

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre universitaire
Abd Elhafid Boussof Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de
Master**

En: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Bifurcation pour une équation de Schrödinger
non linéaire**

Préparé par :

- Dalal khireddine
- Zineb bounamous

Devant le jury :

Bouden Rabeh (M.C.A)

C.U. Abd Elhafid Boussof-Mila Président

Mehazzem Allal (M.A.A)

C.U. Abd Elhafid Boussof-Mila Rapporteur

Kaouache Smail (M.C.A)

C.U. Abd Elhafid Boussof-Mila Examineur

Année Universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abord à remercier "**ALLAH**" le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Mr. "**Mehazzem Allal**". Nous le remercions de nous avoir encadrés, orientés, aidés et conseillés durant toute la période du travail.

Nous adressons nos sincères remerciements, respect et notre gratitude à tous les professeurs, intervenants pour l'honneur qu'ils nous ont accordé en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Notre remerciement aussi à toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions durant nos recherches.

Enfin, nous tenons également à remercier nos chers parents, frères, et toute la famille pour leur inestimable soutien, et nous voudrions exprimer notre reconnaissance envers les amis et collègues qui nous ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de notre démarche, merci ∞ ...

DEDICACES

Je dédie ce Modest travail

À ma mère et à mon père pour leur soutien, leur patience

Leur encouragement durant mon parcours scolaire.

À mes frères ainsi à toute ma famille.

À tous mes amis,

Et à l'ensemble des étudiants de la promotion master

LMD-MI de l'année 2020 – 2021.

” DALAL – ZINEB ”

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	7
1 Notions et définition générales	9
1.1 Systèmes dynamiques	9
1.1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques	10
1.1.2 Système dynamique linéaire	10
1.1.3 Système dynamique non linéaire	11
1.1.4 Trajectoire	11
1.1.5 Espace de phase	12
1.1.6 Orbite	12
1.2 Points d'équilibre	12
1.3 Cycle limite	13
1.4 Stabilité	14
1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov	14
1.5 Structurellement stable	16
1.6 espace de Hilbert	16
1.7 espace de Banach	16
1.8 le spectre	17
1.9 Théorie des Bifurcations	17
1.10 Définition de bifurcation	17
1.11 Diagramme de bifurcation	18
1.12 Codimension d'une bifurcation	18
1.12.1 Type des bifurcations	18
2 Équation de Schrödinger non linéaire	20
2.1 Formulation	21
2.2 Hamiltonien	21
2.3 L'équation de Schrödinger non linéaire discrète (DNLS)	23
2.4 Bifurcation : notions générales et application à NLS	24
2.4.1 Ondes stationnaires de NLS	25

2.5	Bifurcations d'orbites périodiques	27
2.5.1	La bifurcation pli d'un cycle limite	27
2.5.2	Bifurcation de cycles limites par déformation continue d'une orbite périodique d'un système périodique	28
2.5.3	La bifurcation homocline de champs de vecteurs du plan	29
2.5.4	Le doublement de période	30
2.5.5	Exemples de bifurcations homoclines	31
3	Bifurcation et stabilité pour NLS	33
3.1	Bifurcation : notions générales et application à NLS	33
3.1.1	Ondes stationnaires de NLS	34
3.1.2	Théorie de bifurcation	35
3.1.3	Bifurcation depuis une valeur propre	38
3.2	Bifurcation depuis le spectre essentiel	39
3.2.1	La puissance pure	39
3.3	Stabilité des ondes stationnaires	44
3.3.1	NLS en dimension $N = 1$	44
3.4	Stabilité orbitale	45
3.5	Les conditions spectrales	47
3.6	La condition de pente	48
	CONCLUSION GÉNÉRALE	51
	Bibliographie	54

TABLE DES FIGURES

3.1	Bifurcation et stabilité pour NLS	37
3.2	Bifurcation et stabilité pour NLS	46

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'équation de Schrödinger conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1925, est une équation fondamentale en mécanique quantique massive non relativiste, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique. L'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) se pose fréquemment dans des problèmes physiques, par exemple dans la propagation laser en optique non-linéaire. L'équation NLS de focalisation périodique a servi comme une équation pour décrire les phénomènes d'onde instables. La bifurcation depuis des valeurs propres a d'abord été démontrée par Krasnosel'skii en 1956. Il utilisa le degré topologique pour montrer qu'il y a bifurcation depuis toute valeur propre de multiplicité impaire. Noter que pour les opérateurs de Schrödinger, la valeur propre principale est simple.

Ce résultat a été étendu par Rabinowitz en 1971, qui montra que des branches globales émanent des points de bifurcation.

De plus, en 1971, Crandall et Rabinowitz montrèrent que, localement, la branche bifurquant d'une valeur propre simple est une courbe continue.

en 1956 jusqu'à 1971 utilisent le degré de Leray-Schauder, nécessitant la compacité des opérateurs. Ils ont été étendus depuis à des situations non compactes. Le résultat est purement analytique et plus flexible à cet égard.



L'objectif de notre travail est étudier l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS), et nous intéressons à appliquer la théorie de la bifurcation et stabilité pour (NLS) .

Cette mémoire est composée de trois chapitres organisés comme suite :

dans le premier chapitre nous présentons quelques notions de base que nous avons utilisées tout au long de ce travail .

le deuxième chapitre consacre à quelques détails sur l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) continue et discrète avec à quelques modules, et on présente la théorie de la bifurcation, ou on introduit deux types de bifurcations .

Enfin dans le troisième chapitre On termine notre travail par une application sur la bifurcation et la stabilité pour une équation de Schrödinger non linéaire .

CHAPITRE 1

NOTIONS ET DÉFINITION GÉNÉRALES

Dans ce chapitre, on sinéresse dabord à la présentation des notions générales sur les systèmes dynamiques : tels que définition, points d'équilibre, cycle limite, stabilité... et quelques définitions .

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1. *Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet (X, T, f) constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état $f : X \times T \rightarrow X$, qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant. [10]*

Donc, on peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps (système continu), ou par rapport à une autre variable (système discret).

1.1.1 Représentations mathématiques des systèmes dynamiques

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques encore, appelés paramètres du système sont fixes. [17]

- Dans le cas où la composante temps est continue, le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, n ; \text{ et } r \in \mathbb{N}.$$

- Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), \quad x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3...$$

1.1.2 Système dynamique linéaire

Un système dynamique linéaire ou système différentiel linéaire est une équation portant sur une fonction vectorielle $x(t)$, qui peut s'écrire :

$$\dot{x} = A(t) x(t). \tag{1.1}$$

Où plus généralement ,

$$\dot{x} = A(t) x(t) + g(t) .$$

Où A est une matrice carrée et g un vecteur dont les éléments sont des fonctions de t .

Le mot linéaire concerne uniquement la dépendance par rapport à x , les éléments de $A(t)$ et de $g(t)$ n'ont pas à être linéaires en t . [7]

1.1.3 Système dynamique non linéaire

Un système dynamique non linéaire peut toujours être écrit par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x(t)) \end{pmatrix}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et f est une fonction non linéaire. On note $f(t, x(t)) = F(x(t))$.

A la section (1.1), on va étudier le cas où f est linéaire bien entendu, dans le cas non linéaire, on ne peut pas faire une description aussi détaillée, puisque la fonction f est arbitraire, l'analyse des systèmes linéaires va nous aider énormément dans l'étude des systèmes non linéaires, plus précisément, on montre qu'au voisinage des champs de vecteurs, le comportement des solutions d'une équation est presque toujours du même type que celui des solutions de son approximation linéaire. [7]

1.1.4 Trajectoire

Soient $(M, \varphi_{t \in G})$ un système dynamique et x un état de l'espace des phases.

On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M

Par :

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow M, \\ t &\rightarrow \varphi^t(x). \end{aligned}$$

Donc, la trajectoire est une solution du système différentiel. [10]

1.1.5 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement, le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps. [10]

1.1.6 Orbite

Définition 1.2. [10] On appelle orbite d'un point x , l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par :

$$\gamma(x) = \varphi^t(x), t \in G .$$

1.2 Points d'équilibre

Définition 1.3. [15] On dit que $x_\epsilon \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre ou point critique de l'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x) ,$$

si

$$f(x_\epsilon) = 0 .$$

Remarque 1.1. Par un changement de variable $y = x - x_\epsilon$, on peut ramener le point à l'origine (0) . [17]

Exemple 1.1. Considérons :

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

L'équation $\dot{x} = f(x)$ a deux points d'équilibre, $x_\epsilon^1 = (1, 0)^T$ et $x_\epsilon^2 = (-1, 0)^T$. [15]

1.3 Cycle limite

Soit le système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.2)$$

Où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Définition 1.4. *Un cycle limite C du système (1.2) est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phases, c'est à dire qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées .*

Théorème 1.1. *C étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C sont telle que :*

Soit elles s'enroulent toutes en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou bien $t \rightarrow -\infty$.

1. *Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de C , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable.*
2. *Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de C , pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est instable.*

Exemple 1.2. *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Tel que α est un paramètre.

En coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

tel que $x^2 + y^2 = r^2$, le système précède devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

$r = 1$ correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$.

Si $\alpha = 0$, le système a une infinité d'orbites périodiques et il n'ya pas de cycles limites.

Remarque 1.2. Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires. [6]

1.4 Stabilité

La notion de stabilité a pour but de formaliser la propriété d'un système dynamique tel que le système reste proche d'un état dit d'équilibre (dans un sens à préciser et à quantifier). Il existe des dizaines de types de stabilités différentes pour caractériser l'évolution d'un point vers son état stable. Les principaux types de stabilité sont abordés ici.

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1.3}$$

avec f une fonction non linéaire.

Définition 1.5. Le point d'équilibre x_ϵ du système (1.3) est :

1. Stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_\epsilon\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_\epsilon\| < \epsilon, \forall t > t_0. \tag{1.4}$$

2. *Asymptotiquement stable si :*

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_\epsilon\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_\epsilon\| = 0.$$

3. *Exponentiellement stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_\epsilon\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x_\epsilon\| < a \|x(t_0) - x_\epsilon\| \exp(-bt) \quad , \forall t > t_0.$$

4. *Instable si l'équation (1.4) n'est pas satisfais . [17]*

Théorème 1.2. *Considérons le champ de vecteur suivant :*

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Soit x_ϵ un point d'équilibre de (1.5) et $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie sur un voisinage U de x_ϵ tel que :

1. $V(x_\epsilon) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_\epsilon$.

2. $V(x) \leq 0$ dans $U \setminus \{x_\epsilon\}$.

Alors x_ϵ est stable. De plus, si

3. $V(x) < 0$ dans $U \setminus \{x_\epsilon\}$.

Alors x_ϵ est asymptotiquement stable . [20]

Exemple 1.3. :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

Ce système a un point d'équilibre unique $(0, 0)$. Considérons la fonction suivant :

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 .$$

On a $V(0, 0) = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

De plus :

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt} V(x_1, x_2) \\ &= 2x_1x_1 + 2x_2x_2 \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)^2, \end{aligned}$$

donc $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Alors : l'origine est instable. [18]

1.5 Structurellement stable

Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) structurellement stable si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle .

Définition 1.6. *Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) est structurellement stable ou robuste si les systèmes suffisamment "proches" présentent un même comportement dynamique . [16]*

1.6 espace de Hilbert

est un espace préhilbertien complet c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme $\|\cdot\|$ découle d'un produit scalaire ou hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par la formule

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

c'est la généralisation en dimension quelconque (finie ou infinie) d'un espace euclidien ou hermitien .

1.7 espace de Banach

un espace vectoriel norme est un espace de Banach si seulement si dans cet espace toute série absolument convergent est convergent .

1.8 le spectre

est l'ensemble des ces valeurs spectrale en dimension finie, cet ensemble se réduit à l'ensemble des valeurs propres de cet endomorphisme ou de sa matrice dans une base .

1.9 Théorie des Bifurcations

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de bifurcation . Un terme qui a été introduit par Henri Poincaré au début du XX^e siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système , la solution de l'équation différentielle change qualitativement : on dit qu'il ya bifurcation . Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas l'évolution temporelle . L'étape suivante consiste à faire varier les paramètres de contrôle du système . On regarde alors que deviennent les points d'équilibre, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres du système et les bifurcations qui apparaissent. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation , la construction du portrait de phase nécessite des outils adoptés .

1.10 Définition de bifurcation

Soit le système dynamique non linéaire de dimension n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad (1.6)$$

tel que μ est un paramètre de contrôle, et x_ϵ la solution de ce système . [16]

Définition 1.7. *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_ϵ du système (1.6) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

1.11 Diagramme de bifurcation

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

Définition 1.8. *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

1.12 Codimension d'une bifurcation

Si l'ensemble des valeurs de bifurcation est défini par k conditions

$$C_1(\mu) = C_2(\mu) = \dots = C_k(\mu) = 0 \quad \text{avec } 1 \leq k \leq p.$$

La bifurcation est dite de codimension k (on peut dire que la codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation).

1.12.1 Type des bifurcations

Bifurcations locales

La codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation. On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations de codimension un (noeud-col, transcritique, fourche, hopf), qui correspondent tous à des comportements génériques.

Bifurcations globales

Ces types de bifurcations correspondent à des collisions de deux variétés et elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution. Ici, les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées "globales", et deux types sont : orbites hétéroclines et orbites homoclines.

CHAPITRE 2

ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la physique quantique, comme l'est la loi de Newton en physique classique . On la retrouve pour décrire des phénomènes assez variées que ce soit dans l'optique quantique (propagation d'un faisceau de laser), la physique atomique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), la technologie électronique (semi conducteurs, transistors, mémoires), la physique des plasmas, astrophysique, la microscopie électronique , la neutronique , la chimie ou encore la biologie,...). Nous présentons dans ce chapitre la définition et la formulation de l'équation de Schrödinger, et quelques modèles de cette équation, l'équation DNLS , les paires de Lax des systèmes de NLS et la relation avec la théorie de Floquet , l'instabilité linéaire .

2.1 Formulation

Dans une particule quantique, qu'elle soit une particule dans un électron dans l'atome, est toujours décrite par une fonction d'onde .

En général cette fonction d'onde dépend de l'espace et du temps ,

$$\psi(\vec{r}, t).$$

La densité de probabilité de trouver la particule à l'endroit \vec{r} à l'instant t est

$$P(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2.$$

Lorsque cette densité de probabilité ne dépend pas du temps, on dit que le système est dans un "état stationnaire" .

Considérons une particule de masse m libre de se déplacer sur l'axe des x et soumise à une force dérivant d'un potentiel $V(x)$.

La fonction d'onde de la particule satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$ih \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{-h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t), \quad (2.1)$$

où $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial x$ indiquent les dérivées partielles par rapport à t et x respectivement et h le constante de Dirac .

On nomme l'équation (2.1) équation de Schrödinger . À partir de la condition initiale $\psi(x, 0)$ et du potentiel $V(x)$, elle permet de calculer $\psi(x, t)$. [20]

2.2 Hamiltonien

L'opérateur différentiel qui apparaît dans le membre de droite de l'équation de Schrödinger s'appelle le **Hamiltonien** et indique par \hat{H} .

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

Soit \mathcal{H} l'espace des fonctions d'onde du système. L'opérateur \hat{H} est une application linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{H} :

$$\hat{H} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; \quad \hat{H}(a\psi_1 + b\psi_2) = a\hat{H}\psi_1 + b\hat{H}\psi_2 \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

\hat{H} représente physiquement l'énergie, cinétique plus potentielle, de la particule. En termes de l'opérateur \hat{H} , l'équation de Schrödinger prend la forme compacte :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x, t). \quad (2.2)$$

Fonctions propres de \hat{H} et les état stationnaires

Nous cherchons les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger. Pour cela, il faut d'abord calculer les "fonctions propres" de l'opérateur \hat{H} . Il s'agit de fonctions tels que

$$\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x), \quad (2.3)$$

avec E un nombre réel. C'est à partir des fonctions propres de \hat{H} que l'on construit les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger.

Considérons en effet une fonction d'onde de la forme :

$$\psi(x, t) = \phi(t)\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ satisfait l'équation (2.3), et injectons-la dans l'équation de Schrödinger (2.2).

On obtient :

$$i\hbar \frac{d\phi(t)}{dt} \varphi(x) = E\phi(t)\varphi(x) \quad \rightarrow \quad \phi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (2.4)$$

on a donc une solution de l'équation de Schrödinger de la forme :

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et\varphi(x)}. \quad (2.5)$$

La densité de probabilité de trouver la particule à l'endroit x à l'instant t ,

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2, \quad (2.6)$$

ne dépend pas du temps. L'état ψ décrit dans (2.5) est un état "stationnaire" dont les propriétés ne varient pas dans le temps .

La constante E qui apparaît dans (2.4) représente l'énergie de la particule .

2.3 L'équation de Schrödinger non linéaire discrète (DNLS)

L'équation de Schrödinger non linéaire discrète décrit un modèle particulièrement simple pour une structure d'oscillateur couplés anharmonique. Dans une dimension spatiale, la formule générale de l'équation est :

$$i\frac{d\psi_n}{dt} = G(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1}) + F(\psi_n), \quad (2.7)$$

où, $F(\psi_n)$ représente le terme non linéaire d'équation de Schrödinger, $G(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1})$ est la fonction de couplement à court terme .

Équation de Schrödinger semi-linéaire

L'équation de Schrödinger semi-linéaire est une équation comportant un terme linéaire de type équation de Schrödinger et un terme de réaction non-autonome :

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \Delta\psi_n + f(n, \psi_n) = 0.$$

L'équation de Schrödinger semi-linéaire intervient dans de nombreux domaines de la physique : propagation d'ondes, optique non-linéaire, modèles de lasers, modèles de plasma, ... etc .

2.4 Bifurcation : notions générales et application à NLS

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Considérons l'équation :

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0, \quad (NLS)$$

pour $\psi = (t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $N \geq 1$.

On suppose que $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}, \mathbb{R})$ vérifiée :

$$g(x, e^{i\theta}w) = e^{i\theta}g(x, w) \quad ,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N, \theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$.

Cette propriété implique que l'on peut mettre g sous la forme :

$$g(x, \psi) = f(x, |\psi|^2)\psi \quad ,$$

qui intervient dans les applications v on a donc $g(x, 0) \equiv 0$. Le coefficient $f(x, |\psi|^2)$ permet de modéliser la réponse d'un milieu non-linéaire et non-homogène en présence

d'un champ ψ .

NLS apparaît dans de nombreux modèles physiques, notamment les ondes de Langmuir en physique des plasmas, la condensation de Bose-Einstein, les vagues scélérates, etc.

NLS est omniprésente en optique non-linéaire, dont la théorie est historiquement très étroitement liée aux recherches sur NLS, cf. discussion dans G., Adv. Nonlin. Stud. 2010. [4]

Questions mathématiques importantes : existence (locale et globale), comportement asymptotique, stabilité, explosion en temps fini , diffusion, aspects système dynamique, limite semiclassique, etc .

Quelques noms illustres associés à NLS : Ginibre, Velo, Cazenave, Lions, Merle, Raphaël, Gérard, Weinstein, Bourgain, Strauss, Tao, Ambrosetti, Malchiodi, etc .

2.4.1 Ondes stationnaires de NLS

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0. \quad (NLS)$$

L'équivariance de g par rapport au groupe $e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}$ permet de chercher des solutions sous forme d'ondes stationnaires :

$$(t, x) = e^{i\lambda t}u(x) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

Cet Ansatz conduit alors au problème stationnaire :

$$\Delta u + g(x, u) = \lambda u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (SNLS)$$

Une solution de (SNLS) est un couple $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$. Noter qu'on a une ligne de solutions triviales $(\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.1 (Théorème de Sotomayor). *On suppose que $f(x_0, \lambda_0) = 0$ et que la matrice $A = D_x f(x_0, \lambda_0)$ admet $\mu = 0$ comme valeur propre simple de vecteur propre ν .*

On désigne par ω un vecteur propre de la transposée A^t pour la même valeur propre $\mu = 0$.

On suppose de plus que A a k valeurs propres de partie réelle négative et $n - k - 1$ valeurs

propres de partie réelle positive .

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}\omega^t D_\lambda f(x_0, \lambda_0) &\neq 0 , \\ \omega^t D_x^2 f(x_0, \lambda_0)(\nu, \nu) &\neq 0 .\end{aligned}$$

Alors, il existe une courbe différentiable de points singuliers du système différentiel

$$\dot{x} = f(x, \lambda),$$

dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ qui passe par (x_0, λ_0) et qui est tangente à l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \lambda_0$. Près de x_0 , il n'y a aucun point singulier si $\lambda < \lambda_0$ et il y a deux points singuliers si $\lambda > \lambda_0$.

Les deux points singuliers sont hyperboliques et possèdent des variétés stables de dimension k et $k + 1$ respectivement.

L'ensemble des champs de vecteurs différentiables qui satisfont la condition ci-dessus est un ouvert dense de l'espace de Banach des champs de vecteurs différentiables qui ont le point x_0 comme point singulier avec une valeur propre nulle simple.

La bifurcation ainsi décrite s'appelle la bifurcation pli. Si on modifie les conditions de la sorte :

$$\begin{aligned}\omega^t D_\lambda f(x_0, \lambda_0) &= 0 , \\ \omega^t D_x D_\lambda f(x_0, \lambda_0)v &\neq 0, \\ \omega^t D_x^2 f(x_0, \lambda_0)(v, v) &\neq 0 .\end{aligned}$$

la bifurcation s'appelle bifurcation transcritique. Si on les modifie comme suit :

$$\begin{aligned}\omega^t D_\lambda f(x_0, \lambda_0) &= 0, \\ \omega^t D_x D_\lambda f(x_0, \lambda_0)v &\neq 0, \\ \omega^t D_x^2 f(x_0, \lambda_0)(v, v) &\neq 0, \\ \omega^t D_x^3 f(x_0, \lambda_0)(v, v, v) &\neq 0 .\end{aligned}$$

la bifurcation s'appelle la fourche .

La bifurcation pli représente donc la plus simple (et générique) des façons pour un système de perdre sa stabilité structurale . On ne donne pas la démonstration du théorème de Sotomayor mais on va l'expliciter dans le cas de la dimension un . [9]

2.5 Bifurcations d'orbites périodiques

La théorie des bifurcations des systèmes dynamiques discrets consiste à étudier les modifications des aspects qualitatifs des trajectoires formées par les itérés d'une famille d'applications :

$$x \mapsto F(x, \lambda),$$

lorsque le paramètre λ varie. En particulier, les bifurcations d'une application de retour d'un système différentiel décrivent des modifications des orbites périodiques . [19]

2.5.1 La bifurcation pli d'un cycle limite

Une analyse locale conduit à considérer le cas de l'application de premier retour :

$$P(r)r = l_0r + l_1r^3 + l_2r^5 + \dots$$

qui est conjuguée à l'application polynômiale :

$$P(r) - r = l_0r + l_1r^3 + l_2r^5.$$

Les cycles limites au voisinage de l'origine correspondent aux racines de $P(r) - r = 0$ et si on a :

$$\begin{aligned} l_1^2 - 4l_0l_2 &> 0, \\ -l_1/l_2 &> 0, \\ l_0/l_2 &> 0. \end{aligned}$$

les deux racines de l'équation sont réelles et positives et il y a deux cycles limites , un stable et un instable. La bifurcation se produit à la confluence des deux cycles, c'est à dire lorsque le polynôme a une racine double et donc pour :

$$l_1^2 - 4l_0l_2 = 0 ,$$

Cette bifurcation s'appelle la bifurcation pli d'un cycle limite .

2.5.2 Bifurcation de cycles limites par déformation continue d'une orbite périodique d'un système périodique

On considère une petite perturbation d'un système hamiltonien :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f(x, y), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g(x, y). \end{aligned}$$

On suppose que le système hamiltonien possède un continuum d'orbites périodiques dans un certain domaine du plan .

On désigne par γ_c l'orbite périodique qui correspond à une des composantes connexes de $H(x, y) = c$.

On considère la un-forme différentielle associée au champ de vecteurs ci-dessus :

$$dH + \epsilon\omega = dH + \epsilon[f(x, y)dy - g(x, y)dx],$$

et qui s'annule identiquement le long des orbites de ce champ de vecteurs .

La solution γ_c est une solution du système pour $\epsilon = 0$.

Dans la perturbation , la solution se déforme légèrement et on peut calculer sa déformation au premier ordre en .

Soit Σ une section transverse à la solution γ_c munie de la coordonnée $u = H|_{\Sigma}$.

Pour ϵ suffisamment petit, la section Σ reste transverse au flot du système différentiel

perturbé .

Avec comme donnée initiale un point u de Σ , l'orbite du système différentiel perturbée γ_c , recoupe la section transverse en un point de coordonnée $L(u, \epsilon)$. On a :

$$\int_{\gamma_{c,\epsilon}} [dH + \epsilon\omega] = 0 .$$

Un développement au premier ordre en ϵ donne :

$$\partial L(u, \epsilon) \partial \epsilon|_{\epsilon=0} = - \int_{\gamma_c} \omega .$$

Par le théorème de préparation de Weierstrass, on sait que les orbites périodiques isolées qui se déforment avec la perturbation en l'orbite périodique γ_c lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vont correspondre aux valeurs de c qui sont des zéros isolés de l'intégrale :

$$f(c) = \int_{\gamma_c} \omega ,$$

Dans le cas où cette fonction est identiquement nulle, il faut utiliser l'algorithme des dérivées successives .

2.5.3 La bifurcation homocline de champs de vecteurs du plan

La bifurcation homocline consiste en la naissance d'un cycle limite par déformation d'une connexion homocline . On suppose que le système :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) , \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) . \end{aligned}$$

possède un point singulier (x_0, y_0) de type col et qu'il présente une connexion homocline en ce point, c'est à dire que la variété stable du col une fois prolongée vient se confondre avec la variété instable (cf. Définition 25). On dit que la connexion homocline est simple si

$$\sigma_0 = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right] (x_0, y_0) = 0 .$$

On peut démontrer le résultat suivant. Si la connexion homocline est simple, il ne peut naître par bifurcation de la connexion homocline qu'un cycle limite au plus et si ce cycle limite existe, il est stable si $\sigma_0 < 0$ et instable si $\sigma_0 > 0$.

2.5.4 Le doublement de période

Cette bifurcation peut se produire dans le cas où un des multiplicateurs de l'orbite périodique devient égal à -1 tandis que les autres sont de module différent de 1 .

La variété centrale de l'orbite périodique est donc de dimension 1 .

D'après le théorème de la variété centrale, on peut supposer que la dimension de la variété ambiante est égale à 2 .

Une section transverse à l'orbite périodique détermine une application de premier retour qui est une application P .

On suppose que le système est dans une famille dépendant d'un paramètre λ et que la bifurcation se produit pour la valeur $\lambda = \lambda_0$.

On a donc :

$$P(\lambda_0)(0) = 0, \quad P'(\lambda_0)(0) = -1.$$

Le théorème des fonctions implicites donne que $P(\lambda)$ possède un unique point fixe voisin de 0 . Après translation, on peut supposer que $P(\lambda)(0) = 0$.

Pour une famille générique, on peut supposer que $\frac{dP(\lambda)(0)}{d\lambda}$ ne s'annule pas et prendre cette quantité comme paramètre de la déformation.

On a donc :

$$P(\lambda)(x) = (-1 + \lambda)x + O(x^2).$$

A conjugaison près, on se ramène au cas :

$$P(\lambda) : x \mapsto (-1 + \lambda)x - \epsilon x^3, \epsilon = \pm .$$

L'orbite périodique est attractive si $\lambda > 0$ et répulsive pour $\lambda < 0$.

On considère alors les points périodiques de P de période 2.

Ils s'obtiennent avec l'application $P \circ P$:

$$P \circ P : x \mapsto x + (-2\lambda + \lambda^2)x + [1 - \lambda - (\lambda - 1)^3]x^3 + \dots$$

Si on néglige les termes en λ_2 , on obtient que les points périodiques de période 2 sont donnés par $x = 0$ et par une courbe :

$$\epsilon\lambda - x^2 + \dots = 0 .$$

Pour $\lambda > 0$, on obtient deux points qui sont sur une même orbite périodique de période double du champ de vecteurs . Elle est :

attractive si $\lambda < 0$,

répulsive si $\lambda > 0$, (le multiplicateur vaut $1 + 4\lambda$) .

Si on prend le cas $\epsilon < 0$ par exemple, on a ainsi une orbite périodique attractive si $\lambda > 0$, suivie d'une orbite périodique attractive de période double si $\lambda < 0$.

D'où le nom de bifurcation de doublement de période .

L'orbite périodique de période double borde un ruban de Mobius centré sur l'orbite périodique de période simple et de largeur de l'ordre de $\epsilon\lambda$.

2.5.5 Exemples de bifurcations homoclines

On peut considérer le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y , \\ \dot{y} &= x + x^2 - xy + \mu y . \end{aligned}$$

1. Montrer que pour la valeur $\mu = -1$, le point singulier $(-1, 0)$ présente une bifurcation de Hopf surcritique .

2. Vérifier que le cycle limite croît avec μ jusqu' à une valeur proche de $\mu = -0.85$ pour laquelle il disparaît dans une bifurcation homocline .

CHAPITRE 3

BIFURCATION ET STABILITÉ POUR NLS

3.1 Bifurcation : notions générales et application à NLS

L'équation de Schrödinger non-linéaire

Considérons l'équation :

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0, \tag{NLS}$$

pour $\psi = \psi(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $N \geq 1$.

On suppose que $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}, \mathbb{R})$ vérifie :

$$g(x, e^{i\theta}w) = e^{i\theta}g(x, w) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N, \theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}.$$

Cette propriété implique que l'on peut mettre g sous la forme :

$$g(x, \psi) = f(x, |\psi|^2)\psi,$$

qui intervient dans les applications ; on a donc $g(x, 0) \equiv 0$.

Le coefficient $f(x, |\psi|^2)$ permet de modéliser la réponse d'un milieu non-linéaire et non-homogène en présence d'un champ ψ .

3.1.1 Ondes stationnaires de NLS

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0. \tag{NLS}$$

L'équivariance de g par rapport au groupe $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ permet de chercher des solutions sous forme d'ondes stationnaires :

$$\psi(t, x) = e^{i\lambda t}u(x), \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{et } u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),$$

Cet Ansatz conduit alors au problème stationnaire :

$$\Delta u + g(x, u) = \lambda u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{SNLS}$$

Une solution de (SNLS) est un couple $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$.

Noter qu'on a une ligne de solutions triviales $\{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3.1.2 Théorie de bifurcation

bifurcation

Un problème important concerne le comportement des solutions (λ, u) lorsque le paramètre λ varie. Les points de bifurcation sont les valeurs de λ où la structure de l'ensemble des solutions change .

Le problème (SNLS) appartient à la classe de problèmes abstraits définie comme suit .

Soit $F \in C(X, Y)$, où X et Y sont des espaces de Banach ,

$X \subset Y$, et $F(0) = 0$. Considérons :

$$F(u) = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\text{P})$$

On a une ligne de solutions triviales $\{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times X$.

Définition 3.1. $\lambda \in \mathbb{R}$ est un point de bifurcation pour le problème (P) ssi il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times X$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ et $u_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, mais $u_n \neq 0$ pour tout n .

Linéarisation, analyse spectrale

$$F(u) = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{P})$$

Si l'on suppose, de plus, que $F \in C^1(X, Y)$, il est naturel d'approximer (P) au voisinage de $u = 0$ par le problème linéarisé :

$$DF(0)u = \lambda u. \quad (\text{LP})$$

où $DF(0) \in L(X, Y)$ est la dérivée de Fréchet de F en $u = 0$.

Par le théorème des fonctions implicites, les points de bifurcation appartiennent à $\sigma(DF(0))$, le spectre de $DF(0)$.

Supposons que Y est un espace de Hilbert, $X \subset Y$ un sous-espace dense, et $DF(0) : X \subset Y \rightarrow Y$ est un opérateur auto-adjoint.

Alors $\sigma(DF(0)) \subset \mathbb{R}$ peut être décomposé comme :

$$\sigma(DF(0)) = \sigma_{disc}(DF(0)) \cup \sigma_{ess}(DF(0)),$$

où $\sigma_{disc}(DF(0))$ est le spectre discret, i.e. l'ensemble des valeurs propres isolées, de multiplicité finie, et

$$\sigma_{ess}(DF(0)) := \sigma(DF(0)) \setminus \sigma_{disc}(DF(0)),$$

est le spectre essentiel de $DF(0)$.

Ainsi, la bifurcation peut avoir lieu depuis une valeur propre de $DF(0)$, ou depuis le spectre essentiel de $DF(0)$.

Opérateurs de Schrödinger

Soit $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$, $X = H^2(\mathbb{R}^N)$, et $F : X \rightarrow Y$ définie par :

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x)),$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ et $g(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
- $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, avec $\partial_2 g(x, \cdot)_{x \in \mathbb{R}^N}$,
équicontinue, $\partial_2 g(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$,
 $q := \partial_2 g(\cdot, 0) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
- des hypothèses de croissance sur $|g(x, s)|$ pour $|s| \rightarrow \infty$,

Alors $F \in C^1(X, Y)$, et la linéarisation de (SNLS) est

$$\Delta u + q(x)u = \lambda u.$$

L'opérateur $S : D(S) = H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ défini par :

$$(Su)(x) := \Delta u(x) + q(x)u(x) ,$$

est appelé **opérateur de Schrödinger** .

Posant $\Lambda := \sup \sigma(S)$ et $\alpha := \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$, nous avons

$\sigma_{ess}(S) = (-\infty, \alpha]$, $\alpha \leq \Lambda \leq \|q\|_{L^\infty}$, $\Lambda \in \sigma(S)$ De plus, Λ est donné par la formule :

$$\Lambda = - \inf_{u \in H^2(\mathbb{R}^N)_{u \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - q(x)u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx} ,$$

Si $\Lambda > \alpha$, alors $\Lambda \in \sigma_{disc}(S)$. Dans ce cas, Λ est la valeur propre principale de S , et S a une fonction propre correspondante $\varphi_\Lambda > 0$.

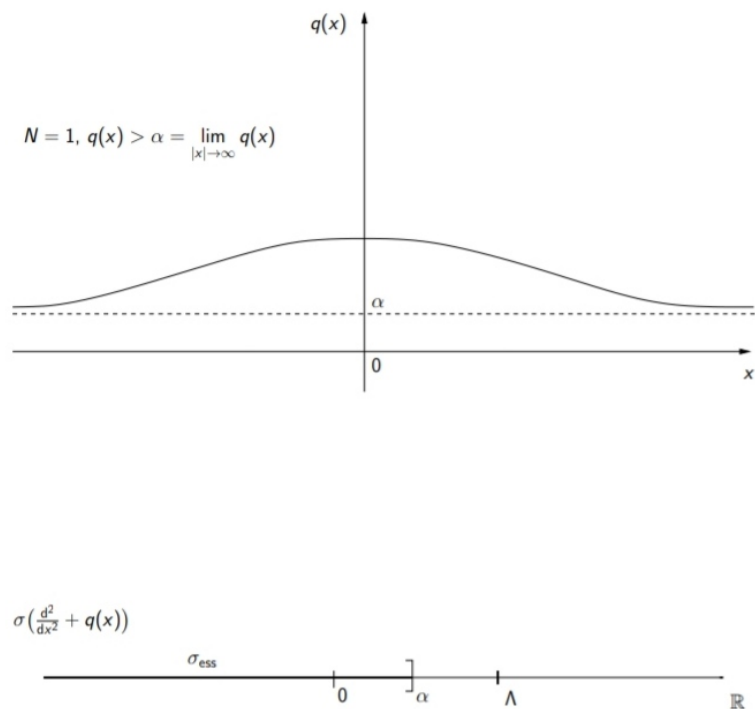


FIGURE 3.1 – Bifurcation et stabilité pour NLS

3.1.3 Bifurcation depuis une valeur propre

Bifurcation depuis le spectre essentiel

Les premiers résultats datent de fin 1970 /début 1980, principalement par Charles A. Stuart (voir aussi Küpper et Riemer), obtenant la bifurcation par des méthodes purement variationnelles .

A ce jour il n'existe pas de théorie abstraite générale comme celle traitant de la bifurcation depuis des valeurs propres. Le comportement des solutions lorsqu'elles approchent de la ligne des solutions triviales semble dépendre très spécifiquement de la nature précise des problèmes, qu'il faut donc traiter au cas par cas .

Comme on le verra par la suite, des méthodes analytiques donnent des courbes lisses de solutions positives bifurquant depuis le spectre essentiel (cf. Stuart 1985, Stuart-G. 2008, G. 2009). [12]

Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel :

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (E1)$$

On suppose

- $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $g(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $g(-x, s) = g(x, s)$ pour tout $(x, s) \in \mathbb{R}^2$,
- $g(x, s)$ est décroissante en $x > 0$ et croissante $s > 0$,
- $q := \sigma_2 g(\cdot, 0) \in C^1(\mathbb{R})$ et $q(0) > 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$.

Comme ci-dessus, on considère le problème dans $X = H^2(\mathbb{R})$.

$\Lambda = \sup \sigma(S) > 0 = \sup \sigma_{ess}(S)$ est la valeur principale de S .

Exemple 3.1. *Un exemple typique de fonction g satisfaisant les hypothèses du théorème est donné par :*

$$g(x, s) = q(x)s + V(x)|s|^{p-1}s ,$$

avec $p > 1$ et des hypothèses appropriées sur $q, V \in C^1(\mathbb{R})$.

Théorème 3.1 (Théorème(Jeanjean-Stuart,Adv.Di.Equ. 1999)). *Il existe $\bar{\lambda} \in (\Lambda, \infty]$, et une courbe $u \in C^1((\Lambda, \bar{\lambda}), H^2(\mathbb{R}))$ tel que $(\lambda, u(\lambda))$ est une solution de (E1) pour tout $\lambda \in (\Lambda, \bar{\lambda})$, avec $u(\lambda)(x)$ positive, paire et strictement décroissante en $x > 0$. [14]*

En outre,

$$\lim_{\lambda \searrow \Lambda} \|u(\lambda)\|_{H^2} = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \nearrow \bar{\lambda}} \|u(\lambda)\|_{H^2} = \infty.$$

Remarque 3.1. *Cette approche est purement analytique et fournit une courbe lisse de solutions .*

Par une approche topologique, on peut obtenir des ensembles connexes de solutions .

L'hypothèse $q(0) > \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$ garantit que Λ est une valeur propre (simple). Sans cette hypothèse, on peut envisager la bifurcation depuis le spectre essentiel de S .

3.2 Bifurcation depuis le spectre essentiel

3.2.1 La puissance pure

Considérons le problème :

$$\begin{cases} \Delta u(x) + V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (E2)$$

pour $N \geq 2$, On utilisera les hypothèses suivantes :

(V1) $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

(V2) il existe $b \in (0, 2)$ tel que $1 < p < \frac{4-2b}{N-2}$ ($:= \infty$ si $N = 2$),

et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b V(x) = 1$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b [x \nabla V(x) + bV(x)] = 0$.

(V3) V est radial avec $V(r) > 0$ et $V'(r) < 0$ pour $r > 0$.

(V4) $r \frac{V'(r)}{V(r)}$ est décroissante en $r > 0$.

Exemple

$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{b/2}}$ satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

Le problème (E2) correspond donc à (SNLS) avec

$$g(x, s) = V(x)|s|^{p-1}s, \quad \text{et} \quad q(x) = \partial_2 g(x, 0) \equiv 0,$$

Ainsi,

$$S = \Delta, \quad \text{et} \quad \sigma(S) = \sigma_{ess}(S) = (-\infty, 0].$$

donc S n'a pas de valeur propre.

Néanmoins, on a le résultat suivant, formulé dans $X = H^1(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2 (Stuart-G, DCDS 2008)

Supposons (V1) et (V2).

Il existe $\lambda_0 > 0$ et une courbe locale $u \in C^1((0, \lambda_0), H^1(\mathbb{R}^N))$ tel que $(\lambda, u(\lambda))$ est solution

de (E2) pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, avec $u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, et $u(\lambda) > 0$ sur \mathbb{R}^N .

De plus,

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u(\lambda)\|_{H^1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N}, \\ \infty & \text{si } 1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}. \end{cases}$$

Terminologie

On dit qu'il y a bifurcation de la ligne des solutions triviales lorsque $\|u(\lambda)\|_{H^1} \rightarrow 0$, et bifurcation asymptotique ou bifurcation à l'infini lorsque $\|u(\lambda)\|_{H^1} \rightarrow \infty$.

Théorème 3 (G., Calc. Var. 2010)

Supposons (V1) à (V4).

Alors la courbe du Théorème 2 peut être étendue en une branche globale $u \in C^1((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^N))$

telle que, pour tout $\lambda \in (0, 1)$: $u(\lambda)$ est l'unique solution positive radiale de (E2) ;

$u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u(\lambda)$ est strictement décroissante radialement.

De plus,

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \|u(\lambda)\|_{H^1} = \infty \quad \text{pour tout } 1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}.$$

Application

Le cas $N = 1$, $p = 3$ donne l'existence d'ondes progressives dans des guides d'ondes planaires focalisant avec "matériaux de Kerr", pour des faisceaux de puissance arbitrairement basse/haute.

Preuve 3.1. On commence par le changement d'échelle :

$$\lambda = k^2, \quad u(x) = k^\theta v(y), \quad y = kx, \quad \text{pour } k > 0, \quad \theta = \frac{2-b}{p-1}.$$

(E2) devient :

$$\Delta v - v + k^{-b}V(y/k)|v|^{p-1}v = 0, \quad k > 0, \quad (3.1)$$

Par (V2) on a :

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^{-b}V(y/k) = |y|^{-b}|y/k|^bV(y/k) = |y|^{-b}, \quad \forall y \neq 0,$$

ce qui suggère le problème limite ,

$$\Delta v - v + |y|^{-b}|v|^{p-1}v = 0. \quad (3.2)$$

qui a une unique solution positive radiale $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

On applique alors le théorème des fonctions implicites à la fonction

$F : \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ définie par :

$$F(k, v) := \begin{cases} \Delta v - v + |k|^{-b}V(y/|k|)|v|^{p-1}v, & k \neq 0, \\ \Delta v - v + |y|^{-b}|v|^{p-1}v, & k = 0. \end{cases}$$

au point $(k, v) = (0, v_0) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ où $D_2F(0, v_0) : H^1 \rightarrow H^{-1}$ est un isomorphisme (non-dégénérescence), ce qui donne une branche de solutions $(k, v(k))$ ($|k| < k_0$ petit) de $F(k, v) = 0$.

En revenant aux variables initiales (λ, u) , on obtient alors une branche locale de solutions $(\lambda, u(\lambda))$ de (E2), pour tout :

$$0 < \lambda < \lambda_0 = k^2.$$

Le comportement asymptotique lorsque $\lambda \rightarrow 0$ suit du changement de variables et du fait que $v(k) \rightarrow v_0$ dans H^1 lorsque $k \rightarrow 0$.

Pour prouver le Théorème 3, on montre que la branche locale donnée par le Théorème 2 se prolonge indéfiniment en une courbe C^1 paramétrée par $\lambda > 0$.

On commence par montrer que, sous les hypothèses (V1) à (V4), pour tout $\lambda > 0$, il existe une unique solution positive radiale $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ de (E2), et que, pour $0 < \lambda < \lambda_0$, elle coïncide avec la solution $u(\lambda)$ du Théorème 2.

On montre ensuite que u_λ est une solution non-dégénérée, pour tout $\lambda > 0$. On peut ainsi appliquer le TFI en chaque point (λ, u_λ) . On en déduit finalement que la branche amorcée au Théorème 2 s'étend indéfiniment.

Remarque 3.2. Cette méthode est purement analytique et donne des conclusions fortes : courbe lisse, comportement asymptotique et monotonie de la branche, etc. Ces propriétés s'avéreront utiles pour étudier la stabilité des ondes stationnaires de (NLS).

Il est possible d'obtenir la bifurcation depuis le spectre essentiel sous des hypothèses plus faibles, avec bien sûr des conclusions plus faibles.

Des arguments purement variationnels (voir par ex. Stuart '82 '88) donnent des suites de solutions qui convergent vers la ligne des solutions triviales.

Des méthodes topologiques donnent des ensembles connexes de solutions, voir par exemple (Toland '82, Giacomoni '98).

3.3 Stabilité des ondes stationnaires

3.3.1 NLS en dimension $N = 1$

Nous revenons maintenant à l'équation d'évolution :

$$i\partial_t\psi + \partial_{xx}^2\psi + f(x, |\psi|^2)\psi = 0, \quad (\text{NLS})$$

avec

$$f(x, s^2) = V(x)s^{p-1}, \quad s \geq 0,$$

où $V \in C^1(\mathbb{R})$ est pair, $V' < 0$ sur $(0, \infty)$,

$$V(x) \sim |x|^{-b} \quad \text{lorsque} \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{pour un} \quad b \in (0, 1),$$

et

$$x \mapsto x \frac{V'(x)}{V(x)} \text{ décroissante sur } (0, \infty), \quad \text{avec} \quad x \frac{V'(x)}{V(x)} \geq -b.$$

On suppose aussi $1 < p < 5 - 2b$ (non-linéarité sous-critique).

Exemple 3.2. :

$$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{b}{2}}}$$

satisfait toutes les hypothèses ci-dessus. Sous ces hypothèses, nous avons trouvé les solutions :

$$\psi_\lambda(t, x) := e^{i\lambda t} u_\lambda(x), \quad \lambda \in (0, \infty),$$

où $u_\lambda \in H^2(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ satisfait le problème stationnaire ,

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x)^2)u(x) = \lambda u(x), & x \in (\mathbb{R}), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (SNLS)$$

$u(x) \equiv u(-x) > 0$, et $\lambda \mapsto u_\lambda$ est $C^1((0, \infty)H^1(\mathbb{R}))$,
avec $\|u_\lambda\|_{H^1 \rightarrow 0}$, lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

3.4 Stabilité orbitale

Comme (NLS) est invariant sous l'action du groupe $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$, on ne peut espérer montrer la stabilité des solutions périodiques $\psi_\lambda(t, x) = e^{i\lambda t}u_\lambda(x)$ au sens usuel. En effet, supposons $\lambda_n \rightarrow \lambda \in (0, \lambda_0)$ et considérons :

$$\psi_\lambda(t, x) = e^{i\lambda t}u_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \varphi_n(t, x) = e^{i\lambda_n t}u_{\lambda_n}(x),$$

Alors $\forall \delta > 0 \quad \exists N_\delta \in \mathbb{N}$ t.q ,

$$n \geq N_\delta \implies \|\varphi_n(0, \cdot) - \psi_\lambda(0, \cdot)\|_{H^1} = \|u_{\lambda_n} - u_\lambda\|_{H^1} \leq \delta,$$

Cependant,

$$\|\varphi_n(t, \cdot) - \psi_\lambda(t, \cdot)\|_{H^1} \geq |(|e^{i\lambda t} - e^{i\lambda_n t}|)|\|u_\lambda\|_{H^1} - \|u_{\lambda_n} - u_\lambda\|_{H^1}|$$

$$\implies \sup_{t \geq 0} \|\varphi_n(t) - \psi_\lambda(t)\|_{H^1} \geq 2\|u_\lambda\|_{H^1} - \delta \quad \text{pour} \quad n \geq N_\delta.$$

La notion naturelle de stabilité pour les solutions périodiques est la suivante .

Définition 3.2. Une onde stationnaire $\psi(t, x) = e^{i\lambda t}u(x)$ est orbitalement stable ssi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.q , pour toute solution φ de (NLS) on a :

$$\|\varphi(0, \cdot) - u\|_{H^1} \leq \delta \implies \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|\varphi(t, \cdot) - e^{i\theta}u\|_{H^1} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Intuitivement : $\varphi(t, 0)$ proche de $u \implies$

$\varphi(t, \cdot)$ proche de l'orbite $\Theta(\psi) := \{e^{i\theta}u : \theta \in \mathbb{R}\} \forall t \geq 0$.

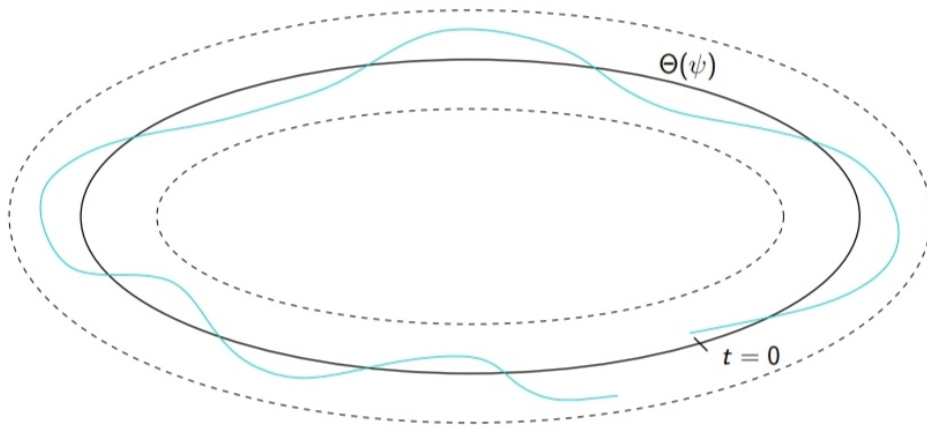


FIGURE 3.2 – Bifurcation et stabilité pour NLS

Pour montrer la stabilité, on utilise la théorie générale de Grillakis-Shatah-Strauss (1987). [13]

Pour chaque $\lambda_0 \in (0, \infty)$, l'onde stationnaire $\psi_{\lambda_0} = e^{i\lambda_0 t} u_{\lambda_0}$ est stable si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) En interprétant (NLS) comme un système hamiltonien, des conditions spectrales assurent que la hessienne du système au point ψ_{λ_0} n'a qu'une direction instable.
- (2) Une fonction de Lyapunov empêche alors le système de visiter la direction instable, pourvu que la fonction $\lambda \mapsto \|u_\lambda\|_{L^2}$ soit strictement croissante au voisinage du point

$\lambda = \lambda_0$. Cette condition est souvent appelée la condition de pente.

3.5 Les conditions spectrales

Pour $\lambda \in (0, \infty)$, considérons les opérateurs linéaires :

$L_\lambda^+, L_\lambda^- : H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ définis par :

$$\begin{aligned} L_\lambda^+ v &= -v'' + \lambda v - [f(x, u_\lambda^2) + 2\partial_2 f(x, u_\lambda^2)u_\lambda^2]v, \\ L_\lambda^- v &= -v'' + \lambda v - f(x, u_\lambda^2)v. \end{aligned}$$

Les conditions spectrales requises pour la stabilité sont :

$$(S1) \quad \inf \sigma_{ess}(L_\lambda^+) > 0, \quad M(L_\lambda^+) = 1, \quad \ker L_\lambda^+ = \{0\}.$$

$$(S2) \quad \inf \sigma_{ess}(L_\lambda^-) > 0, \quad 0 = \inf \sigma(L_\lambda^-), \quad \ker L_\lambda^- = \text{vect}\{u_\lambda\}.$$

où $M(L_\lambda^+)$ est l'indice de Morse de L_λ^+ = dimension du plus grand sous-espace où L_λ^+ est négatif .

$$\begin{aligned} L_\lambda^+ v &= -v'' + \lambda v - [f(x, u_\lambda^2) + 2\partial_2 f(x, u_\lambda^2)u_\lambda^2]v, \\ L_\lambda^- v &= -v'' + \lambda v - f(x, u_\lambda^2)v. \end{aligned}$$

Vérification

Tout d'abord, toutes les valeurs propres sont simples . Ensuite :

$$- \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, u_\lambda^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} 2\partial_2 f(x, u_\lambda^2)u_\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \inf \sigma_{ess}(L_\lambda^+) = \inf \sigma_{ess}(L_\lambda^-) = \lambda > 0 .$$

- comparant $L_\lambda^+ v = 0$ avec l'équation pour u_λ , on montre que $\ker L_\lambda^+ = \{0\}$ (non-dégénérescence de u_λ) .

- $u_\lambda > 0$ sol. de (SNLS) $\implies \ker L_\lambda^- = \text{vect}\{u_\lambda\}$ et $0 = \inf \sigma(L_\lambda^-)$.

Il reste à montrer que L_λ^+ a exactement une valeur propre négative.

L'analyse de bifurcation locale près de $\lambda = 0$ permet de montrer que $M(L_\lambda^+) = 1$ pour $\lambda > 0$ petit .

Par la théorie de perturbation, les valeurs propres de L_λ^+ dépendent continûment de $\lambda \in (0, \infty)$.

Puisque $\ker L_\lambda^+ = \{0\}$ pour tout $\lambda \in (0, \infty)$, les valeurs propres ne peuvent pas traverser zéro lorsque λ varie

$\implies M(L_\lambda^+) = 1$ pour tout $\lambda \in (0, \infty)$.

3.6 La condition de pente

Nous devons vérifier que la fonction $\lambda \mapsto \|u_\lambda\|_{L^2}$ est strictement croissante sur $(0, \infty)$. Puisque $\|u_\lambda\|_{L^2} \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$ par le Théorème 2, il existe un $\lambda > 0$ au voisinage duquel c'est vrai. Il suffit donc de vérifier que :

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_\lambda^2 dx \neq 0 \quad \forall \lambda \in (0, \infty) .$$

Remarquons que :

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_\lambda^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}} u_\lambda \frac{d}{d\lambda} u_\lambda dx = 4 \int_0^\infty u_\lambda \xi_\lambda ,$$

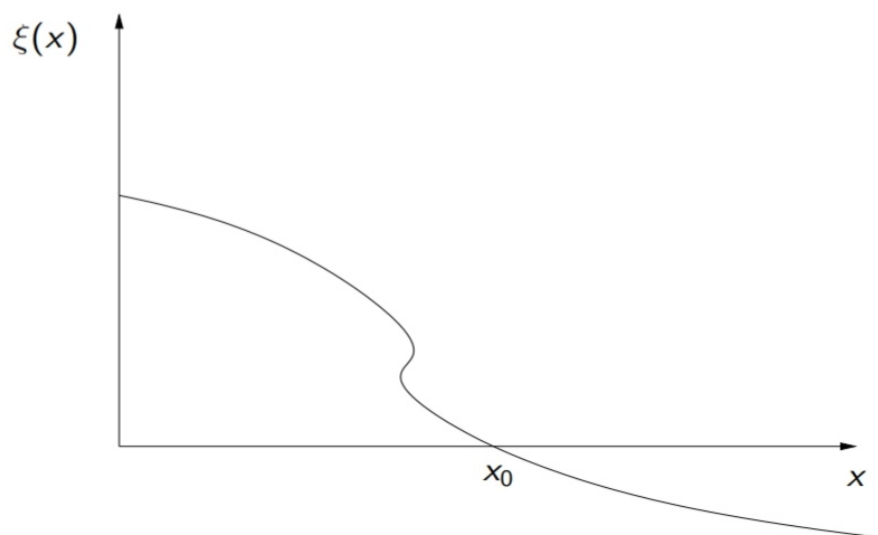
où $\xi_\lambda = \frac{d}{d\lambda} u_\lambda$ satisfait

$$\xi_\lambda'' + [f(x, u_\lambda^2) + 2\partial_2 f(x, u_\lambda^2)u_\lambda^2]\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda + u_\lambda .$$

On peut montrer que :

$$\int_0^\infty \left[x \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{5-p}{2} \right] v(x) u^p \xi dx = 2\lambda \int_0^\infty u \xi dx. \quad (\star)$$

En outre, ξ a le profil ci-contre



Définissons $\zeta(x) := x \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{5-p}{2}$.

Supposant par l'absurde que :

$$\int_0^{\infty} u \xi dx = 0,$$

on récrit alors (*) comme :

$$\int_0^{\infty} [\zeta(x) - \zeta(x_0)] v(x) u^p \xi dx + \zeta(x_0) \int_0^{\infty} v(x) u^p \xi dx = 0 .$$

L'identité de Lagrange pour u et ξ donne :

$$(p-1) \int_0^{\infty} v(x) u^p \xi dx = \int_0^{\infty} u^2 dx ,$$

et on a donc :

$$\int_0^\infty v(x)u^p[\zeta(x) - \zeta(x_0)]\xi dx + \frac{\zeta(x_0)}{p-1} \int_0^\infty u^2 dx = 0. \quad (**)$$

Grâce aux hypothèses

$$x \mapsto x \frac{v'(x)}{v(x)} \searrow \text{sur}(0, \infty), \text{ et } x \frac{v'(x)}{v(x)} \geq -b,$$

on a alors ,

$$\zeta = x \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{5-p}{2} \searrow \text{sur}(0, \infty), \text{ et } p < 5 - 2b \Rightarrow \zeta > 0,$$

ce qui contredit (**).

Théorème 4 (G., ANS 2009)

Supposons que $V \in C^1(\mathbb{R})$ est pair, $V' < 0$ sur $(0, \infty)$, et que

$V(x) \sim |x|^{-b}$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$ pour un $b \in (0, 1)$ avec $1 < p < 5 - 2b$.

Supposons en outre que $x \mapsto x \frac{V'(x)}{V(x)}$ décroissante sur $(0, \infty)$, et $x \frac{V'(x)}{V(x)} \geq -b$

Alors ,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_\lambda^2 dx > 0, \quad \forall \lambda \in (0, \infty).$$

En particulier, l'onde stationnaire $\psi_\lambda(t, x) = \exp^{i\lambda t} u_\lambda(x)$ est une solution orbitalement stable de (NLS) pour tout $\lambda \in (0, \infty)$. [11]

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'équation de Schrödinger non-linéaire :

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0, \quad (NLS)$$

solutions sous la forme d'ondes stationnaires $\psi(t, x) = e^{i\lambda t}u(x)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in H^1$, pour étudier la bifurcation on applique les théorèmes de bifurcation on a après la vérification les hypothèses (V_1) , (V_2) , (V_3) , (V_4) et d'après la théorème 2 et 3 il y'a la bifurcation de la linge des solutions triviales si

$$\| u(\lambda) \|_{H^1} \longrightarrow 0 ,$$

et bifurcation asymptotique si

$$\| u(\lambda) \|_{H^1} \longrightarrow \infty .$$

pour la stabilité on a pour tout $\lambda_0 \in (0, \infty)$, l'onde stationnaire $\psi(t, x) = e^{i\lambda t}u(x)$ est stable si les conditions suivantes sont vérifiées :

- En interprétant (NLS) comme un système hamiltonien, des conditions spectrales assurent que la hessienne du système au point ψ_{λ_0} n'a qu'une direction instable.



- Une fonction de Lyapunov empêche alors le système de visiter la direction instable, pourvu que la fonction $\lambda \mapsto \|u_\lambda\|_{L^2}$ soit strictement croissante au voisinage du point $\lambda = \lambda_0$. Cette condition est souvent appelée la condition de pente.

et d'après la théorème 4 l'onde stationnaire $\psi(t, x) = e^{i\lambda t}u(x)$ est solution orbitalement stable pour tout $\lambda \in (0, \infty)$ si

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_\lambda^2 dx > 0, \quad \forall \lambda \in (0, \infty) .$$

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une équation de Schrödinger non linéaire. Précisément la bifurcation.

Nous discutons la bifurcation de puis une valeur propre .il existe deux cas de bifurcation :

depuis le spectre essentiel et la valeur propre principale.

Pour la stabilité des ondes stationnaires nous entament la stabilité orbitale et les conditions spectrales requises.

Abstract

This thesis is devoted the study of a nonlinear Schrödinger equation precisely bifurcation we discuss the bifurcation of then an eigenvalue.

There are two cases of bifurcation:

From the essential spectrum and the principal eigenvalue for the stability of the standing waves we begin the orbital stability and the spectral conditions required.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abd Elouahab, Mohamed Salah (2009). Les systèmes Chaotiques à dérivées Fractionnaires. Mémoire Magistère en Mathématiques Université Mentouri- Constantine.
- [2] Alexander, J.C., Yorke, J.A. : Global bifurcation of periodic orbits. Amer. J. of Math. 100, (n-2) 263-292 (1978).
- [3] A.Sinatra, Introduction à la mécanique quantique 2008 .
- [4] Azzollini, A., d'Avenia, P., Pomponio, A (2010, March). On the Schrödinger–Maxwell equations under the effect of a general nonlinear term. In Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire (Vol. 27, No. 2, pp. 779-791). Elsevier Masson.
- [5] B. D. Ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique (Doctoral dissertation, Université d’Oran).
- [6] Berrehail, Chemseddine. (2014). Cycles limites de trois classes d’équations différentielles ordinaires perturbées. Doctorat Université Badji Mokhtar-Annaba.
- [7] Charif, Manel (2018). Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Mémoire Master en Mathématiques Université Mohamed Khider-Biskra.
- [8] Crandall, M. G., Rabinowitz, P. H(1971). Bifurcation from simple eigenvalues. Journal of Functional Analysis, 8(2), 321-340.
- [9] Françoise, J. P(2005). Oscillations en biologie : analyse qualitative et modèles (Vol. 46). Springer Science , Business Media.
- [10] Gasri, Ahlem (2018) Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Freres Mentouri-Constantine-1.
- [11] Genoud, F. (2009). Existence and stability of high frequency standing waves for a nonlinear Schrödinger equation. Discrete Continuous Dynamical Systems, 25(4), 1229.
- [12] G. L., O’Farrell, T. J., Temple, J. R. (2009). Review of the association between treatment for substance misuse and reductions in intimate partner violence. Substance use , misuse, 44(9-10), 1298-1317.



-
-
- [13] Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W (1987). Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I. *Journal of functional analysis*, 74(1), 160-197.
- [14] Jeanjean, H., Stuart, C. A(1999). Nonlinear eigenvalue problems having an unbounded branch of symmetric bound states. *Advances in Differential Equations*, 4(5), 639-670.
- [15] Lamnabhi-Lagarrigue, Françoise. (1994). *Analyse des systèmes non linéaires*. Hermès, Paris.
- [16] Mammri, Mohammed(2011).sur la stabilité Structurale des Difféomorphismes Quadratiques en Dimension 2.Mémoire Magistère Université Kasdi merbah-ouargla .
- [17] Menacer, Tidjani (2014). Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université-Constantine1.
- [18] Soltani, Siham(2017). Cours Equations différentielles. Licence en Mathématiques Université Mohamed Khider-Biskra.
- [19] S., Wiggins, S., Golubitsky, M. (1990). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos (Vol. 2). New York : Springer-Verlag.
- [20] Wiggins, Stephen. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.Vol. 2. Springer Science et Business Media.

NOTATIONS

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

NLS L'équation de Schrödinger non linéaire.

DNLS L'équation de Schrödinger non linéaire discrète.

\hat{H} Hamiltonien.

σ_{dis} le specter discrète.

σ_{ess} le specter essentiel.