$, alors $\gamma(G) \leq 3$.

Théorème 2.4.6. [21]

Si G est un graphe planaire de diamètre $\text{diam}(G) = 3$, alors $\gamma(G) \leq 10$.

2.5 Complexité du problème de domination

Nous intéressons, pour un problème donné, à déterminer la difficulté de résolution de ce problème. Pour cela, nous distinguons les problèmes de décision dont la réponse est oui ou non et les problèmes de recherche d'une solution pour lesquels il faut construire une solution.

La théorie de la complexité est une branche des mathématiques et de l'informatique ayant pour cadre l'étude de la difficulté intrinsèque des problèmes algorithmiques, et qui vise à classer ces problèmes en fonction de cette difficulté.

Classe P

On appelle "classe P" la classe regroupant tous les problèmes de décision admettant pour leur résolution un algorithme polynômial. On dit que les problèmes de la classe P sont "faciles".

Exemple 2.5.1. Soit le problème du plus court chemin entre deux sommets dans un graphe orienté et valué par des coûts positifs.

- Entrée : un graphe valué $G = (V, E, u)$, deux sommets s et t , et une constante k positive ;
- Sortie : existe-t-il un chemin allant de s à t de longueur au plus k .

Ce problème est dans la classe P car l'algorithme de Dijkstra, qui est un algorithme polynômial, peut résoudre ce problème.

Classe NP

Un problème de reconnaissance est dans la classe NP si pour toute instance de ce problème, on peut vérifier, en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance, qu'une solution proposée ou devinée permet d'affirmer que la réponse est "OUI" pour cette instance.

Exemple 2.5.2. Posons le problème suivant : G et un entier positif k , existe-t-il un stable de taille au moins k ? Ce problème est clairement dans NP : si l'on dispose d'un ensemble S de sommets, on peut vérifier en temps polynomial que S est stable (par exemple en examinant la liste d'adjacence de chaque sommet de S).

Classe NP-complet

Un problème de décision est NP-complet s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- Il appartient à la classe NP.
 - Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale.
- tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de décision associé est NP-complet est NP-dur.

2.6 Notions fondamentales sur la fonction broadcast

Definition 2.6.1. Chaque fonction $f : V(G) \rightarrow [0..diamG]$ telle que $f(v) \leq e(v)$ pour tout sommet v de G est appelée un broadcast sur G .

Un sommet v pour lequel $f(v) > 0$ est un sommet f -dominant, et l'ensemble f -dominant est $V_f^+(G) = \{v \in V(G) : f(v) > 0\}$. S'il n'y a pas risque de confusion, on note par V_f^+ pour désigner $V_f^+(G)$.

Remarque 2.1. Un sommet f -dominant v f -domine tout sommet u avec $d(u, v) \leq f(v)$, tandis que les sommets de $V(G) - V_f^+$ ne f -dominent aucun sommet de G .

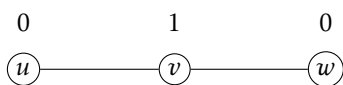


FIGURE 2.2 – u est un f -voisin de v , mais que v n'est pas un f -voisin de u

L'ensemble des sommets qui f -dominent le sommet v est noté par $H_f(v)$ ou $H(v)$ lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté.

$$H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u, v) \leq f(u)\}$$

Definition 2.6.2. Pour une fonction broadcast et un sommet $u \in V$, on appelle f -voisinage fermé de u , l'ensemble défini par : $N_f[u] = \{v \in V / d(u, v) \leq f(u)\}$. Si $v \in N_f[u]$, on dit que v est un f -voisin de u . Le f -voisinage d'un ensemble $S \subseteq V$ est $N_f[S] = \bigcup_{u \in S} N_f[u]$.

Definition 2.6.3. Un f -voisin privé de v est un sommet u vérifiant $H(u) = v$. L'ensemble des f -voisins privés de v est appelé f -voisinage privé de v et est noté par $PN_f[v]$.

Proposition 2.6.1. [16]

Si f est un broadcast dominant minimum sur un graphe connexe G , alors $V_f^+ = \{v\}$ si et seulement si $f(v) = e(v) = \text{rad}(G)$.

Pour un broadcast f sur un graphe $G = (V, E)$, on appelle coût de f , le nombre $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$.

Le nombre de broadcast domination $\gamma_b(G)$ de G est la valeur minimum de $f(V)$ sur l'ensemble des broadcast f -dominants sur G . Un broadcast dominant f sur G pour lequel $f(V) = \gamma_b(G)$ est un γ_b -broadcast sur G et V_f^+ est appelé γ_b -ensemble sur G . Par conséquent, f est un broadcast dominant si et seulement si $|H_f(v)| \geq 1$ pour tout sommet $v \in V$.

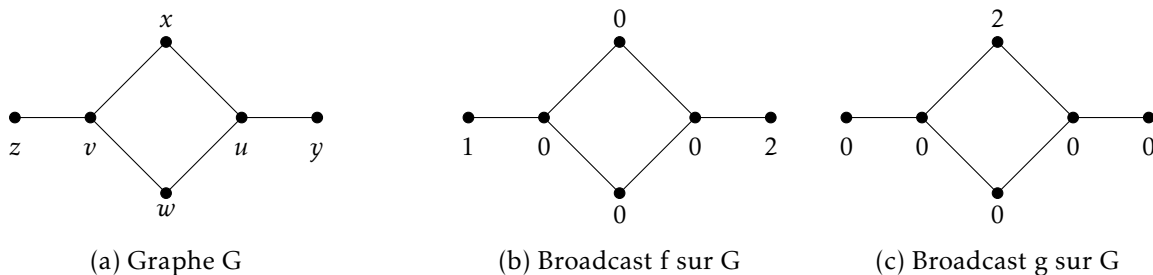


FIGURE 2.3 – Broadcast dominant sur le graphe G

Les graphes de la Figure 2.3 illustrent deux broadcasts dominants f et g , où l'ensemble f -dominant est $V_f^+ = \{z, y\}$, et l'ensemble g -dominant est $V_g = \{x\}$. Le sommet y f -domine y, u, x, w et le sommet x g -domine tous les sommets de V . Le f -voisinage de y est $N_f[y] = \{y, u, x, w\}$ et le g -voisinage de x est V . On a $H_f(v) = \{z\}$ et $H_g(v) = \{x\}$. Les couts des fonctions f et g sont égaux respectivement à $f(V) = 3$ et $g(V) = 2$. En fait, il n'est pas difficile de voir que $\gamma_b(G) = 2$ et g est un γ_b -broadcast.

Remarque 2.2. 1. La fonction caractéristique f_S d'un ensemble dominant minimal S dans un graphe G est un broadcast dominant minimal et donc $\gamma_b \leq \gamma$.

2. Soit $u \in V$ et soit $f_u : V \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$ la fonction définie par :

$$f_u(v) = \begin{cases} e(u) & \text{si } v = u, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le broadcast f_u est un dominant minimal, puisque chaque sommet est f -dominé par u .

Si u est un sommet dans le centre de G (c-à-d $e(u) = \text{rad}(G)$), f_u est appelé broadcast radial.

De même, si $e(u) = \text{diam}(G)$, f_u est appelé broadcast diamétral.

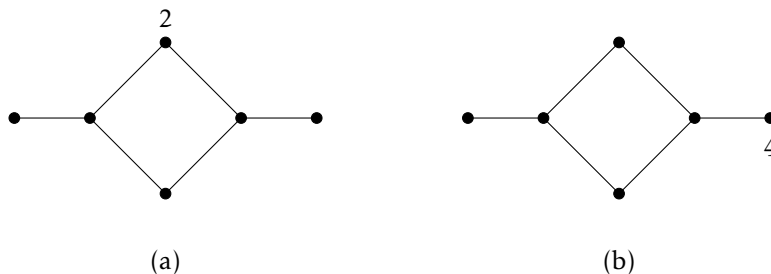


FIGURE 2.4 – (a) Un broadcast radial (b) Un broadcast diamétral

Un graphe G est γ_b -radial (resp. γ_b -diamétral) si $\gamma_b(G) = \text{rad}(G)$ (resp. $\gamma_b(G) = \text{diam}(G)$).

Observation 6. [13]

Pour tout graphe G , $\gamma_b \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} \leq \max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\} \leq \gamma_b(G)$.

Théorème 2.6.1. [13]

Si G est un graphe de taille m , alors $\Gamma_b(G) \leq m$ et l'égalité est atteinte si et seulement si G est une étoile ou une chaîne non triviale.

2.7 Broadcast dans les graphes

2.7.1 Résultats fondamentaux

Pour tout graphe G et tout entier fixé k avec $1 \leq k \leq \text{rad}(G)$, le nombre de k -distance domination, noté $\gamma_k(G)$, est la plus petite cardinalité d'un ensemble de sommets S de G tel que tout sommet de G est à distance k d'au moins un sommet de S .

Proposition 2.7.1. [16] Pour tout graphe G ,

$$\gamma_b(G) \leq \min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq \text{rad}(G)\}$$

En appliquant cette proposition pour $k = 1$ et $k = \text{rad}(G)$, on obtient $\gamma_b(G) \leq \text{rad}(G)$ et $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$.

Corollaire 2.7.1. Pour un graphe G ,

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\}.$$

Dunbar et al prouvent l'inégalité du corollaire 2.7.1.

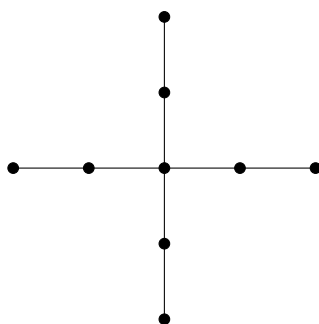


FIGURE 2.5 – Le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,4}$

On appelle graphe subdivisé d'un graphe G le graphe $S(G)$ obtenu en insérant un sommet sur chaque arête dans la figure 2.5.

Soit $T = S(K_{1,t})$ le graphe subdivisé de l'étoile $K_{1,t}$. Puis qu'aucun sommet ne domine T , alors $\gamma_b(T) \geq 2$, et puis qu'un broadcast radial domine T , alors $\gamma_b(T) \leq \text{rad}(T) = 2$. Ainsi l'inégalité $\gamma_b \leq \min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\}$ peut être atteinte. Par ailleurs, la différence entre $\min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ et entre $\Gamma_b(G)$ et $\max\{\Gamma(G), \text{diam}(G)\}$ peut être très grande. En effet, considérons l'exemple suivant :

Soit k un entier positif et soit H_k le graphe obtenu en joignant un sommet pendant de $S(K_{1,2+k})$ à un sommet pendant de la chaîne P_{2k} (2.5).

Alors $\gamma(H_k) = 2k + 3$ et $diam(H_k) = 2k + 4$, donc $\max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} = 2k + 4$. Soit v l'extrémité de P_{2k} qui est extrémité de H_k . Soit le broadcast $f : V(H_k) \rightarrow \{0, 1, 2k+2\}$ défini par $f(v) = 2k + 2$, $f(x) = 0$ pour tout extrémité de H_k distincte de v et $f(x) = 0$ pour tout autre sommet. Alors f est un broadcast dominant minimal sur H_k de coût $3k+3$ et $\Gamma_b(H_k) > 3k + 3$. Nous avons donc :

Observation 7. [13]

Pour tout graphe G ,

$$\Gamma_b(H_k) - \max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} \geq k - 1.$$

Dans [16], Erwin résout le problème d'existence d'un graphe G vérifié, $\gamma_b(G) < \{min_k \gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\}$, par théorème suivant :

Théorème 2.7.1. [16]

Pour tout entier positif k ,

$$\min\{t_{\gamma_t}(H_k) : 1 \leq t \leq rad(H_k)\} - \gamma_b(H_k) \geq \frac{2k}{15} - 1.$$

Dans Les trois propositions suivantes, dont deux sont des caractérisations des graphes G vérifiant $\gamma_b = rad(G)$ sont fondamentaux pour l'étude des γ_b -broadcasts.

Proposition 2.7.2. Soit f un γ_b -broadcast sur un graphe G , alors $V_f^+ = v$ si et seulement si $f(v) = e(v) = rad(G)$, ce broadcast est un broadcast radial.

Proposition 2.7.3. Soit G un graphe, alors $\gamma_b = rad(G)$ si et seulement si

$$\min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\} = rad(G).$$

Soit G un graphe d'ordre $n > 4$ tel que $\Delta(G) = n-2$, et soit H le graphe obtenu en joignant un nouveau sommet à tous les sommets de G . Alors $\gamma_b > \gamma_b(H)$, le théorème suivant montre cette relation n'est pas vrai en généralé.

Théorème 2.7.2. [16]

Si H est le graphe subdivisé d'un graphe G , alors $\gamma_b \leq \gamma_b(H)$.

Bornes sur γ_b et I_b

Dans [16], Erwin détermine une borne inférieure pour le nombre de broadcast domination d'un graphe arbitraire qui généralise l'inégalité $\gamma(G) \geq \lceil \frac{\text{diam}(G) + 1}{3} \rceil$ connue pour le nombre de domination [17].

Théorème 2.7.3. [16]

Pour tout graphe G , on a :

$$\gamma(G) \geq \lceil \frac{\text{diam}(G) + 1}{3} \rceil.$$

Cette borne est atteinte pour les cycles d'ordre 3 et d'ordre 6. Pour les chaînes, les nombres de domination et broadcast domination sont égaux.

Théorème 2.7.4. [16]

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Pour les cycles C_n , on a un résultat identique à celui des chaînes.

Théorème 2.7.5. [16]

Pour tout entier $n \geq 3$,

$$\gamma_b(C_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Il existe d'autres bornes qui dépendent du rayon. Pour un γ_b -broadcast f , notons par $M = \max\{f(x) : x \in V_f\}$.

Lemme 2.7.1. [16]

Soit G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G Alors,

$$\text{rad}(G) \leq 2\gamma_b(G) + |V_f| - M - 1.$$

Corollaire 2.7.2. [15]

Soit G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G . Alors

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{\text{rad}(G) + M + 1 - |V_f|}{2} \rceil.$$

Dans le théorème suivant , Bresar et Spacapan donnent une borne inférieure pour le nombre de broadcast domination d'un graphe G , en fonction du rayon de G .

Puisque $\text{diam}(G) \geq \text{rad}(G)$, on a :

Théorème 2.7.6. [8]

Si G est un graphe connexe, alors

$$\gamma_{Pb}(G) \geq \lceil \frac{2\text{rad}(G)}{3} \rceil.$$

Pour tout graphe connexe G d'ordre n , $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

Corollaire 2.7.3. [16]

Pour tout graphe connexe G d'ordre n ,

$$\gamma_b(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Pour tout graphe connexe G , le nombre de broadcast domination γ_b et I_b vérifient une chaîne d'inégalités .

Graphes avec un petit nombre de broadcast domination

Il est clair Pour un graphe non trivial connexe G , $\gamma(G) = 1$ si et seulement si $\text{rad}(G) = 1$.

Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 1 admettent une caractérisation identique . Le résultat suivant est prouvé par Erwin et Al .

Proposition 2.7.4. [16]

Soit G un graphe connexe non trivial . Alors $\gamma_b(G) = 1$ si et seulement si $\text{rad}(G) = 1$.

Pour un graphe biparti complet , les nombres de domination et broadcast domination sont égaux .

Théorème 2.7.7. [7]

Pour tout graphe biparti complet $K_{p,q}$, on a :

$$\gamma_b(K_{p,q}) = \gamma(K_{p,q}) \leq 2 .$$

On présente dans ce qui suit un théorème qui donne la caractérisation des graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 2 en fonction du rayon de G .

Théorème 2.7.8. [16]

Soit G un graphe . Alors $\gamma_b(G) = 2$ si et seulement si :

$$\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 2.$$

Proposition 2.7.5. [16]

Si G est un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$, alors

1. $\text{rad}(G) = 2$, ou,
2. $\text{rad}(G) = 3$ et $\gamma(G) = 2$.

Une autre conséquence du Théorème 2.7.8 est la suivante :

Proposition 2.7.6. [16]

Si G est un graphe connexe tel que $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 3$, alors $\gamma_b(G) = 3$.

Erwin résuma la proposition 2.7.5 , le théorème 2.7.8 et la proposition 2.7.6 par :

Proposition 2.7.7. [15]

Soit G un graphe. Si $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.

Les résultats de la Proposition 2.7.4 , du Théorème 2.7.4 et de la Proposition permettent d'affirmer que si G est un graphe connexe vérifie $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} \in \{1, 2, 3\}$, alors $\gamma_b(G) \in \min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\}$. Il est naturel de se poser la question si ceci reste valable avec $\min\{\text{rad}(G), \gamma(G)\} = 4$. Mais cette question a une réponse négative . En effet , considérons le graphe de la figure 2.6.

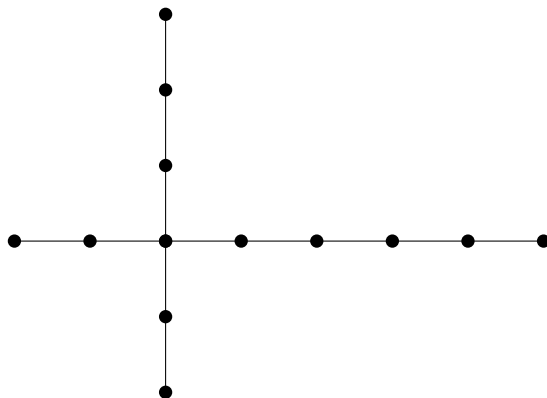
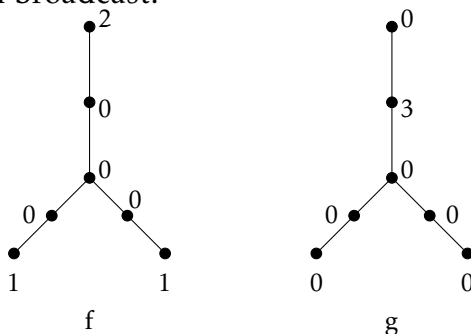


FIGURE 2.6 – Le graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{\gamma(G), \text{rad}(G)\} = 4$

2.7.2 Classes de broadcasts dominants

2.7.2.1 Broadcast dominant minimal

Tout γ_b -broadcast minimum est minimal mais l'inverse n'est pas vrai en général (voir l'exemple illustré dans la Figure 2.7). Des conditions nécessaires ou des caractérisations existent sur la minimalité d'un broadcast.



Broadcast dominants minimaux f,g sur $S_{(k,3)}$

FIGURE 2.7 – Broadcast dominant sur le graphe G

Proposition 2.7.8. [16]

Si f est un broadcast minimal sur un graphe G et $|V_f^+| > 2$, alors pour tout sommet v , $f(v) < e(v)$.

Théorème 2.7.9. [16]

Soit G un graphe et f un broadcast dominant sur G , alors f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

- (a) Pour tout sommet v avec $f(v) \geq 2$, il existe un f -voisin privé u de v qui est à une distance $f(v)$ de v .
- (b) Si $f(v) = 1$, alors v possède un f -voisin privé $u \in N[v]$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 2.7.3.

Corollaire 2.7.4. [16]

Si G est un graphe et f est un broadcast dominant minimal sur G , alors $|f(u) - f(v)| < d(u, v)$ pour chaque paire u, v de sommets distincts dans V_f^+ . Pour un graphe G , une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ est dite continue sur V si pour toute paire u, v de sommets adjacents de G on a que $|f(u) - f(v)| \leq 1$.

Le lemme 2.7.2 suivant est une définition équivalente de la continuité.

Lemme 2.7.2. [15]

Soit G un graphe et $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction, alors f est continue sur V si et seulement si $|f(u) - f(v)| \leq d(u, v)$ pour toute paire u, v de sommets de G . Grâce au lemme 2.7.2, on déduit que le Corollaire 2.7.4 n'est autre que la continuité des broadcasts dominants minimaux sur l'ensemble des broadcast-dominants.

Lemme 2.7.3. [16]

Soit f un broadcast dominant sur un graphe G et soient $x, x' \in V(G)$, $v, v' \in V_f^+$ avec $v \neq v'$. Si x est f -essentiel à v et x' est f -essentiel à v' , alors $x \neq x'$.

Théorème 2.7.10. [16]

Soit f un broadcast dominant sur un graphe G , pour tout sommet $v \in V_f^+$ et tout f -voisin privé v' de v , aucun sommet f -dominant distinct de v n'appartient à la géodésique $v - v'$.

2.7.2.2 Broadcast dominant optimal

Lemme 2.7.4. [16]

Si G est un graphe et f est un broadcast dominant minimal continue sur V , alors

$$\max\{f(v) : v \in V(G)\} = 1.$$

Soit G un graphe, posons $\Gamma_c(G) = \max\{f(V) : f \text{ est un broadcast, dominant sur } G \text{ et continu sur } V\}$. Un broadcast f dominant continu de coût maximum sur un graphe G est appelé Γ_c -broadcast sur G .

Théorème 2.7.11. [15]

Pour tout graphe G ,

$$\gamma_c(G) = \gamma(G) \text{ et } \Gamma_c = \Gamma(G).$$

Corollaire 2.7.5. [16]

Soit G un graphe, alors G admet un γ_c -broadcast si et seulement si $\gamma_b(G) = \gamma(G)$.

Le résultat qui suit généralise la condition nécessaire(b) du Théorème 2.7.3 aux γ_b -broadcasts.

Théorème 2.7.12. [16]

Soit G un graphe d'ordre au moins égal à 2, alors il existe un γ_b -broadcast f sur G tel que pour tout sommet $v \in V_f^+$, il existe un f -voisin privé u de v qui est à une distance $f(v)$ de v . Si f est un broadcast sur un graphe G et $S \subseteq V_f^+$, alors on définit l'ensemble des f -voisins privés de S par $PN_f[S] = N_f[S] - N_f[V_f^+ - S]$.

Théorème 2.7.13. [16]

Si f est un γ_b -broadcast sur un graphe G , alors pour tout ensemble non vide $S \subseteq V_f^+$, $\sum_{u \in S} f(u) \leq \min_{v \in V} \max_{u \in PN_f[S]} d(u, v)$.

L'inégalité présentée dans le Théorème 2.7.13 n'est pas une condition suffisante. En effet, pour $n \geq 4$, soit v le sommet central de P_{2n+1} et χ_v la fonction caractéristique de v .

La fonction $n\chi_v$ est un broadcast dominant minimal sur P_{2n+1} satisfaisant le Théorème 2.7.13 mais n'est pas un γ_b -broadcast puisque $\gamma_b(P_{2n+1}) = \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil < n$.

Corollaire 2.7.6. [16]

Soient G un graphe et f un γ_b -broadcast sur G . Alors pour toute paire de sommets distincts u, v avec $0 < f(u) \leq f(v)$,

$$f(u) \leq \lceil \frac{d(u, v)}{2} \rceil \text{ et } f(v) \leq d(u, v).$$

La réciproque du corollaire 2.7.6 est fausse en général. Considérons le contre exemple suivant : soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, et T l'ensemble des sommets de degré 2 du graphe $S(K_{1,2+k})$.

2.7.3 Autres invariants broadcast

Dans [13] Dunbar et al. définirent et étudièrent d'autres paramètres liés aux broadcasts appelé broadcasting invariants. Nous citerons dans cette partie l'essentiel des résultats obtenus.

broadcast independant (stable) :

broadcast f est dit stable si pour tout sommet $v \in V^+$, $N_f[v] \cap V^+ = v$. Le coût maximum d'un broadcast stable de G , noté par $\beta_b(G)$, est le nombre de broadcast stabilité, et le nombre de broadcast stabilité inférieur noté $i_b(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast stable maximal de G . pour tout graphe G .

nous avons la chaîne d'inégalité suivantes :

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G).$$

FIGURE 2.8 – Broadcast stable sur P_4

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tels que chaque paire de sommets u et v dans M , $d(u, v) = diam(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum de tel ensemble de G . Dans l'observation suivante, Dunbar et al ont déterminé une borne inférieure pour $\beta_b(G)$.

Proposition 2.7.9. [13]

Pour tout graphe G , $\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$.

et cette borne est atteinte.

En fait, la borne inférieure de β_b de la Proposition est atteinte par le graphe $S(K_1, t)$, $t \geq 2$.

Dans ce qui suit, lorsque deux paramètres α et ϵ sont incomparables, nous écrivons brièvement $\alpha \diamond \epsilon$.

Observation 8. [13]

Pour tout graphe G ,

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G),$$

$$\{\gamma(G), i(G)\} \diamond i_b(G),$$

$$\{p(G); P(G)\} \diamond \{\gamma_b(G), i_b(G)\}.$$

les auteurs étudièrent l'extension de la chaîne d'inégalités : $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G)$ énoncée au Chapitre 2, à savoir si $\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \beta_b(G) \leq \Gamma_b(G)$ est satisfaite.

Pour tout sommet $v \in V_f^+$, posons $d_f(v) = d(v, u) \mid u \in V_f^+$. Le théorème suivant est une caractérisation des broadcasts indépendants.

Théorème 2.7.14. [16]

Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G . Si $V_f^+ = v$ alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Par ailleurs, si $|V_f^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) f est un broadcast dominant et ,
(ii) pour tout $v \in V_f^+$, $f(v) = d^+(v) - 1$.

Corollaire 2.7.7. Pour tout graphe G ,

- (i) $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$,
(ii) $\gamma_b(G) \diamond \Gamma_b(G)$,
(iii) $\beta_b(G) \diamond \Gamma(G)$.

Le résultat suivant établit une chaîne d'inégalités entre 0 et les nombres de broadcast indépendance.

Proposition 2.7.10. [13]

Pour tout graphe G ,

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G).$$

Corollaire 2.7.8. [13]

Pour tout graphe G ,

si $\gamma_b(G) = rad(G)$, alors $i_b(G) = rad(G)$.

Nous obtenons alors le schéma de comparaison suivant donné dans [13] :

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma(G) & \leq & i(G) & \leq & \beta_0(G) & \leq & \Gamma(G). \\ \vee & | & \diamond & & | \wedge & & | \wedge. \\ \gamma_b(G) & \leq & i_b(G) & \leq & \beta_b(G) & \leq & \Gamma_b(G). \end{array}$$

Broadcast dominant indépendant :

Un broadcast f est dit dominant indépendant s'il est au même temps dominant et indépendant. Le coût maximum (resp.minimum) d'un broadcast indépendant dominant minimal sur G est noté Γ_{ib} (resp. $\gamma_b(G)$) . Puisque la fonction caractéristique de tout ensemble independant maximal est un broadcast dominant independant minimal on a :

$$\gamma_{ib} \leq i(G) \text{ et } \Gamma_{ib} \geq \beta_0(G).$$

Théorème 2.7.15. [15]

Si f est un broadcast dominant non indépendant sur un graphe $G = (V, E)$, alors il existe un broadcast g sur G qui est dominant indépendant avec $g(V) \leq f(V)$ et $V_g^+ \subset V_f^+$.

Corollaire 2.7.9. [13]

Tout graphe G possède un γ_b broadcast qui est indépendant, ou bien pour tout graphe G , $\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G)$.

Proposition 2.7.11. [13]

Pour tout graphe G , $\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G)$.

Pour le nombre supérieur de broadcast indépendant de domination, nous avons ce qui suit :

Proposition 2.7.12. [13]

Pour tout graphe G ,

$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}$ D'autre part, Dunbar et al. montrent que, pour le graphe de Petersen PG et la chaîne P_{10} ,

on a $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$ et $\Gamma(P_{10}) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$. Ainsi, $\Gamma_{ib} \diamond \Gamma(G)$.

Broadcast efficace :

Un broadcast f est efficace si chaque sommet est f -dominé par un seul sommet broadcast. Le coût maximum d'un broadcast efficace est appelé broadcast le nombre de efficace supérieur et est noté $\Gamma_{eb}(G)$. le nombre de broadcast efficace $\gamma_{eb}(G)$ est égale au coût minimum d'un broadcast efficace . A titre d'exemple, on peut dire que la fonction broadcast définie sur P_7 dans FIG 2.9 est broadcast efficace.

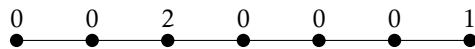


FIGURE 2.9 – Un broadcast efficace sur P_7

Théorème 2.7.16. [13]

Tout graphe possède un γ_b - broadcast qui est efficace.

Corollaire 2.7.10. [13]

Tout graphe G possède un γ_b - broadcast f pour lequel la distance entre deux sommets f -dominants u, v est supérieure à $f(u)+f(v)$. Parce que tout broadcast dominant efficace est dominant minimal, tout graphe G vérifie : $\Gamma_{eb}(G) \leq \min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}$.

Tous les résultats étendent la chaîne d'inégalités entre les invariants de broadcast :

Corollaire 2.7.11. [13]

On a :

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G) :$$

Observation 9. [13]

Pour tout graphe G,

$$\Gamma_{eb}(G) \diamond \{p(G), P(G), \gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G)\}.$$

Broadcast packing

Un broadcast f est un *est un broadcast packing* si chaque sommet est f-dominé par au plus un sommet broadcast . Le coût maximum d'un broadcast packing de G est appelé *broadcast le nombre de broadcast packing*, et est noté $P_b(G)$. Le coût minimum d'un broadcast packing maximal est appelé *le nombre de broadcast paking inférieur* et est noté $p_b(G)$.

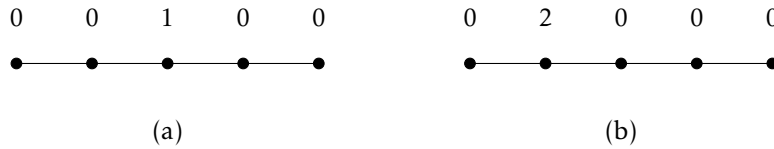


FIGURE 2.10 – (a) Paking maximal-(b) broadcast paking maximal

Observation 10. Pour tout graphe G, on a :

- (i) $p_b(G) \diamond P(G)$;
- (ii) $p_b(G) \diamond p(G) \leq P(G) \leq P_b(G)$;
- (iii) $p_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq P_b(G) \leq \beta_b(G)$.

On sait que la chaîne d'inégalité suivante est valide pour tout graphe G :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G).$$

Dunbar et al. se posèrent naturellement la question de la conservation de cette chaîne entre les broadcasting invariants correspondants. Ils apportèrent une réponse complète à cette question par ce qui suit :

Proposition 2.7.13. [13]

Tout broadcast efficace est :

- (i) *un broadcast packing maximal ;*
- (ii) *un broadcast dominant minimal ;*
- (iii) *un broadcast dominant indépendant minimal.*

Le corollaire suivant est immédiat du Corollaire ?? et de la Proposition 2.7.13 :

Corollaire 2.7.12. [13]

Pour tout graphe G,

$$p_b(G) \leq \gamma_{eb}(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \min\{P_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}.$$

Observation 11. [13]

Pour tout graphe G,

$$P_b(G) \diamond \{\gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G), \Gamma_{ib}(G), \Gamma_b(G)\}.$$

Les inégalités et comparaisons entre broadcasting invariants vues dans ce chapitre sont résumées dans le Tableau 2.1.

	p	P	γ	i	β_0	Γ	γ_b	i_b	β_b	Γ_b	r	d	Γ_{ib}	Γ_{eb}	p_b	P_b
p	=	≤	≤	≤	≤	≤	◇	◇	≤	≤	◇	◇	≤	◇	◇	≤
P	≥	=	≤	≤	≤	≤	◇	◇	≤	≤	◇	◇	≤	◇	◇	≤
γ	≥	≥	=	≤	≤	≤	≥	◇	≤	≤	◇	◇	≤	◇	≥	◇
i	≥	≥	≥	=	≤	≤	≥	◇	≤	≤	◇	◇	≤	◇	≥	◇
β_0	≥	≥	≥	≥	=	≤	≥	≥	≤	≤	≥	◇	≤	◇	≥	◇
Γ	≥	≥	≥	≥	≥	=	≥	≥	◇	≤	≥	◇	◇	◇	≥	◇
γ_b	◇	◇	≤	≤	≤	≤	=	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≥	≤
i_b	◇	◇	◇	◇	≤	≤	≥	=	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≥	≤
β_b	≥	≥	≥	≥	≥	◇	≥	≥	=	◇	≥	≥	≥	≥	≥	≥
Γ_b	≥	≥	≥	≥	≥	≥	≥	≥	◇	=	≥	≥	≥	≥	≥	◇
r	◇	◇	◇	◇	≤	≤	≥	≥	≤	≤	=	≤	≤	≤	≥	≤
d	◇	◇	◇	◇	◇	◇	≥	≥	≤	≤	≥	=	≤	≤	≥	≤
Γ_{ib}	≥	≥	≥	≥	≥	◇	≥	≥	≤	≤	≥	≥	=	≥	≥	◇
Γ_{eb}	◇	◇	◇	◇	◇	◇	≥	≥	≤	≤	≥	≥	≤	=	≥	≤
p_b	◇	◇	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	=	≤
P_b	≥	≥	◇	◇	◇	◇	≥	≥	≤	◇	≥	≥	◇	≥	≥	=

TABLE 2.1 – Inégalités entre les invariants de broadcast

2.8 Complexité du problème de broadcast domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n . Le problème de décision [12] associé au problème de recherche d'un broadcast dominant minimum est donné par :

Broadcast dominant

Instance : Un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n et un entier positif k , $k \leq n$.

Question : Existe-il un broadcast dominant f de G tel que $\gamma_b(G) = \min \sum_{v \in V} f(v) \leq k$?

La complexité du problème de Broadcast dominant est polynomiale en $O(n^3)$ [4] pour la classe des graphes d'intervalles, en $O(nr^4)$ [4] pour la classe des graphes séries-parallèles (r représente le rayon du graphe), en $O(nr)$ [4] pour la classe des arbres (où r représente le rayon de l'arbre) et en $O(n^7)$ [19] pour les graphes en général.

Chapitre 3

Broadcast efficaces dans les cycles

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les différentes broadcasts efficaces dans la classe des cycles . Notre chapitre sera décomposé en deux parties , la première est consacré aux résultats qui ont obtenu au paramètres sur les autres invariants de domination et de broadcast domination dans cette classe des graphes . La deuxième partie sera réservé à notre apport personnel , l'étude du nombre de broadcasts efficaces distincts dans les cycles. Pour cela nous allons prouver des bornes et des valeurs exacts .

3.1 Différents invariants de broadcast et domination dans la classe des chaîne et cycles

Dans cette section , nous citons quelques résultats obtenus concernant les invariants de broadcast domination dans la classe des chaînes et la classe des cycles.

Théorème 3.1.1. [5]

Pour tout $n \geq 2$,

$$P_b(P_n) = \text{diam}(P_n) = n - 1.$$

pour chaque $n \geq 3$,

$$P_b(C_n) = \text{diam}(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Théorème 3.1.2. [5]

Pour tout entier $n \geq 2$, $\text{rad}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Bouchouika et al ont donné des valeurs exactes pour différents paramètres de domination et de broadcast domination dans les chaînes et des cycles.

Théorème 3.1.3. [5]

Pour tout entier $n \geq 2$, $\Gamma_b(P_n) = IR_b(P_n) = \text{Diam}(P_n) = n - 1$.

Théorème 3.1.4. [5]

Pour tout entier $n \geq 2$, $i_b(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Le nombre de broadcast domination dans les chaînes et les cycles à été donné par Erwin et al.

Proposition 3.1.1. [15]

Pour tout entier $n \geq 3$,

$$\gamma_b(C_n) = \gamma_b(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Lemme 3.1.1. [5]

Soit f une diffusion maximale irrédondante sur C_n . Si $H_f(v_i) = \emptyset$ pour chaque sommet v_i , $H_f(v_{i-1}) \neq \emptyset$ et $H_f(v_{i+1}) \neq \emptyset$.

Théorème 3.1.5. [5]

Pour tout entier $n \geq 3$, $ir_b(C_n) = \Gamma_b(C_n)$.

Théorème 3.1.6. [5]

Pour tout entier $n \geq 4$, $\Gamma_b(C_n) = 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$.

Pour tout entier $n \geq 3$, $\beta_b(C_n) = 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)$.

Pour le nombre de packing dans les chaînes .

Théorème 3.1.7. [5]

pour chaque $n \geq 3$,

$$p_b(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{Si } n \equiv 0 \pmod{8} \\ 2\lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1 & \text{Si } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8} \\ 2\lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2 & \text{Si } n \equiv 4, 5, 6, 7 \pmod{8} \end{cases}$$

3.2 Broadcast efficace dans les cycles

chaque cycle C_n de taille $n \geq 3$ peut admettre plusieurs broadcasts efficaces différents, par exemple la figure 3.1 illustre 9 broadcasts efficaces distincts sur le cycle C_{10} où $\gamma_{eb}(C_{10}) = 4$ et $\Gamma_{eb}(C_{10}) = 5$.

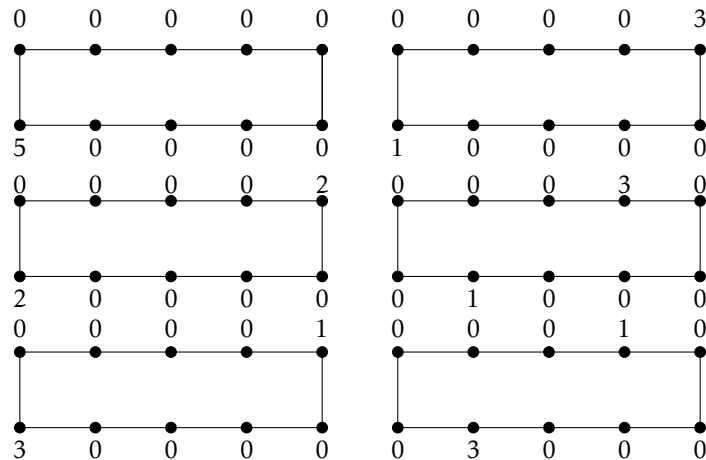


FIGURE 3.1 – Broadcasts efficaces distincts sur C_{10}

D'abord nous allons définir un nouveau invariant que nous allons étudier dans ce travail et qui est le nombre de broadcasts efficaces, distincts et lui donnez la notation $N_{\gamma_{eb}}(G)$.

Définition 3.2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe ,

Le graphe G peut comporter plusieurs broadcasts dominants efficaces, nous nous intéresserons donc à étudier le nombre maximum de broadcasts dominants efficaces pour ce graphe, ce nombre que nous considérerons comme le nouveau invariant et que nous noterons $N_{\gamma_{eb}}(G)$, ne prendrons pas en compte les cas symétriques.

Exemple 1.

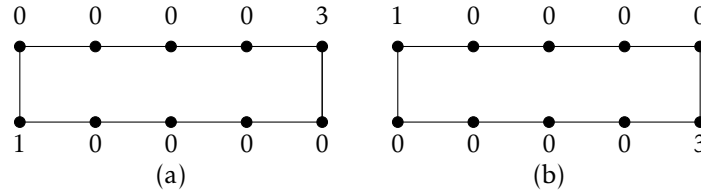


FIGURE 3.2 – Broadcasts efficaces distincts sur C_{10}

Dans cette exemple on a l'ensemble des broadcasts (a) symétriques avec l'ensemble des broadcasts (b).

la distribution des poids strictement positif sur les sommets du graphe G , possède exactement i valeurs strictement positif Pour cela On considère $N_{\gamma_{eb}(G)}^i$ le nombre des broadcasts efficaces distincts pour $|V_f^+| = i$, alors :

Théorème 3.2.1. $N_{\gamma_{eb}(C_n)} = N_{\gamma_{eb}(C_n)}^1 + N_{\gamma_{eb}(C_n)}^2 + \dots + N_{\gamma_{eb}(C_n)}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$.

Preuve 3.2.1. Pour pouvoir calculer le nombre de broadcasts domination efficaces distincts $N_{\gamma_{eb}(C_n)}$ on doit calculer $N_{\gamma_{eb}(C_n)}^i$ pour chaque cas $|V_f^+| = i$.

Les broadcasts efficaces qu'on peut affecter à un cycles peuvent être regroupés en fonction de la cardinalité de l'ensemble V_f^+ . Ces nombres élémentaires de broadcasts efficaces notés $N_{\gamma_{eb}(C_n)}^i$ où l'indice i commence par $i = 1$ pour lequel une seule valeur positive est mise sur un sommet du graphe et la valeur maximum de i est $i = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ car pour avoir un nombre maximum de poids positifs sur les sommets du graphe G , il faut que les poids ne dépassent pas la valeur 1 (pour minimiser la cardinalité de l'ensemble de voisinage du chaque sommet broadcast) et doit être positif donc les poids également exactement 1, maintenant pour $n = 3k$ la fonction broadcast doit être définie comme suit :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = 3k + 1. \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

d'où le nombre de sommet broadcast dans ce cas $|V_f^+| = \frac{n}{3}$.

Remarque 3.1. Le nombre maximum de sommets broadcast que peut avoir un graphe dans la fonction broadcast efficace est : $\frac{n}{3}$.

Proposition 3.2.1. pour tout entier $n \geq 3$,

$$N_{\gamma_{eb}}^1(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Preuve 3.2.2. montrons que $N_{\gamma_{eb}}^1(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour tout $n \geq 3$.

Soit C_n un cycle d'ordre n tq $C_n = (v_1 v_2 \dots v_n)$. Les sommets sont numérotés de 1 à n . Dans ce cas $|V_f^+| = 1$ c-à-d l'ensemble des sommets broadcasts contient un seul sommet, un seul sommet qui porte une valeur strictement positif qu'on le note à v_a .

La fonction broadcast efficace doit être définie comme suit :

$$f_i(v) = \begin{cases} rad(C_n) & \text{Si } v = v_a, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Le sommet broadcast peut se déplacer de la position $i=1$ jusqu'à la position $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ces fonctions sont efficaces et dominantes c-à-d sont efficaces est minimales pour l'efficacité pour chaque position .

Donc :

$$N_{\gamma_{eb}}^1(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Exemple 2.

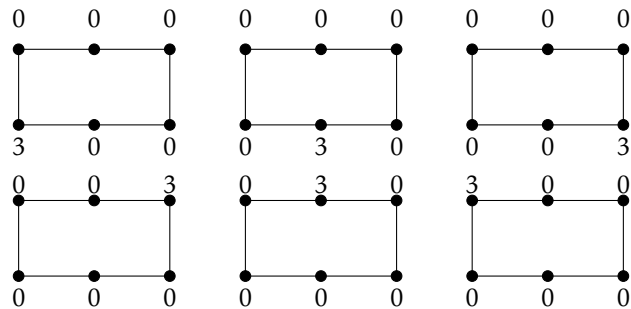


FIGURE 3.3 – Broadcasts efficaces distincts sur C_6

Proposition 3.2.2. pour tout entier $n > 5$,

$$N_{\gamma_{eb}}^2(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n^2 - 4n}{8} \rceil & \text{Si } n \text{ pair.} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Preuve 3.2.3. Soit C_n un cycle d'ordre n tel que : $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. comme $|V_f^+| = 2$ alors l'ensemble de sommets broadcasts contient deux sommets. Soit f une fonction broadcast efficace sur C_n avec deux sommets broadcast alors, chaque sommet broadcast f -domine une partie du cycle C_n cette partie constitue une boule qu'on note $b(x_i)$.

Supposons que i est la position du sommet v_i et que les deux sommets broadcasts ordonnés de la gauche à la droite sont v_a et v_b .

i) Si n est impair

n s'écrit sous la forme $n = (2j + 1) + 2k$.

$2j + 1$ représente un nombre impair.

$2k$ représente un nombre pair.

On démontre par l'absurde , alors on suppose qu'il existe une fonction broadcast efficace sur C_n .

x_a une sommet broadcast f -domine une partie de cycle C_n tant que $f(x_a) = j$ cette partie constitue une boule contient $2j + 1$ sommets.

supposons qu'il existe un autre sommet broadcast x_b f -domine une autre partie de cycle C_n tel que $f(x_b) = i$ cette partie contitue une 2ème boule qui doit contenir $2i + 1$ sommets(nombre impair des sommets).

(contradiction car le nombre des sommets restant est impaire).

alors en peut pas avoir une autre sommet broadcast dans la 2ème boule .

donc il n'existe pas un broadcast efficace dans le cycle d'ordre impair.

ii) Si n est pair

Le sommet x_a peut se déplacer de la position $i = 1$ jusqu'à la position $\frac{n}{4}$ dans ce cas le sommet

x_b peut avoir une seul position $\frac{n}{2} + i$.

Pour chaque position de x_a on aura $\frac{n}{2} - 2$ broadcasts efficaces.

Donc :

$$N_{\gamma_{eb}}^2(C_n) = (\frac{n}{2} - 2) \lceil \frac{n}{4} \rceil = \lceil \frac{n^2 - 4n}{8} \rceil.$$

Example 3.

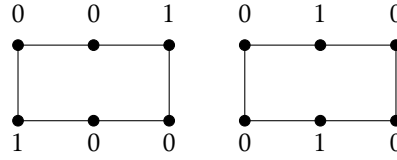


FIGURE 3.4 – Broadcasts efficaces distincts sur C_6 pour $|v_f^+|=2$

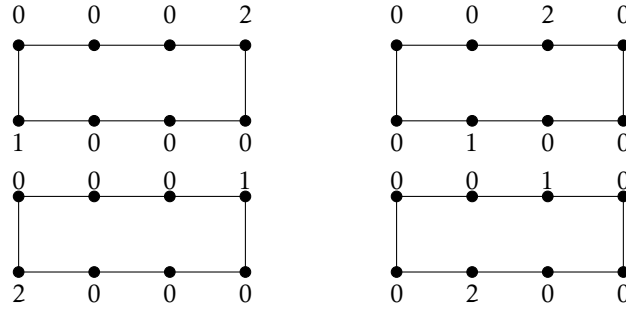


FIGURE 3.5 – Broadcasts efficaces distincts sur C_8 pour $|v_f^+|=2$

Proposition 3.2.3. *Pour tout entier $n \geq 9$,*

$$N_{\gamma_{eb}}^3(C_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-2i-1}) & \text{Si } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Preuve 3.2.4. *Soit C_n un cycle d'ordre n tq $C_n = (v_1 v_2 \dots v_n)$. Dans ce cas, $|V_f^+| = 3$ c-à-d l'ensemble des sommets broadcasts contient trois sommets, les trois sommets qui portent des valeurs strictement positives qu'on les notes v_a, v_b, v_c ordonnés de la gauche à la droite.*

i) Si n est impair :

Soit f une fonction broadcast efficace optimale sur le cycle C_n .

on note S_i le nombre des broadcasts efficaces tel que $f(v_b) = i$ et $N_f(v_b) = 2 \times i + 1$

$\forall i = 1, \dots, \text{rad}(C_{n-3})$ tq $:(\text{rad}(C_{n-6}) = \text{rad}(C_n) - 3 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3)$.

Les sommets v_a, v_c peuvent avoir des positions et des poids différents.

Alors on a :

$$N_{\gamma_{eb}}^3(C_n) = S_1 + S_2 + S_3 \dots S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3}$$

On peut décomposer le cycle C_n en deux cycles et une chaîne P_{2i+1} c'est la chaîne induite par le sommet v_b et son f -voisinage, les deux autres cycles sont induites par le reste du côté

gauche et le reste du côté droit, ces deux dernière cycles contient les deux autres sommets broadcast v_a, v_c .

les deux dernière cycles peuvent être considérés comme un cycle induite d'ordre $n - (2i + 1)$ pour l'étude de le broadcast efficace. Donc on trouve que :

$$S_1 = N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-3}).$$

$$S_2 = N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-5}).$$

$$S_3 = N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-7}).$$

jusqu'à

$$S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} = N_{\gamma_{eb}}^2(C_6) = 2.$$

Alors,

$$N_{\gamma_{eb}}^3(C_n) = N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-3}) + N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-5}) + N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-7}) + \dots + N_{\gamma_{eb}}^2(C_6).$$

Donc :

$$N_{\gamma_{eb}}^3(C_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-2i-1})$$

Comme illustration numérique nous avons :

$$N_{\gamma_{eb}}^3(C_9) = N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-3}) = N_{\gamma_{eb}}^2(C_6) = 2 \quad N_{\gamma_{eb}}^3(C_{11}) = 4 + 2 \quad N_{\gamma_{eb}}^3(C_{13}) = 8 + 4 + 2$$

ii) Si n est pair :

Soit f une fonction broadcast efficace optimale sur le cycle C_n .

Les sommets v_a, v_c peuvent avoir des positions et des poids différents .

On peut décomposer le cycle C_n en deux cycles et une chaîne P_{2i+1} c'est la chaîne induite par le sommet v_b , tel que $f(v_b) = i$ et $N_f(v_b) = 2$ les deux autres cycles sont induites par le reste du côté gauche et le reste du côté droit, ces deux dernières cycles contient les deux autres sommets broadcast v_a, v_c .

les deux dernière cycles peuvent être considérés comme un cycle induite d'ordre $n - (2i + 1)$.

On a n est un nombre pair alors n s'écrit sous la forme $n = (2i + 1) + (2j + 1)$.

Donc $n - (2i + 1) = 2j + 1$, on remarque que le reste est un nombre impair .

D'après la preuve précédente 3.2.3 on peut pas avoir deux sommets broadcast efficaces dans le cycles impair.

Donc :

$$N_{\gamma_{eb}}^3(C_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} N_{\gamma_{eb}}^2(C_{n-2i-1}) & \text{Si } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Example 4.

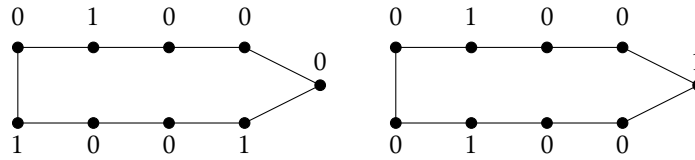


FIGURE 3.6 – Broadcasts efficaces distincts sur C_9 pour $|v_f^+| = 3$

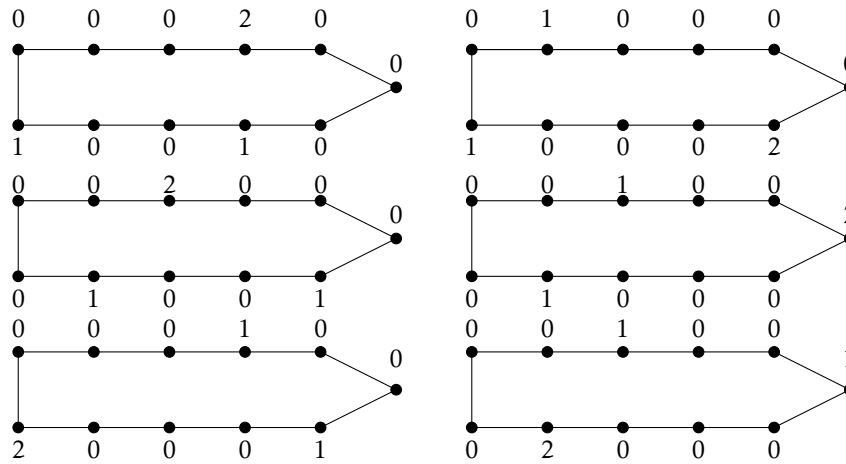


FIGURE 3.7 – Broadcasts efficaces distincts sur C_{11} pour $|v_f^+| = 3$

Proposition 3.2.4. Pour tout entier $n \geq 12$,

$$N_{\gamma_{eb}}^4(C_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 4} N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-2i-1}) & \text{Si } n \text{ pair,} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Preuve 3.2.5. Soit C_n un cycle d'ordre n tq $C_n = (v_1 v_2 \dots v_n)$. Dans ce cas, $|V_f^+| = 4$ c-à-d l'ensemble des sommets broadcasts contient quatres sommets, les quatres sommets qui portent des valeurs strictement positives qu'on les notes v_a, v_b, v_c, v_d ordonnés de la gauche à la droite.

i) Si n est pair :

Soit f une fonction broadcast efficace optimale sur le cycle C_n .

on note S_i le nombre des broadcasts efficaces tel que $f(v_b) = i$ et $N_f(v_b) = 2 \times i + 1$

$\forall i = 1, \dots, \text{rad}(C_{n-9})$ (tq : $\text{rad}(C_{n-9}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 4$).

Les sommets v_a, v_c, v_d peuvent avoir des positions et des poids différents.

Alors on a :

$$N_{\gamma_{eb}}^4(C_n) = S_1 + S_2 + S_3 \dots S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 4}.$$

On peut décomposer le cycle C_n en quatres cycles C_{2i+1} c'est le cycle induite par le sommet v_b et son f -voisinage, les trois autres cycles sont induites par le reste du côté gauche et le reste du côté droit, ces trois dernières cycles contient les trois autres sommets broadcast v_a, v_c, v_d . les trois dernière cycles peuvent être considérés comme un cycle induite d'ordre $n - (2i + 1)$ pour l'étude de le broadcast efficace. Donc on trouve que :

$$S_1 = N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-3}).$$

$$S_2 = N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-5}).$$

$$S_3 = N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-7}).$$

jusqu'à

$$S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 4} = N_{\gamma_{eb}}^3(C_9) = 2.$$

Alors,

$$N_{\gamma_{eb}}^4(C_n) = N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-3}) + N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-5}) + N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-7}) + \dots + N_{\gamma_{eb}}^3(C_9).$$

Donc

$$N_{\gamma_{eb}}^4(C_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 4} N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-2i-1}).$$

Comme illustration numérique nous avons :

$$N_{\gamma_{eb}}^4(C_{12}) = N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-3}) = N_{\gamma_{eb}}^3(C_9) = 2 \quad N_{\gamma_{eb}}^4(C_{14}) = 6 + 2 \quad N_{\gamma_{eb}}^3(C_{16}) = 14 + 6 + 2$$

i) Si n est impair :

Donc

$$N_{\gamma_{eb}}^4(C_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3 \\ \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} N_{\gamma_{eb}}^3(C_{n-2i-1}) & \text{Si } n \text{ pair,} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

ii) Si n est impair :

Soit f une fonction broadcast efficace optimale sur le cycle C_n .

Les sommets v_a, v_c, v_d peuvent avoir des positions et des poids différents.

On peut décomposer le cycle C_n en trois cycles et une chaîne P_{2i+1} c'est la chaîne induite par le sommet v_b , tel que $f(v_b) = i$ et $N_f(v_b) = 2 \times i + 1$ les trois autres cycles sont induites par le reste du côté gauche et le reste du côté droit, ces trois derniers cycles contiennent les trois autres sommets broadcast v_a, v_c, v_d .

Ils peuvent être considérés comme un cycle induit d'ordre $n - (2i + 1)$. On a n est un nombre pair alors n s'écrit sous la forme $n = (2i + 1) + 2k$. Donc $n - (2i + 1) = 2k$, on remarque que le reste est un nombre pair.

D'après la preuve précédente 3.2.4 on peut pas avoir 3 sommets broadcasts dans les cycles pairs.

Exemple 5.

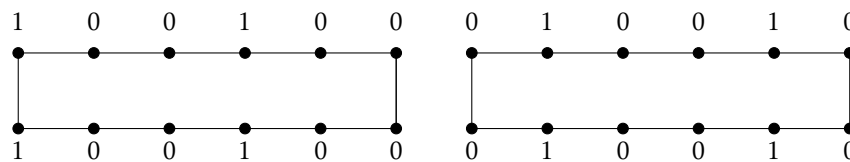
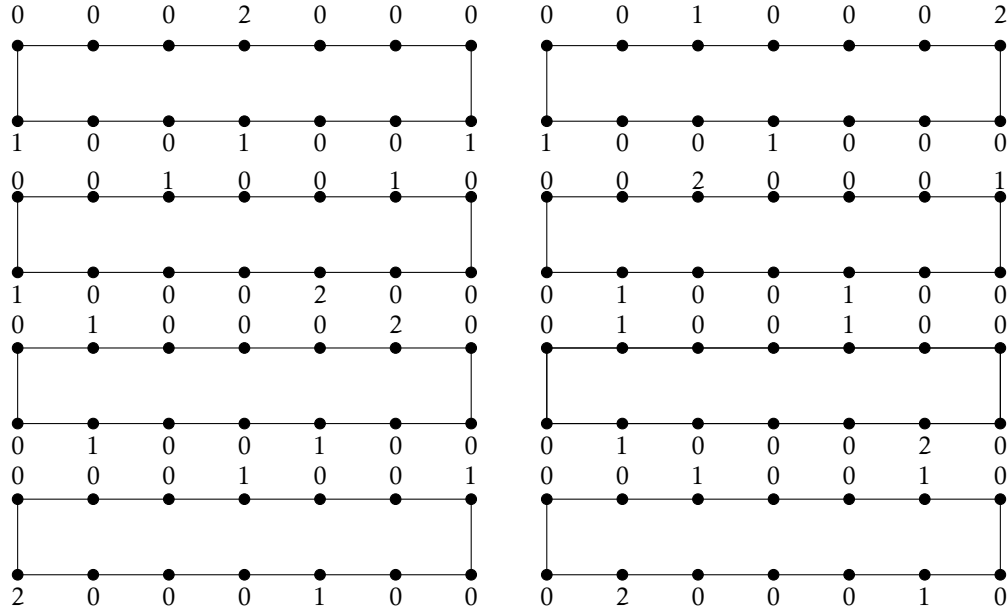


FIGURE 3.8 – Broadcasts efficaces distincts sur C_{12} pour $|V_f^+| = 4$


 FIGURE 3.9 – Broadcasts efficaces distincts sur $C_{14} \mid V_f^+ \mid = 4$

Proposition 3.2.5. Pour tout entier $n \geq 6$ et $k \geq 2$,

$$N_{\gamma_{eb}}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{Si } n = 3k, \\ \left(\frac{n-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{n-7}{3}\right) & \text{Si } n = 3k+1, \\ 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{Si } n = 3k+2. \end{cases}$$

Preuve 3.2.6. Soit C_n un cycle d'ordre n tant que $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ on distingue 3 cas selon la valeur de n en fonction de $3k$ $k \in \mathbb{Z}^+$.

Premier cas : $n = 3k$.

pour $n=6$, $N_{\gamma_{eb}}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(C_6) = 2$

maintenant on suppose que pour tout cycle C_n d'ordre $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ($k \geq 2$) et $\mid V_f^+ \mid = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ on définit la fonction broadcast efficace

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{Si } v = v_{3i}, i = 0 \dots \lceil \frac{n}{3} \rceil, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est une fonction broadcast efficace sur C_n donc $N_{\gamma_{eb}}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(C_n) \geq 2$.

Démontrons que $N_{\gamma_{eb}}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(C_n) \leq 2$.

- Si en déplace le premier 1 du premier sommet broadcast, tous les sommets broadcast prend

la valeur 1 et le graphe soit complètement f dominé.

• Si un sommet broadcast d'un graphe a une valeur supérieur ou égale a 2, dans cette situation on perd un sommet broadcast et on peut pas attendre le nombre de sommet $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ donc va pour attendre $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

La seul fonction broadcast efficace que nous avons c'est f d'où $N_{\gamma_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}}(C_n) = 2$ pour tout $n=3k$, $k = 0 \dots \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Deuxième cas : $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k \geq 3$).

pour $k = 3$ on a $n = 3 \times 3 + 1 = 10$ et $N_{\gamma_{eb}}(C_{10}) = 8 = 3^2 - 1$.

pour $k = 4$ on a $n = 3 \times 4 + 1 = 13$ et $N_{\gamma_{eb}}(C_{13}) = 14 = 4^2 - 1$.

jusqu'à $k = k'$ on a $n = 3k' + 1$ et $N_{\gamma_{eb}}(C_n) = k'^2 - (k' - 2)$.

tant que $n = 3k' + 1$ alors

$$3k' = n - 1$$

$$k' = \frac{n-1}{3}$$

$$k'^2 = \left(\frac{n-1}{3}\right)^2$$

$$k' - 2 = \frac{n-1}{3} - 2 = \frac{n-7}{3}$$

Donc

$$N_{\gamma_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}}(C_n) = \left(\frac{n-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{n-7}{3}\right).$$

Troisième cas : $n=3k+2$

dans cette situation on perd une sommet broadcast ,on peut pas attendre le nombre de sommet broadcast $\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

le nombre de sommet broadcast si $n=3k+2$ est $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ alors $|V_f^+| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

dans ce cas chaque sommets broadcast sur le graphe peut avoir deux différentes position .

finalement $N_{\gamma_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}}(C_n) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Donc

$$N_{\gamma_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{Si } n = 3k, \\ \left(\frac{n-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{n-7}{3}\right) & \text{Si } n = 3k + 1, \\ 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{Si } n = 3k + 2. \end{cases}$$

3.3 Conclusion générale

Du fait de la généralisation du concept de la domination, le nombre de broadcast domination jouit une grande importance dans la modélisation et la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire.

Au cours de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude du nombre des différents broadcasts efficaces $N_{\gamma_{eb}}(G)$ dans les cycles. En effet dans la première partie de notre travail nous avons défini ce nouveau invariant et donné les différentes propriétés . Puis déterminer des valeurs exactes pour ce nouveau invariant pour des cas particuliers en se basant sur la cardinalité de l'ensemble des sommets broadcast à savoir la cardinalité une, deux, trois et quatre. Par la suite, nous avons prouvé la cardinalité maximum que peut atteindre l'ensemble des sommets broadcast et nous avons donné la valeur correspondante du nombre des broadcasts efficaces...

Les résultats obtenus sont satisfaisants et tous prouvés. Bien que ces résultats soient importants .

Ce travail nous a permis de dégager plusieurs perspectives qui nous semblent intéressantes à explorer dans les travaux futurs. Parmi ces perspectives, nous citons :

- Étude du nombre des broadcasts efficaces pour les autres cas.
- Choisir une autre classe de graphe pour l'étude du nombre des broadcasts efficaces.
- Étude de l'aspect algorithmique et la complexité du nombre des broadcasts efficaces.

Bibliographie

- [1] AHCENE Samir, Sur le nombre de broadcast domination dans les graphes en bloc, mémoire de master. UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU 15/ 09/ 2013.
- [2] Benkaci Ali Zaina , nombre de domination double et nombre domatique double dans le graphe représentatif des intervalles d'un poset , 9/10/2007.
- [3] C. Berge, Théories des graphes et ses applications. Dunod, Paris, 1967.
- [4] J. R. S. Blair, P. Heggenes, S. Horton, and F. Manne. Broadcast domination algorithms for interval graphs, series-parallel graphs, and trees. *Congressus Numerantium*, 169 :55-77, 2004.
- [5] S. Bouchouika, I. Bouchemakh, E. Sopena. Broadcasts on Paths and Cycles. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, 2020, 10.1016/j.dam.2020.01.030. hal-02151205v2.
- [6] BOUFELGHA Ibrahim, Domination broadcast dans les prismes complémentaires , Université des sciences et de la technologie "Houari Boumedién, 12/03/2013.
- [7] A. Boumali, Les nombres de domination et broadcast domination. Mémoire de magister, USTHB. 2010.
- [8] B. Bresar, and S. Spacapan, Broadcast domination of products of graphs. University of Maribor, Slovenia. March 12, 2006.
- [9] Y. Caro and Y. Roditty. A note in the k -domination number of a graph. *Internat. J Math. Sci.* 13 :205-206. 1990.

- [10] CHOUALI Hamid ,Reconnaissance d'une classe de graphes Split graphe.mémoire de master,Universit ´ e MOULOUD MAMMERI de TIZI-OUZOU,9/10/2016.
- [11] Crespelle, C., Représentation dynamique de graphes, thèse de Doctorat, LIRMM,2007.
- [12] S. A. Cook," the complexity of theorem proving procedures", Proc.3rd ACM Symp. on Theory of computing, pp. 151-158, 1971.
- [13] J. E. Dunbar, D. J. Erwin, T. W. Haynes, S.M.Hedetniemi, and S.T.Hedetniemi, Broadcasts in graphs, Discrete Appl. Math. 154 :59-75, 2006 .
- [14] S.Erfanga, D.Chuangvin and K.Liyang, A note on NordhaunGaddum inequalities for domination. A paraître dans Disc. App. Mat
- [15] eD. Erwin, Cost domination in graphs, Ph.D. Dissertation,Western Michigan University, 2001.
- [16] D. Erwin, *Dominating broadcasts in graphs*, Bull. Inst. Combin. Appl. 2004.
- [17] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [18] T. W. Haynes. Michael A. Henning. *Domination and Totale Domination in Complementary prisms*, East Tennessee State University,USA,2008.
- [19] P.Heggernes and D.Lokshtanov, Optimal broadcast domination of arbitrary graphs in polynomial time , Dscrete Mathematics 306 :3267-3280 , 2006.
- [20] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guid to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Co., 1978.
- [21] G. M. Gillivray and K. Seyffarth, Domination numbers of planar graphs. *J. Graph Theory*, 22 :213-229, 1996.
- [22] Soufiane KHELIFI , CONTRIBUTION A L'ETUDE DES GRAPHES μ -EXCELLENTS ,Blida, Décembre 2004.
- [23] A.Mensouri, S.Bouhelel,coloration de nombre de Grundy pour les graphes triangulé, E Medisi)Tunisia,2008,2-3 .

- [24] MOULAY Meriem Sur la classe des prismes complémentaires, Université des sciences et de la technologie "Houari Boumedién, mémoire de magister,18/02/2015.
- [25]] Didier Müller , CAHIERS DE LA CRM, Introduction à la théorie des graphes ,2012.
- [26] O. Ore. Theory of Graphs. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, 38 (American. Mathematical Society Publications. AMS, Providence, 1962.
- [27] Sadi aris Algorithmes linéaires du nombre de broadcast domination de quelques classes de graphes,UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI, TIZI-OUZOU ,mémoire master,2014/2015.
- [28] R. Sahbi, Nombre de broadcast domination dans les arbres. mémoire de magister,, Université des sciences et de la technologie "Houari Boumedién, 24/01/2009.
- [29] Christine Solnon Théorie des graphes et optimisation dans les graphes.
- [30]] Michel Rigo,Théorie des graphes Deuxièmes bacheliers en sciences mathématiques Année académique 2009–2010.
- [31] Zerouale mohamed et kherroubi ibtissem, l'arete domination et l'arete domination indépendante dans les arbres,université de Blida 1,2019/2020.

Résumé

Soit G un graphe et C_n un cycle d'ordre n de longueur n , un ensemble dominant dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets du graphe G tel que tout sommet appartient soit à cet ensemble soit à un voisin dans celui-ci. Le problème de la broadcast domination est une variante du problème de domination. Un broadcast f est efficace qui est un invariant de broadcast si tout sommet est f -dominé exactement par un seul sommet f -dominant. Dans ce travail, nous étudions le nombre de différents broadcasts efficaces qu'on le note $N_{\gamma_{eb}}$ dans un cycle C_n . Nous déterminons soit des bornes soit des valeurs exactes.

Mots clés : Cycle , broadcast domination, broadcast efficace.

Abstract

Let G be a graph and C_n a cycle of order n , a dominating set in a graph G is a subset D of vertices of the graph G such that any vertex belongs either to this set or to a neighbor in this one . The broadcast domination problem is a variant of domination problem. A broadcast f is efficient as a broadcast invariant if every vertex in G is f -dominated by exactly one vertex. In this work, we study the number of different efficient broadcasts that we denote by $N_{\gamma_{eb}}(G)$ in a cycle C_n . We determine either bounds or exact values.

Keys : Cycle, broadcast domination, efficient broadcast.