



Institut : Sciences et Technologie
Numéro de série :
Numéro d'inscription : M57/2017

Département : Mathématiques et
Informatique

www.centre-univ-mila.dz

Thèse
présentée pour l'obtention du Diplôme de
Doctorat
de troisième cycle (LMD)

**Etude mathématique et numérique d'une
équation différentielle d'ordre fractionnaire**

Présentée par : ZERIMECHE Hadjer

Encadré par : BERKANE Abdelhak
Co-encadreur : HOUMOR Tarek

Filière : *Mathématiques*

Spécialité : *Mathématiques et Applications*

N°	Nom & Prénom	Grade	Université	Désignation
1	N. HAMRI	Prof	Centre Universitaire de Mila	Président
2	A. BERKANE	Prof	Université Constantine 1	Encadreur
3	T. HOUMOR	M.C.B	Université Constantine 1	Co-encadreur
4	M-S. ABDELOUAHAB	Prof	Centre Universitaire de Mila	Examineur
5	Y. HALIM	M.C.A	Centre Universitaire de Mila	Examineur
6	T. MENACER	Prof	Université Mohamed Khider Biskra	Examineur
7	A. BELLOUR	M.C.A	ENS Asia Djebbar Constantine	Examineur

Année universitaire : 2020/2021

Remerciements

Mes tous premiers remerciements vont à mes encadreurs de thèse : monsieur Dr. HOUMOR Tarek, qui m'a dirigé tout au long de ces trois années. Je le remercie pour sa disponibilité, sa patience, sa compréhension, son attention et sa bonne écoute pour répondre à mes nombreuses questions, il était toujours intéressé à faire avancer mon travail. J'ai bénéficié de son expérience, de ses connaissances et de ses conseils lors de nos séances de travail. Je le remercie en particulier pour avoir relu et corrigé mon manuscrit à plusieurs reprises. Ainsi qu'à monsieur Pr. BERKANE Abdelhak, pour avoir accepté de diriger ce travail avec ces précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité. Il m'était vraiment un honneur d'avoir travaillé avec eux.

Je remercie très sincèrement, monsieur Pr. HAMRI Nasr Eddine qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je tiens également à remercier monsieur Pr. ABELOUAHAB Mohamed Salah, monsieur Dr. HALIM Yacine, monsieur Pr. MENACER Tidjani et monsieur Dr. BELLOUR Azzeddine pour l'honneur qu'ils m'ont rendu en acceptant de prendre de leur temps pour examiner mon travail et de faire partie du jury.

Un grand merci s'adresse bien évidemment à tous les membres du laboratoire de mathématiques et leurs interactions (MELILab) qui par les nombreuses discussions que nous avons eues, leur bonne humeur, leur disponibilité et leur aide m'ont non seulement permis de mener ce travail à bien mais également de profiter d'une agréable ambiance de travail.

Je remercie tout particulièrement mes parents pour leur amour inestimable, leur patience, leur confiance, leur soutien et leur encouragement. Enfin, je tiens à remercier ma soeur, mes frères et mes amis pour leur aide et leur soutien.

Dédicaces

A mon très cher père.

A ma très chère mère.

A ma très chère grand-mère.

A toute ma famille.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Quelques concepts de la théorie du calcul fractionnaire	5
1 Introduction	6
2 Quelques rappels des fonctions spécifiques du calcul fractionnaire	6
2.1 La fonction Gamma	6
2.1.1 Quelques propriétés de la fonction Gamma	7
2.2 La fonction de Mittag-Leffler	7
2.2.1 Quelques propriétés de la fonction Mittag-Leffler	8
3 Intégrales et dérivées fractionnaires	9
3.1 Définitions des opérateurs fractionnaires	9
3.1.1 Intégrales fractionnaires	10
3.1.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Caputo	11
3.2 Quelques propriétés des opérateurs fractionnaires	12
3.3 Interprétation physique	13
3.3.1 Interprétation de l'intégrale fractionnaire	14
3.3.2 Interprétation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	15
3.3.3 Interprétation des dérivées fractionnaires au sens de Caputo	15
4 La transformée de Laplace	16
4.1 Définitions et propriétés	16
4.1.1 Conditions d'existence de $L\{f(t)\}$	16
4.1.2 Linéarité	16
4.1.3 La transformée du produit de convolution	17
4.2 La transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler	17
4.3 La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier	17

4.4	La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	17
4.5	La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	17
4.6	La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo	18
5	Conclusion	18
2	Équations différentielles fractionnaires	19
1	Problème de Cauchy	20
2	Existence et unicité de la solution de (2.2)	20
3	Stabilité	24
3.1	Cas linéaire	25
3.2	Cas non linéaire autonome	26
3.3	Cas non linéaire non autonome	27
3.4	Extension de la méthode directe de Lyapounov au cas fractionnaire . . .	28
4	Résolution numérique des EDF (la technique d'Adams-Bashforth-Moulton frac- tionnaire)	28
5	Discrétisation des EDF	30
6	Chaos dans les EDF	32
6.1	Système dynamique	32
6.1.1	Systèmes dynamiques continus	32
6.1.2	Systèmes dynamiques discrets	32
6.2	Bifurcation	33
6.3	Définition du chaos	34
6.4	Caractérisation numérique et graphique du chaos	35
6.4.1	Sensibilité aux conditions initiales	35
6.4.2	L'attracteur étrange	35
6.4.3	Exposants de Lyapounov	37
7	Application : le modèle de Selkov	40
8	Conclusion	49
3	Contrôle et synchronisation du chaos dans les EDF	53
1	Contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires	54
1.1	Contrôle feedback	54
1.1.1	Exemple d'application (système chaotique fractionnaire de Lü) .	56
1.2	Contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes	59
2	Synchronisation du chaos dans les systèmes fractionnaires	60

Table des matières

2.1	Synchronisation complète	62
2.2	Anti-synchronisation	62
2.3	Synchronisation projective	62
2.4	Synchronisation adaptative projective modifiée	63
3	Synchronisation combinée des SCFNA de dimensions différentes	69
3.1	Formulation du problème	70
3.2	Application	72
3.2.1	Cas 1	73
3.2.2	Cas 2	79
	Conclusion générale et perspectives	83
	Annexe	85
	Bibliographie	86

Introduction générale

CET TRAVAIL concerne l'étude complète, autant du point de vue mathématique que numérique, de quelques systèmes différentiels modélisés par des équations différentielles d'ordres fractionnaires, nous commencerons par donner quelques détails sur l'histoire du calcul fractionnaire.

Le calcul fractionnaire est basé sur la généralisation de la différenciation et de l'intégration d'ordre classique à des ordres non entiers, ce concept a été découvert il y a près de 300 ans. En 1695, Leibniz suggéra le symbole de dérivation d'ordre n , $\frac{d^n y}{dt^n}$ où n est un entier positif, L'hôpital lui écrivit une lettre dans laquelle il lui posa la question suivante : 'Et si l'ordre n est remplacé par $1/2$?', le 30 septembre 1695, Leibniz a répondu : "un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences" [1]. En 1730, dans l'article [2], Euler a abordé la question de dérivation fractionnaire et proposa une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^β . Ensuite, en 1819, la première définition de dérivation fractionnaire a été présentée par Lacroix [3]. Plus tard, Liouville étudia en détail le calcul fractionnaire dans les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837 [4]. Pour plus de détails historiques sur la période 1847 et 1974, nous renvoyons à [4] et [5].

Mentionnons brièvement les mathématiciens les plus célèbres qui ont contribué au développement de ce concept comme Abel, Riemann, Taylor, Grünwald, Letnikov, Heaviside, Weyl, Marchaud, Hadamard, Riesz, Machado et Ross. À ce jour, de nombreux chercheurs proposèrent différents approches de généralisation des notions de différenciation et d'intégration, les plus utilisés sont les approches de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grünwald-Letnikov. Dans [6–9], les auteurs y rassemblent plusieurs concepts de la théorie du calcul fractionnaire, de plus, ces livres sont des références très utiles.

L'étude des équations différentielles fractionnaires est un domaine très important du fait que ces équations permettent de modéliser de nombreux phénomènes physiques [10], biologiques [11], électrochimiques [12], économiques [13], épidémiologiques [14], ...

Dans ce travail, nous étudierons le modèle fractionnaire de Selkov. Ce modèle est utilisé pour

modéliser un phénomène biologique appelé glycolyse.

Durant ces dernières années, de nombreux auteurs ont fait des recherches sur les différents types d'équations différentielles fractionnaires, nous en donnons quelques résultats [3, 9].

L'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles d'ordres fractionnaires ont été traitées dans de nombreux ouvrages. Nous mentionnons à titre d'exemple, l'article [15] où K. Diethelm avec N.J. Ford ont présenté les résultats d'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires non linéaires avec dérivées au sens de Riemann-Liouville et Caputo.

Plusieurs études concernant la stabilité et la stabilisation des systèmes différentiels fractionnaires se trouvent dans [16–19]. Ces références s'intéressent toutes aux systèmes fractionnaires autonomes. Pour les systèmes fractionnaires non autonomes nous en citons [20–23]. D'ailleurs, la région de stabilité des modèles d'ordres fractionnaires est supérieure à la région de stabilité des modèles d'ordres entiers.

Un autre aspect du calcul fractionnaire est la théorie du chaos. Dans le cas arbitraire, on ne peut pas observer le phénomène du chaos dans un système dynamique autonome lorsque l'ordre total (l'ordre de chaque dérivée de l'état du système) est inférieur à trois mais dans le cas fractionnaire, le chaos peut se produire dans un système modélisé par trois équations différentielles fractionnaires d'ordre total inférieur à trois [24]. Plusieurs systèmes chaotiques fractionnaires ont été traités par de nombreux chercheurs, à titre d'exemple, nous mentionnons quelques-uns, le système fractionnaire de Lorenz [25], le système fractionnaire de Chen [26], le système fractionnaire de Rossler [27], le système fractionnaire de Bloch [10], le système fractionnaire de Lü [28], le système fractionnaire de Chua [29].

Aussi plus d'intérêts ont été prêtées aux théories du contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires, d'ailleurs plusieurs généralisations de notion d'ordre classique ont été développées et ont trouvé dans de nombreux ouvrages. La littérature dans ce domaine est très large, il est difficile d'avoir un aperçu complet, nous espérons que les ouvrages tels que [24, 25], offrent une vision sur ce domaine. Récemment, les propriétés de la théorie du chaos des systèmes chaotiques fractionnaires peuvent être utilisées pour développer et améliorer les schémas et les stratégies de contrôle et de synchronisation.

Quant à la synchronisation, elle est l'une des applications de la théorie du chaos. Elle fait l'objet d'intérêt particulier dans l'étude de plusieurs systèmes chaotiques, elle est constituée de deux systèmes, l'un est le système maître l'autre et le système esclave. La synchronisation signifie donc que le système esclave copie le mouvement du système maître, elle a pris son essor après le travail de Pecora et Carroll [30]; dans lequel, il montre que deux systèmes chaotiques peuvent se synchroniser. Récemment, beaucoup d'efforts ont été dédiés au problème de synchronisation

des systèmes fractionnaires. Ici, nous mentionnons quelques contributions. L'article [31] où les auteurs ont présenté la synchronisation projective des systèmes chaotiques fractionnaires de dimensions différentes, cette stratégie a de nombreux avantages intéressants tels qu'elle est appliquée aux systèmes chaotiques et hyperchaotiques identiques et différents et aussi elle réalise la synchronisation complète et l'anti-synchronisation ; et [32] où une autre technique nommée la synchronisation projective modifiée basée sur un contrôle actif du mode glissant a été proposé ; et d'autres méthodes explorées dans [25, 33]. L'intérêt de synchronisation des systèmes chaotiques apparaît de plus en plus dans les champs d'application par exemple, en cryptographie [34], communication sécurisée [35], l'ingénierie [36].

En 2011, les auteurs de [37] ont proposé une méthode pour réaliser la synchronisation entre deux systèmes maîtres et un système esclave telle qu'elle est connue par la synchronisation combinée. Ce type de synchronisation à des points focaux sur la synchronisation usuelle, elle est applicable dans plusieurs disciplines technologiques, par exemple, ayant la possibilité de donner plus de sécurité dans les communications sécurisées et cryptographies. D'autres résultats concernant ce type de synchronisation se trouvent dans [38–40].

Nous avons remarqué lors de notre recherche bibliographique que les efforts déployés sur les méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires sont bien plus que ceux sur les stratégies de la synchronisation combinée. Par ailleurs, les techniques existant déjà focalisent tout aux systèmes chaotiques fractionnaires autonomes. Ce qui, nous donne une raison de plus de nous intéresser aux systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes et d'envisager d'autres méthodes de résolution de ce type de problème de synchronisation.

Notre objectif est de répondre à la question suivante : est-il possible d'utiliser une technique simple pour réaliser la synchronisation entre deux systèmes maîtres d'ordres fractionnaires et un système esclave d'ordre fractionnaire de dimensions différentes ?

Ce manuscrit se divise en trois chapitres.

- Le premier chapitre, présente un rappel de quelques concepts de la théorie de calcul fractionnaire, nous nous focalisons surtout sur les notions dont on aura besoin dans la suite. Nous commençons par les deux fonctions spécifiques (la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler). Quelques définitions de la notion d'intégrale et de dérivation fractionnaire seront ensuite considérées : Riemann-Liouville et Caputo. Les propriétés et l'interprétation physique de l'intégrale fractionnaire et de dérivation fractionnaire seront présentés. Nous concluons ce chapitre par quelques résultats sur la transformée de Laplace.

- Dans le deuxième chapitre, nous présentons les notions nécessaires à notre étude. Nous commençons par le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire du type Caputo, ensuite nous exposons les différents critères de stabilité des solutions des équations différentielles fractionnaires autonomes et non autonomes. Après la technique numérique d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire qu'on va appliquer au long de notre travail pour la simulation des systèmes dynamiques fractionnaires et une méthode de discrétisation qui permet le passage des systèmes fractionnaires à temps continu à systèmes fractionnaires à temps discret seront introduites. Nous présentons aussi quelques outils pour analyser le chaos dans les équations différentielles fractionnaires au cas continu et discret. Nous appliquerons ensuite ces résultats au modèle de Selkov.
- Le troisième chapitre, s'articule autour des techniques de contrôle et de synchronisation du chaos dans les équations différentielles fractionnaires. Une discussion détaillée de la méthode de contrôle feedback des systèmes chaotiques fractionnaires autonomes et une méthode de contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes sera présentée. On s'intéresse aussi à la synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires continus. Nous développons une technique de synchronisation adaptative projective modifiée. Cette méthode présente l'avantage d'être appliquée aux systèmes chaotiques, hyperchaotiques, identiques, différents et incertains et aussi réalise la synchronisation complète, anti-synchronisation et la synchronisation projective. Enfin, nous proposons une nouvelle stratégie de la synchronisation combinée des systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes de dimensions différentes à l'aide d'une matrice d'échelle constante, le lemme de Gronwall-Bellman et quelques techniques de calcul fractionnaire.

Nous concluons ce manuscrit par une conclusion générale synthétise les travaux effectués au cours de notre étude et de quelques perspectives.

Chapitre **1**

Quelques concepts de la théorie du calcul
fractionnaire

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner une brève introduction à la théorie du calcul fractionnaire en introduisant quelques notions de base. On va commencer par des définitions et propriétés de la fonction Gamma et la fonction Mittag-leffler, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Puis, on va considérer quelques définitions et propriétés de la dérivation fractionnaire qui seront utilisées dans les autres chapitres en particulier, les opérateurs différentiels de Riemann Liouville et Caputo. On va ensuite présenter leurs interprétations physiques. Enfin, on va terminer par certains résultats fondamentaux sur les propriétés de la transformée de Laplace.

Pour une étude détaillée de ces concepts, on pourra notamment consulter des ouvrages tels que [1, 3, 6–8].

2 Quelques rappels des fonctions spécifiques du calcul fractionnaire

Dans cette section, nous nous focalisons sur les définitions et quelques propriétés de deux fonctions spécifiques : la fonction Gamma et la fonction de Mittag-Leffler auxquelles nous ferons appel dans les autres chapitres.

2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma. Cette fonction a été introduite par le mathématicien L. Euler (1707-1783). Plus tard, à cause de son importance, la fonction Gamma a été traitée par de nombreux mathématiciens comme A.M. Legendre (1752-1833), C.F. Gauss (1777-1855), C. Gudermann (1798-1852), J. Liouville (1809-1882), K. Weierstrass (1815-1897) et C. Hermite (1822-1901).

La fonction Gamma généralise la factorielle $n!$ et notée par $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.1)$$

La figure 1.1, montre le comportement de la fonction Gamma.

Maintenant, on rappelle quelques propriétés qui seront considérées dans la suite de notre travail.

Pour plus de détails, on renvoie aux deux ouvrages [41, 42].

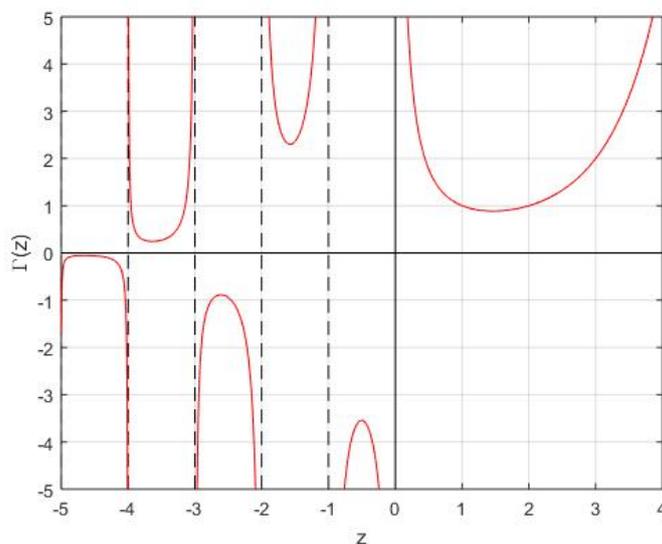


Figure 1.1 – La fonction Gamma.

2.1.1 Quelques propriétés de la fonction Gamma

1. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$.
3. Une intégration par partie nous donne : $\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = z\Gamma(z)$.
4. La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle, on a $\Gamma(n + 1) = n!$.

2.2 La fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler doit son nom au mathématicien Mittag-Leffler qui a été le premier à développer le concept dans les années 1903 [43]. Il s'agit d'une généralisation de la fonction exponentielle e^z dont elle joue le même rôle.

La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre E_α et définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.2)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres a été introduite par Agarwal [44], cette fonction joue également un rôle primordial dans la théorie du calcul fractionnaire et elle est définie par

le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (1.3)$$

La figure 1.2, montre le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres pour différentes valeurs de α et β .

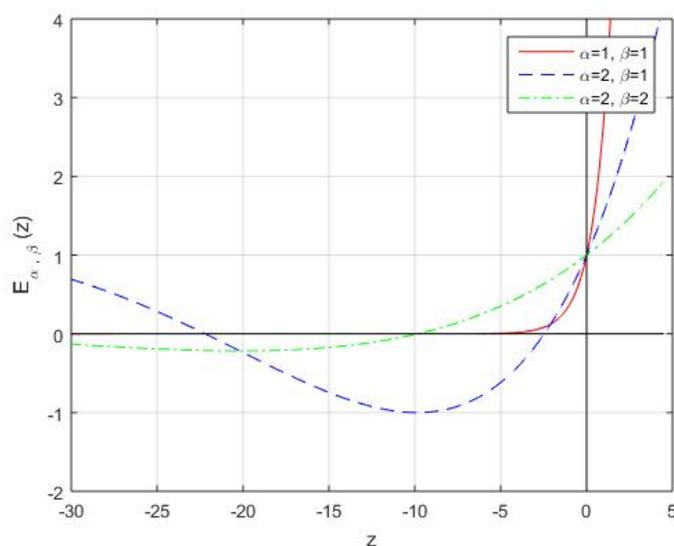


Figure 1.2 – La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres.

La fonction de Mittag-Leffler possède beaucoup des propriétés, on rappelle ici quelques-unes.

2.2.1 Quelques propriétés de la fonction Mittag-Leffler

1. $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$
2. $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k!} = \cosh(z).$
3. $E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh}{z}.$
4. $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_{\alpha}(z).$

Maintenant, nous représentons la définition de la fonction Mittag-Leffler d'une matrice.

Définition 1.1 [9] Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, la fonction Mittag-Leffler d'une matrice est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (1.4)$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Nous avons une généralisation du théorème proposé par Podlubny dans [6] (théorème 1.6 page 35), sous forme du lemme suivant :

Lemme 1.1 [18, 19] Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $0 < \alpha < 2$ et β un nombre réel choisi arbitrairement, μ est tel que $\frac{\alpha\pi}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$ et ξ est un réel constant, alors

$$\| E_{\alpha,\beta}(A) \| \leq \frac{\xi}{1 + \| A \|}, \quad (1.5)$$

où $\mu \leq \arg(\lambda(A)) \leq \pi$, $\lambda(A)$ est une valeur propre de la matrice A et $\| \cdot \|$ dénote la norme l_2 .

Ce lemme décrit d'une manière générale le comportement de la fonction de Mittag-Leffler d'une matrice et va jouer un rôle très important pour la stabilisation des systèmes fractionnaires. Nous l'utilisons souvent associé au lemme de Gronwall-Bellman [45] pour stabiliser les systèmes différentiels fractionnaires, (voir annexe).

3 Intégrales et dérivées fractionnaires

On discute dans cette section, de quelques définitions et propriétés des opérateurs fractionnaires. Il existe plusieurs d'autres définitions que l'on n'évoquera pas ici, malheureusement les définitions ne sont pas toutes équivalentes, et seulement quelques propriétés des dérivées classiques peuvent être généralisées au cas fractionnaire. Pour plus de détails voir les ouvrages [6, 9].

En général, les dérivées fractionnaires sont définies à l'aide d'intégrales fractionnaires. Ici, on s'intéresse à l'opérateur d'intégration et de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville ainsi que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo [6, 8].

3.1 Définitions des opérateurs fractionnaires

Le concept des opérateurs d'ordres fractionnaires a été défini aux 19^e siècle par Riemann, Liouville et Leitinkov. L'opération d'intégration et de dérivation d'ordre fractionnaire est la généralisation de la dérivation et l'intégration classique entière à des ordres non entiers.

3.1.1 Intégrales fractionnaires

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, on pose :

$$If(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Pour une primitive seconde de f on a :

$$I \circ If(t) = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (1.7)$$

En répétant n fois, on obtient la formule de Cauchy suivante :

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.8)$$

En utilisant la propriété $\Gamma(n+1) = n!$ de la fonction Gamma que nous avons définie précédemment, on obtient la définition suivante :

Définition 1.2 Soit $\alpha > 0$, l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α , que l'on note I^α est défini par :

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

Exemple 1.1 • L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction constante $f(t) = C$:

$$(I^\alpha f)(t) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha. \quad (1.10)$$

• L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$:

$$\begin{aligned} (I^\alpha f)(t) &= I^\alpha (t-a)^\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\alpha+\beta} \end{aligned} \quad (1.11)$$

3.1.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Caputo

L'un des approches les plus importants en théorie du calcul fractionnaire est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Basée sur l'intégrale de Riemann-Liouville, nous avons la définition suivante [8] :

Définition 1.3 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α , que l'on note ${}^{RL}D^\alpha$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n (I^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Une nouvelle approche de dérivation fractionnaire que Caputo a proposée et porte son nom est définie par [6] :

Définition 1.4 Soit $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α , que l'on note ${}^C D^\alpha$, d'une fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= I^{n-\alpha} \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^n f \right) (t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.13)$$

avec $t \geq 0, n-1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}^+$ et $f^{(n)}(\tau)$ dénotes la dérivative n de f .

L'un des avantages de la dérivée au sens de Caputo est que les conditions initiales prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

Exemple 1.2 • La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonctions constante $f(t) = C$, est ni nulle ni constante on a :

$${}^{RL}D^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

• La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonctions constante $f(t) = C$ est nulle on a :

$${}^C D^\alpha(C) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \times 0 d\tau = 0.$$

- La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction $f(t) = (t - a)^\beta$ est

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\alpha(t - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I^{n-\alpha}(t - a)^\beta\right) \\ &= \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}(t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Pour $n - 1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$.

- La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f(t) = (t - a)^\beta$ est

$${}^C D^\alpha(t - a)^\beta = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)}(t - a)^{\beta - \alpha}.$$

Pour $n - 1 < \alpha < n$ et $\beta > n - 1$.

Pour souligner l'importance de l'opérateur d'intégration et de dérivation fractionnaire dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire ainsi que ses applications, nous mentionnons [46, 47].

3.2 Quelques propriétés des opérateurs fractionnaires

Les opérateurs fractionnaires généralisent également quelques propriétés des dérivés et d'intégrales classiques dont voici quelques-unes, pour plus de détails, voir [6, 8, 9].

- Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivant :

$$I^\alpha[I^\beta f] = I^{\alpha + \beta} f.$$

Pour n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans ce travail.

- La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires

$$D^\alpha[\gamma f(t) + \delta g(t)] = \gamma D^\alpha f(t) + \delta D^\alpha g(t).$$

- Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Si $f \in C_+^n([a, b])$. Alors on a la propriété de composition entre les dérivées fractionnaires :

$$D^\alpha[D^\beta f] = D^{\alpha + \beta} f.$$

- L'opérateur de dérivation fractionnaire est non-commutative.

$$D^\alpha[D^\beta f] \neq D^\beta[D^\alpha f].$$

- Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors on a la propriété de composition entre les dérivées fractionnaires et les intégrales fractionnaires :

$$D^\alpha [I^\alpha f] = f.$$

- Soit $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n([a, b])$, alors on a les deux relations suivantes :

$$I^\alpha [{}^C D^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k.$$

Et

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t - a)^{k-\alpha}.$$

Pour conclure cette sous section, il convient de faire la remarque suivante :

Remarque 3.1 *Si $f(a) = f^{(1)}(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, la dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville et on a*

$${}^C D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^\alpha f(t).$$

3.3 Interprétation physique

Dans le cas d'ordre entier les équations modélisant la dynamique d'un système à un sens physique. En général, la modélisation des phénomènes physiques nécessite des équations décrivant l'évolution ainsi que les conditions initiales. Ces équations sont identifiées selon ses propriétés physiques. De ce fait les dérivées classiques ont quelques interprétations physiques qui simplifient leur utilisation à la résolution des problèmes appliqués dans les domaines scientifiques. En effet, les applications dans les domaines scientifiques exigent des définitions qui permettent l'utilisation des conditions initiales qui peuvent être interprétées physiquement. Mais, dans le cas fractionnaire précisément les problèmes aux conditions initiales fractionnaires du type Riemann-Liouville sont difficile à interpréter physiquement, il se trouve que les difficultés liées à l'évaluation des conditions initiales fractionnaires. Dans l'article [9], Podlubny a étudié avec une attention particulière l'interprétation physique et géométrique de l'intégrale et de la dérivation fractionnaire. Ici, on s'intéresse seulement à l'interprétation physique de l'intégrale et de dérivation fractionnaire.

3.3.1 Interprétation de l'intégrale fractionnaire

Dans le but d'interpréter physiquement l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, nous examinons l'exemple d'un conducteur de voiture.

Supposons qu'une voiture équipée de deux appareils de contrôle : l'enregistreur de la vitesse $v(\tau)$ et l'horloge qui affiche le temps. Or, l'horloge affiche l'heure de façon erronée. On suppose que la relation entre le temps τ qui affichée par l'horloge (temps incorrect) et le temps exact T est déterminée par la fonction $T = g_t(\tau)$. Cela veut dire que lorsque le conducteur évalue l'intervalle de temps $d\tau$, l'intervalle de temps réel est donné par $dT = dg_t(\tau)$.

Le conducteur A, qui ne connaît pas le fonctionnement erroné de l'horloge, va calculer la distance parcourue comme étant l'intégrale classique :

$$S_A(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Cependant, l'observateur O sachant qu'il s'est trompé d'heure et ayant la fonction $g(\tau)$ qui récupère les valeurs exactes du temps à partir de celle-ci, déterminera la distance réellement parcourue comme suit :

$$S_0(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau).$$

On prend,

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{t^\alpha - (t - \tau)^\alpha\}.$$

Alors,

$$S_0(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} v(\tau) d\tau.$$

Remarquons que,

$$S_0(t) = \int_0^t v(\tau) dg_t(\tau) = I^\alpha v(t). \tag{1.14}$$

La fonction $g_t(\tau)$ possède une propriété d'échelle particulièrement intéressante, qui dépend non seulement de τ mais aussi du paramètre t . Lorsque t change, l'intervalle de $g_t(\tau)$ est également changé. Ce qui est en accord du point de vue physique.

Cet exemple montre que l'intégrale fractionnaire peut être interprétée comme la distance réellement parcourue par un objet en mouvement.

3.3.2 Interprétation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

D'après les propriétés précédentes, on exprime l'expression de la vitesse $v(t)$ de l'équation (1.14) à partir de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la distance $S_0(t)$.

$$v(t) = {}^{RL}D^\alpha S_0(t),$$

avec

$${}^{RL}D^\alpha S_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} S_0(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

On voit ainsi que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la distance $S_0(t)$ d'un objet en mouvement, pour laquelle la relation entre son temps individuel et le temps $g_t(\tau)$ est égale à la vitesse individuelle $v(t)$ de cet objet.

D'autre part, on peut également dériver la valeur de $S_0(t)$ par rapport à t , qui donne la relation entre la vitesse $v_0(t) = S'_0(t)$ du mouvement du point de vue de l'observateur O et la vitesse individuelle $v(t)$:

$$v_0(t) = \frac{d}{dt} I^\alpha v(t) = {}^{RL}D^{1-\alpha} v(t). \quad (1.15)$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$ de la vitesse $v(t)$ est égale à la vitesse $v_0(t)$, si le temps τ et T sont reliés par la fonction $g_t(\tau)$.

Pour $\alpha = 1$, lorsqu'il n'y a pas de déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident : $v_0(t) = v(t)$.

3.3.3 Interprétation des dérivées fractionnaires au sens de Caputo

En appliquant l'intégration fractionnaire d'ordre $1-\alpha$ sur les deux composantes de l'équation (1.15), on trouve :

$$v(t) = I^{1-\alpha} v_0(t) = I^{1-\alpha} S'_0(t) = {}^c D^\alpha S_0(t), \quad (1.16)$$

avec

$${}^c D^\alpha S_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{S'_0(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

L'équation (1.16) est la même que (1.15). Par conséquent, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo a la même interprétation physique que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Cette coïncidence devient plus évident, si $S_0(0) = 0$, la dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville et on a ${}^c D^\alpha S_0(t) = {}^{RL}D^\alpha S_0(t)$. (Voir remarque 3.1.)

4 La transformée de Laplace

Transformée de Laplace est un outil souvent utilisé pour la résolution de quelques équations différentielles dans le cas d'ordre entier et fractionnaire. C'est pour cette raison, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques résultats fondamentaux sur les propriétés de la transformée de Laplace.

4.1 Définitions et propriétés

Définition 1.5 Soit une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ nulle pour $t < 0$. On appelle Transformée de Laplace de f (si elle existe) l'application définie par :

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto L\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt, \quad s \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

On utilise aussi l'expression $F(s)$ pour décrire la transformée de Laplace. On a

$$F(s) = L\{f(t)\} \iff f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st)F(s)ds, \quad c = \mathcal{R}e(s) > c_0, \quad (1.18)$$

où, L^{-1} est la transformée de Laplace inverse, c_0 est l'indice de convergence de l'intégrale définie dans (1.18).

4.1.1 Conditions d'existence de $L\{f(t)\}$

1. f est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .
2. f une fonction d'ordre exponentiel c'est-à-dire qu'il existe des constantes réelles $M > 0$, β telles que, pour $t > 0$, $|f(t)| < M \exp(\beta t)$.

4.1.2 Linéarité

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $L\{f\}$ et $L\{g\}$ et $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Alors

$$L\{\gamma f + \delta g\} = \gamma L\{f\} + \delta L\{g\}.$$

4.1.3 La transformée du produit de convolution

• Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R}_+ . On définit le produit de convolution de f et g qui se note généralement par $f * g$, par :

$$f * g = \int_{\mathbb{R}_+} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} g(x-t)f(t)dt$$

• La transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions f et g est

$$L \{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s).$$

4.2 La transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler

La transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est

$$L \{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\mp \lambda t^\alpha); s\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \pm \lambda}, \quad \operatorname{Re}(s) > |\lambda|^{1/\alpha}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.3 La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre entier

Soit la fonction $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$L \{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).$$

4.4 La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit la fonction $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$L \{I^\alpha f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s), \quad n-1 \leq \alpha \leq n.$$

4.5 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit la fonction $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$. Par l'utilisation de la propriété de la transformée de Laplace des dérivées d'ordre entier, on obtient la formule suivante :

$$L \{{}^{RL}D^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left\{ {}^{RL}D^{\alpha-k-1} f(t) \right\}_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha \leq n.$$

4.6 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Avec la même propriété utilisée précédente on obtient la formule suivante :

$$L \left\{ {}^C D^\alpha f(t); s \right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 \leq \alpha \leq n.$$

5 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques concepts de la théorie du calcul fractionnaire a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions de base : la fonction Gamma, la fonction Mittag-Leffler, les différentes définitions des opérateurs fractionnaires et leurs propriétés. Par la suite, nous avons présenté quelques résultats fondamentaux sur les propriétés de la transformée de Laplace.

Chapitre **2**

Équations différentielles fractionnaires

1 Problème de Cauchy

Avant d'aborder la question d'existence et unicité d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire de type Caputo, on commence d'abord par donner une définition général d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire [4].

Définition 2.1 Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha + 1]$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors :

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad (2.1)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire.

- Si on choisit ${}^{RL}D^\alpha$, on a alors une équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville.
- Si on choisit ${}^C D^\alpha$, on a alors une équation différentielle fractionnaire de type Caputo.

Soit $T > 0$, $b_k \in \mathbb{R}$, on considère le problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire de type Caputo :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), x \in [0, T] \\ y^{(k)}(0) = b_k, b_k \in \mathbb{R}, (k = 0, 1, \dots, n - 1). \end{cases} \quad (2.2)$$

Où f est une fonction continue sur $G = [0, T] \times [b_0 - K, b_0 + K]$, $K > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Et ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo.

Les résultats principaux de ce type de problème sont discutés en détail dans le chapitre 2 de [4] et dans le chapitre 4 de [5].

2 Existence et unicité de la solution de (2.2)

Théorème 2.1 Soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, alors, il existe un réel $h > 0$, et une solution continue $y \in C[0, h]$ de problème (2.2).

Dans le cas $\alpha \in (0, 1)$, le paramètre h est donné par la relation

$$h = \min\{T, (K\Gamma(\alpha + 1)/M)^{1/\alpha}\}, \text{ où } M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|.$$

Si de plus f satisfaisant dans G la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable, i.e.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L |y_1 - y_2|,$$

où L une constante indépendante de x, y_1 et y_2 , alors $y \in C[0, h]$ est une solution unique de (2.2).

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

Il est évident de noter que dans le cas classique ce résultat est similaires au théorème d'existence et d'unicité d'une équation différentielle du premier ordre. La démonstration va donc être analogue.

Tout d'abord, nous commençons par transformer le problème (2.2) à une équation intégrale de Volterra équivalente, ensuite en utilisant le théorème du point fixe de Banach dans un espace métrique bien choisi pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.2).

Maintenant, pour la démonstration de ce théorème, on a besoin de deux lemmes suivants :

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses du théorème (2.1) le problème (2.2) est équivalent à l'équation intégrale de Volterra :*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.3)$$

Pour la démonstration de ce lemme on renvoie au [5].

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.1.

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.1, l'équation intégrale de Volterra (2.3) admet une unique solution continue $y \in C[0, h]$.*

Démonstration. *D'après le lemme 2.1, le problème (2.2) est équivalent à l'équation intégrale de Volterra (2.3). Alors si y est une solution de (2.2) et aussi solution de l'équation (2.3).*

D'abord, nous divisons la preuve en deux parties. Nous considérons d'abord le cas $\alpha > 1$ et ensuite le cas $\alpha \in (0, 1)$. Ceci est lié au fait que l'équation intégrale de Volterra (2.3) admet un noyau singulier $(x-t)^{\alpha-1}$ dans le cas $\alpha \in (0, 1)$, tandis que le noyau est continue dans l'autre cas. Maintenant on commence par le premier cas.

- Cas $\alpha > 1$:

l'équation intégrale de Volterra (2.3) possède un noyau continu et la fonction est continue en dehors de l'intégrale. Ainsi, l'existence de la solution suit l'utilisation des méthodes standards de la théorie des équations de Volterra [48]. De la même manière, pour prouver l'unicité, en utilisant la condition de Lipschitz.

On passe à l'autre cas.

- Cas $\alpha \in (0, 1)$:

l'équation (2.3) sera réduite sous la forme suivante :

$$y(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.4)$$

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

Pour montrer l'existence de la solution de l'équation (2.4) on a besoin d'introduire l'ensemble suivant :

$$U = \{u \in C[0, h] : \|y - b_0\|_\infty \leq K\}.$$

L'ensemble U est une partie fermée et convexe de l'espace de Banach de toutes les fonctions sur $[0, h]$ muni de la norme $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. De plus U n'est pas vide car $y = b_0 \in U$. Sur U , nous définissons l'opérateur A par :

$$(Ay)(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.5)$$

En employant cet opérateur, l'équation considérée peut être réécrite comme ci-dessous

$$Ay = y,$$

et pour arriver à notre but de prouver le résultat d'existence, nous devons montrer que A admet un point fixe. Intéressons-nous alors aux propriétés de l'opérateur A .

Nous constatons tout d'abord que, pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$,

$$\begin{aligned} |(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt - \int_0^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right|, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} ((x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}) f(t, y(t)) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right|, \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} ((x_1 - t)^{\alpha-1} - (x_2 - t)^{\alpha-1}) dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{\alpha-1} dt \right|, \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (2(x_2 - x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha), \end{aligned} \quad (2.6)$$

ceci nous amène à prouver la continuité de Ay . De plus, pour $y \in U$ et $x \in [0, h]$ on obtient

$$\begin{aligned} |(Ay)(x) - y_0^{(0)}| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} x^\alpha, \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} h^\alpha \leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{K\Gamma(\alpha + 1)}{\|f\|_\infty} = K. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

On déduit donc que $Ay \in U$ si $y \in U$, i.e. A applique U dans U .

Démontrons maintenant que $A(U) = \{Au : u \in U\}$ est un ensemble relativement compact pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Schauder (voir le théorème 2.1.14 de [5]). Ceci fait à l'aide de théorème d'Arzelá-Ascoli (voir (A.5) de [4]). Pour $z \in A(u)$, on trouve que, pour tout $x \in [0, h]$:

$$\begin{aligned} |z(x)| &= |(Ay)(x)| \leq |b_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y(t))| dt, \\ &\leq |b_0| + \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} h^\alpha. \end{aligned} \quad (2.8)$$

D'où, AU est borné. De plus, pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$, d'après l'équation (2.6), on aura,

$$\begin{aligned} |(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (2(x_2 - x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha), \\ &\leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x_2 - x_1)^\alpha, \end{aligned} \quad (2.9)$$

si l'on choisit $|x_2 - x_1| \leq \delta$, on obtiendra

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha. \quad (2.10)$$

Comme le terme droite de cette expression est indépendant de la variable y , il résulte que l'ensemble $A(U)$ est équicontinu. D'après le théorème d'Arzelá-Ascoli, l'ensemble $A(U)$ est relativement compact. Nous assurant le théorème du point fixe de Schauder, alors A admet un point fixe, i.e. le problème (2.2) admet une solution. Pour l'unicité de la solution nous reprenons l'opérateur A , et rappelons qu'il applique l'ensemble non vide, convexe et fermé $U = \{y \in C(0, h) : \|y - b_0\|_\infty \leq K\}$ dans lui-même. Alors nous allons démontrer que A admet un unique point fixe. Pour cela nous prouvons d'abord que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, h]$, on a

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L^\infty[0, x]} \leq \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \|y - \tilde{y}\|_{L^\infty[0, x]}, \quad (2.11)$$

ceci on pourrait démontrer par récurrence, il est facile de vérifier l'inégalité pour $j = 0$.

Pour $j - 1 \rightarrow j$, on écrit alors,

$$\begin{aligned} \| A^j y - A^j \tilde{y} \|_{L^\infty[0,x]} &= \| A(A^{j-1}y) - A(A^{j-1}\tilde{y}) \|_{L^\infty[0,x]}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \left| \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} [f(t, A^{j-1}y(t)) - f(t, A^{j-1}\tilde{y}(t))] dt \right|. \end{aligned}$$

Après, on utilise la condition de Lipschitz sur f ainsi que l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \| A^j y - A^j \tilde{y} \|_{L^\infty[0,x]} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} |A^{j-1}y(t) - A^{j-1}\tilde{y}(t)| dt, \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sup_{0 \leq w \leq t} |A^{j-1}y(w) - A^{j-1}\tilde{y}(w)| dt, \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} \sup_{0 \leq w \leq t} |y(w) - \tilde{y}(w)| dt, \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \sup_{0 \leq w \leq t} |y(w) - \tilde{y}(w)| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} dt, \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \| y - \tilde{y} \|_{L^\infty[0,x]} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))}{\Gamma(1+\alpha j)} x^{\alpha j}. \end{aligned}$$

Ce résultat est la même inégalité (2.11). Maintenant, en prenant la norme de chebyshev sur l'intervalle $[0, h]$ on aura,

$$\| A^j y - A^j \tilde{y} \|_\infty \leq \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)} \| y - \tilde{y} \|_\infty.$$

Alors l'opérateur A satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Weissinger avec $\alpha_j = \frac{(Lh^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)}$, (voir (A.2) de [4]). D'où, on a l'unicité de solutions de notre problème.

3 Stabilité

Cette partie est consacrée à l'étude de stabilité des équations différentielles fractionnaires dans le cas linéaire et non linéaire. Nous nous intéressons particulièrement aux équations différentielles fractionnaires autonomes et non autonomes du type Caputo.

On commence par présenter le résultat de stabilité dans le cas d'une équation différentielle fractionnaire autonome linéaire à coefficients constants tels qu'il était donné dans [49, 50].

3.1 Cas linéaire

Soit l'équation différentielle fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice.

1. Le système (2.12) est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres λ de la matrice A vérifie la condition suivante $|\arg \lambda| > \frac{\alpha\pi}{2}$. Aussi, si le vecteur d'état $x(t)$ tend vers zéro avec $\|x(t)\| < Kt^{-\alpha}$, $t > 0$, $\alpha > 0$.
2. Le système (2.12) est stable si et seulement si les valeurs propres λ de la matrice A vérifie la condition suivante $|\arg \lambda| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ et toutes les valeurs propres vérifiant $|\arg \lambda| = \frac{\alpha\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique égale à un.

La figure 2.1, présente les régions de stabilité d'un système linéaire d'équations fractionnaires d'ordre $\alpha \in (0, 1)$.

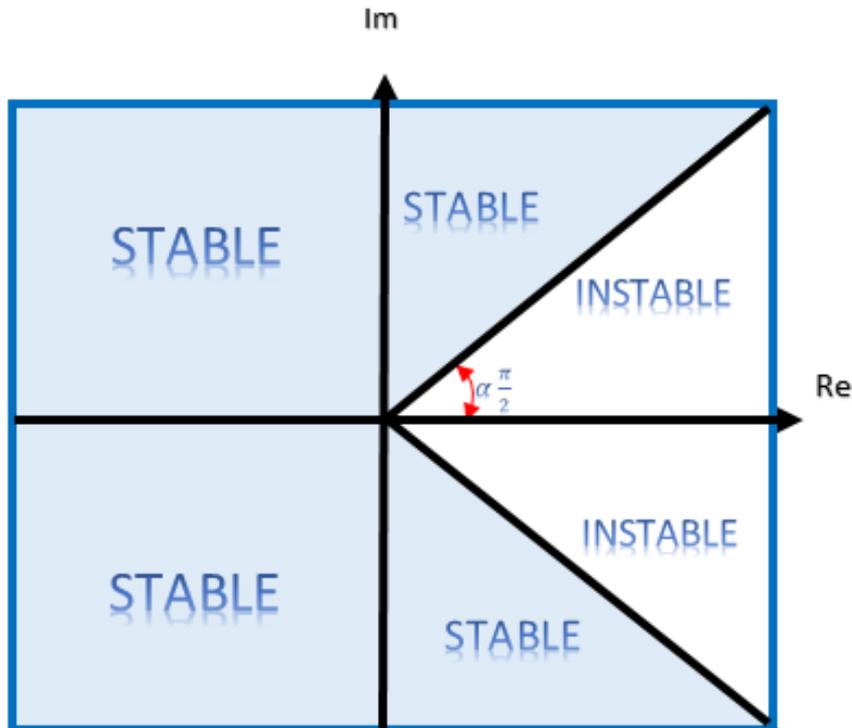


Figure 2.1 – Les régions de stabilité d'un système linéaire d'équations fractionnaires d'ordre $\alpha \in (0, 1)$.

On introduit maintenant quelques résultats de stabilité qui concernent les équations différen-

tielles fractionnaires non linéaires autonomes [17] et non autonomes [22].

3.2 Cas non linéaire autonome

Soit l'équation différentielle fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.13)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $f(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, i = (1, \dots, n)$ est une fonction non linéaire continue.

Avant d'aborder la question de stabilité du système (2.13), on commence d'abord par évaluer les points d'équilibre du système (2.13).

Les points d'équilibre du système (2.13) sont les solutions des équations

$$f_i(x(t)) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Supposons $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ est une solution du système (2.13) i.e.

$$f_i(x^*) = f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0.$$

Dans le but d'étudier la stabilité de point d'équilibre x^* , on défini

$$x_i(t) = x_i^* + \varepsilon_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors le système (2.13) peut être écrit sous la forme

$${}^C D^\alpha(x_i(t)) = {}^C D^\alpha(x_i^* + \varepsilon_i(t)) = f_i(x_1^* + \varepsilon_1(t), \dots, x_n^* + \varepsilon_n(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

On aura, de linéarité de l'opérateur de dérivation fractionnaire et ${}^C D^\alpha(x_i^*) = 0$ que l'équation (2.14) peut s'écrire

$${}^C D^\alpha(\varepsilon_i(t)) = f_i(x_1^* + \varepsilon_1(t), \dots, x_n^* + \varepsilon_n(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

En utilisant le développement en séries de Taylor de la fonction f au voisinage du point x^* on obtient

$$f_i(x_1^* + \varepsilon_1(t), \dots, x_n^* + \varepsilon_n(t)) = f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{x_1^*} \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{x_n^*} \right] \varepsilon(t) + \text{les termes supérieurs}$$

Où $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t))$ et $f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$

Alors

$$f(x_1^* + \varepsilon_1(t), \dots, x_n^* + \varepsilon_n(t)) \approx \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{x_1^*} \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{x_n^*} \right] \varepsilon(t), \quad (2.16)$$

on obtient alors le système d'ordre fractionnaire linéarisé

$${}^C D^\alpha(\varepsilon_i(t)) \approx J|_{x^*} \varepsilon(t), \quad (2.17)$$

avec les conditions initiales $\varepsilon_i(0) = (\varepsilon_1(0), \dots, \varepsilon_n(0))$ et $J|_{x^*} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x^*}$ est la matrice Jacobienne associée à f au point x^* .

On peut maintenant facilement appliquer le résultat de stabilité dans le cas d'une équation différentielle fractionnaire linéaire pour étudier la stabilité des points d'équilibre du système (2.13).

3.3 Cas non linéaire non autonome

Soit l'équation différentielle fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = A(t)x(t) + f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.18)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice et $f(x) \in \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire continue.

On a le résultat suivant :

Théorème 2.2 Soit $x = 0$ le point d'équilibre du système (2.18) si on a

- 1- $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A$,
- 2- $f(0) = 0$ et $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0$,
- 3- $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ et $\|A\| > \frac{N}{\alpha} \geq 1$.

Alors le point d'équilibre du système (2.18) est asymptotiquement stable.

Démonstration. La démonstration de ce résultat se trouve dans [22].

Maintenant, on expose une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov au cas fractionnaire telle qu'elle était donnée dans [51].

3.4 Extension de la méthode directe de Lyapounov au cas fractionnaire

En général, l'extension de la méthode de Lyapounov se révèle un outil très efficace pour étudier la stabilité des systèmes différentiels aux cas d'ordres classiques et fractionnaires, l'idée essentielle de cette méthode est de trouver une fonction de Lyapounov associée à un système différentiel non linéaire, si une telle fonction existe alors le système est stable. Jusqu'à aujourd'hui, personne n'a pu donner une règle générale pour trouver une fonction de Lyapounov. Pour les systèmes d'équations différentielles fractionnaires quelques résultats intéressants consacrés à cette méthode sont présentés dans [52–54]. Néanmoins, la méthode directe de Lyapounov au cas fractionnaire reste encore un problème ouvert [55]. Ici nous discutons rapidement une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapounov au cas fractionnaire.

Soit l'équation différentielle fractionnaire suivant :

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (2.19)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$ et $f(x) \in \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire continue.

Avant d'énoncer le théorème qui est considéré comme une extension de la méthode directe de Lyapounov au cas fractionnaire il convient d'introduire le lemme suivant :

Lemme 2.3 [53] *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable au sens de Caputo. Alors, pour tout $\alpha \in (0,1)$*

$$\frac{1}{2} {}^c D^\alpha [x^T(t)x(t)] \leq x^T(t) {}^c D^\alpha x(t). \quad (2.20)$$

Théorème 2.3 *S'il existe une fonction de Lyapounov définie positive V telle que $D^\alpha V(x) < 0$, pour tout $t \geq t_0$, alors la solution triviale du système (2.19) est asymptotiquement stable.*

Pour la démonstration, on renvoie au papier [51].

4 Résolution numérique des EDF (la technique d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire)

Il existe plusieurs techniques numériques pour résoudre les équations différentielles fractionnaires [6, 24]. Ici on s'intéresse à la technique numérique d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire qu'on va utiliser lors de la simulation des équations d'ordres fractionnaires du type Caputo. Cette technique a été introduite et discutée par K. Diethelm et A. D. Freed [15].

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

Maintenant, basée sur le livre de K. Diethelm [7], on présente une formulation fractionnaire de la technique classique d'Adams-Bashforth-Moulton. L'équation (2.2) est équivalente à l'équation intégrale d'Abel-Volterra :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (2.21)$$

Cette méthode consiste à se servir de la formule de quadrature trapézoïdale du produit, tout simplement nous remplaçons l'intégrale par les nœuds $t_j, j = (0, 1, \dots, k+1)$ et interpréter la fonction $(x_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ en tant que fonction poids pour l'intégrale. En d'autres termes, nous appliquons l'approximation

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz, \quad (2.22)$$

où \tilde{g}_{k+1} est l'interpolation linéaire par morceaux de g par rapport aux nœuds $x_j, j = (0 \dots k+1)$.

Ainsi

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(x_j), \quad (2.23)$$

avec

$$a_{j,k+1} = \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} \phi_{j,k+1}(z) dz, \quad (2.24)$$

et

$$\phi_{j,k+1}(z) = \begin{cases} (z - x_{j-1}) / (x_j - x_{j-1}) & \text{si } x_{j-1} < z \leq x_j \\ (x_{j+1} - z) / (x_{j+1} - x_j) & \text{si } x_j < z \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Un calcul simple permet maintenant de donner

$$a_{0,k+1} = \frac{(x_{k+1} - x_1)^{\alpha+1} + x_{k+1}^\alpha [\alpha x_1 + x_1 - x_{k+1}]}{x_1 \alpha (\alpha + 1)}, \quad (2.26)$$

$$a_{j,k+1} = \frac{(x_{k+1} - x_{j-1})^{\alpha+1} + (x_{k+1} - x_j)^\alpha [\alpha(x_{j-1} - x_j) + x_{j-1} - x_{k+1}]}{(x_j - x_{j-1}) \alpha (\alpha + 1)} + \frac{(x_{k+1} - x_{j+1})^{\alpha+1} + (x_{k+1} - x_j)^\alpha [\alpha(x_{j-1} - x_j) + x_{j-1} - x_{k+1}]}{(x_j - x_{j-1}) \alpha (\alpha + 1)}. \quad (2.27)$$

Si $1 \leq j \leq k$ et

$$a_{k+1,k+1} = \frac{(x_{k+1} - x_k)^\alpha}{\alpha(\alpha + 1)}, \quad (2.28)$$

dans le cas $x_j = jh$ avec h constant, ces relations se ramènent à :

$$a_{j,k+1}(z) = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}(k^{\alpha+1} - (k - \alpha)(k + 1)^\alpha) & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}(k - j + 2)^{\alpha+1} + (k - j)^{\alpha+1} - 2(k - j + 1)^{\alpha+1} & \text{si } j = 0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} & \text{si } j = k + 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

Cela nous donne alors notre formule de correcteur qui est

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{k+1}^j}{k!} b_j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(x_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(x_{k+1}, y_{k+1}^p). \quad (2.30)$$

Pour la formule du prédicateur on adopte la même méthode exposée ci-dessus mais cette fois nous remplaçons l'intégrale par une formule du rectangle comme

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(x_j), \quad (2.31)$$

avec

$$b_{j,k+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{k+1} - z)^{\alpha-1} dz = \frac{(x_{k+1} - x_j)^\alpha - (x_{k+1} - x_{j+1})^\alpha}{\alpha}. \quad (2.32)$$

Ainsi, le prédicateur y_{k+1}^p est déterminé par la formule d'Adams-Bashforth fractionnaire.

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{k+1}^j}{k!} b_j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(x_j, y_j). \quad (2.33)$$

L'algorithme de la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton est bien déterminé par les équations (2.30) et (2.33) avec les poids $a_{j,k+1}$ et $b_{j,k+1}$ étant définies respectivement selon les équations (2.29) et (2.32).

5 Discrétisation des EDF

Dans les travaux [56, 57], les auteurs ont présenté un processus de discrétisation des équations différentielles fractionnaires. Précisément, l'équation de Riccati d'ordre fractionnaire et le modèle proie-prédateurs de Lotka-Volterra fractionnaire. Ici nous présentons le processus de

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

discrétisation des équations différentielles fractionnaires introduit par A. George Maria Selvama et R. Janagaraj dans [58]. Le processus de discrétisation peut se faire de la manière ci-dessous : on considère l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = f(x(t)), t > 0 \\ x(0) = x_0, t \leq 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Où $\alpha \in (0, 1)$ et ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo.

L'équation différentielle fractionnaire à arguments constants par morceaux correspondante est donné par :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x(t) = f(x(r[\frac{t}{r}])), t > 0 \\ x(0) = x_0, t \leq 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

- Nous supposons que $t \in [0, s)$, alors $t/s \in [0, 1)$. On obtient,

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x_0) \quad t \in [0, s).$$

Alors,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + I_0^\alpha (f(x_0)) , \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(x_0) d\tau, \\ &= x_0 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} f(x_0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

- Dans la deuxième étape, nous supposons $t \in [s, 2s)$, alors $t/s \in [1, 2)$; on obtient

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x_1(t)) \quad t \in [s, 2s).$$

Alors,

$$x_2(t) = x_1(s) + \frac{(t - s)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} f(x_1(s)). \quad (2.37)$$

- En répétant le processus de discrétisation n fois, nous supposons $t \in [ns, (n + 1)s)$, alors $t/s \in [n, n + 1)$; on obtient

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x_n(t)) \quad t \in [ns, (n + 1)s).$$

Alors,

$$x_{n+1}(t) = x_n(ns) + \frac{(t - ns)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} f(x_n(ns)). \quad (2.38)$$

Il convient de noter que si le paramètre fractionnaire α converge vers un dans l'équation (2.38), on a la discrétisation d'Euler du système.

6 Chaos dans les EDF

On introduira, dans cette section, quelques définitions liées aux notions de systèmes dynamique, bifurcation, chaos, etc. Ensuite, on va décrire différentes méthodes permettant la caractérisation numérique et graphique du chaos. On recommande les livres de Devaney [59], d'Arnold [60] et de Kuznetsov [61] pour les détails.

6.1 Système dynamique

Un système dynamique est une structure qui décrit différents phénomènes qui évoluent au cours du temps. Du point de vue mathématique, on peut représenter un système dynamique par un ensemble fini d'équations différentielles.

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

6.1.1 Systèmes dynamiques continus

Soit l'espace d'état X de dimension finie (un ouvert de \mathbb{R}^n). Un système dont l'évolution temporelle peut être décrite par l'équation :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad (2.39)$$

est un système dynamique où $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs qui représente la dynamique du système (2.39).

6.1.2 Systèmes dynamiques discrets

Le système dynamique en temps discret est décrit par une fonction itérative.

$$x_{n+1} = f(n, x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.40)$$

Définition 2.2 • L'ensemble $O_c = \{x(t); t \in \mathbb{R}\}$, s'appelle une orbite du système dynamique continu et l'ensemble $O_d = \{f(n, x_n), n \in \mathbb{N}\}$, s'appelle une orbite du système dynamique discret.

- Le point d'équilibre d'un système dynamique discret est tout point x_f tels que $f(x_f) = x_f$.
- Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

- *Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée dans l'espace de phase. Plus précisément, le cycle limite est entouré par des trajectoires voisines spirales initiées à partir des conditions initiales différentes.*

6.2 Bifurcation

Considérons un système dynamique qui dépend du paramètre. Dans le cas continu :

$$\dot{x} = f(x, r).$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^m$.

Dans le cas discret :

$$x_{n+1} = f(x_n, r).$$

Où $x_n \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^m$.

Définition 2.3 [61] *Une bifurcation est toute apparition d'un portrait de phase topologiquement non équivalent résultant d'un changement quantitatif des paramètres d'un système non linéaire. Au point de bifurcation, il est possible de gagner ou de perdre de la stabilité et peut aussi apparaître des nouvelles solutions.*

Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres dans laquelle tous les points de bifurcation sont représentés.

Nous présentons quelques types de bifurcation qui va être utilisées dans notre travail. Pour les systèmes dynamiques continue, parmi les différents types de bifurcations, on trouve, la **bifurcation de Hopf**, il se produit lorsque la propriété de la stabilité du point d'équilibre change vers un cycle limite. Ce type de bifurcation apparait quand le système admet une paire de valeurs propres purement imaginaires pour un domaine du paramètre de bifurcation. Il existe deux types de bifurcation de Hopf, une bifurcation super-critique et une bifurcation sous-critique. Ces deux types sont caractérisés par le premier coefficient de Lyapunov qui peut être respectivement négatif ou positif [61]. Au cours des dernières années, on peut trouver plusieurs études sur ce type de bifurcation nous en citons par exemple les travaux [61, 62] et quelques résultats sur la généralisation de ce type au cas fractionnaire se trouvent dans [63–65]. La bifurcation de Hopf est considérée comme équivalente à la **bifurcation de Neimark-Sacker** en temps discret (c'est-à-dire le module d'une paire de valeurs propres complexes est égales à 1). Un autre type de bifurcation, pour les systèmes dynamiques discret est la **bifurcation de pli** (une valeur propre réelle égales à -1), (voir [66]).

6.3 Définition du chaos

La notion de chaos a été introduit par Li et Yorke en 1975 [67]. Après Devaney [59] à marquer le chaos comme une notion mathématique mais jusqu'au aujourd'hui il n'existe pas une définition formelle pour le chaos il existe seulement des approches avant de poursuivre il est nécessaire de nous donner quelques notions.

Définition 2.4 Soient X un espace métrique et $g : X \rightarrow X$. On dit que l'application g est topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \in X$ il existe un élément $x_0 \in U$ et un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ tels que $g^{(n)} \in V$.

Définition 2.5 Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que le système dynamique topologique (X, T) possède la propriété de sensibilité aux conditions initiales lorsqu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, \exists n \in \mathbb{N} : d(x, y) < \varepsilon \text{ et } d(g^n(x), g^n(y)) > c. \quad (2.41)$$

On donne maintenant quelques approches de définition de chaos.

Définition 2.6 (Au sens de Li-Yorke [67]), soit $g : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique (X, d) compact. On dit que g est chaotique dans le sens de Li et Yorke s'il existe un sous-ensemble dénombrable S de X vérifié les propriétés suivantes :

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(y)) > 0$ pour tout $x, y \in S, x \neq y$,
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(y)) = 0$ pour tout $x, y \in S, x \neq y$,
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(g^n(x), g^n(p)) > 0$ pour tout $x \in S, x \in S, p$ périodique.

Définition 2.7 (Au sens de Devaney [59]), on dit que le système dynamique est chaotique si et seulement si

- il est topologiquement transitif,
- il possède un ensemble dense d'orbites périodiques,
- il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

6.4 Caractérisation numérique et graphique du chaos

Les outils utilisés pour caractériser les comportements chaotiques sont décrites par la suite :

6.4.1 Sensibilité aux conditions initiales

Cette propriété a été constatée pour la première fois par E. Lorenz [68] à l'aide d'une simulation informatique d'un système d'équations différentielles simples pour une convection d'un fluide il a observé un comportement complexe qui a apparemment dépendu sensiblement des conditions initiales. Ce modèle météorologique est également connu sous le nom d'effet papillon. La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique qui autorise la reconnaissance d'un comportement chaotique, du fait que la plupart des systèmes chaotiques offrent une sensibilité aux conditions initiales ; pour les deux conditions initiales arbitraires qui sont très voisines au départ, les trajectoires correspondant à ces données initiales s'écartent rapidement l'une de l'autre et les deux trajectoires divergent de façon exponentielle.

6.4.2 L'attracteur étrange

Les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont généralement attirées par un attracteur étrange. Cet attracteur est contenu dans un espace fini et caractérisé par un volume nul et une dimension fractale (non entière), de plus les trajectoires d'un attracteur étrange ont également une structuration est issue du même caractère quelle que soit l'échelle à laquelle on la regarde et aussi la divergence des trajectoires voisines de façon exponentielle reste un phénomène local qui traduit la sensibilité aux conditions initiales.

On donne maintenant la définition mathématique d'un attracteur étrange proposé par D. Ruelle et F. Takens.

Définition 2.8 [69] *un attracteur étrange peut être défini comme suit : un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage V de A , i.e, que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :*

- **Attraction** : *V est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans V est entièrement contenue dans V . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*
- **Sensibilité** : *les trajectoires aux conditions initiales sont divergées de façon exponentielle.*

- **Espace fini** : il est impossible que les deux trajectoires divergent de manière infinie. Presque toute trajectoire sur l'attracteur a la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point.

Exemple 2.1 On considère deux systèmes d'ordres fractionnaires, le système fractionnaire de Lü [28] :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) \\ {}^c D^\alpha x_2 = cx_2 - x_1x_3 \\ {}^c D^\alpha x_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \quad (2.42)$$

où $(y_1, y_2, y_3)^T$ sont les variables d'états. Lorsque $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, $\alpha = 0.90$, avec la condition initial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 3, 5)$, le système fractionnaire de Lü est chaotique.

Et le système fractionnaire de Rossler [27] :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1 = -x_2 - x_3 \\ {}^c D^\alpha x_2 = x_1 + a_1x_2 \\ {}^c D^\alpha x_3 = x_1x_3 - b_1x_3 + c_1 \end{cases} \quad (2.43)$$

où $(x_1, x_2, x_3)^T$ sont les variables d'états et lorsque les paramètres $a_1 = 0.4$, $b_1 = 0.2$ et $c_1 = 10$, $\alpha = 0.9$ avec la condition initial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.2, 0, 2)$, le système (3.24) est chaotique.

Attracteurs étranges de deux systèmes chaotiques fractionnaires de Lü et de système chaotiques fractionnaire de Rossler sont illustres à la figure 2.2.

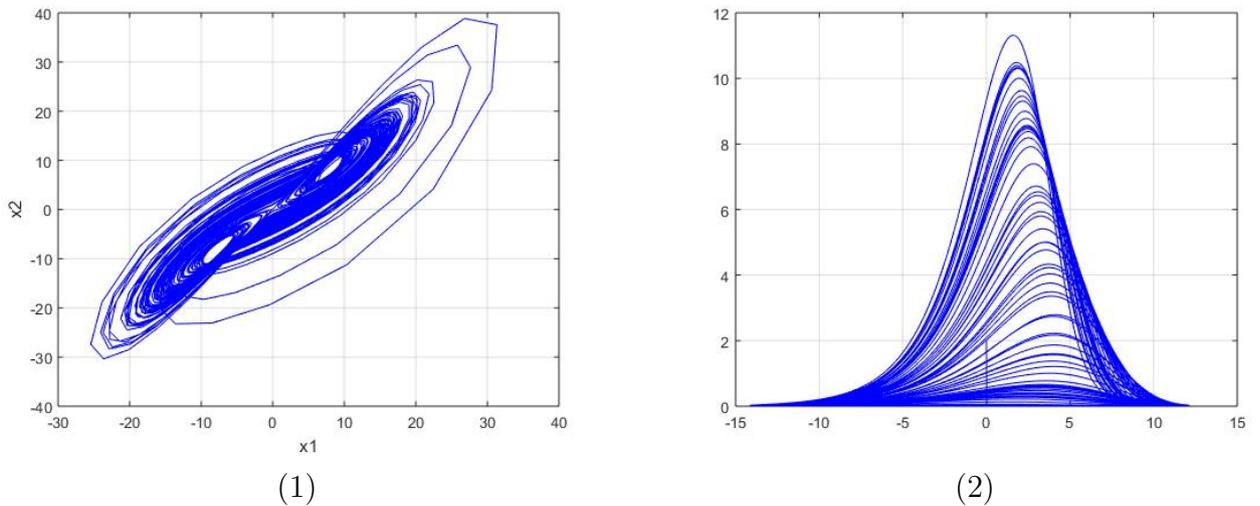


Figure 2.2 – Attracteurs étranges pour : (1) le système fractionnaire de Lü. (2) le système fractionnaire de Rossler

6.4.3 Exposants de Lyapounov

L'exposant de Lyapounov est une mesure quantitative très importante pour caractériser différents types de comportement des systèmes dynamiques. Lyapounov a montré que le nombre d'exposants de Lyapounov est égal à la dimension de l'espace des phases. On note l'exposant de Lyapounov par λ_n . On expose ci-après le principe d'exposants de Lyapounov pour évaluer le comportement des systèmes dynamiques au cas discret, continu et fractionnaire. [4, 70, 71].

• Cas discret

Pour comprendre ce principe en prenant un système dynamique discret de dimension 1 définie dans l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.44)$$

soit x_0 une condition initiale, on ajoute une très petite erreur ε pour perturber la condition initiale x_0 .

Soient O_1 et O_2 deux orbites initialisés par x_0 et $x_0 + \varepsilon$ respectivement.

On cherche à évaluer la distance exponentielle entre les deux orbites O_1 et O_2 après n itérations telles que la distance est définie par

$$\Delta(x_n) = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|, \quad (2.45)$$

pour n très grand, on a

$$\Delta(x_n) \simeq \varepsilon \exp(n\lambda), \quad (2.46)$$

on a $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \dots, x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$.

Quand ε tends vers zéro, on obtient

$$\varepsilon \exp(n\lambda) \simeq \frac{d^n f(x)}{dx}, \quad (2.47)$$

et

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{\Delta(x_n)}{\Delta(x_0)} &\simeq \ln \frac{d^n f(x)}{dx}, \\
 &= \ln \prod_{k=0}^{n-1} |f'(x_k)|, \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

D'après l'équation (2.46), on peut définir l'exposant de Lyapounov comme suit :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|. \tag{2.49}$$

• **Cas continue**

En prenant un système dynamique continu de dimension n définie par n équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t)) \quad i = (1, \dots, n), \tag{2.50}$$

où x_i sont les coordonnées du système.

En utilisant le développement de Taylor de l'équation (2.50) pour évaluer une petite perturbation $\Delta x(t)$ autour d'une trajectoire $x(t)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(x_i(t) + \Delta x_i(t)) &= f_i(x(t) + \Delta x(t)), \\
 &= f_i(x_i(t)) + \sum_j \frac{\partial f_i x(t)}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\Delta x(t)).
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Alors

$$\frac{d}{dt}(x_i(t) + \Delta x_i(t)) \simeq f_i(x_i(t)) + \sum_j \frac{\partial f_i x(t)}{\partial x_j} \Delta x_j, \tag{2.52}$$

d'après (2.50) on aura

$$\frac{d\Delta x_i(t)}{dt} \simeq \sum_j \frac{\partial f_i x(t)}{\partial x_j} \Delta x_j, \tag{2.53}$$

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

on écrit l'équation (2.53) sous forme matricielle on trouve :

$$\Delta \dot{x}_i(t) = -A\Delta x_j, \quad (2.54)$$

où A est la matrice définie par $A_{i,j} = -\frac{\partial f_i x(t)}{\partial x_j}$.

Supposons V solution de l'équation matricielle :

$$\dot{V} = -AV, \quad (2.55)$$

l'équation (2.54) s'intègre en :

$$\Delta x(t) = V(t)\Delta x(0), \quad (2.56)$$

la norme de $\Delta x(t)$ s'obtient de la forme :

$$|\Delta x(t)|^2 = \Delta x^T(0)V^T(t)V(t)\Delta x(0). \quad (2.57)$$

On définit les exposants de Lyapounov à temps fini comme les valeurs propres de $\frac{1}{2t} \log(V^T(t)V(t))$:

$$\lambda_i(t) = \left\{ \text{spect}(\log(V^T(t)V(t))^{\frac{1}{2t}}) \right\}, \lambda_i < \dots < \lambda_n. \quad (2.58)$$

Si la matrice $(V^T(t)V(t))^{\frac{1}{2t}}$ vérifie les conditions générales d'article [72], alors elle est convergente lorsque $t \rightarrow \infty$. Ce qui permet de définir les exposants de Lyapounov comme suit :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t). \quad (2.59)$$

• Cas fractionnaire

On se propose, pour calculer les exposants de Lyapounov dans le cas d'un système d'ordre fractionnaire l'algorithme développé par T. Rosenstein et al. [73] et l'algorithme de Benettin–Wolf [70]. Il existe, cependant, une autre technique proposée par Danca et Kuznetsov dans le papier [71], dans laquelle ils présentent l'algorithme Benettin-Wolf pour déterminer tous les exposants de Lyapounov pour une classe des systèmes d'ordres fractionnaires et le code Matlab correspondant, ce dernier étant celui que nous utiliserons dans notre travail. Premièrement, pour définir les exposants de Lyapounov on a besoin de résultat suivante :

Théorème 2.4 [74] *Considérons les équations différentielles fractionnaires de type Caputo*

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x = f(x), \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Où $t \in [0, T]$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$. Et ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo. Le système (2.60) a sa propre équation de variation donné par :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha \Phi(t) = D_x f(x) \Phi(t), \\ \Phi(0) = I. \end{cases} \quad (2.61)$$

Où Φ est la solution matricielle du système (2.61), D_x est le jacobien de f et I est la matrice d'identité.

Soient $\lambda_k(t)$ $k = 1, 2, \dots, n$ les valeurs propres de $\Phi(t)$ du système (2.61), qui satisfont,

$$|\lambda_1(t)| < |\lambda_2(t)| < \dots < |\lambda_n(t)|. \quad (2.62)$$

Alors, les exposants de Lyapunov λ_k de trajectoire $x(t)$ résolvant l'équation (2.61) sont définies par

$$\lambda_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup \ln |\lambda_i(t)| \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.63)$$

7 Application : le modèle de Selkov

Cette partie constitue le contenu d'un papier intitulé "Dynamical behaviors of fractional order Selkov model and its discretization" accepté dans la revue "Nonlinear Dynamics and Systems Theory" avec mes encadreurs de thèse T. Houmor et A. Berkane qui sera publié dans les mois qui viennent, (volume 3).

La glycolyse est la première étape de la dégradation du glucose pour extraire l'énergie nécessaire au métabolisme cellulaire, elle est présente dans presque tous les organismes vivants. Après des années d'observations expérimentales, la modélisation mathématique de ce phénomène a été utilisée pour la première fois en 1964 par Higgins [75]. Depuis lors, les travaux abondent dans cette direction et nombreux d'articles y ont été consacrés [76–79].

En 1968, Selkov [80] a présenté un modèle mathématique qui porte son nom pour modéliser

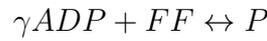
Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

la dynamique de certaines oscillations dans les systèmes biologiques comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - xy^\gamma, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta y (xy^{\gamma-1} - 1), \end{aligned} \tag{2.64}$$

avec les conditions initiales $x(0) > 0$, $y(0) > 0$.

Les quantités $x(t)$ et $y(t)$ représentent des concentrations de l'ATP et de l'ADP au temps t respectivement. Le paramètre β est un variable réelle, $\gamma > 1$ est le paramètre stœchiométrique de la réaction



Selkov a montré que le système ci-dessus n'a qu'un seul point d'équilibre $E = (1, 1)$. L'équation caractéristique au voisinage du point fixe E est :

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -\gamma \\ \beta & \beta(\gamma - 1) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

les valeurs propres associées sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{ \beta(\gamma - 1) - 1 \pm \sqrt{[\beta(\gamma - 1) - 1]^2 - 4\beta} \}.$$

La stabilité du point d'équilibre E dépend du paramètre β .

Le point d'équilibre E est un nœud stable pour $0 < \beta \leq \beta_1$, un foyer stable pour $\beta_1 < \beta < \beta_0$, un foyer instable pour $\beta_0 < \beta < \beta_2$ et un nœud stable pour $\beta_2 \leq \beta < \infty$.

Tels que

$$\beta_0 = \frac{1}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad \beta_{1,2} = \left(\frac{\sqrt{\gamma} \pm 1}{\gamma - 1} \right)^2, \quad (\beta_1 < \beta_2). \tag{2.65}$$

De plus, si nous considérons la partie réelle des valeurs propres comme une fonction de β alors elle passe par zéro lorsque $\beta = \beta_0$ et sa dérivée par rapport à β au ce point est non nulle. Il se produit donc une bifurcation de Hopf. Le premier coefficient de Lyapunov σ de la bifurcation est $\sigma = -\frac{3\pi(\gamma - 1)^{\frac{1}{2}}}{4}(\gamma^2(\gamma - 1) + 1) < 0$. La bifurcation de Hopf est donc non dégénérée et supercritique, les détails se trouvent dans [78].

On introduit maintenant le modèle fractionnaire et on essaie d'appliquer les résultats des paragraphes précédents sur ce modèle. À notre connaissance, l'analyse de la dynamique du système de Selkov au cas fractionnaire n'a jamais été réalisée auparavant dans d'autres travaux.

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

Le modèle fractionnaire de Selkov

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha x &= 1 - xy^\gamma, \\ {}^c D^\alpha y &= \beta y(xy^{\gamma-1} - 1), \end{aligned} \tag{2.66}$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et ${}^c D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo. Nous étudions le système (2.66) avec les mêmes conditions initiales $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ qui donné dans (2.64). Comme x et y sont les concentrations d'ATP et d'ADP dans les cellules vivantes respectivement, nous nous intéressons qu'aux solutions positives. Pour prouver la positivité, l'existence et l'unicité de notre système, nous utiliserons le lemme 2.1, le théorème 2.1 et les deux lemmes suivants :

Lemme 2.4 [81] *Supposons que $x \in C[a, b]$ et ${}^c D^\alpha x \in C(a, b)$ avec $0 < \alpha \leq 1$. Alors, on a :*

1. *Si ${}^c D^\alpha x(t) \geq 0$, $\forall t \in (a, b)$, alors $x(t)$ est une fonction croissante pour tout $t \in [a, b]$.*
2. *Si ${}^c D^\alpha x(t) \leq 0$, $\forall t \in (a, b)$, $x(t)$ est une fonction décroissante pour tout $t \in [a, b]$.*

Lemme 2.5 [6] *Soient x et y deux variables réelles positive et $\gamma \geq 1$ alors*

$$|x^\gamma - y^\gamma| \leq \gamma(\sup(x, y))^{\gamma-1}|x - y|.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.5 *Toutes les solutions du système (2.66) avec la condition initiale $x(0) \geq 0$ et $y(0) \geq 0$ sont non négative.*

Démonstration. *Nous supposons que $x(t) \geq 0$ est vrais pour tout $t \geq 0$, alors il y a une constante $t_1 > 0$ telle que*

$$\begin{cases} x(t) > 0, & 0 \leq t < t_1 \\ x(t_1) = 0, \\ x(t_1^+) < 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

En remplaçant la deuxième équation du système (2.67) par la première équation de (2.66), on obtient :

$${}^c D^\alpha x(t)|_{t=t_1} = 1. \tag{2.68}$$

Selon le lemme 2.4, nous avons $x(t_1^+) \geq 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $x(t_1^+) < 0$. Par conséquent $x(t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$. En appliquant le même raisonnement pour montrer que $y(t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$.

On étudie l'existence et l'unicité de la solution du modèle fractionnaire de Selkov (2.66).

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

Théorème 2.6 *On considère le système (2.66) avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ dans $[0, \infty) \times \Omega$ tels que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \max\{|x|, |y|\} \leq M\}$. Alors ce problème possède une unique solution.*

Démonstration. *On définit $f_1(x, y) = 1 - xy^\gamma$ et $f_2(x, y) = \beta y(xy^{\gamma-1} - 1)$. De plus, on note $F = (f_1, f_2)^T$ et $X = (x, y)^T$, alors l'équation différentielles récrire comme suit ${}^c D^\alpha X = F(X)$. On montre que la fonction $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ est Lipschitzienne. On note $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$. Alors pour tout $X_1, X_2 \in \Omega$, on trouve :*

$$\begin{aligned} \|F(X_1) - F(X_2)\| &= |f_1(x_1, y_1) - f_1(x_2, y_2)| + |f_2(x_1, y_1) - f_2(x_2, y_2)|, \\ &= |x_1 y_1^\gamma - x_2 y_2^\gamma| + \beta |x_1 y_1^\gamma - x_2 y_2^\gamma - y_1 + y_2|, \\ &\leq (1 + \beta) |x_1 y_1^\gamma - x_2 y_2^\gamma| + \beta |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

En constatant que

$$|x_1 y_1^\gamma - x_2 y_2^\gamma| = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1^\gamma + y_2^\gamma) + (x_1 + x_2)(y_1^\gamma - y_2^\gamma)].$$

En utilisant l'inégalité triangulaires et le lemme 2.5 on trouve :

$$\begin{aligned} \|F(X_1) - F(X_2)\| &\leq \frac{1 + \beta}{2} [|x_1 - x_2| |y_1^\gamma + y_2^\gamma| + |x_1 + x_2| |y_1^\gamma - y_2^\gamma|] + \beta |y_1 - y_2|, \\ &\leq \frac{1 + \beta}{2} [|x_1 - x_2| |y_1^\gamma + y_2^\gamma| + \gamma (\sup(y_1, y_2))^{\gamma-1} |x_1 + x_2| |y_1 - y_2|] + \beta |y_1 - y_2|, \\ &\leq (1 + \beta) M^\gamma |x_1 - x_2| + ((1 + \beta) \gamma M^\gamma + \beta) |y_1 - y_2|, \\ &\leq L \|X_1 - X_2\|. \end{aligned}$$

Où $L = (1 + \beta) \gamma M^\gamma + \beta$. Ainsi, $F(X)$ satisfait la condition de Lipschitz. Selon le théorème 2.1, il existe une solution unique $X(t)$ du système (2.66) avec la condition initiale $X(0) = (x(0), y(0))$.

On étudie maintenant la stabilité de (2.66) au point fixe E .

- Si $0 < \beta \leq \beta_1$: $\lambda_{1,2}$ sont des valeurs propres réelles négatives, E est asymptotiquement stable pour tous $\alpha \in (0, 1]$.
- Si $\beta_1 < \beta < \beta_2$: $\lambda_{1,2}$ sont des valeurs propres complexes conjuguées, E est asymptotiquement stable si et seulement si $|\arg(\lambda_{1,2})| > \frac{\alpha\pi}{2}$, c-à-d, $0 < \alpha < \alpha^*$, tels que

$$\alpha^* = \frac{2}{\pi} \left| \arctan \sqrt{\frac{4\beta}{[\beta(\gamma - 1) - 1]^2} - 1} \right|.$$

- Si $\beta \geq \beta_2$: $\lambda_{1,2}$ sont des valeurs propres réelles positives, E est instable pour tous les $\alpha \in (0, 1]$.

β_0, β_1 et β_2 sont donné dans (2.65).

La région de stabilité de modèle fractionnaire de Selkov avec $\gamma = 2$ dans le plan $(\beta - \alpha)$ est présenté sur la figure 2.3, les régions stable et instable sont séparées par la courbe de l'équation :

$$\alpha(\beta) = \frac{2}{\pi} \left| \arctan \sqrt{\frac{4\beta}{[\beta(\gamma - 1) - 1]^2} - 1} \right|.$$

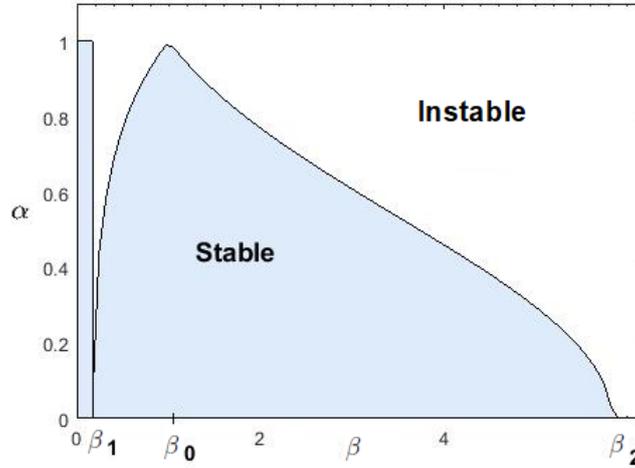


Figure 2.3 – La région de stabilité de modèle de Selkov d'ordre fractionnaire avec $\gamma = 2$

Bifurcation de Hopf

En s'appuyant sur les conditions proposées par Xiang Li et Ranchao Wu pour l'analyse de bifurcations de Hopf dans les systèmes fractionnaires, on s'intéresse au cas où l'ordre fractionnaire est le paramètre de bifurcation.

Théorème 2.7 [64] *Lorsque le paramètre de bifurcation α passe par la valeur critique $\alpha^* \in (0, 1)$, le système d'ordre fractionnaire (2.66) subit une bifurcation de Hopf au point d'équilibre si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- la matrice Jacobienne du système (2.66) au point d'équilibre a une paire de valeurs propres conjuguées complexes $\lambda_{1,2}$ où $\mathcal{R}e(\lambda_{1,2}) > 0$,
- $m(\alpha^*) = 0$, où $m(\alpha) = \frac{\alpha\pi}{2} - \min_{1 \leq i \leq 2} |\arg(\lambda_i)|$,
- $\left. \frac{dm(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} \neq 0$.

Si $\beta_0 < \beta < \beta_2$ alors la matrice Jacobienne du système (2.66) au point d'équilibre E a une paire de valeurs propres conjuguées complexes $\lambda_{1,2}$ où $\mathcal{R}e(\lambda_{1,2}) > 0$. Alors, la condition (a) du

théorème 2.7 est vérifiée. De plus, lorsque le paramètre de bifurcation prend la valeur critique $\alpha = \alpha^*$ on obtient $m(\alpha^*) = 0$ qui est la condition (b) du théorème. Enfin, à partir de la définition de $m(\alpha)$, on obtient

$$\left. \frac{dm(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Cela implique que la condition (c) est vérifiée.

Par conséquent, d'après le théorème 2.7, le modèle (2.66) subit une bifurcation de Hopf au point d'équilibre $E = (1, 1)$ lorsque le paramètre de bifurcation passe par la valeur critique α^* où $\beta_0 < \beta < \beta_2$.

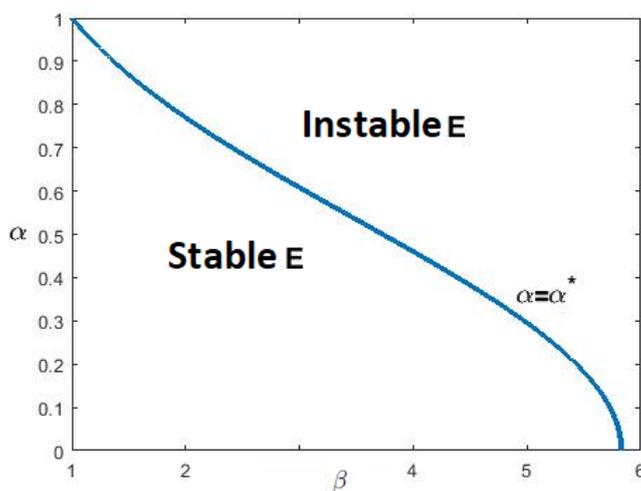


Figure 2.4 – Une courbe de bifurcation de Hopf $\alpha = \alpha^*$ sépare la région de stabilité de E en régions stable et instable pour $\gamma = 2$ et $\beta_0 < \beta < \beta_2$.

Remarque 7.1 *La différence entre la bifurcation de Hopf dans le cas d'un système dynamique d'ordre entier et fractionnaire est que dans le système dynamique d'ordre entier, le cycle limite est une solution pour ce système, par contre dans le cas fractionnaire, le cycle limite ne doit pas être une solution de système et les trajectoires approchent un cycle limite. Dans [82], les auteurs ont démontré qu'il était impossible de trouver des solutions périodiques dans les systèmes d'ordres fractionnaires. Ainsi, il n'y a pas des solutions périodiques dans le modèle de Selkov fractionnaire.*

On étudie maintenant quelques comportements dynamiques du système de Selkov d'ordre fractionnaire discret.

Le processus de discrétisation peut être réalisé de la même manière décrite précédemment. Supposons que $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ sont les conditions initiales du système (2.66).

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

La discrétisation du système (2.66) avec argument constant par morceaux est donnée par

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha x &= 1 - x([t/s]s)y^\gamma([t/s]s) , \\ {}^c D^\alpha y &= \beta y([t/s]s) (x([t/s]s)y^{\gamma-1}([t/s]s) - 1) . \end{aligned} \quad (2.69)$$

Nous supposons que $t \in [0, s)$, donc $t/s \in [0, 1]$. Alors,

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha x &= 1 - x_0 y_0^\gamma , \\ {}^c D^\alpha y &= \beta y_0 (x_0 y_0^{\gamma-1} - 1) , \end{aligned} \quad (2.70)$$

la solution de ce dernier est la suivante

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + I_0^\alpha (1 - x_0 y_0^\gamma) , \\ &= x_0 + \frac{t^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} (1 - x_0 y_0^\gamma) , \\ y_1(t) &= y_0 + I_0^\alpha (\beta y_0 (x_0 y_0^{\gamma-1} - 1)) , \\ &= y_0 + \frac{t^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\beta y_0 (x_0 y_0^{\gamma-1} - 1)) , \end{aligned} \quad (2.71)$$

où $\alpha > 0$.

Dans la deuxième étape, nous supposons $t \in [s, 2s)$ de sorte que $t/s \in [1, 2]$, on obtient

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha x &= 1 - x(s)y^\gamma(s) , \\ {}^c D^\alpha y &= \beta y(s) (x(s)y^{\gamma-1}(s) - 1) . \end{aligned} \quad (2.72)$$

La solution de celle-ci est la suivante

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(s) + I_s^\alpha (1 - x_1(s)y_1^\gamma(s)) , \\ &= x_1(s) + \frac{(t-s)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} (1 - x_1(s)y_1^\gamma(s)) , \\ y_2(t) &= y_1(s) + I_s^\alpha (\beta y_1(s) (x_1(s)y_1^{\gamma-1}(s) - 1)) , \\ &= y_1(s) + \frac{(t-s)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\beta y_1(s) (x_1(s)y_1^{\gamma-1}(s) - 1)) , \end{aligned} \quad (2.73)$$

où $\alpha > 0$.

En répétant le processus de discrétisation, n fois, on a

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= x_n(ns) + \frac{(t - ns)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} (1 - x_n(ns)y_n^\gamma(ns)) , \\ y_{n+1}(t) &= y_n(ns) + \frac{(t - ns)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\beta y_n(ns) (x_n(ns)y_n^{\gamma-1}(ns) - 1)) , \end{aligned} \quad (2.74)$$

où $t \in [ns, (n+1)s)$.

Quand $t \rightarrow (n+1)s$, on obtient le modèle discret fractionnaire correspondant au modèle fractionnaire continu (2.66) comme

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{s^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} (1 - x_n y_n^\gamma), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{s^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} (\beta y_n (x_n y_n^{\gamma-1} - 1)). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Il convient de noter que si le paramètre fractionnaire α converge vers un dans l'équation (2.75), on a la discrétisation d'Euler du système (2.66).

Stabilité et bifurcation de système (2.75)

Il est facile de vérifier que le modèle (2.75) a le même point fixe $E = (1, 1)$ que dans le système (2.66) pour chaque valeur de paramètre β et de pas s . En appliquant les mêmes techniques utilisées dans [66], [83] pour étudier la stabilité de système fractionnaire de Selkov au cas discret, (voir annexe).

La matrice Jacobienne du système (2.75) au point fixe E est

$$J^* = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} & -\gamma \frac{s^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\ \beta \frac{s^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} & 1 + \beta(\gamma - 1) \frac{s^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{s^\alpha}{2\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\beta(\gamma - 1) - 1 \pm \sqrt{(\beta(\gamma - 1) - 1)^2 - 4\beta} \right).$$

Pour tout $0 < \alpha \leq 1$, on a les résultats suivants :

- Si $0 < \beta \leq \beta_1$, alors le point fixe E est un puits si $0 < s < s_1$, un point selle si $s_1 < s < s_2$ et une source si $s \geq s_2$. Ainsi, le système admet une bifurcation de flip au $s = s_1$.
- Si $\beta_1 < \beta < \beta_0$, alors le point fixe E est un puits si $0 < s < s_0$, non hyperbolique si $s = s_0$ et une source si $s > s_0$. Ainsi, le système admet une bifurcation de Neimark-Sacker à $s = s_0$.
- Si $\beta \geq \beta_0$, alors le point fixe E est une source pour tous les $s > 0$.

où

$$s_0 = \left[\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta} (1 - \beta(\gamma - 1)) \right]^{1/\alpha}, \quad s_{1,2} = \left[\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta} \left((1 - \beta(\gamma - 1)) \pm \sqrt{(\beta(\gamma - 1) - 1)^2 - 4\beta} \right) \right]^{1/\alpha}.$$

Chapitre 2. Équations différentielles fractionnaires

β	0	β_1	β_0	β_2
modèle (2.64)	Stable nœud	Stable foyer	Instable foyer	Instable nœud
modèle (2.66)	LA Stable $\forall \alpha \in (0, 1]$	LA Stable si $0 < \alpha < \alpha^*$		Instable $\forall \alpha \in (0, 1]$
modèle (2.75)	Puits pour $0 < s < s_1$ Selle pour $s_1 < s < s_2$ Source pour $s \geq s_2$ $\forall \alpha \in (0, 1]$	Puits pour $s < s_0$ Source pour $s > s_0$ $\forall \alpha \in (0, 1]$	Source $\forall s > 0$ $\forall \alpha \in (0, 1]$	

Tableau 2.1 – Étude comparative entre le modèle de Selkov (2.64), le modèle de Selkov fractionnaire (2.66) et le modèle de Selkov fractionnaire discret (2.75)

Nous nous intéressons à ressortir la différence entre les résultats de stabilité de modèle de Selkov, nous illustrons dans le tableau 2.1 les résultats en considérant les trois cas d'études (classique, fractionnaire et discret).

Simulation numérique

On présente une simulation numérique pour confirmer les résultats théorique obtenu ci-dessus. Dans cette étude, nous utilisons la méthode Adams-Bashforth-Moulton pour la solution numérique du système (2.66).

On fixe $\gamma = 2$ ce qui donne $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0.17157$ et $\beta_2 = 5.8284$, on choisit $\beta = 1.2$ (dans l'intervalle (β_1, β_2)) et on varier l'ordre α , le pas est considéré comme 0.01 et les conditions initiales $(x(0), y(0)) = (1.5, 1.3)$. Notez que pour $\beta = 1.2$, il existe une valeur critique $\alpha = \alpha^* = 0.9418$, en dessous de laquelle le point d'équilibre E est asymptotiquement stable et au-dessus de laquelle il est instable. Le comportement stable du système est présenté dans la figure 2.5.a-b pour $\alpha = 0.92$ (< 0.9418) et le comportement instable du système pour $\alpha = 0.98$ (> 0.9418) est présenté dans la figure 2.5.c-d. Une bifurcation de Hopf se produit à $\alpha = \alpha^*$.

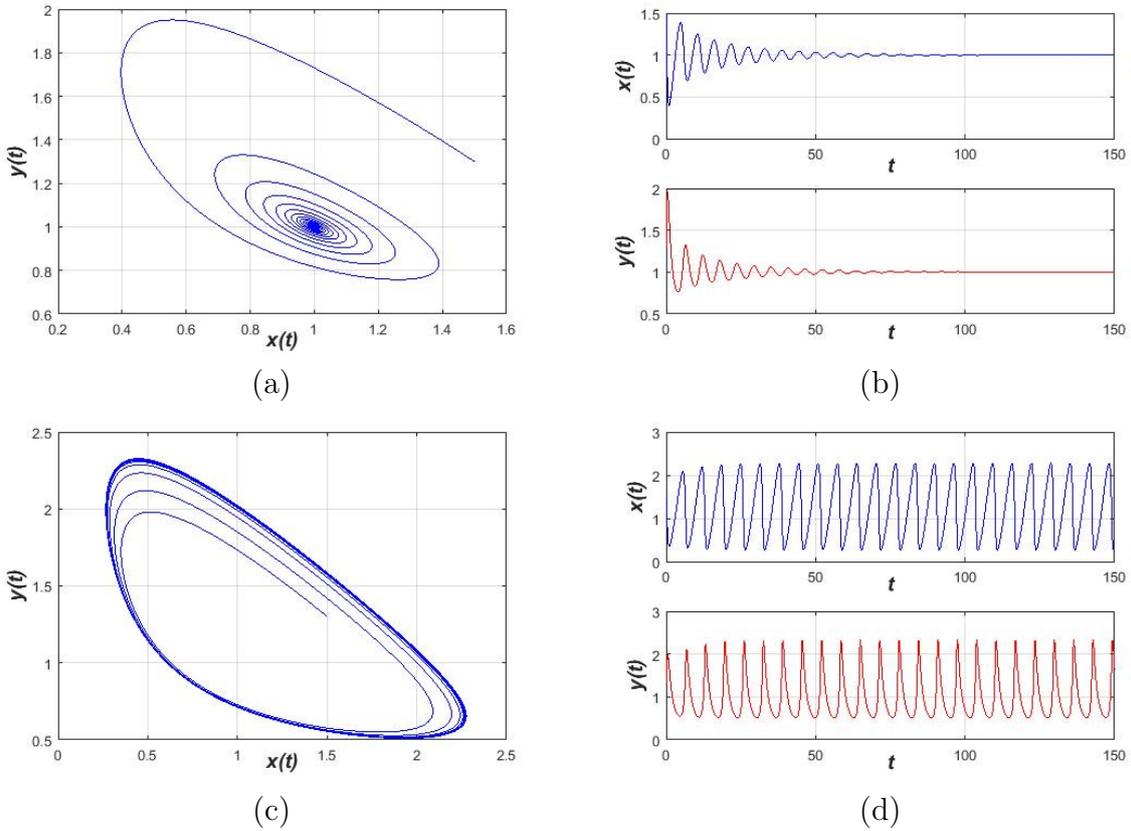
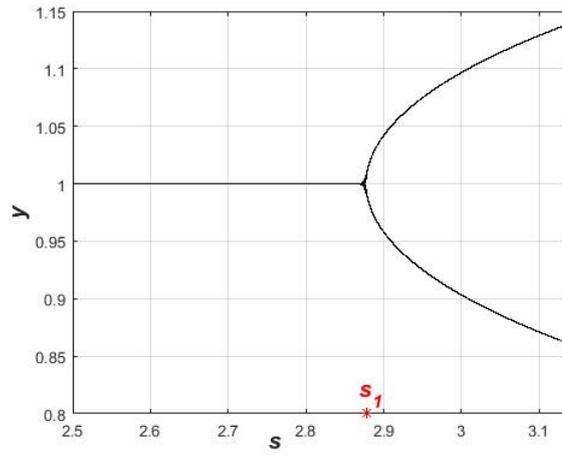
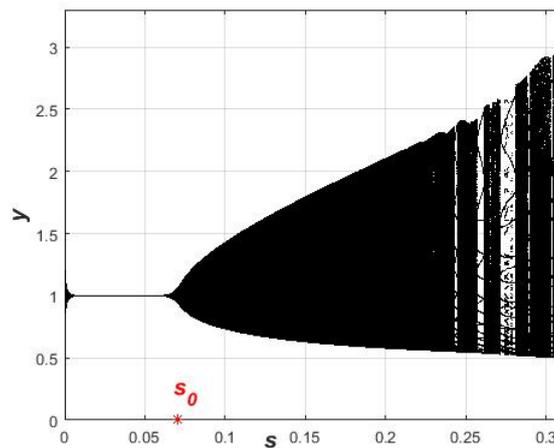


Figure 2.5 – Portraits de phase du modèle de Selkov fractionnaire pour (a), (b) $\alpha = 0.92$, (c), (d) $\alpha = 0.98$.

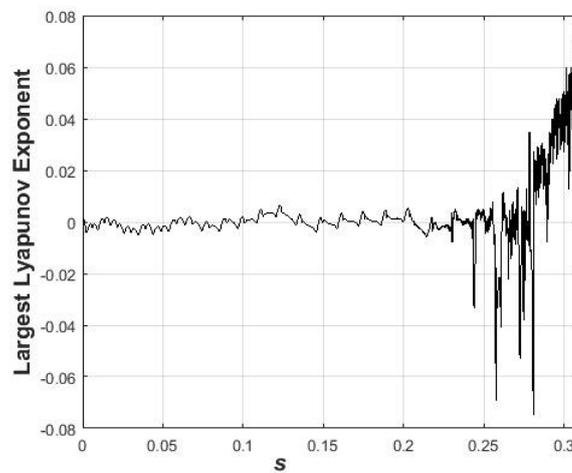
Pour illustrer le système discret fractionnaire de Selkov (2.75), on choisit $\alpha = 0.85$. La stabilité du point fixe dépend du pas s . Nous prenons d'abord $\beta = 0.1$ (dans l'intervalle $(0, \beta_1)$), puis s doit être inférieure à $s_1 = 2.8775$ pour que E soit stable et instable s'il dépasse. La figure 2.6.a, présente une bifurcation de flip à $s = s_1$. Maintenant, nous prenons $\beta = 0.9$ (dans l'intervalle (β_1, β_0)), la matrice Jacobienne J^* a une paire de valeurs propres conjuguées complexes $\lambda_{1,2} = 0.99409 + 0.11203i$, où $|\lambda_{1,2}| = 1$, pour $s = s_0 = 0.07597$, cela implique que le système (2.75) subit une bifurcation de Neimark-Saker au point fixe E . La figure 2.6.a, présente le diagramme de bifurcation du système (2.75). Le plus grand exposant de Lyapounov du système (2.75) est calculé et représenté à la figure 2.6.c, d'où nous déduisons que des comportements chaotiques peuvent apparaître. Quelques portraits de phases intéressants sont présents dans la figure 2.7.



(a)



(b)



(c)

Figure 2.6 – (a) Le diagramme de bifurcation du système (2.75) pour $\alpha = 0.85$ et $\beta = 0.1$, la bifurcation de flip se produit à $s = s_1 = 2.8775$ (b),(c) Le diagramme de bifurcation et le plus grand exposant de Lyapunov du système (2.75) pour $\alpha = 0.85$ et $\beta = 0.9$, la bifurcation Neimark-Saker se produit à $s = s_0 = 0.070591$.

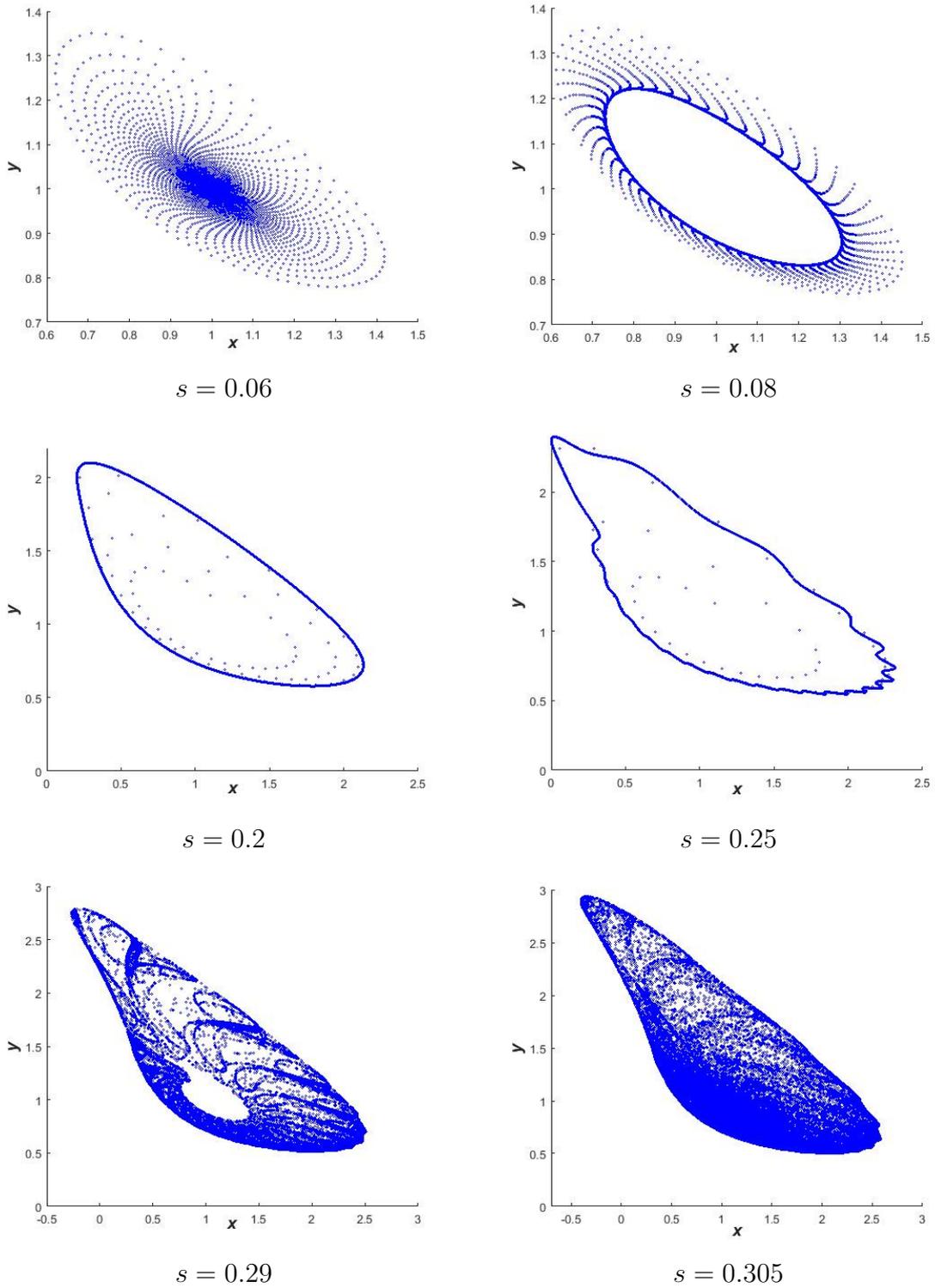


Figure 2.7 – Les portraits de phase du modèle (2.75) pour quelques valeurs du pas s .

8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous avons présenté un théorème d'existence et d'unicité d'un problème de Cauchy pour les équations différentielles fractionnaires du type Caputo. Ensuite, nous avons exposé les différents critères de stabilité des solutions des systèmes d'équations différentielles fractionnaires autonomes et non autonomes. Ces critères de stabilité seront utilisés, dans le chapitre 3, pour obtenir des conditions sur le contrôle et la synchronisation du chaos dans les équations différentielles fractionnaires. Après, la technique numérique d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire et une méthode de discrétisation ont été introduites. Quelques définitions liées aux notions du chaos et ses caractéristiques pour avoir une idée ont été également présentés. Parmi les outils d'analyse et de quantification du chaos nous avons décrit uniquement ceux qui ont été utilisée dans nos travaux. Il existe, bien sûr, d'autres outils que nous n'allons pas aborder ici comme le spectre de puissance, l'information mutuelle ou l'autocorrélation. Enfin, pour clôturer ce chapitre, nous avons exhibé un exemple d'applications des systèmes fractionnaires.

Chapitre **3**

Contrôle et synchronisation du chaos dans les équations différentielles fractionnaires

Ce chapitre porte sur l'étude de contrôle et de synchronisation du chaos dans les équations différentielles fractionnaires.

1 Contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires

Dans le but de supprimer le chaos, le terme dit " contrôle du chaos " est nécessaire et la meilleure façon de le faire est tout simplement de l'empêcher de se développer. La technique la plus connue pour y parvenir est la méthode OGY, proposée par les trois chercheurs de l'université du Maryland E. Ott, C. Grebogi et J. Yorke en 1990 [84], dans laquelle ils montrent que les systèmes chaotiques peuvent être stabilisés sur une orbite périodique en utilisant une boucle fermée. Depuis, d'autres méthodes ont été développées pour contrôler le chaos et des milliers de publications ont été déclenchées et ont trouvé un champ d'applications en plein essor [24, 25]. Dans les dernières années, le contrôle du chaos dans les équations différentielles fractionnaires est devenu un sujet d'intérêt particulier en raison de son application potentiel dans de nombreux domaines et plusieurs chercheurs ont mis l'accent sur la généralisation des méthodes de contrôle des systèmes chaotiques dans le cas entier au cas fractionnaire. Nous mentionnons que le livre [25] présente une excellente collection d'articles sur le contrôle du chaos pour les systèmes chaotiques fractionnaires. Nous invitons le lecteur intéressé à s'y référer pour de plus détails.

Parmi les nombreuses stratégies pour réaliser le contrôle du chaos dans les systèmes fractionnaires on peut citer le contrôle feedback.

1.1 Contrôle feedback

L'un des méthodes importantes du contrôle du chaos est le contrôle de rétroaction (feedback). Ce contrôle a été largement utilisée par de nombreux chercheurs comme : M.S. Abd-Elouahab, N. Hamri et J. Wang. Cet article [50] en constitue une références qui nous a été très utile dans cette partie.

Considérons le système fractionnaire

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x, u, t), \quad (3.1)$$

où x est un vecteur de dimension n d'une variable d'état, $0 < \alpha < 1$ et u est le vecteur de contrôle des entrées (input).

Soit $\tilde{x}(t)$ la solution périodique du système (3.1) avec $u = 0$. Si la solution $\tilde{x}(t)$ est instable,

nous avons besoin de la stabiliser.

Le problème est de trouver un contrôleur sous la forme de retour d'état

$$u(t) = g(x, t),$$

où g est une fonction à valeur vectorielle, alors le système contrôlé peut être décomposé comme suit :

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x, g(x, t), t), \quad (3.2)$$

par le contrôle feedback $g(x, t)$, on peut conduire l'orbite du système contrôlé pour atteindre la cible :

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \| x(t) - \tilde{x}(t) \| = 0.$$

De fait que $\tilde{x}(t)$ la solution périodique du système (3.1) on obtient

$${}^C D^\alpha \tilde{x}(t) = f(\tilde{x}, 0, t), \quad (3.3)$$

soustraction l'équation (3.1) de (3.3) donne :

$${}^C D^\alpha x(t) - {}^C D^\alpha \tilde{x}(t) = f(x, g(x, t), t) - f(\tilde{x}, 0, t). \quad (3.4)$$

On pose $e = x - \tilde{x}$ et $F(e, t) = f(x, g(x, t), t) - f(\tilde{x}, 0, t)$, par la linéarité de la dérive fractionnaire on trouve,

$${}^C D^\alpha e(t) = F(e, t). \quad (3.5)$$

Alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Si 0 est un point d'équilibre de système (3.5) et si les valeurs propres λ de la matrice Jacobienne $A = \frac{\partial F}{\partial x} |_0$ vérifie la condition suivante*

$$\min_i |\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors la trajectoire $x(t)$ du système (3.2) converge vers $\tilde{x}(t)$.

Pour la démonstration de ce théorème voir [50].

1.1.1 Exemple d'application (système chaotique fractionnaire de Lü)

On considère le système fractionnaire de Lü (2.42), nous proposons de stabiliser les points fixes instables. Le système contrôlé est le suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) + u_1 \\ {}^C D^\alpha x_2 = cx_2 - x_1x_3 + u_2 \\ {}^C D^\alpha x_3 = x_1x_2 - bx_3 + u_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Étant donné que $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ est la solution de (3.6), alors nous avons :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha \tilde{x}_1 = a(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \\ {}^C D^\alpha \tilde{x}_2 = c\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3 \\ {}^C D^\alpha \tilde{x}_3 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2 - b\tilde{x}_3 \end{cases} \quad (3.7)$$

Soustraction l'équation (3.6) de (3.7) et on note $e_1 = x_1 - \tilde{x}_1$, $e_2 = x_2 - \tilde{x}_2$, $e_3 = x_3 - \tilde{x}_3$. On obtient le système erreur :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha e_1 = ae_1 + u_1 \\ {}^C D^\alpha e_2 = ce_2 - x_1x_3 + \tilde{x}_1\tilde{x}_3 + u_2 \\ {}^C D^\alpha e_3 = x_1x_2 - \tilde{x}_1\tilde{x}_2 - be_3 + u_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

On définit les fonctions de contrôle comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -2ae_1, \\ u_2 = x_1x_3 - \tilde{x}_1\tilde{x}_3 - 2ce_2, \\ u_3 = -x_1x_2 + \tilde{x}_1\tilde{x}_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

En remplaçant (3.9) dans (3.8), on obtient :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha e_1 = -ae_1, \\ {}^C D^\alpha e_2 = -ce_2, \\ {}^C D^\alpha e_3 = -be_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

La matrice Jacobienne est :

$$J(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

comme les valeurs propres $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = -c$, $\lambda_3 = -b$ sont négatifs, alors $\arg(\lambda) = \pi$, d'où, $\arg(\lambda) > \alpha \frac{\pi}{2}$. D'après le théorème 3.1, la trajectoire $x(t)$ du système (3.6) converge vers $\tilde{x}(t)$. On résulte, le contrôle est achevé.

Simulation numérique

Dans cette sous-section, nous obtenons les résultats numériques par la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton fractionnaire avec un pas de temps $h = 0.01$ et $\alpha = 0.90$.

On choisit les paramètres comme suit $a = 35$, $b = 3$, $c = 8$. Dans ce cas, les points d'équilibre sont $x_1 = (0, 0, 0)$, $x_2 = (9.16, 9.16, 28)$ et $x_3 = (-9.16, -9.16, 28)$, les valeurs propres associées au point d'équilibre x_1 sont $\lambda_1 = -35$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 28$. On note que la valeur propre λ_3 est positive et $|\arg(\lambda_3)| = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$, d'où, le point fixe x_1 est instable. Les valeurs propres associées aux points d'équilibre (x_2, x_3) sont $\lambda_1 = -19.748$, $\lambda_2 = 4.8741 + 16.543i$, $\lambda_3 = 4.8741 - 16.543i$. Il est facile de voir que les points fixes $x_{1,2}$ sont instables.

On choisit les conditions initiales par $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 3, 5)$, le point instable x_1 a été stabilisé, comme le montre la figure 3.1. Le point instable x_2 a été stabilisé, comme le montre la figure 3.2. Le point instable x_3 a été stabilisé, comme le montre la figure 3.3.

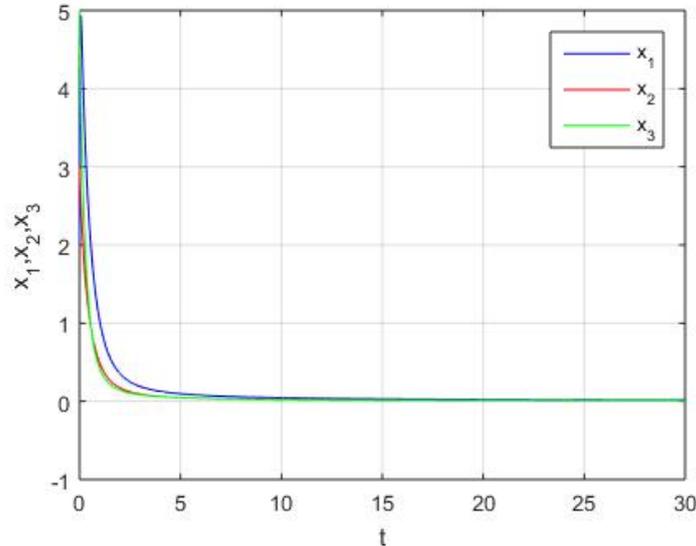


Figure 3.1 – La stabilisation du point d'équilibre x_1 pour $\alpha = 0.90$.

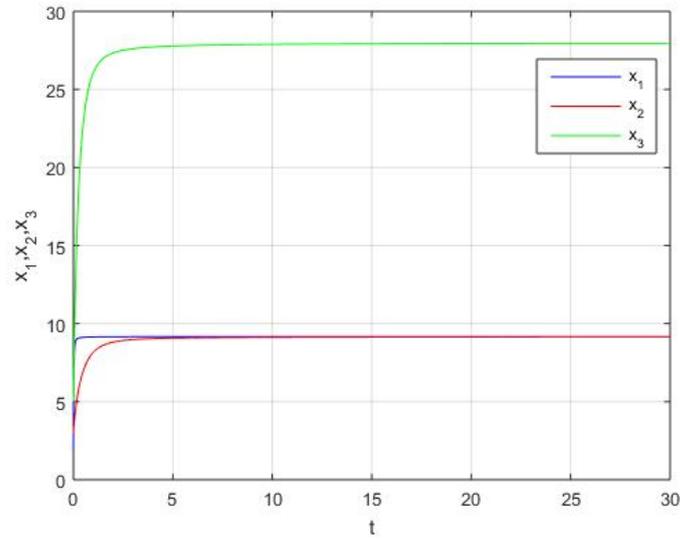


Figure 3.2 – La stabilisation du point d'équilibre x_2 pour $\alpha = 0.90$.

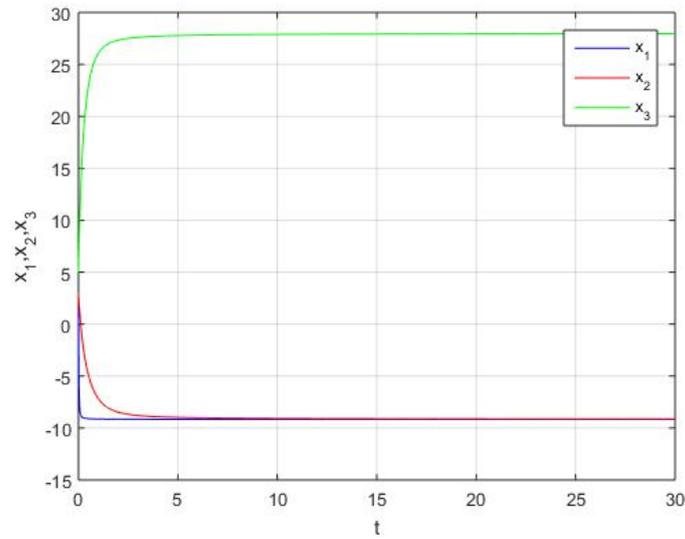


Figure 3.3 – La stabilisation du point d'équilibre x_3 pour $\alpha = 0.90$.

1.2 Contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes

Dans cette partie, nous allons intéresser à contrôler une classe des systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes [22].

Considérons le système de contrôle fractionnaire :

$${}^C D^\alpha x(t) = A(t)x(t) + f(x(t)) + Bu(t), \quad (3.11)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice et $f(x) \in \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire continue, u est le vecteur de contrôle des entrées (input), $B \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est une matrice constante. Pour stabiliser le système (3.11), nous nous intéressons à le contrôler :

$$u(t) = Kx(t),$$

où $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est une matrice constante à déterminer, notre objectif est de trouver une matrice de gain telle que le système contrôlé (3.11) est asymptotiquement stable.

On remplace u dans (3.11) on obtient :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x(t) &= A(t)x(t) + f(x(t)) + BKx(t) \\ &= (A(t) + BK)x(t) + f(x(t)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

On note $\tilde{A}(t) = A(t) + BK$, alors on aura le système suivant :

$${}^C D^\alpha x(t) = \tilde{A}(t)x(t) + f(x(t)). \quad (3.13)$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3.1 *Soit $x = 0$ le point d'équilibre du système (3.13) si on a*

- 1- $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{A}(t) = \tilde{A}$,
- 2- $f(0) = 0$ et $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0$,
- 3- $|\arg(\text{spec}(\tilde{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ et $\|\tilde{A}\| > \frac{N}{\alpha} \geq 1$.

Alors le système de contrôle (3.13) est asymptotiquement stable.

Démonstration. *La démonstration de ce résultat se trouve dans [22].*

2 Synchronisation du chaos dans les systèmes fractionnaires

L'idée de la synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que l'un des systèmes copie le mouvement de l'autre. Elle fait l'objet d'intérêt particulier dans l'étude de plusieurs systèmes chaotiques. En raison de leurs importances et de leurs utilisations dans une grande variété d'applications dans les différents domaines, par exemple, dans le domaine du cryptage des images [34], des modèles écologiques [85], la communication sécurisée [35]. Les chercheurs ont déployé beaucoup d'efforts pour proposer et améliorer les méthodes de synchronisation, parmi lesquels on s'intéresse à les quatre techniques suivantes : la synchronisation complète [30], anti-synchronisation [86], la synchronisation projective [31], la synchronisation adaptative projective modifiée [87]. Nous nous contenterons de définir brièvement quelques notions concernant les différents types de synchronisations. Ensuite, Nous présentons rapidement les définitions de trois techniques de synchronisations (la synchronisation complète, anti-synchronisation, la synchronisation projective) et par la suite nous discuterons la quatrième technique (synchronisation adaptative projective modifiée) en détail car cette dernière réalise la synchronisation complète, anti-synchronisation et la synchronisation projective. Enfin, il convient d'attirer l'attention sur un autre type de synchronisation aussi intéressant, la synchronisation combinée des systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes (SCFNA) [88]. Les idées principales que nous allons présenter dans cette partie sont basées sur la référence [89].

Les méthodes de synchronisation sont regroupées en deux modes. Le premier mode est basé sur un couplage mutuel entre deux ou plusieurs systèmes chaotiques. Le second est appelé couplage maître-esclave ou unidirectionnel : son principe consiste à choisir un système générateur de chaos appelé "émetteur". Il est décrit par des équations récurrentes et caractérisé par ses variables d'état constituant le vecteur d'état. Certaines composantes de ce vecteur sont transmises à un second système appelé "récepteur".

Systèmes couplés

On dit que deux oscillateurs sont couplés si l'existence d'une perturbation dans l'un conduit à une perturbation dans l'autre, entraînant un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type de couplage est appelé couplage mutuel.

Accouplement bidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques représentés par les deux équations suivantes

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x, t), \tag{3.14}$$

$${}^C D^\alpha y(t) = f(y, t). \quad (3.15)$$

On dit que les deux systèmes sont couplés si on peut réécrire les équations (3.14) et (3.15) sous la forme

$${}^C D^\alpha x(t) = g_1(x, x, y, t), \quad (3.16)$$

$${}^C D^\alpha y(t) = g_2(y, x, y, t), \quad (3.17)$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions non linéaires, et la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième variable sont les résultats de l'effet d'accouplement. La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, c'est la définition de l'accouplement bidirectionnel.

Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes identiques représentés par les deux équations suivantes

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x, t), \quad (3.18)$$

$${}^C D^\alpha y(t) = f(y, t). \quad (3.19)$$

Lorsque l'équation (3.15) va être modifié par l'effet d'accouplement, et si le résultat de cette modification nous donne des nouvelles équations suivantes :

$${}^C D^\alpha x(t) = f(x, t), \quad (3.20)$$

$${}^C D^\alpha y(t) = g(y, x, t), \quad (3.21)$$

tels que $g(y, x, t) = f(y, t)$, pour $x = y$, dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel. Le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système récepteur (esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur à un acte sur le récepteur et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel. Dans ce travail, on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

Maintenant les définitions de quelques méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires seront présentées ci-dessous.

On considère le système maître et esclave respectivement suivants :

$${}^C D^\alpha x = f(x), \tag{3.22}$$

$${}^C D^\alpha y = g(y) + u, \tag{3.23}$$

où $x, y \in \mathbb{R}^n$, sont les vecteurs d'état des systèmes maître et esclave, respectivement, $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues et u est le vecteur de contrôle.

2.1 Synchronisation complète

La synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes dynamiques. C'est la forme de la synchronisation la plus simple. On dit qu'il y a une synchronisation complète entre les deux systèmes maître (3.22) et esclave (3.23), s'il existe un contrôle u , tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| x(t) - y(t) \| = 0,$$

est vérifié, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ de système (3.22) et (3.23).

2.2 Anti-synchronisation

Le système maître et le système esclave sont dits prêts pour réaliser l'anti-synchronisation entre ces deux systèmes (3.22) et (3.23), s'il existe un contrôle u , tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| x(t) + y(t) \| = 0,$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ de deux systèmes (3.22) et (3.23).

2.3 Synchronisation projective

On dit qu'il y a une synchronisation projective entre les deux systèmes maître (3.22) et esclave (3.23), s'il existe un contrôle efficace u , de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| x(t) - \theta y(t) \| = 0,$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ de deux systèmes (3.22) et (3.23), où θ est une constante non nulle, appelée facteur d'échelle.

2.4 Synchronisation adaptative projective modifiée

Dans cette partie, nous étendrons les résultats de la méthode de synchronisation adaptative projective modifiée [87] au cas où la dérivée est fractionnaire. L'objectif de cette méthode est de résoudre le problème de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires avec des paramètres incertains par l'utilisation de la fonction de Lyapunov et un contrôleur adaptatif. Considérons le système maître et le système esclave suivant :

$${}^c D^\alpha x = f(x) + \eta F(x), \quad (3.24)$$

$${}^c D^\alpha y = g(y) + G(y)\nu + u. \quad (3.25)$$

Où ${}^c D$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. $0 < \alpha < 1$, $f(x), g(y) \in \mathbb{R}^n$, sont des fonctions vectorielles ; $F(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $G(y) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, sont des matrices des fonctions, $\eta \in \mathbb{R}^m$, $\nu \in \mathbb{R}^p$ sont des paramètres inconnus. La synchronisation adaptative projective modifiée entre le système maître (3.24) et le système esclave (3.25) est défini comme suit :

Définition 3.1 *Le système maître (3.24) et le système esclave (3.25) sont dits synchronisés au sens de synchronisation adaptative projective modifiée s'il existe un contrôle adaptatif efficace u et la matrice diagonal constante θ , de sorte que l'erreur de synchronisation*

$$e(t) = x(t) - \theta y(t)$$

satisfait $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.

Notre objectif est de déterminer un contrôle adaptative u pour réaliser la synchronisation projective modifiée entre le système maître (3.24) et le système esclave (3.25) comme suit :

Théorème 3.2 *Si on choisit le contrôle adaptatif par :*

$$u = \theta^{-1} f(x) + \theta^{-1} F(x)\tilde{\eta} - g(y) - G(y)\tilde{\nu} + \theta^{-1} k e, \quad (3.26)$$

Selon les lois d'ajustement de l'estimation des paramètres suivantes :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha \tilde{\eta} = [F(x)]^T e + \varepsilon(\eta - \tilde{\eta}), \\ {}^c D^\alpha \tilde{\nu} = [-G(y)]^T \theta e + \mu(\nu - \tilde{\nu}). \end{cases} \quad (3.27)$$

où ${}^c D$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $0 < \alpha < 1$, $k = \text{diag}(k_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k > 0$ pour $i = 1, \dots, n$; $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_i) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\varepsilon > 0$, pour $i = 1, \dots, m$; $\mu = \text{diag}(\mu_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mu > 0$, pour $i = 1, \dots, p$. Alors le système maître (3.24) et le système esclave (3.25) sont synchronisés.

Démonstration. L'évolution d'erreur par rapport au temps est donnés par

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha e &= {}^c D_t^\alpha x - \theta {}^c D_t^\alpha y \\ &= f(x) + F(x)\eta - \theta g(y) - \theta G(y)\nu - \theta u. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Selon le contrôleur u , on obtient :

$${}^c D^\alpha e = F(x)(\eta - \tilde{\eta}) - \theta G(y)(\nu - \tilde{\nu}) - ke.$$

La fonction de Lyapunov est choisie comme

$$V = \frac{1}{2} X^T X, \quad (3.29)$$

où $X = (e^T, (\eta - \tilde{\eta})^T, (\nu - \tilde{\nu})^T)$.

En prenant la dérivée d'ordre fractionnaire de la fonction de Lyapunov on aura

$${}^c D^\alpha V = {}^c D^\alpha \left(\frac{1}{2} X^T X \right).$$

D'après le lemme 2.3, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha V &\leq e^T {}^c D^\alpha e - (\eta - \tilde{\eta})^T {}^c D^\alpha \tilde{\eta} - (\nu - \tilde{\nu})^T {}^c D^\alpha \tilde{\nu} \\ &\leq e^T [F(x)(\eta - \tilde{\eta}) - \theta G(y)(\nu - \tilde{\nu}) - ke] - (\eta - \tilde{\eta})^T ([F(x)]^T e + \varepsilon(\eta - \tilde{\eta})) \\ &\quad - (\nu - \tilde{\nu})^T ([G(y)]^T \theta e + \mu(\nu - \tilde{\nu})) \\ &\leq e^T F(x)(\eta - \tilde{\eta}) - e^T \theta G(y)(\nu - \tilde{\nu}) - e^T ke - (\eta - \tilde{\eta})^T [F(x)]^T e \\ &\quad - (\eta - \tilde{\eta})^T \varepsilon(\eta - \tilde{\eta}) - (\nu - \tilde{\nu})^T [G(y)]^T \theta e - (\nu - \tilde{\nu})^T \mu(\nu - \tilde{\nu}) \\ &\leq -e^T ke - (\eta - \tilde{\eta})^T \varepsilon(\eta - \tilde{\eta}) - (\nu - \tilde{\nu})^T \mu(\nu - \tilde{\nu}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

soit $\lambda = \min(k_i, \varepsilon_j, \mu_\kappa)$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq \kappa \leq p$.

Alors

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha V &= -\lambda(e^T e - (\eta - \tilde{\eta})^T (\eta - \tilde{\eta}) - (\nu - \tilde{\nu})^T (\nu - \tilde{\nu})) \\ &\leq -\lambda \|X\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

D'après théorème 2.3, le vecteur d'erreur $e(t)$ converge vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini pour toutes conditions initiales, ce qui signifie que la synchronisation sera réalisée.

- Remarque 2.1** • Si θ est un facteur d'échelle constant, la synchronisation est appelée synchronisation projective.
- Si $\theta = 1$, la synchronisation est appelée synchronisation complète.
 - Si $\theta = -1$, la synchronisation est appelée anti-synchronisation.

Exemple 3.1 Nous considérons deux systèmes chaotiques d'ordres fractionnaires différents avec des paramètres inconnus, nous choisissons le système fractionnaire de Rossler [27] comme système maître et le système fractionnaire de Lü [28] comme système esclave. Les équations d'états du système fractionnaire de Rossler est défini comme

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x_1 = -x_2 - x_3 \\ {}^cD^\alpha x_2 = x_1 + \eta_1 x_2 \\ {}^cD^\alpha x_3 = x_1 x_3 - \eta_3 x_3 + \eta_2 \end{cases} \quad (3.32)$$

où cD désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $0 < \alpha < 1$ et $(x_1, x_2, x_3)^T$ sont les variables d'états et lorsque les paramètres $\eta_1 = 0.4$, $\eta_2 = 0.2$ et $\eta_3 = 10$ et $\alpha = 0.9$ avec la condition initial $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.2, 0, 2)$, Le système (3.32) est chaotique.

Les équations du système fractionnaire de Lü

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y_1 = \nu_1(y_2 - y_1) + u_1 \\ {}^cD^\alpha y_2 = \nu_3 y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ {}^cD^\alpha y_3 = y_1 y_2 - \nu_2 y_3 + u_3 \end{cases} \quad (3.33)$$

où cD désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $0 < \alpha < 1$, $(y_1, y_2, y_3)^T$ sont les variables d'états et $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ représente la fonction du contrôle adaptatif. Le système fractionnaire de Lü est chaotique lorsque $\nu_1 = 35$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 28$ et $\alpha = 0.90$, $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ avec la condition initial $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (2, 3, 5)$.

Nous comparons les systèmes (3.32) et (3.33) avec les équations (3.24) et (3.25), on obtient

$$f(x) = \begin{pmatrix} -(x_1 + x_2) \\ x_1 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ représente les paramètres inconnus du système maître (3.32).

$$g(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_3 y_1 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, G(y) = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & -y_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$ représente les paramètres inconnus du système esclave (3.33).

D'après le théorème 3.2, le contrôleur est pris comme :

$$\begin{aligned}
 u &= \theta^{-1}f(x) - g(y) - G(y)\tilde{\nu} + \theta^{-1}F(x)\tilde{\eta} + \theta^{-1}ke \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(x_1 + x_2) \\ x_1 \\ x_1x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y_3y_1 \\ y_1y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_2 - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 \\ 0 & -y_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \\ \tilde{\nu}_3 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\theta_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1e_1 \\ k_2e_2 \\ k_3e_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et la loi de mise à jour du paramètre est donnée par

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha \tilde{\eta}_1 = x_2e_2 + \varepsilon_1(\eta_1 - \tilde{\eta}_1) \\ {}^cD^\alpha \tilde{\eta}_2 = e_3 + \varepsilon_2(\eta_2 - \tilde{\eta}_2) \\ {}^cD^\alpha \tilde{\eta}_3 = -x_3e_3 + \varepsilon_3(\eta_3 - \tilde{\eta}_3) \end{cases} \quad (3.34)$$

et

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha \tilde{\nu}_1 = -\theta_{11}(y_2 - y_1)e_1 + \mu_1(\nu_1 - \tilde{\nu}_1) \\ {}^cD^\alpha \tilde{\nu}_2 = \theta_{33}y_3e_3 + \mu_2(\nu_2 - \tilde{\nu}_2) \\ {}^cD^\alpha \tilde{\nu}_3 = -\theta_{22}y_2e_2 + \mu_3(\nu_3 - \tilde{\nu}_3) \end{cases} \quad (3.35)$$

Simulation numérique

Pour la simulation numérique nous utilisons la méthode Adams-Bashforth-Moulton. On choisit les conditions initiales du système maître et esclave respectivement $x(0) = (0.2, 0, 2)$ et $y(0) = (2, 3, 5)$, l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.9$ et les valeurs initiales des paramètres de système maître et de système esclave sont arbitrairement choisies comme $\tilde{\eta}(0) = (0.1, 2, 6)$, $\tilde{\nu}(0) = (40, 2, 20)$, et les conditions initiales de l'erreur est obtenue comme $e(0) = (-2, 1.65, 7.75)$; $\varepsilon_i = 1, (i = 1 \dots 3)$, $\mu_i = 1, (i = 1 \dots 3)$, la matrice du gain de contrôle est donné par $k_i = 1, i = 1 \dots 3$, les facteurs d'échelle sont arbitrairement choisies comme $\theta_{11} = 1, \theta_{22} = 0.5, \theta_{33} = -1$. Les résultats de la simulation sont présentés dans les figures 3.4, 3.5 et 3.6.

Pour la figure 3.4 : on remarque que pour les premières secondes les deux trajectoires x_1 et y_1 varient selon une dynamique différente, mais dans un temps très court les trajectoires commencent à se rapprocher et deviennent identiques.

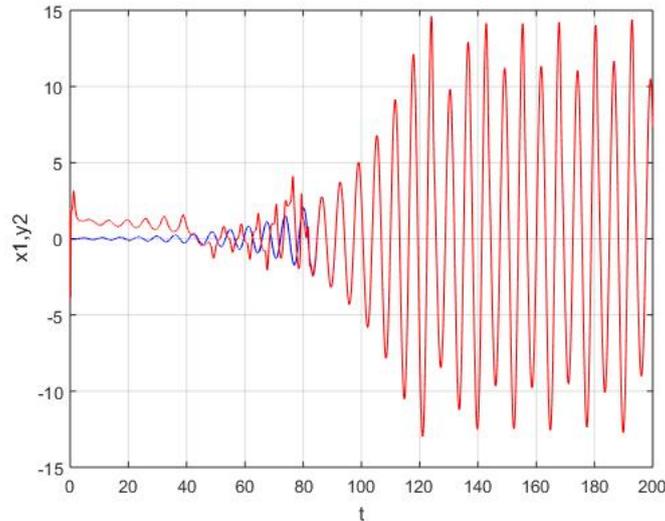


Figure 3.4 – Évolution dans le temps des trajectoires $x_1(t)$, $y_1(t)$ pour $\theta_{11} = 1, \theta_{22} = 0.5, \theta_{33} = -1$.

Pour la figure 3.5 : on observe que la trajectoire y_2 est proportionnelle avec la trajectoire x_2 par le facteur d'échelle $\theta_{22} = 0.5$.

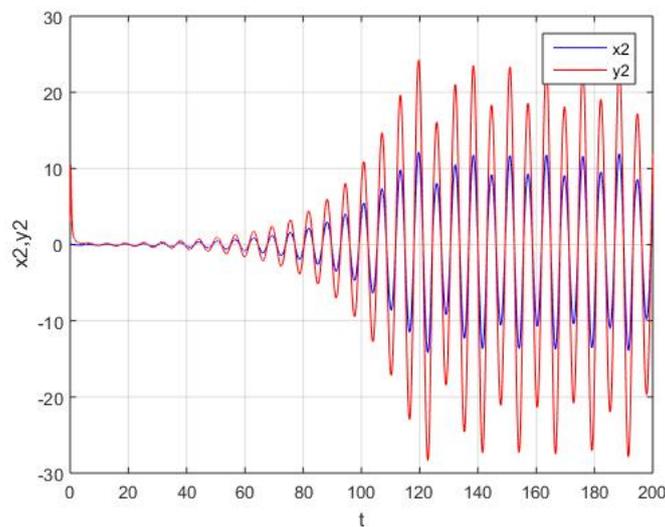


Figure 3.5 – Évolution dans le temps des trajectoires $x_2(t)$, $y_2(t)$ pour $\theta_{11} = 1, \theta_{22} = 0.5, \theta_{33} = -1$.

Pour la figure 3.6 : on observe que les trajectoires x_3 et y_3 évoluent dans des directions opposées. La figure 3.7, illustre la convergence d'erreur vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. La figure 3.8, présente l'estimation des paramètres inconnus, on remarque que les valeurs d'estimation des paramètres inconnus convergent vers leurs valeurs réelles $\eta_1 = 0.4, \eta_2 = 0.2, \eta_3 = 10$

Chapitre 3. Contrôle et synchronisation du chaos dans les EDF

et $\nu_1 = 35, \nu_2 = 3, \nu_3 = 28$.

Ces graphes indiquent qu'il ya une synchronisation adaptative projective modifiée entre le système fractionnaire de Rossler et le système fractionnaire de Lü.

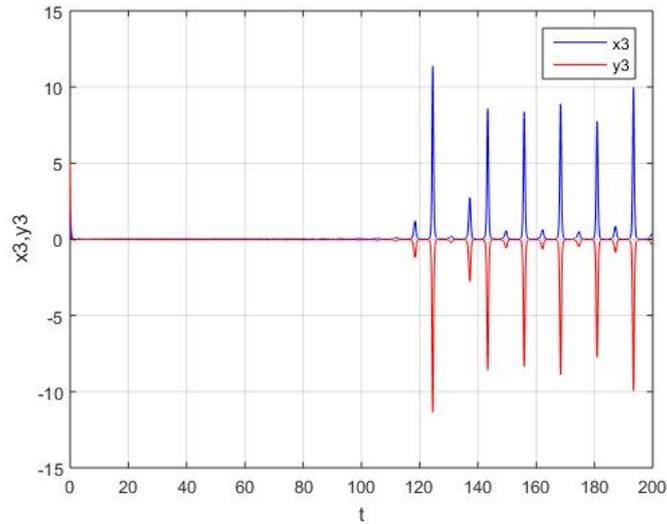


Figure 3.6 – Évolution dans le temps des trajectoires $x_3(t), y_3(t)$ pour $\theta_{11} = 1, \theta_{22} = 0.5, \theta_{33} = -1$.

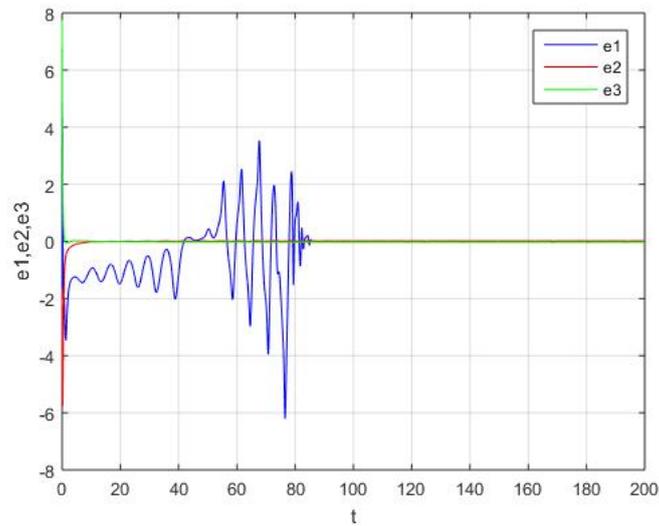


Figure 3.7 – Évolution dans le temps d'erreur de synchronisation $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$.

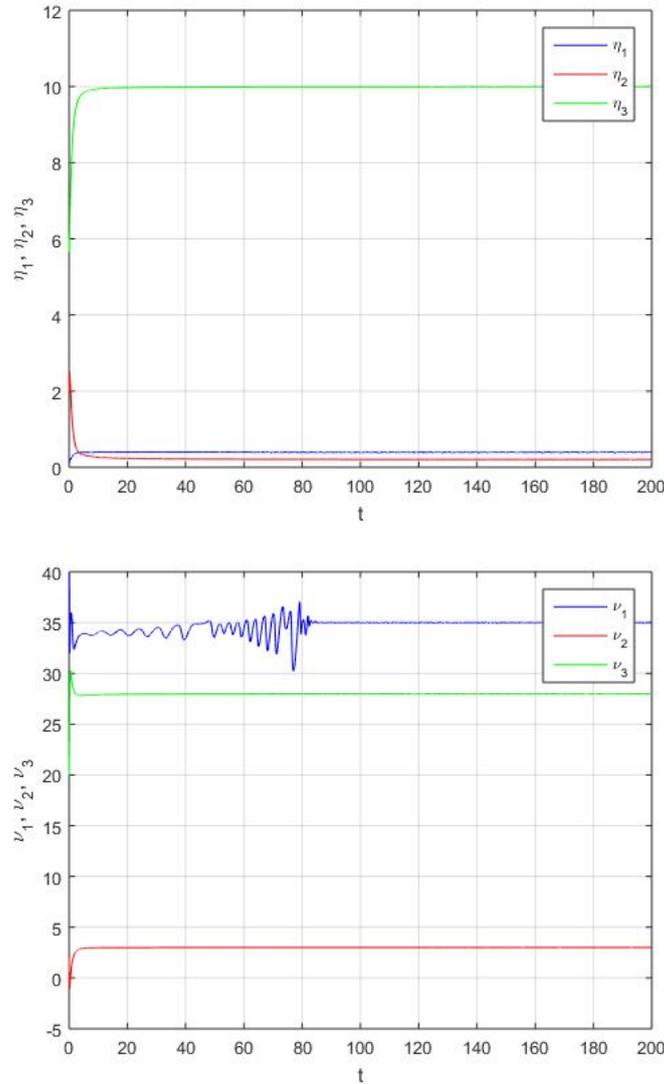


Figure 3.8 – L'estimation des paramètres inconnus (3.34) et (3.35).

3 Synchronisation combinée des SCFNA de dimensions différentes

Cette partie constitue le contenu d'une publication [88] intitulé "Combination synchronization of different dimensions fractional-order non-autonomous chaotic systems using scaling matrix" publié dans la revue "International Journal of Dynamics and Control" avec mes encadreurs de thèse T. Houmor et A. Berkane.

Jusqu'à présent, de nombreuses études ont été limitées principalement à la synchronisation d'un système maître et d'un système esclave, ce qui a catalysé Runzi et al. [37] en 2011 pour propo-

ser une autre technique de synchronisation des systèmes chaotiques appelées la synchronisation combinée. L'idée de cette stratégie consiste à synchroniser deux systèmes maîtres avec un système esclave. Ce type de synchronisation à des points focaux sur la synchronisation habituelle, elle est applicable dans plusieurs disciplines technologiques, par exemple, ayant la possibilité de donner plus de sécurité dans les communications sécurisées. Dans la littérature, il y a un certain nombre de résultats sur la synchronisation combinée [38, 39, 90, 91]. Ils existe d'autres résultats concernant ce type de synchronisation à titre d'exemple, nous mentionnons quelques-uns, la synchronisation duale combinée [92], la synchronisation combinée-combinée [93], la synchronisation duale fonction projective [94], la synchronisation duale composée-composée [95].

Ces discussions nous ont motivés à étudier la synchronisation combinée des systèmes chaotiques non autonomes d'ordres fractionnaires ayant de dimensions différentes en utilisant certains lemmes et techniques de calcul fractionnaire. Deux avantages rendent le schéma proposé très intéressant. La première consiste à réaliser la synchronisation entre presque tous les systèmes chaotiques non autonomes d'ordres fractionnaires avec dimensions différentes et l'autre est la possibilité de l'étude de la synchronisation entre les systèmes chaotiques autonomes fractionnaires non identiques. Notre contribution consiste à montrer comment on peut utiliser une technique et une stratégie simple pour accomplir la synchronisation combinée en particulier entre presque tous les systèmes chaotiques non autonomes d'ordres fractionnaires de dimensions différentes.

3.1 Formulation du problème

Considérons le premier système maître d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}^c D^\alpha x(t) = A(t)x(t) + f(x(t)), \quad (3.36)$$

où $0 < \alpha < 1$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, est le vecteur non linéaire de fonction continue; $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice non autonome,

le deuxième système maître d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}^c D^\alpha y(t) = B(t)y(t) + g(y(t)), \quad (3.37)$$

où $0 < \alpha < 1$, $g(y) \in \mathbb{R}^n$, est le vecteur non linéaire de fonction continue; $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice non autonome.

Et le système esclave d'ordre fractionnaire :

$${}^c D^\alpha z(t) = C(t)z(t) + h(z(t)) + u(t), \quad (3.38)$$

où $0 < \alpha < 1$, $h(z) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur non linéaire de fonction continue, $u(t)$ est la fonction de contrôle, $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, est une matrice non autonome.

On définit l'erreur de synchronisation combinée entre les systèmes (3.36),(3.37) et le système (3.38) par :

$$e = z - \theta(y + x),$$

où θ est appelé matrice d'échelle.

On obtient alors le système dynamique d'erreur :

$${}^c D^\alpha e(t) = C(t)e(t) + \theta C(t)(y(t) + x(t)) + h(z(t)) - \theta [B(t)y(t) + g(y(t)) + A(t)x(t) + f(x(t))] + u(t)$$

On a le résultat suivants :

Théorème 3.3 *La synchronisation combinée entre les systèmes (3.36),(3.37) et le système (3.38) peut être réalisé si :*

1- la fonction de contrôle est proposée comme suit

$$u(t) = \theta [B(t)y(t) + g(y(t)) + A(t)x(t) + f(x(t))] - C(t)\theta(y(t) + x(t)) - h(z(t)) + k(t)e(t),$$

2- $\lim_{t \rightarrow \infty} (C(t) + K(t)) = C + K$,

3- $(C + K)$ satisfait $|\arg(\text{spec}(C + K))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Selon le contrôleur $u(t)$, le système dynamique d'erreur devient :

$${}^c D^\alpha e(t) = (C(t) + k(t))e(t). \quad (3.39)$$

Par l'hypothèse (2) du théorème (3.3)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_1 > 0 \text{ when } \eta_1 > \eta_2 \text{ one has } \|(C(t) + k(t)) - (C + k)\| \leq \varepsilon,$$

le système (3.39) peut être exprimé comme

$${}^c D^\alpha e(t) = (C + k)e(t) + (C(t) + k(t) - (C + k))e(t). \quad (3.40)$$

La condition initiale est $e(0) = z(0) - (y(0) + x(0)) = e_0$.

Nous appliquons la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse à (3.40), nous obtenons

$$e(t) = E_{\alpha,1}((C+k)t^\alpha)e_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((C+k)(t-\tau)^\alpha) [((C(\tau)+k(\tau)) - (C+k))e(\tau)] d\tau,$$

D'après le lemme 1.1,

$$\|e(t)\| \leq \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1} \xi_1 \varepsilon}{1 + \|(C+k)\| (t-\tau)^\alpha} \|e(\tau)\| d\tau.$$

Nous choisissons $\varepsilon = \frac{\alpha\|C+k\|}{2\xi_1}$, on trouve

$$\|e(t)\| \leq \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1} \alpha \|C+k\|}{2(1 + \|(C+k)\| (t-\tau)^\alpha)} \|e(\tau)\| d\tau.$$

d'après le lemme .1, on obtient

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)\tau^\alpha\|} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1} \alpha \|C+k\|}{2(1 + \|(C+k)\| (t-\tau)^\alpha)} \\ &\quad \exp\left(\int_\tau^t \frac{(t-s)^{\alpha-1} \alpha \|C+k\|}{2(1 + \|(C+k)\| (t-s)^\alpha)}\right) d\tau \\ &= \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\xi_0 \|e_0\|}{2(1 + \|(C+k)\| \tau^\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1} \alpha \|C+k\|}{(1 + \|(C+k)\| (t-\tau)^\alpha)} d\tau \\ &\leq \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)t^\alpha\|} + \int_0^t \frac{\xi_0 \|e_0\|}{2(1 + \|(C+k)\| \tau^\alpha)^{0.5}} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1} \alpha \|C+k\|}{(1 + \|(C+k)\| (t-\tau)^\alpha)^{0.5}} d\tau \\ &\leq \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)t^\alpha\|} + \frac{\alpha \xi_0 \|e_0\|}{2 \|C+k\|^{0.5}} \int_0^t t^{-0.5\alpha} (t-\tau)^{0.5\alpha-1} d\tau \\ &\leq \frac{\xi_0 \|e_0\|}{1 + \|(C+k)t^\alpha\|} + \frac{\alpha \xi_0 \|e_0\|}{2 \|C+k\|^{0.5}} \frac{\Gamma(0.5\alpha)}{t^{0.5\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Nous pouvons conclure que $\|e(t)\| \rightarrow 0$ tels que $t \rightarrow \infty$. Par conséquent, la synchronisation combinée est réalisée.

3.2 Application

Dans cette section, deux applications et les simulations numériques correspondantes sont présentés pour illustrer l'efficacité et la validité de la méthode proposée. Deux cas sont considérés.

Cas (1) : représente la synchronisation combinée des systèmes chaotiques non autonomes

d'ordres fractionnaires avec la dimension n de système maître inférieure à la dimension m du système esclave ($n < m$).

Cas (2) : représente la synchronisation combinée des systèmes chaotiques non autonomes d'ordres fractionnaires avec la dimension n de systèmes maître supérieure à la dimension m du système esclave ($n > m$).

3.2.1 Cas 1

Nous étudions la synchronisation combinée de trois systèmes chaotiques non autonomes, le système de Mathieu-Duffing d'ordre fractionnaire [96] et le système chaotique non autonome d'ordre fractionnaire introduit dans [22] sont choisis comme deux systèmes maîtres. Le système de Lorenz non autonome d'ordre fractionnaire [97] comme un système esclave.

Le premier système maître est présenté par :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1(t) = x_2(t) \\ {}^c D^\alpha x_2(t) = (0.5 \sin(t) + 1)x_1(t) - x_1^3(t) - 0.2x_2(t) \end{cases} \quad (3.42)$$

où $0 < \alpha < 1$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ sont les variables d'états.

Le système (3.42) présente un comportement chaotique pour $\alpha = 0.98$ et la condition initiale $x(0) = (0.2, 0.3)$, l'attracteur du système de Mathieu-Duffing d'ordre fractionnaire est montré dans la figure 3.9.

Nous comparons le système (3.42) avec l'équation (3.36), nous obtenons

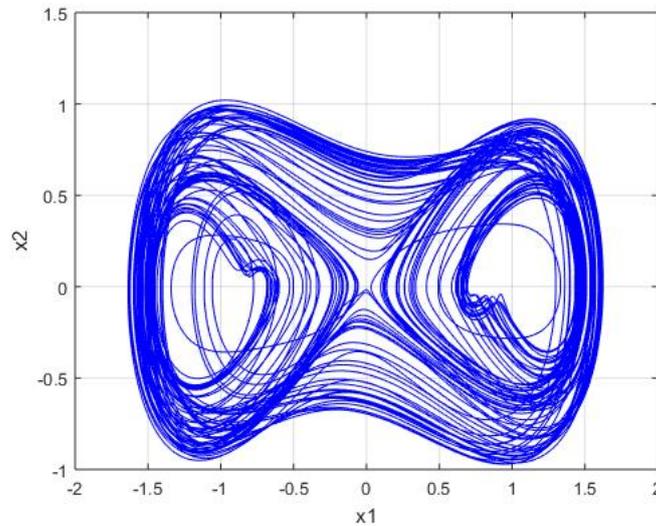


Figure 3.9 – Attracteur chaotique du système (3.42).

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 \sin(t) + 1 & -0.2 \end{pmatrix}, f(x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1^3(t) \end{pmatrix},$$

le deuxième système maître est défini par

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y_1(t) = -y_1(t) + 10y_2(t) + 0.1y_1(t)y_2(t) \\ {}^c D^\alpha y_2(t) = (-1 + 0.9 \cos(5t))y_1(t) - 0.95y_2(t) \end{cases} \quad (3.43)$$

où $0 < \alpha < 1$, $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ sont les variables d'états.

Le système (3.43) présente un comportement chaotique pour $\alpha = 0,98$ et la valeur initiale $y(0) = (0, 1, 0, 1)$, l'attracteur du système d'ordre fractionnaire (3.43) est illustré dans la figure 3.10.

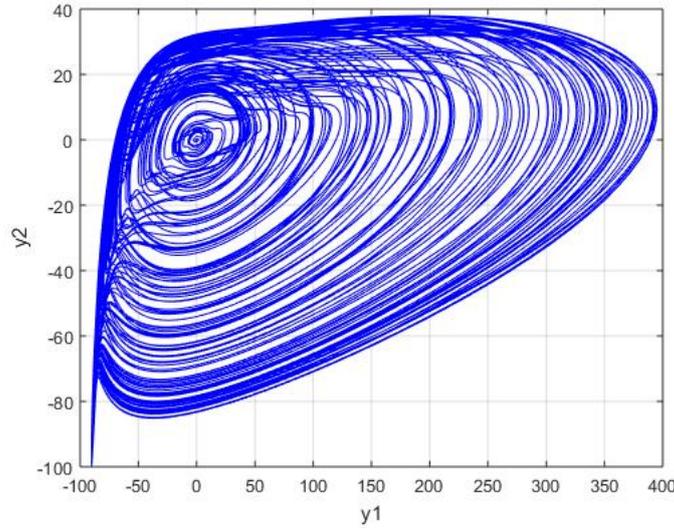


Figure 3.10 – Attracteur chaotique du système (3.43).

Nous comparons le système (3.43) avec l'équation (3.37), nous obtenons

$$B(t) = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -1 + 0.9 \cos(5t) & -0.95 \end{pmatrix}, g(y(t)) = \begin{pmatrix} 0.1y_1(t)y_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système esclave est défini par :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha z_1(t) = -2(z_1(t) - z_2(t)) + u_1(t) \\ {}^c D^\alpha z_2(t) = -z_1(t)z_3(t) + 10z_1(t) - \sin^2(2\pi t)z_2(t) + u_2(t) \\ {}^c D^\alpha z_3(t) = z_1(t)z_2(t) - \sin^2(2\pi^2 t)z_3(t) - 10 + u_3(t) \end{cases} \quad (3.44)$$

où $0 < \alpha < 1$, $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$ sont les variables d'états,

$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ est le contrôle.

Le système (3.44) présente un comportement chaotique à $\alpha = 0.98$ et la valeur initiale $z(0) = (1, 2, -5)$, l'attracteur du système (3.44) est montré dans la figure 3.11.

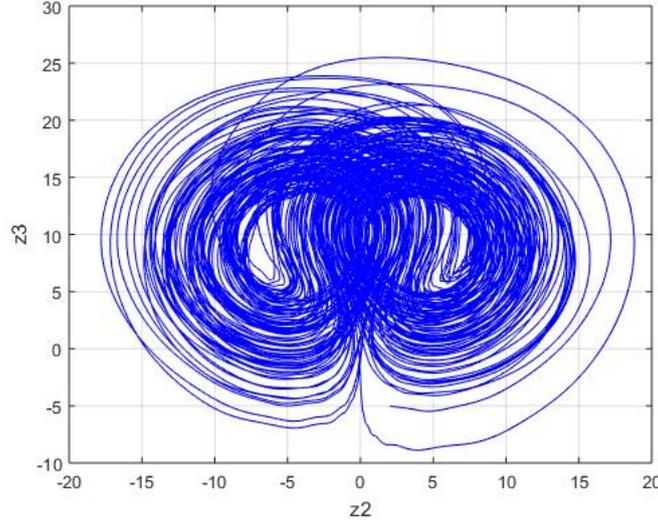


Figure 3.11 – Attracteur chaotique du système (3.44).

Nous comparons le système (3.44) avec l'équation (3.38), nous obtenons

$$C(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 10 & -\sin^2(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2(2\pi^2 t) \end{pmatrix}, h(z(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_1(t)z_3(t) \\ z_1(t)z_2(t) - 10 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 3.3, le contrôleur est considéré comme :

$$u(t) = \theta [B(t)y(t) + g(y(t)) + A(t)x(t) + f(x(t))] - C(t)\theta(y(t) + x(t)) - h(z(t)) + k(t)e(t),$$

nous choisissons la matrice θ telle que

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, les fonctions d'erreur $e = z - \theta(y + x)$ peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} e_1(t) &= z_1(t) - (y_1(t) + x_1(t)), \\ e_2(t) &= z_2(t) - (y_2(t) + x_2(t)), \\ e_3(t) &= z_3(t) - (y_2(t) + x_2(t)). \end{aligned}$$

Si la matrice du gain de contrôle $k(t)$ est considéré comme

$$k(t) = \begin{pmatrix} -1 + \exp(-t) & -2 & 0 \\ -10 & -0.1 + \sin^2(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \sin^2(2\pi^2 t) \end{pmatrix},$$

et les contrôleurs comme

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -y_1(t) + 10y_2(t) + 0.1y_1(t)y_2(t) + x_2(t) + 2(y_1(t) + x_1(t)) - 2(y_2(t) + x_2(t)) \\ &\quad + (-1 + \exp(-t))e_1(t) - 2e_2(t). \\ u_2(t) &= (-1 + 0.9 \cos(5t))y_1(t) - 0.95y_2(t) + (0.5 \sin(t) + 1)x_1(t) - x_1^3(t) - 0.2x_2(t) \\ &\quad - 10(y_1(t) + x_1(t)) + \sin^2(2\pi t)(y_2(t) + x_2(t))z_1(t)z_3(t) - 10e_1(t) + (-0.1 + \sin(2\pi t))e_2(t). \\ u_3(t) &= (-1 + 0.9 \cos(5t))y_1(t) - 0.95y_2(t) + (0.5 \sin(t) + 1)x_1(t) - x_1^3(t) - 0.2x_2(t) \\ &\quad + \sin^2(2\pi^2 t)(y_2(t) + x_2(t)) - (z_1(t)z_2(t) - 10) + (-1 + \sin^2(2\pi^2 t))e_3(t). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Le système d'erreur devient

$${}^c D^\alpha e(t) = (C(t) + k(t))e(t), \quad (3.46)$$

où

$$C(t) + k(t) = \begin{pmatrix} -3 + \exp(-t) & 0 & 1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

en utilisant la condition (2) de notre théorème proposé, nous pouvons calculer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) + k(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = C + k.$$

Et, les valeurs propres correspondantes de la matrice $C + k$ sont données par

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -0.1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Toutes les valeurs propres sont négatives, ce qui implique que $|\arg(\text{spec}(C + k))| > \frac{\alpha\pi}{2}$. Alors, la synchronisation combinée entre les systèmes (3.42), (3.43) et (3.44) est réalisée.

Simulation numérique

Ici, nous utilisons la méthode Adams-Bashforth-Moulton pour assurer la validité de la stratégie de synchronisation combinée proposée pour les systèmes chaotiques non autonomes d'ordres fractionnaires de dimensions différentes. Les conditions initiales de deux systèmes maîtres et de système esclave sont respectivement choisies par $x(0) = (0.2, 0.3)$, $y(0) = (0.1, 0.1)$ et $z(0) = (1, 2, -5)$. Les conditions initiales de l'erreur de synchronisation combinée est obtenue comme $e(0) = (0.7, 1.6, -5.4)$. On choisit $\alpha = 0.98$.

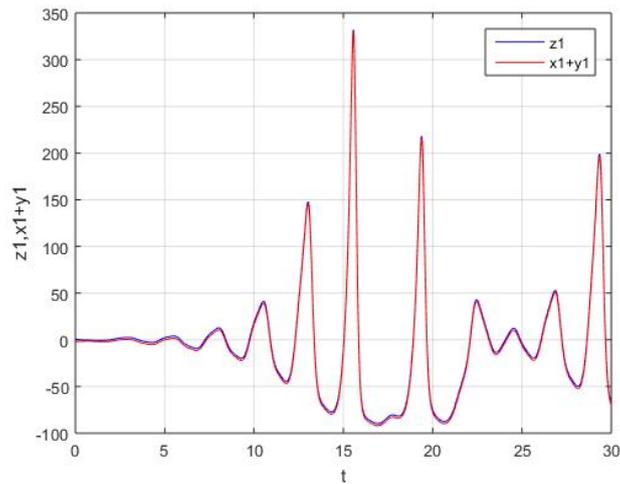


Figure 3.12 – Simulation numérique des trajectoires des systèmes maîtres (3.42,3.43) et esclave (3.44) entre z_1 et $y_1 + x_1$.

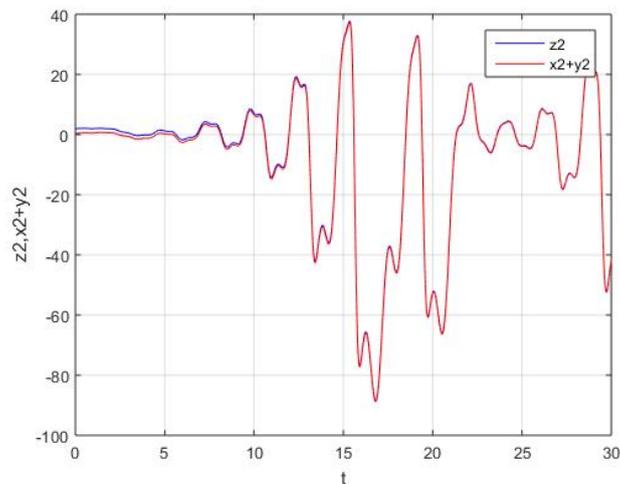


Figure 3.13 – Simulation numérique des trajectoires des systèmes maîtres (3.42,3.43) et esclave (3.44) entre z_2 et $y_2 + x_2$.

Les résultats de la synchronisation combinée entre (3.42), (3.43) et (3.44) sont illustrés sur les figures 3.12, 3.13 et 3.14. Nous notons qu'après un temps très court les trajectoires z_1 et $y_1 + x_1$, z_2 et $y_2 + x_2$, z_3 et $y_2 + x_2$ deviennent identiques.

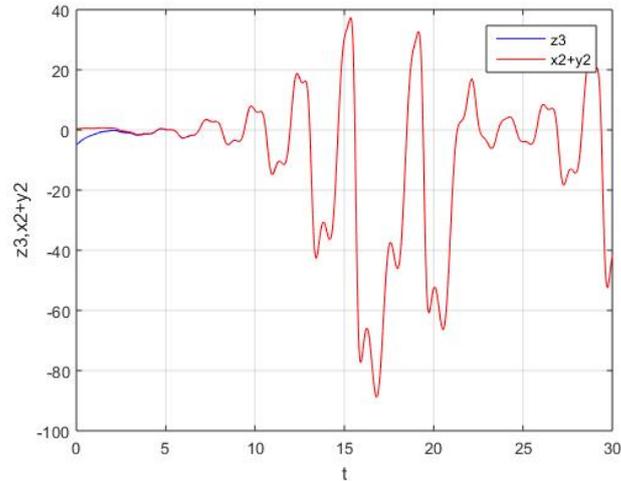


Figure 3.14 – Simulation numérique des trajectoires des systèmes maîtres (3.42,3.43) et esclave (3.44) entre z_3 et $y_2 + x_2$.

La figure 3.15, représente l'erreur de synchronisation combinée entre les systèmes (3.42), (3.43) et (3.44).

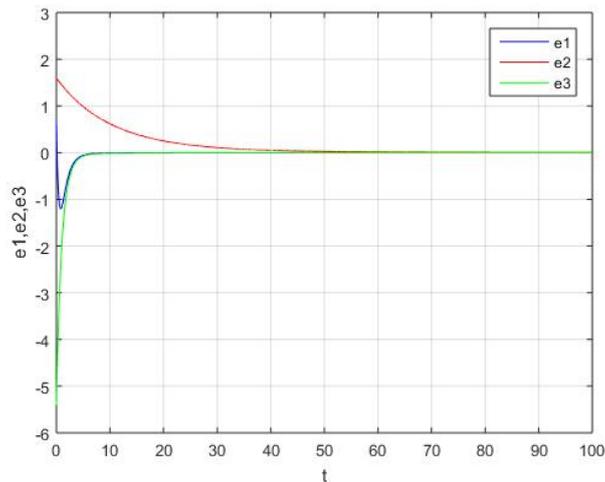


Figure 3.15 – La dynamique de l'erreur de synchronisation combinée entre les systèmes maîtres (3.42,3.43) et le système esclave (3.44)

Nous pouvons conclure que la synchronisation combinée entre les trois systèmes non autonomes, (3.42),(3.43) et (3.44) est assurée.

3.2.2 Cas 2

Nous considérons le système de Chen non autonome d'ordre fractionnaire [21] présenté par

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1(t) = (35 + \sin(t))(x_2(t) - x_1(t)) \\ {}^c D^\alpha x_2(t) = -x_1(t)x_3(t) + 28x_2(t) \\ {}^c D^\alpha x_3(t) = x_1(t)x_2(t) - 3x_3(t) \end{cases} \quad (3.47)$$

comme le premier système maître, où $0 < \alpha < 1$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ sont les variables d'états.

Le système présente un comportement chaotique pour $\alpha = 0.98$ et les conditions initiales des variables d'états $x(0) = (3, 4, 6)$, l'attracteur du système (3.47) est montré dans la figure 3.16.

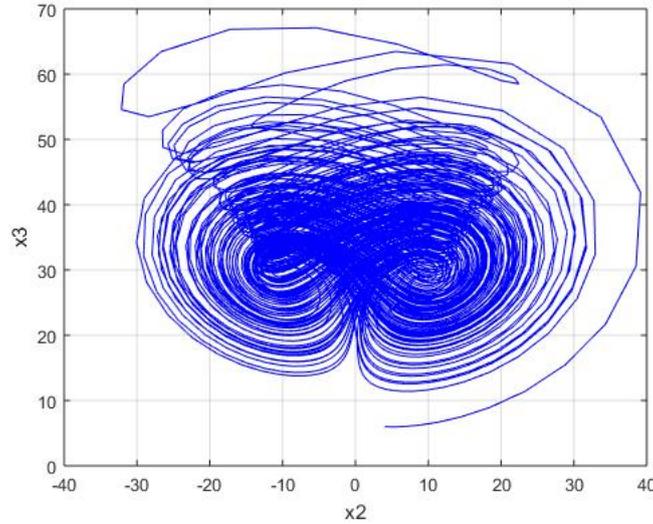


Figure 3.16 – Attracteur chaotique du système (3.47).

Le système de Lorenz non autonome d'ordre fractionnaire présenté par le système (3.44) est le deuxième système maître et le système de Mathieu-Duffing d'ordre fractionnaire présenté par le système (3.42) est le système esclave.

Nous comparons les systèmes (3.47), (3.44) et (3.42) avec les équations (3.36), (3.37) et (3.38), nous obtenons

$$A(t) = \begin{pmatrix} -(35 + \sin(t)) & (35 + \sin(t)) & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, f(x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 10 & -\sin^2(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2(2\pi^2 t) \end{pmatrix}, g(y(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1(t)y_3(t) \\ y_1(t)y_2(t) - 10 \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 \sin(t) + 1 & -0.2 \end{pmatrix}, h(z(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z_1^3(t) \end{pmatrix}.$$

Selon le théorème 3.3, le contrôleur est pris comme :

$$u(t) = \theta [B(t)y(t) + g(y(t)) + A(t)x(t) + f(x(t))] - C(t)\theta(y(t) + x(t)) - h(z(t)) + k(t)e(t),$$

nous choisissons la matrice θ comme

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, les fonctions d'erreur $e = z - \theta(y + x)$ peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} e_1(t) &= z_1(t) - (y_1(t) + x_1(t)), \\ e_2(t) &= z_2(t) - ((y_2(t) + x_2(t)) + (y_3(t) + x_3(t))). \end{aligned}$$

Si la matrice du gain de contrôle $k(t)$ est donné par

$$k(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 + \exp(-t) \\ -0.5 \sin(t) - 1 & -0.8 \end{pmatrix},$$

et les contrôleurs comme

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -2(y_1(t) - y_2(t)) + (35 + \sin(t))(x_2(t) - x_1(t)) - (y_2(t) + x_2(t)) - (y_3(t) + x_3(t)) \\ &\quad - e_1(t) + (-1 + \exp(-t))e_2(t). \\ u_2(t) &= -y_1(t)y_3(t) + 10y_1(t) - \sin^2(2\pi t)y_2(t) - x_1(t)x_3(t) + 28x_2(t) + y_1(t)y_2(t) \\ &\quad - \sin^2(2\pi^2 t)y_3(t) - 10 + x_1(t)x_2(t) - 3x_3(t) - (0.5 \sin(t) + 1)(y_1(t) + x_1(t)) \\ &\quad + 0.2(y_2(t) + x_2(t)) + 0.2(y_3(t) + x_3(t)) \\ &\quad + z_1^3(t) + (-0.5 \sin(t) - 1)e_1(t) - 0.8e_2(t). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Le système d'erreur devient

$${}^c D^\alpha e(t) = (C(t) + k(t))e(t), \tag{3.49}$$

tels que

$$C(t) + k(t) = \begin{pmatrix} -1 & \exp(-t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

en utilisant la condition (2) de notre théorème proposé, nous pouvons calculer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) + k(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C + k.$$

Les valeurs propres correspondantes de la matrice $C + k$ sont donnés par

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1.$$

Comme toutes les valeurs propres sont négatives, ce qui implique que $|\arg(\text{spec}(C + k))| > \frac{\alpha\pi}{2}$. Alors, la synchronisation combinée entre les systèmes (3.47), (3.44) et (3.42) est réalisée.

Simulation numérique

Pour cette simulation numérique, les conditions initiales de deux systèmes maîtres sont choisies respectivement comme suit $x(0) = (3, 4, 6)$ et $y(0) = (1, 2, -5)$. La condition initiale du système esclave $z(0) = (0.2, 0.3)$, la condition initiale d'erreur de synchronisation combinée choisie comme $e(0) = (3.8, -6.7)$ et $\alpha = 0.98$. Les résultats numériques de la synchronisation combinée entre le système de Chen non autonome d'ordre fractionnaire (3.47), le système de Lorenz non autonome d'ordre fractionnaire (3.44) et le système de Mathieu-Duffing d'ordre fractionnaire (3.42) sont tracé sur la figure 3.17 et 3.18.

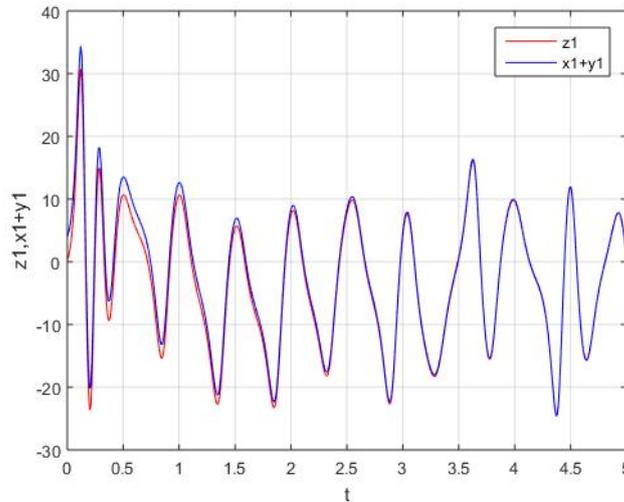


Figure 3.17 – Résultats numériques des trajectoires des systèmes maîtres (3.47,3.44) et le système esclave (3.42) entre z_1 et $y_1 + x_1$.

Nous notons qu'après un temps très court les trajectoires z_1 et $y_1 + x_1$, z_2 et $(y_2 + x_2) + (y_3 + x_3)$, deviennent identiques.

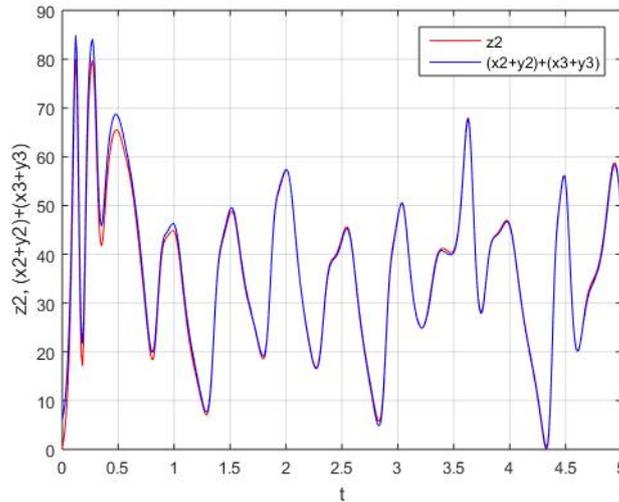


Figure 3.18 – Résultats numériques des trajectoires des systèmes maîtres (3.47,3.44) et le système esclave (3.42) entre z_2 et $(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)$.

La figure 3.19, représente l'erreur de synchronisation combinée entre les systèmes (3.47), (3.44) et (3.42). On observe que les erreurs e_1 et e_2 converge vers zéro lorsque le temps tend vers

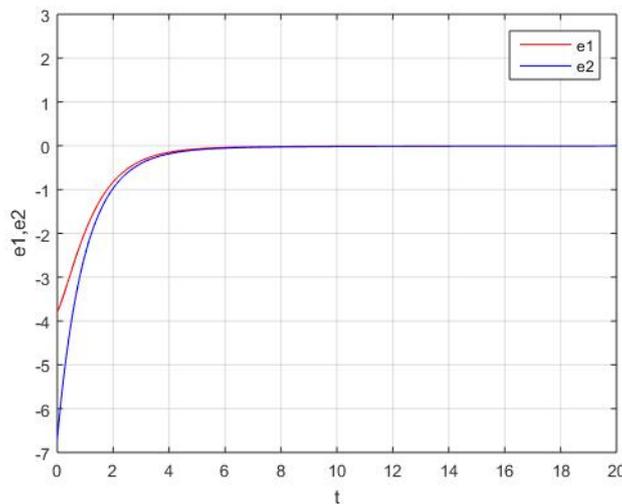


Figure 3.19 – La dynamique de l'erreur de synchronisation combinée entre les systèmes maîtres (3.47,3.44) et le système esclave (3.42).

l'infini. Nous pouvons conclure que la synchronisation combinée entre les trois systèmes non autonomes, le système de Chen d'ordre fractionnaire, le système de Lorenz d'ordre fractionnaire et le système de Mathieu-Duffing d'ordre fractionnaire est assurée.

Conclusion générale et perspectives

Le premier chapitre permet de se familiariser avec les éléments de base du calcul fractionnaire comme la transformée de Laplace, la fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous présentons ensuite quelques définitions qui concernent les notions d'intégration et de dérivation fractionnaire aussi nous présentons leurs propriétés et interprétations physiques.

Le deuxième chapitre de ce manuscrit est dédié aux équations différentielles fractionnaires. Dans un premier temps, nous exposons le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire du type Caputo et les différents critères de stabilité. Nous présentons quelques définitions et quelques utiles mathématiques liées aux notions du chaos. Toutes ces notions vont être exploitées pour réaliser une étude détaillée sur le modèle fractionnaire de Selkov, qui est un système non linéaire composé d'équations différentielles fractionnaires et qui permet de modéliser un phénomène appelé "glycolyse".

Enfin, le chapitre 3 est consacré aux différentes méthodes de contrôle et de synchronisation utilisées pour éliminer le chaos dans les équations différentielles fractionnaires. Nous exposons deux méthodes de contrôle des systèmes chaotiques fractionnaires autonomes et non autonomes. Après, nous présentons quatre techniques de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires : la synchronisation complète, anti-synchronisation, la synchronisation projective et la synchronisation adaptative projective modifiée. Nous avons proposé une technique pour réaliser la synchronisation entre les systèmes fractionnaires de dimensions différentes. Ce type de synchronisation ayant la possibilité de donner plus de sécurité dans les communications sécurisées. Ces résultats s'étendent sans difficulté si on applique cette méthode aux systèmes fractionnaires de même dimension. Ce résultat basé sur la matrice d'échelle constante, le lemme de Gronwall-Bellman et quelques techniques de calcul fractionnaire.

Perspectives

Une telle étude nous a ouvert la voie à d'autres développements sur les équations différentielles fractionnaires que nous pourrions envisager dans le futur. En outre, nous pouvons notamment proposer les perspectives suivantes :

- Étude d'autres systèmes différentiels fractionnaires.
- L'application de la méthode directe de Lyapounov à la synchronisation combinée des systèmes chaotiques fractionnaires.
- Une extension de la méthode proposé dans ce manuscrit aux cas des systèmes à retard.
- L'application de la synchronisation combinée en communication sécurisée restent encore peu développés.

Annexe

Lemme .1 (Gronwall-Bellman)[45] Supposons que :

1. $x(t)$ et $h(t)$ sont des fonctions continues par morceaux définies sur l'intervalle réel $[a, b]$;
2. $g(t)$ est aussi une valeur réelle et $g(t) \in L(a, b)$;
3. $x(t)$ et $g(t)$ sont non négatifs sur cette intervalle.

Si pour tout $t \in [a, b]$

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t g(\tau)x(\tau)d\tau, \quad (.1)$$

alors pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t h(\tau)g(\tau) \exp \left[\int_{\tau}^t g(s)ds \right] d\tau. \quad (.2)$$

Lemme .2 [83] Soit $F(\lambda) = \lambda^2 - Tr\lambda + Det$. Supposons que $F(1) > 0$, λ_1 et λ_2 les deux racines de $F(\lambda)$. Alors

- (i) $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$ si et seulement si $F(-1) > 0$ et $Det < 1$.
- (ii) $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ (ou $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| < 1$) si et seulement si $F(-1) < 0$.
- (iii) $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si et seulement si $F(-1) > 0$ et $Det > 1$.
- (vi) $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 \neq 1$ si et seulement si $F(-1) = 0$ et $Tr \neq 0, 2$.
- (v) λ_1 et λ_2 sont complexes et $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ si et seulement si $Tr^2 - 4Det < 0$ et $Det = 1$.

Lemme .3 [66] Pour distinguer les différents types topologiques pour le point fixe, on a :

- (i) Un point fixe est un puits si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, donc point fixe est localement asymptotiquement stable.
- (ii) Un point fixe est une source si $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$, donc la source est localement instable.
- (iii) Un point fixe est selle si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ (ou $|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| < 1$), la point fixe est localement instable.
- (vi) Un point fixe est dit non hyperbolique si $|\lambda_1| = 1$ ou $|\lambda_2| = 1$.

Bibliographie

- [1] R. ALMEIDA, D. TAVARES, AND D.F.M. TORRES. *The Variable-Order Fractional Calculus of Variations*. Springer (2018).
- [2] L. EULER. *De progressionibus transcentibus seu quarum termini algebraice dari nequeunt. comment.* Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae **5**, 36–57 (1738).
- [3] K.S. MILLER AND B. ROSS. *An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons. Inc. (1993).
- [4] T. HOUMOR. *Analyse du Chaos Dans un Système d'équations Différentielles Fractionnaires*. Thèse de Doctorat, Université de Constantine 1, Alger (2014).
- [5] M. WEILBEERL. *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations And their Analytical Background*. Thèse de Doctorat, Carl-Friderich-Gauss Facultat für Mathematik und Informatik. der Technischen Universität Braunschweig (2005).
- [6] I. PODLUBNY. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, NewYork (1999).
- [7] K. DIETHELM. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer (2004).
- [8] S.G. SAMKO, A.A. KILBAS, AND O.I. MARICHEV. *Fractional Integrals And Derivatives : Theory And Applications*. Gordon and Breach (1993).
- [9] A.A. KILBAS, H.M. SRIVASTAVA, AND J.J. TRUJILLO. *Theory And Applications Of Fractional Differential Equations*. Elsevier (2006).
- [10] N. HAMRI AND T. HOUMOR. *Chaotic dynamics of the fractional order nonlinear bloch system*. Electronic Journal of Theoretical Physics **8**, 233–244 (2011).
- [11] C. IONESCU, A. LOPES, D. COPOT, J.A.T. MACHADO, AND J.H.T. BATES. *The role of fractional calculus in modelling biological phenomena : A review*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **51**, 141–159 (2017).

Bibliographie

- [12] A. GEORGE MARIA SELVAM, R. DHINESHBABU, AND D. VIGNESH. *Stability and bifurcation in a fractional order brusselator model and its discretization*. IJTIMES **5**, 2455–2585 (2019).
- [13] N. LASKIN. *Fractional market dynamics*. Physica A **287**, 482–492 (2000).
- [14] E. HINCAL AND S.H. ALSAADI. *Stability analysis of fractional order model on corona transmission dynamics*. Chaos, Solitons and Fractals **143**, 110628 (2021).
- [15] K. DIETHELM AND N.J. FORD. *Analysis of fractional differential equations*. J. Math. Anal. Appl **265**, 229–248 (2002).
- [16] D. MATIGNON. *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*. Computational engineering in systems applications **2**, 963–968 (1996).
- [17] B.K. LENKA AND S. BANERJEE. *Sufficient conditions for asymptotic stability and stabilization of autonomous fractional order systems*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **56**, 365–379 (2017).
- [18] X.J. WEN, Z.M. WU, AND J.G. LU. *Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems*. IEEE Trans. Circ. Syst. II : Express Briefs **55**, 1178–1182 (2008).
- [19] R. ZHANG, G. TIAN, S. YANG, AND H. CAO. *Stability analysis of a class of fractional order nonlinear systems with order lying in $(0;2)$* . ISA Transactions **56**, 102–110 (2015).
- [20] F. JARAD, T. ABDELJAWAD, AND D. BALEANU. *Stability of q -fractional non-autonomous systems*. Nonlinear Analysis : Real World Applications **14**, 780–784 (2013).
- [21] S. HUANG, R. ZHANG, AND D. CHEN. *Stability of nonlinear fractional order time varying systems*. J Comput and Nonlinear Dyn **11**, 031007 (2016).
- [22] Y. GUO AND B. MA. *Stability analysis for a class of caputo fractional time-varying systems with nonlinear dynamics*. Proceedings of Chinese Intelligent Systems Conference, Lecture Notes in Electrical Engineering **459**, 383–395 (2017).
- [23] B.K. LENKA AND S. BANERJEE. *Asymptotic stability and stabilization of a class of nonautonomous fractional order systems*. Nonlinear Dyn **85**, 167–177 (2016).
- [24] R. CAPONETTO, G. DONGOLA, L. FORTUNA, AND I. PETRÀS. *Fractional Order Systems : Modeling and Control Applications*. World scientific (2010).

Bibliographie

- [25] A.T. AZAR, S. VAIDYANATHAN, AND A. OUANNAS. *Fractional Order Control And Synchronization Of Chaotic Systems*. Springer International Publishing (2017).
- [26] C. LI AND G. CHEN. *Chaos in the fractional order chen system and its control*. *Chaos, Solitons and Fractals* **22**, 549–554 (2004).
- [27] C. LI AND G. CHEN. *Chaos and hyperchaos in the fractional-order rössler equations*. *Physica A* **341**, 55–61 (2004).
- [28] J.G. LU. *Chaotic dynamics of the fractional-order lü system and its synchronization*. *Physics Letters A* **354**, 305–311 (2006).
- [29] T.T. HARTLEY, C.F. LORENZO, AND H. KILLORY QAMMER. *Chaos in a fractional order chua's system*. *IEEE Trans Circ Syst Theory App* **42**, 485–490 (1995).
- [30] L.M. PECORA AND T.L. CARROLL. *Synchronization in chaotic systems*. *Phys. Rev. Lett* **64**, 821–824 (1990).
- [31] G. SI, Z. SUN, Y. ZHANG, AND W. CHEN. *Projective synchronization of different fractional-order chaotic systems with nonidentical orders*. *Nonlinear Analytics : Real World Applications* **13**, 1761–1771 (2012).
- [32] X. WANG, X. ZHANG, AND C. MA. *Modified projective synchronization of fractional order chaotic systems via active sliding mode control*. *Nonlinear Dynamics* **69**, 511–517 (2012).
- [33] K. SHAO, H. GUO, AND F. HAN. *Finite-time projective synchronization of fractional-order chaotic systems via soft variable structure control*. *Journal of Mechanical Science and Technology* **34**, 369–376 (2020).
- [34] CH.K. VOLOS, I.M. KYPRIANIDIS, AND I.N. STOUBOULOS. *Image encryption process based on chaotic synchronization phenomena*. *Signal Processing* **93**, 1328–1340 (2013).
- [35] C.C. WANG AND J.P. SU. *A new adaptive variable structure control for chaotic synchronization and secure communication*. *Chaos, Solitons and Fractals* **20**, 967–977 (2004).
- [36] S. AHN AND L.L. RUBCHINSKY. *Synchronization and desynchronization of complex dynamical networks : An engineering viewpoint*. *IEEE Transactions on circuit and systems I : fundamental theory and applications* **50**, 1381–1390 (2003).

Bibliographie

- [37] L. RUNZI, W. YINGLAN, AND D. SHUCHENG. *Combination synchronization of three classic chaotic systems using active backstepping design*. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **21**, 043114 (2011).
- [38] K. AYUB AND SHIKHA. *Combination synchronization of genesio time delay chaotic system via robust adaptive sliding mode control*. *International Journal of Dynamics and Control* **6**, 758–767 (2018).
- [39] X. WANG, L. SUN, B. WANG, AND T. HUANG. *A new type of combination synchronization among multiple chaotic systems*. *Mathematical Problems in Engineering* **2019**, 1–15 (2019).
- [40] U. NIGAR A. KHAN. *Combination projective synchronization in fractional-order chaotic system with disturbance and uncertainty*. *Int. J. Appl. Comput. Math* (2020).
- [41] E. ARTINR. *The Gamma Function*. Rinehart and Winston (1964).
- [42] J.H. GRAF. *La Fonction Gamma ; théorie, historce bibliographie*. Gauthier-Villars (1901).
- [43] G. MITTAG-LEFFLER. *Sur la nouvelle fonction $e_\alpha(x)$* . *C. R. Académie des Sciences* **137**, 554–558 (1903).
- [44] R.P. AGARWAL. *A propos d'une note de m. pierre humbert*. *C. R. Académie des Sciences* **236**, 2031–2032 (1953).
- [45] C. CORDUNEANU. *Principles Of Differential And Integral Equations*. Allyn and Bacon (1971).
- [46] B. ROSS. *chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional*. Springer, Berlin, Heidelberg (1975).
- [47] T. HÉLIE AND D. MATIGNON. *Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses*. *Math. Mod. and Appl. Sc* **16**, 503–536 (2006).
- [48] R.K. MILLER. *Nonlinear Volterra Integral Equations*. Menlo Park, Calif., W.A. Benjamin (1971).
- [49] D. MATIGNON. *Stability properties for generalized fractional differential systems in systemes différentiels fractionnaires*. *ESAIM : Proceedings* **5**, 145–158 (1998).

Bibliographie

- [50] M-S.A. ELOUAHAB, N. HAMRI, AND J. WANG. *Chaos control of a fractional-order financial system*. Mathematical Problems in Engineering (2010).
- [51] D. CHEN, R. ZHANG, X. LIU, AND X. MA. *Fractional order lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks*. Communications in nonlinear science and numerical simulation **19**, 4105–4121 (2014).
- [52] Y. LI, Y.Q. CHEN, AND I. PODLUBNY. *Stability of fractional order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized mittag-leffler stability*. Computers and Mathematics with Applications **59**, 1810–1821 (2010).
- [53] N. AGUILA-CAMACHO, M.A. DUARTE-MERMOUD, AND J.A. GALLEGOS. *Lyapunov functions for fractional order systems*. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat **19**, 2951–2957 (2014).
- [54] H.T. TUAN AND H. TRINH. *Stability of fractional-order nonlinear systems by lyapunov direct method*. IET Control Theory and Applications **12**, 2417–2422 (2018).
- [55] E.S.A. SHAHRI, A. ALFI, AND J.A.T. MACHADO. *Lyapunov method for the stability analysis of uncertain fo systems under input saturation*. Applied Mathematical Modelling **81**, 663–672 (2020).
- [56] A.M.A. EL-SAYED AND S.M. SALMAN. *On a discretization process of fractional order riccati's differential equation*. J. Fract. Calc. Appl. **4**, 251–259 (2013).
- [57] A.A. ELSADANY AND A.E. MATOUK. *Dynamical behaviors of fractional-order lotka volterra predator-prey model and its discretization*. J. Appl. Math. Comput **49**, 269–283 (2015).
- [58] A. GEORGE MARIA SELVAMAND AND R. JANAGARAJ. *Dynamics in a discrete fractional order lorenz system*. Adv. Appl. Sci. Res **7**, 189–195 (2016).
- [59] R. DEVANEY. *An Introduction To Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley (1986).
- [60] V. ARNOLD. *Equations Differentielles Ordinaires*. Springer (1974).
- [61] Y.A. KUZNETSOV. *Elements of applied bifurcation theory*. Springer Science et Business Media (2013).
- [62] G. CHEN AND J.L. MOIOLA. *Hopf Bifurcation Analysis : A Frequency Domain Approach*. World Scientific (1996).

Bibliographie

- [63] A.S. DESHPANDE, V. DAFTARDAR-GEJJI, AND Y.V. SUKALE. *On hopf bifurcation in fractional dynamical systems*. Chaos Solitons Fractals **98**, 189–198 (2017).
- [64] X. LI AND R. WU. *Hopf bifurcation analysis of a new commensurate fractional-order hyperchaotic system*. Nonlinear Dynamics **78**, 279–288 (2014).
- [65] M. ABDELOUAHAB, N. HAMRI, AND J. WANG. *Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system*. Nonlinear Dynamics **69**, 275–284 (2012).
- [66] S. ELAYDI. *Discrete Chaos with Applications in Science and Engineering*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2008).
- [67] T.Y. LI AND J.A. YORKE. *Period Three Implies Chaos*. Springer (1975).
- [68] E.N. LORENZ. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the atmospheric sciences **1**, 130–141 (1963).
- [69] D. RUELLE AND F. TAKENS. *On the nature of turbulence*. Communications in Mathematical Physics **20**, 167–192 (1971).
- [70] A. WOLF, J.B. SWIFT, H.L. SWINNEY, AND J.A. VASTANO. *Determining lyapunov exponents from a time series*. Physica D : Nonlinear Phenomena **16**, 285–317 (1985).
- [71] M-F. DANCA AND N. KUZNETSOV. *Matlab code for lyapunov exponents of fractional-order systems*. Int J Bifurc Chaos **28** (2018).
- [72] V.I. OSELEDETS. *Multiplicative ergodic theorem : Characteristic lyapunov exponents of dynamical systems*. Tr. Mosk. Mat. Obs **19**, 179–210 (1968).
- [73] M.T. ROSENSTEIN, J.J. COLLINS, AND C.J. DE LUCA. *A practical method for calculating lyapunov exponents from small data sets*. Physica D : Nonlinear Phenomena **65**, 117–134 (1993).
- [74] C. LI, Z. GONG, D. QIAN, AND Y. CHEN. *On the bound of the lyapunov exponents for the fractional differential systems*. CHAOS **20**, 285–317 (2010).
- [75] J. HIGGINS. *A chemical mechanism for oscillation of glycolytic intermediates in yeast cells*. Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **51**, 989–994 (1964).

Bibliographie

- [76] D.V. VERVEYKO, A.Y. VERISOKIN, AND E.B. POSTNIKOV. *Mathematical model of chaotic oscillations and oscillatory entrainment in glycolysis originated from periodic substrate supply*. Chaos **27**, 083104 (2017).
- [77] A. D'ONOFRIO. *Uniqueness and global attractivity of glycolytic oscillations suggested by selkov's model*. J. Math. Chem **48**, 339–346 (2010).
- [78] P. BRECHMANN AND A.D. RENDALL. *Dynamics of the selkov oscillator*. Mathematical Biosciences **306**, 152–159 (2018).
- [79] J. C. ARTÉS, J. LLIBRE, AND C. VALLS. *Dynamics of the higgins-selkov and selkov systems*. Chaos Solitons Fractals **114**, 145–150 (2018).
- [80] E.E. SELKOV. *Self-oscillations in glycolysis*. Eur. J. Biochem **4**, 79–86 (1968).
- [81] Z.M. ODIBAT AND N. T. SHAWAGFEH. *Generalized taylor's formula*. Appl.Math.Comput **186**, 286–293 (2007).
- [82] M.S. TAVAZOEI AND M. HAERI. *A proof for non existence of periodic solutions in time invariant fractional order systems*. Automatica **45**, 1886–1890 (2009).
- [83] H.N. AGIZA, E.M. ELABBASY, H. EL-METWALLY, AND A.A. ELASDANY. *Chaotic dynamics of a discrete prey predator model with holling type ii*. Nonlinear Anal. Real World Appl **10**, 116–119 (2009).
- [84] E. OTT, C. GREBOGI, AND J. A. YORKE. *Controlling chaos*. Physical review letters **64**, 1196 (1990).
- [85] S. AHN AND L.L. RUBCHINSKY. *Temporal patterns of dispersal-induced synchronization in population dynamics*. Journal of Theoretical Biology **490** (2020).
- [86] J. HU, SH. CHEN, AND L. CHEN. *Adaptive control for anti-synchronization of chua's chaotic system*. Phys Lett A **339**, 455–460 (2005).
- [87] N. HAMRI AND R. OUAHABI. *Modified projective synchronization of different chaotic systems using adaptive control*. Comp. Appl. Math **36**, 1315–1332 (2017).
- [88] H. ZERIMECHE, T. HOUMOR, AND A. BERKANE. *Combination synchronization of different dimensions fractional-order non-autonomous chaotic systems using scaling matrix*. International Journal of Dynamics and Control (2020).

Bibliographie

- [89] K. SMAIL. *Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Et Hyperchaotiques : Application à La Sécurisation Des Communications*. Thèse de Doctorat, Université de Constantine 1, Alger (2020).
- [90] K. AYUB AND SHIKHA. *Dynamical behavior and reduced-order combination synchronization of a novel chaotic system*. International Journal of Dynamics and Control **6**, 1160–1174 (2018).
- [91] L. RUNZI AND W. YINGLAN. *Finite-time stochastic combination synchronization of three different chaotic systems and its application in secure communication*. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **22**, 023109 (2012).
- [92] A.K. SINGH, V.K. YADAV, AND S. DAS. *Dual combination synchronization of the fractional order complex chaotic systems*. J. Comput. Nonlinear Dynam **34**, 011017 (2012).
- [93] V.K. YADAV, G. PRASAD, M. SRIVASTAVA, AND S. DAS. *Combination–combination phase synchronization among non-identical fractional order complex chaotic systems via nonlinear control*. International Journal of Dynamics and Control **7**, 330–340 (2019).
- [94] V.K. YADAV, N. SRIKANTH, AND S. DAS. *Dual function projective synchronization of fractional order complex chaotic systems*. Optik-International Journal for Light and Electron Optics **127**, 10527–10538 (2016).
- [95] A. IBRAHEEM. *Dual compound-compound synchronization of twelve n-dimensional dynamical systems*. Arab J Sci Eng **45**, 6835–6848 (2020).
- [96] Y. LEI, W. XU, Y. XU, AND T. FANG. *Chaos control by harmonic excitation with proper random phase*. Chaos, Solitons and Fractals **21**, 1175–1181 (2004).
- [97] Z. XU. *Dynamics of a class of fractional-order nonautonomous lorenz-type systems*. Chaos **27**, 041104–1 (2017).

Résumé

Ce travail de thèse est consacré à l'étude d'équations différentielles fractionnaires. On s'intéresse particulièrement au modèle de Selkov fractionnaire, qui est un système non linéaire composé d'équations différentielles fractionnaires et qui permet de modéliser un phénomène appelé "glycolyse". Une étude détaillée de ce système, a été réalisée : l'existence et l'unicité de la solution, stabilité, discrétisation, bifurcation. . ., ces dernières ont été évaluées sous forme numérique à travers le portrait de phases, le diagramme de bifurcations et les exposants de Lyapounov.

D'autre part, nous nous intéressons aussi dans cette thèse au problème de contrôle et de synchronisation du chaos dans les équations différentielles fractionnaires autonome et non autonome. Basés sur quelques concepts de la théorie du calcul fractionnaire nous présentons quelques techniques.

Parmi les nombreuses stratégies pour réaliser la synchronisation du chaos dans les systèmes chaotiques fractionnaires nous présentons : la technique de synchronisation adaptative projective modifiée. Cette méthode présente l'avantage d'être appliquée aux systèmes chaotiques, hyper-chaotiques, identiques, différents et incertains et aussi réalise la synchronisation complète, anti-synchronisation et la synchronisation projective. Enfin, il convient d'attirer l'attention sur un autre type de synchronisation aussi intéressant, la synchronisation combinée des systèmes chaotiques fractionnaires non autonomes. Cette méthode est applicable pour deux systèmes maîtres et un système esclave de dimensions différentes (la dimension du système maître est (n) et pour le système esclave est (m)). Des résultats numériques sont donnés pour vérifier la faisabilité et l'efficacité de la méthode de synchronisation combinée proposée. Ce type de synchronisation ayant la possibilité de donner plus de sécurité dans les communications sécurisées. Ces résultats s'étendent sans difficulté si on applique cette méthode aux systèmes fractionnaires de même dimension.

Mots clés : Equations différentielles fractionnaires, stabilité, chaos, exposants de Lyapounov, synchronisation.

Abstract

This thesis work is devoted to the study of fractional differential equations. Particular attention is being given to the fractional Selkov model, which is a non-linear system composed of fractional differential equations that allows the modeling of a phenomenon called "glycolysis". A detailed study of this system was carried out : the existence and the uniqueness of the solution, stability, discretization, bifurcation . . . , these last were evaluated in a numerical form through the phase portraits, the bifurcations diagram, and the Lyapunov exponent.

On the other hand, in this thesis we are also interested in the problem of controlling and synchronizing chaos in autonomous and non-autonomous fractional differential equations. Based on some concepts of fractional calculus theory we present some techniques.

Among the many strategies to achieve chaos synchronization in fractional chaotic systems we present : the modified projective adaptive synchronization technique. This method has the advantage of being applied to chaotic, hyperchaotic, identical, different, and uncertain systems and also achieves complete synchronization, anti-synchronization and projective synchronization. Finally, attention should be drawn to another equally interesting type of synchronization, the combination synchronization of non-autonomous fractional chaotic systems. Numerical results are given to verify the feasibility and effectiveness of the proposed combination synchronization method. This type of synchronization has the possibility of giving more security in secure communications. These results extend without difficulty if we apply this method to fractional systems of the same dimension.

Keywords : Fractional differential equation, stability, chaos, Lyapounov exponent, synchronization.

ملخص

تم تخصيص هذه الرسالة لدراسة المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية نحن مهتمون بشكل خاص بنموذج سالكوف الكسري، وهو نظام غير خطي يتكون من معادلات تفاضلية كسرية والذي يسمح بنموذجة ظاهرة تسمى " تحلل السكر". تم إجراء دراسة تفصيلية لهذا النظام: وجود الحل ووحداية، الاستقرار، التقطيع، التشعب . . . ، تم تقييم هذه الأخيرة في شكل عددي من خلال صورة الطور، ومخطط التشعبات وأسس ليابونوف. من ناحية أخرى، في هذه الأطروحة نحن مهتمون أيضا بمشكلة التحكم في الفوضى ومزامنتها في المعادلات التفاضلية الكسرية المستقلة وغير المستقلة. بناءً على بعض مفاهيم نظرية التفاضل والتكامل الكسري نقدم بعض التقنيات. من بين العديد من الاستراتيجيات لتحقيق التزامن في أنظمة الفوضى الكسرية نقدم: تقنية التزامن الإسقاطي المعدلة، تتميز هذه الطريقة بأنها تطبق على الأنظمة الفوضوية والفوضوية المضربة والمتطابقة والمختلفة وغير المؤكدة، كما أنها تحقق التزامن الكامل وضد التزامن والتزامن الإسقاطي. أخيراً، يجب لفت الانتباه إلى نوع آخر من التزامن مثير للاهتمام بنفس القدر، وهو التزامن المدمج للأنظمة الفوضوية الكسرية غير المستقلة. هذه الطريقة قابلة للتطبيق على نظامين رئيسيين ونظام تابع واحد بأبعاد مختلفة (بعد النظام الرئيسي (ن) و بعد نظام التابع هو (م)). يتم إعطاء النتائج العددية للتحقق من جدوى وكفاءة طريقة التزامن المدمج المقترحة. هذا النوع من التزامن لديه إمكانية توفير المزيد من الأمان في الاتصالات الآمنة. تمتد هذه النتائج دون صعوبة إذا طبقنا هذه الطريقة على أنظمة كسرية من نفس البعد.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الكسرية، الاستقرار، الفوضى، أسس ليابونوف، التزامن.